Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

2º año de Educación Media

MATEMÁTICA

Guiones Didácticos y Guías para el/la estudiante

2º año de Educación Media

Matemática

Guiones Didácticos y Guías para el/la estudiante

Ministerio de Educación
División de Educación General
Nivel de Educación Media

Matemática: Guiones Didácticos y Guías para el/la Estudiante
de 2º año de Educación Media

Este material corresponde a una propuesta de apoyo a la implementación curricular, a nivel de aula, elaborado desde el Nivel de Educación Media, de la División de Educación General del Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación

División de Educación General

Av. Bernardo O'Higgins N° 1371

Santiago – Chile

Coordinador Nacional de Educación Media:

Alejandro Hidalgo Zamorano

Coordinación Editorial:

Sergio Reyes Santelices

Diseño:

Verónica Santana

Impresión: AMF Impresores

Registro de Propiedad Intelectual N° 251.654 de marzo de 2015

Edición:

2.200 Ejemplares

Marzo de 2015

Índice

Presentación

El proceso de Reforma Educacional que se inicia, considera a la educación como un Derecho Social, en que todos/as los/as ciudadanos/as, tienen el derecho a educarse y a elegir con libertad sus trayectorias de vida a la base de una sociedad más justa, democrática y participativa. En este sentido, el desafío de la calidad de la educación debe ser comprendido desde una visión integral y multidimensional, en que el derecho a aprender debe relacionarse con diversas oportunidades y experiencias de enseñanza y aprendizaje, considerando la diversidad de la población estudiantil y sus contextos.

El nivel de Educación Media sitúa en el centro de sus desafíos la calidad de la educación, siendo necesario responder a la heterogeneidad de estudiantes que inician este nivel de enseñanza, con una pedagogía adecuada y pertinente a sus necesidades, que se haga cargo de las diversas disposiciones al aprendizaje y puntos de partida que presentan, permitiéndoles alcanzar aprendizajes de calidad con el propósito de ampliar sus oportunidades de inclusión social y proyectos de vida futuros, especialmente reconociendo la creciente relevancia de la trayectoria escolar y de los estudio post media. En este sentido, comprender el derecho a la educación significa reconocer las necesidades de aprendizaje de todos/as los/as estudiantes y propender a su acceso equitativo.

En este contexto, es necesario reconocer que la situación de diversidad en el aula se vuelve aún más desafiante en contextos de vulnerabilidad socioeducativa, siendo responsabilidad de los actores del Liceo hacerse cargo, desde sus propuestas pedagógicas, de la heterogeneidad de disposiciones de aprendizaje, la situación de rezago y hasta las posibilidades de fracaso escolar.

El Nivel de Educación Media del Ministerio de Educación pone a disposición de los establecimientos educacionales, una propuesta de enseñanza y aprendizaje para acompañar el ejercicio docente, basada en el análisis de las orientaciones y organización de los instrumentos curriculares vigentes, que incluye orientaciones técnicas y didácticas que favorezcan el aprendizaje en el aula, promoviendo un currículum y una pedagogía inclusiva o accesible a todos/as los/as estudiantes. Esta propuesta entrega herramientas que permiten profundizar la formación general y el desarrollo de conocimientos, habilidades y actitudes en las diversas asignaturas, en el contexto del Marco Curricular vigente, promoviendo los diferentes niveles, ritmos y estilos de aprendizaje, como también los valores o concepciones del mundo presentes en la cultura juvenil.

Esta propuesta coopera en la instalación y consolidación de Procesos de Mejoramiento Continuo en los Liceos y apoyo al ciclo permanente que recorren para mejorar sus “Prácticas y Resultados”, las que siempre deben estar asociadas a metas de aprendizaje e incorporadas en su Plan de Mejoramiento Educativo.

Marco Conceptual

En el contexto de forjar una educación de calidad, con énfasis en procesos y resultados que otorguen a todos y todas genuinas posibilidades de aprender y de utilizar este aprendizaje para resolver los problemas más esenciales de la vida cotidiana, es que se ha apostado, primero, por relevar la diversidad de todos los educandos (UNESCO, 2001) y, segundo, por explicitar procesos en los que se evidencien diversas maneras de trabajar un determinado concepto dentro del aula.

Así, el presente apartado presenta un recorrido por tres elementos esenciales en el marco de la Educación Matemática que procura entregar una comprensión lógica y detallada de las categorías descriptivas que componen cada uno de los instrumentos desarrollados en este texto. De esta manera, se comienza con un **análisis desde la disciplina**, para continuar con un **análisis curricular** y finalizar con un conjunto de **estrategias pedagógicas** entre las cuales destaca la descripción de las pautas del diseño universal de aprendizaje (DUA).

Análisis Disciplinar

Una mirada Internacional

Variados estudios corroboran la necesidad que el/la docente de matemática sea un/a experto/a en los contenidos que debe enseñar, considerando esto como un factor esencial para que los/las estudiantes puedan alcanzar mejores logros académicos (Monk, 1994; Frome, Lasater & Cooney, 2005). Otros estudios concluyen que el conocimiento del contenido, aunque fundamental, no determina la capacidad de enseñar, relevando nuevos componentes para la definición de lo que un/a docente debe saber y saber hacer para el logro de buenos resultados por parte de los/las estudiantes (Ball, Hill y Bass, 2005; Ma, 1999), siendo Shulman (1987) quien, reconociendo la importancia del conocimiento del contenido y de las habilidades pedagógicas generales que el/la docente posea, propone una intersección entre ambos factores, lo que denomina *"conocimiento pedagógico del contenido"*.

A partir de esta distinción, se destaca el trabajo desarrollado por Liping Ma (1999), quien efectúa un estudio realizado con profesores/as de matemática altamente calificados/as, levantando una categorización relacionada con lo que ella denomina Comprensión Profunda de la Matemática Fundamental (CPMF) y que se centra en que el conocimiento de la matemática en profesores debe presentar 4 características esenciales:

- Conexiones: Un/a profesor/a debe ser capaz de conectar conceptos y procedimientos matemáticos en clase, utilizando tanto, conexiones simples como complejas, evitando el aprendizaje fragmentado de contenidos y posibilitando la comprensión de una red de conocimientos.
- Múltiples perspectivas: Un/a profesor/a debe desarrollar diferentes perspectivas de una misma idea matemática junto con los diferentes caminos para su solución, evidenciando las ventajas y desventajas de cada uno de ellos. Se demuestra la flexibilidad dentro de la disciplina.
- Ideas básicas: Un/a profesor/a debe reconocer las ideas básicas, simples y cargadas de significancia dentro de la matemática y debe saber el momento de la clase donde esa idea es necesaria y básica para la comprensión del contenido que desarrolla.

- **Coherencia longitudinal:** Un/a profesor/a experto/a en el ámbito curricular está capacitado/a para revisar conceptos trabajados anteriormente con los/las alumnos/as, así como a sentar las bases para los conocimientos que serán adquiridos posteriormente.

Ma (1999) concluye que estas cuatro características se interrelacionan y en su conjunto dan cuenta de una comprensión significativa de las matemáticas, demostrando básicamente los elementos de profundidad, amplitud y completitud en el marco de los contenidos matemáticos escolares.

Tanto las ideas de Shulman como las de Ma, son sometidas a estrictos y diversos estudios, principalmente provenientes de la Universidad de Michigan a cargo de los Académicos Deborah Ball y Hyman Bass (2005), quienes se esfuerzan en comprender cómo el conocimiento de los/las profesores/as da forma a su práctica de aula y cómo estas prácticas finalmente afectan el aprendizaje de sus estudiantes. Los autores han desarrollado el modelo de **Conocimiento Matemático para la Enseñanza** focalizando su investigación en las dimensiones del conocimiento útil para la enseñanza en aula y en lo que los/las profesores/as deben saber para alcanzar con éxito las actividades con sus estudiantes, lo que implica conocimiento matemático, pero en contexto específico de la enseñanza. Los resultados de estas investigaciones indican que los/las profesores/as que poseen habilidades en el conocimiento del contenido y en la enseñanza de éste son los que alcanzan mayores logros académicos con sus estudiantes.

Así, el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza se conforma como un refinamiento de las categorías propuestas por Shulman (1986) y distingue entre Conocimiento del Contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido; se propone una división de cada uno de estos dominios tal como lo muestra la Figura 1.

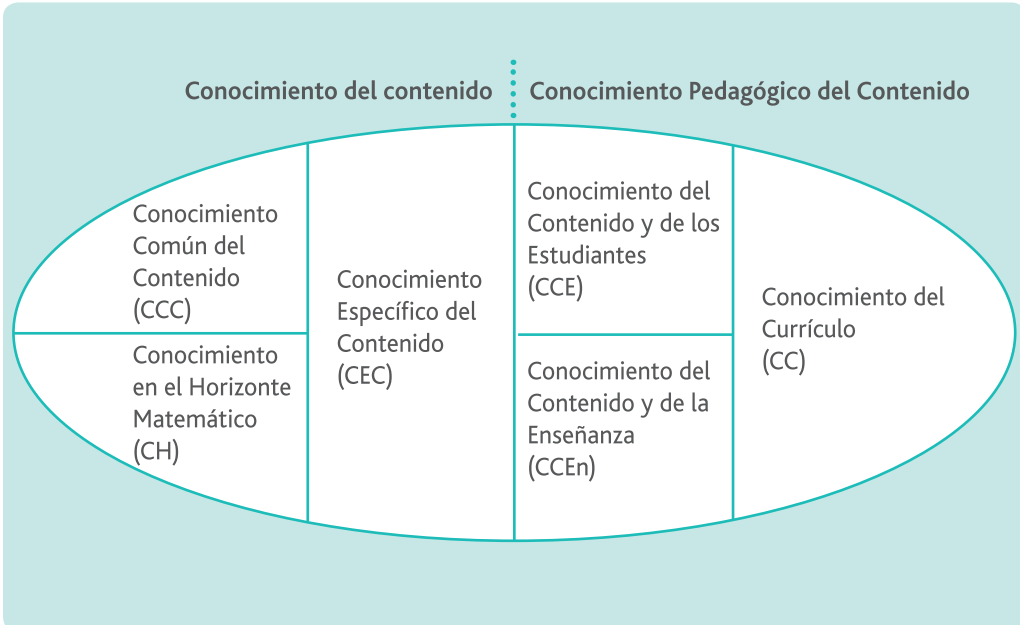


Figura 1. Modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Ball et al, 2008)

Dentro de cada dominio se delimitan tres áreas diferentes de conocimiento a las que Ball et al (2008), define del siguiente modo:

- **Dimensión: Conocimiento del Contenido**
  - *Conocimiento Común del Contenido* (CCC) corresponde al que cualquier persona instruida podría tener. Este conocimiento se adquiere a lo largo de los estudios formales o de la vida cotidiana, y las personas se caracterizan por resolver problemas comunes y operar correctamente.
  - *Conocimiento Específico del Contenido* (CEC) corresponde al conocimiento matemático que le permite al profesor o profesora realizar la labor de la enseñanza. Esto se traduce, por ejemplo, en proporcionar explicaciones matemáticas y representar ideas de diversas formas.
  - *Conocimiento en el Horizonte Matemático* (CH), se refiere al conocimiento de las relaciones existentes entre los distintos temas matemáticos y a su trayectoria en los distintos niveles de aprendizaje escolar.

- **Dimensión: Conocimiento Pedagógico del Contenido**
  - *Conocimiento del Contenido y de los/las Estudiantes* (CCE) es el utilizado al enseñar un contenido específico e incluye conocer aspectos particulares de los/las alumnos/as, por ejemplo, **conocer cómo evoluciona su razonamiento matemático, qué aprendizajes son previos a otros o qué tipos de problemas son comprensibles para su edad.**
  - *Conocimiento del Contenido y la Enseñanza* (CCEn) se refiere a la intersección entre el conocimiento del contenido y el conocimiento de la enseñanza de ese contenido. Esto implica que el/la docente sea capaz de **construir sus actividades de aula en relación al razonamiento de sus estudiantes, y a sus mecanismos de aprendizaje**.
  - *Conocimiento del Currículo* (CC) se refiere al conocimiento de las orientaciones curriculares, contenidos, objetivos, materiales y recursos disponibles. Se espera que el/la docente sepa, por ejemplo, **reconocer y anticiparse a los errores típicos de sus estudiantes, conocer distintas formas o estrategias para explicar un concepto o un procedimiento matemático**.

Cada uno de los apartados desarrollados y explicitado por las investigaciones de Ball entre otros académicos, dejan en evidencia lo que a nivel internacional se espera de la actividad del/la docente en aula en torno al contenido matemático que enseña, así como a los mecanismos mediante los cuales se logra que este conocimiento tenga sentido para un conjunto de estudiantes en constante cambio y dinamismo. El foco en este sentido, es avanzar desde **el saber al saber hacer** en el campo de la enseñanza de las matemáticas, donde la variable del grupo de estudiantes es determinante a la hora de diseñar estrategias de actividades con foco en la enseñanza para el aprendizaje.

Es necesario, ahora, dar una mirada a los estándares nacionales sobre lo que es y se espera de un/a docente en aula, para finalizar con el desarrollo de ideas y conceptos sobre el saber hacer, en medio de la diversidad de formas de aprender que cada estudiante o grupos de estudiantes poseen.

Una mirada nacional

En Chile, lo que se espera de un/a docente en aula se encuentra estandarizado por dos documentos legales. Para los/las docentes en ejercicio, el "Marco para la Buena Enseñanza" (MINEDUC, 2003) orienta la práctica profesional docente, buscando representar la totalidad de sus responsabilidades en el desarrollo del trabajo cotidiano. Su objetivo es definir parámetros consensuados por los/las profesionales de la educación, para que cada docente pueda evaluar su práctica docente.

El foco central que conduce y unifica todo el Marco para la Buena Enseñanza, involucra a todos los/las estudiantes en el aprendizaje de contenidos relevantes, de este modo, todos los criterios que lo conforman responde a tres interrogantes fundamentales:

- ¿Qué es necesario saber?
- ¿Qué es necesario saber hacer?
- ¿Cuán bien se debe hacer?

Para dar respuesta a estas preguntas, el Marco para la Buena Enseñanza se ha estructurado en cuatro Dominios que hacen referencia a los distintos procesos de la enseñanza:

- Preparación de la enseñanza
- Creación de un ambiente propicio para el aprendizaje
- Enseñanza para el aprendizaje de todos/as los/las estudiantes
- Responsabilidades profesionales.

Cada Dominio se explicita mediante un conjunto de criterios e indicadores que definen parámetros comunes dentro de cada uno. La idea general es proporcionar una herramienta útil y comprensible de los elementos constituyentes de cada uno de estos cuatro Dominios, con los cuales se completa el ciclo total del proceso de enseñanza.

Por otra parte, los estándares para los egresados de las carreras de pedagogía fueron desarrollados según la estructura de la Ley General de Educación (Ley N° 20.370) promulgada el año 2009 y están orientados a las instituciones formadoras de tales profesores/as, que enseñarán en las disciplinas de Lenguaje y Comunicación, Matemática, Historia, Geografía y Ciencias Sociales y Ciencias Naturales, en los contextos de Enseñanza Básica y Media. Estos estándares están expresados como una orientación acerca de los conocimientos y habilidades necesarios que debiera manejar el/la egresado/a de pedagogía para enseñar determinadas disciplinas (MINEDUC, 2012) y están organizados en dos categorías:

- Estándares Pedagógicos
- Estándares Disciplinarios para la Enseñanza

La categoría de Estándar pedagógico hace referencia a las competencias que debe poseer un/a docente en ejercicio y que se consideran como requisitos para ejercer la docencia. Entre estas competencias, que constituyen elementos generales de la labor pedagógica, se encuentran:

- El conocimiento del currículo.
- El diseño de procesos de aprendizaje y evaluación para el aprendizaje.
- Las habilidades para evaluar y reflexionar acerca de la propia práctica pedagógica.
- La habilidad para aprender en forma continua.

Por su parte, los Estándares Disciplinarios para la enseñanza, apuntan al conocimiento de la disciplina y a las competencias para enseñarla, considerando y conjugando los conocimientos específicos, las habilidades y las actitudes que debe poseer un/a egresado/a de Pedagogía en Educación Media para desempeñarse en este nivel escolar.

En el marco específico del profesor o profesora de Matemática, el propósito es enriquecer la comprensión de la realidad, favorecer la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los/las estudiantes. De esta manera, la categoría aporta indicadores relacionados con el desarrollo de las capacidades de comunicar, razonar, abstraer, confrontar y construir estrategias para resolver problemas y para realizar un análisis crítico de diversas situaciones concretas, incorporando formas habituales de la actividad matemática.

Educación matemática centrada en la diversidad: **la matemática inclusiva**

Al adentrarse en el concepto de lo "inclusivo" en el marco de la educación, se encuentran variadas concepciones que consideran desde la incorporación de diversos trastornos, discapacidades, hasta la incorporación o trabajo equitativo de los grupos socioeconómicos vulnerables dentro del sistema escolar, lo que demanda la incorporación de técnicas y métodos adecuados y pertinentes para garantizar la efectiva inclusión concebida como promoción de una Escuela para Todos y, finalmente, la **inclusión como Educación para Todos** (Alsina y Planas, 2008).

Las fronteras entre cada perspectiva evidenciada no son excluyentes, pero dan cuenta de un amplio abanico de matices respecto del concepto de inclusión en el contexto educativo. En este sentido, lo primero y fundamental es explicitar qué se entenderá, para la construcción del presente material, por **educación inclusiva** y **educación matemática inclusiva**.

La **Educación Inclusiva** se concebirá como la incorporación de todos los niños, niñas y jóvenes en la escuela, en cuanto a que su presencia, participación y logros se desarrollen bajo una educación eficaz y de alta calidad para todos. Esto constituye el mayor reto que deben enfrentar los sistemas educativos en el marco de un sistema que **"sostiene y acoge la diversidad de todos/as los/las educandos"** (UNESCO, 2001).

En el mismo sentido, entenderemos por **Educación Matemática Inclusiva**, aquella práctica matemática que sea accesible y comprensible para todos los educandos, lo que constituye una **Educación de Calidad para Todos.**

Aunque recientes estudios sobre Educación Matemática Inclusiva, han centrado su atención en experiencias de inclusión en aulas comunes de estudiantes con deterioro de la audición y/o de la visión, han relevado el desarrollo de novedosas prácticas manipulativas o con énfasis en los sonidos para la enseñanza, por ejemplo, de la geometría o el álgebra, midiendo su significancia educativa en estos estudiantes.

Aun cuando la Educación Inclusiva en Matemática ha tomado preferentemente este camino, algunos autores han logrado evaluar el impacto de estas prácticas en estudiantes que no presentan Necesidad Educativa Especial Permanente (NEEP), siendo el caso de Healy y do Santos (2014), quienes evalúan la potencialidad de tener estudiantes que presentan algún tipo de discapacidad y que presentan Necesidades Educativas Especiales dentro de un mismo contexto de enseñanza en aula. Las autoras indican que la reflexión en cuanto a estos contextos, se debe centrar en la diferencia en lugar del déficit, lo que conduce a un aula inclusiva donde todos los/las participantes, estudiantes y profesores/as se benefician.

En su investigación Healy y do Santos (2014), relevan la reflexión de un/a docente de matemática en aula, quien explicita la complejidad de enfrentarse a un aula diversa, en donde el trabajo se duplica en la preparación de un material acorde a la diferencia y en la aplicación de éste en aula. Sin embargo, las investigadoras advierten cómo los nuevos métodos empleados para un tipo de estudiante, beneficia la comprensión de los/las estudiantes para los cuales no estaba destinado el material, así, si los/las estudiantes no habían logrado comprender una determinada idea, ahora poseían una nueva oportunidad para hacerlo. Del mismo modo, la interacción explicativa que se desarrolla en un contexto de aula diverso, está llena de significado y potencia el aprendizaje desde una comprensión y profundidad mayor del contenido que se desarrolla.

Healy y do Santos concluyen su trabajo, reflexionando sobre la necesidad de crear prácticas inclusivas en el contexto de la educación matemática, y su implicancia con la comprensión de cómo la enseñanza y el aprendizaje están mediados por nuestra identidad "física, racial, étnica, lingüística, de género y de los seres sociales" (p.45), que creemos que es fundamental para involucrar a todos/as los/las que participan en el proceso educativo y para reconocer y valorar sus aportes en la construcción de nuevos conocimientos.

Por otro lado, Griffin, Liga, Griffin y Bae (2013), detallan algunas de las actividades que consideran esenciales dentro de la actividad de aula en matemática mediada por un/a docente, estas son:

- Enseñar con estrategias variadas.
- Ofrecer frecuentes oportunidades para la revisión y la práctica.
- El desarrollo profundo del concepto a través de la utilización de materiales manipulativos y representaciones visuales.
- Un menor énfasis en la instrucción mediada entre pares.

De esta manera se avanza con los propósitos y actividades que en general propician una Educación Matemática de Calidad para Todos.

Finalmente, se reconoce el aporte realizado por Ball Chandra (2012) en la composición de una definición de Educación Matemática Inclusiva, incrustada en las **tradiciones culturales locales**, en sintonía con la necesidad de concretar una producción global del conocimiento. Chandra reflexiona sobre la idea de que tanto profesores/as como estudiantes son propensos a concebir una imagen completa del conocimiento matemático y de las habilidades que son útiles para su presente y futuro, sólo después de haber experimentado múltiples formas de construir la matemática.

A modo de síntesis, podemos decir que, a partir de lo anterior, es necesario reflexionar sobre el camino que tomarán los/las profesores/as para diseñar y desarrollar prácticas que permitan lograr que la enseñanza y el aprendizaje de la matemática sean accesibles a todos los/las estudiantes. Esta reflexión ha de partir de una revisión de la pedagogía, la didáctica y los procesos evaluativos para culminar en la construcción de ambientes flexibles, coherentes y amistosos para el trabajo con la diversidad de educandos en la etapa escolar.

Esquema de Síntesis: ¿Qué se espera de un/una profesor/a en el desarrollo de la Matemática Inclusiva?

Los componentes que focalizan un buen desempeño en el ámbito del profesorado, sus conocimientos y aptitudes para ejercer en aula, nos ayudan a trazar los lineamientos necesarios para comprender qué debemos hacer para forjar una educación matemática inclusiva.

Conocimiento del Contenido

- Resolver problemas y operar correctamente.
- Explicaciones matemáticas representadas de diversas formas.
- Conexión de los contenidos con otros temas y coherencia en el tiempo.

Conocimiento Pedagógico del Contenido

- Evolución del Razonamiento matemático.
- Actividades en función a necesidades y habilidades.
- Reconocer errores y diferentes formas de explicar matemática.

Actividades para proporcionar matemática al alcance de todos

- La enseñanza de estrategias variadas.
- Ofrecer frecuentes oportunidades para la revisión y la práctica.
- El desarrollo profundo del concepto a través de la utilización de materiales manipulativos y representaciones visuales.
- Un menor énfasis en la instrucción mediada entre pares*.

* Este último punto hace referencia a que si bien el trabajo entre pares tiene potencial en el ámbito de la educación matemática, la instrucción de esta mediación por parte del/la docente es dentro del total de actividades, la que menos efectos positivos proporciona en el corto plazo (Griffin et al, 2013).

Análisis Curricular

Énfasis del Ajuste Curricular 2009 en Matemática: requerimientos

El Ajuste Curricular del año 2009, en adelante "el Ajuste" declara que "la matemática se aprende haciendo matemática, reflexionando acerca de lo hecho y confrontando la actuación propia con el conocimiento acumulado y sistematizado" (p.146). Así, el Ajuste enfatiza de manera transversal el desarrollo del Razonamiento Matemático sobre los cuatro ejes temáticos del currículo.

Para desarrollar el Razonamiento Matemático, el Ajuste declara la necesidad de brindar oportunidades de aprendizaje en torno a problemas, desafíos, modelamiento de situaciones o proposición y exploración de relaciones que ofrezcan intervenir sobre el pensamiento creativo y crítico de los/las estudiantes con experiencias de aprendizaje que aporten a la formulación de conjeturas, exploración de caminos alternativos de solución y discusión de la validez de las conclusiones. En este contexto, las situaciones escogidas para presentar los problemas que se deben resolver para un aprendizaje matemático escolar, se clasifican en cuatro tipos: personal, educacional/profesional, pública y científica (OCDE, 2004).

En el ámbito del desarrollo del pensamiento, en Educación Básica y Media, se deben promover entre otras, las siguientes habilidades transversales[1]:

- **Habilidades de análisis, interpretación y síntesis de información y conocimiento.**

  Estas habilidades conducen a que los/las estudiantes sean capaces de establecer relaciones entre las distintas asignaturas; de comparar similitudes y diferencias; de entender el carácter sistémico de procesos y fenómenos; de diseñar, planificar y realizar proyectos; de pensar, monitorear y evaluar el propio aprendizaje; de manejar la incertidumbre y adaptarse a los cambios en el conocimiento.

1. Para mayor información diríjase a: Orientaciones e Instrumentos de Evaluación Diagnóstica, Intermedia y final en Resolución de Problemas 1er año de Educación Media. Mineduc, 2013.

- **Habilidades de Resolución de Problemas**

  Solucionar un problema constituye una situación desafiante para el/la estudiante, pues tiene que movilizar saberes, técnicas, procedimientos, entre otros, para poder dar respuesta a la situación planteada. Requiere aplicar habilidades cognitivas de orden superior, que le permitan relacionar, interpretar y representar la información proveniente del enunciado, proponiendo estrategias de solución, anticipando posibles respuestas y argumentándolas. Es la oportunidad para que los/las estudiantes desarrollen habilidades de tipo cognitivo (indagar, conjeturar, validar y argumentar), y de tipo actitudinal (perseverancia, crítica y autocrítica). Es decir, lo/la pone en situación de aplicar sus conocimientos, relacionarlos y buscar la estrategia óptima que le permita solucionar el problema. No se debe confundir entre solucionar un problema y resolver un ejercicio, esto último sólo implica una actividad rutinaria, en que se aplican habilidades de tipo mecánico, es decir, para resolver un ejercicio basta aplicar un algoritmo previamente aprendido.

- **Habilidades de Investigación**

  Las habilidades de investigación, tienen relación con identificar, procesar y sintetizar información de una diversidad de fuentes; organizar información relevante acerca de un tópico o problema; revisar planteamientos a la luz de nuevas evidencias y perspectivas; suspender los juicios en ausencia de información suficiente.

- **Habilidades Comunicativas**

  Las habilidades comunicativas se vinculan con exponer ideas, opiniones, convicciones, sentimientos y experiencias de manera coherente y fundamentada, haciendo uso de diversas y variadas formas de expresión.

Dificultades en el desarrollo de la Educación Matemática en Chile

En cuanto a los cuatro ejes disciplinares que el Ajuste propone, hoy tenemos evidencia de las principales dificultades que a nivel país poseemos. A continuación detallaremos algunas investigaciones que nos ayudan a dilucidar nuestra actual situación en cuanto a los contenidos, las habilidades y la interacción entre el/la profesor/a y sus estudiantes.

Según los estudios del Centro de Medición de la Pontificia Universidad Católica de Chile, MIDE UC (2013), en Enseñanza Media se evidencia un buen nivel en los ejes de Álgebra y Geometría tanto desde el punto de vista del manejo conceptual como de la operatoria y análisis de problemas, en particular referido a los temas de: operatoria algebraica, funciones lineales y cuadráticas, propiedades de figuras y cuerpos geométricos, teoremas de congruencia y proporcionalidad. En el eje de Geometría también se observa un mayor uso de material manipulativo concreto para el desarrollo de las actividades de aula (Araya y Dartnell, 2008).

Por otro lado, el trabajo en terreno advierte que las dificultades en el razonamiento demostrativo (deductivo) para el eje de geometría, es un tema poco abordado en las aulas chilenas al igual que las conexiones que se pueden desarrollar desde la Geometría al Álgebra, en específico nos referimos a la aplicación de la Composición de Funciones a las Transformaciones Isométricas.

Los ejes de Números y Probabilidades presentan problemas más profundos, centrando sus dificultades en la comprensión conceptual de las definiciones y propiedades de los distintos conjuntos numéricos y en la operatoria dentro de los números complejos; por su parte, en el eje de Datos y Azar sólo se abordan problemas sencillos que involucran medidas de tendencia central o tablas de frecuencia, en situaciones familiares (MIDE UC, 2013).

Las grandes ausencias, presentes transversalmente en los cuatro ejes, se centran en las introducciones de las clases, en las demostraciones y toda forma de razonamiento deductivo (Varas et al, 2008); a nivel del desarrollo completo de la clase, el uso de metáforas no son parte del repertorio habitual de el/la profesor/a/a de matemática en Chile (Cornejo, Silva y Olivares, 2011, en Manzi, González y Sun, 2011).

Por otro lado, si bien las habilidades en torno a la resolución de problemas se ha masificado en la teoría y práctica dentro de las aulas del país, es un tema que se debe seguir enfatizando debido a que los resultados de los/las estudiantes chilenos siguen siendo relativamente débiles en el contexto internacional (Apuntes sobre la calidad de la educación, 2013).

En relación a la interacción entre el/la profesor/a y los/las estudiantes, los estudios realizados en Chile muestran que la enseñanza de la matemática está centrada en el/la profesor/a, quien desarrolla los contenidos por medio de una presentación de casos o ejemplos, seguidos por la definición de conceptos (Araya y Dartnell, 2008; Cornejo, Silva y Olivares, 2011, en Manzi, González y Sun, 2011).

Así, el patrón instruccional se caracteriza por una mayor frecuencia de preguntas orientadas al control del desarrollo de las actividades de clase que al desarrollo de la comprensión de contenidos matemáticos; predominio de preguntas de bajo desafío cognitivo y "baja apertura", reduciendo la participación de los/las estudiantes en la construcción del conocimiento; predominio de formas de seguimiento a las intervenciones de los/las alumnos/as basadas en la repetición y evaluación de las mismas, y escasa retroalimentación con ideas matemáticas por parte del/la docente (Varas et al, 2008); (Radovic y Preiss, 2010).

Dentro de la interacción entre los/las profesores/as y los/las estudiantes, no podemos omitir las inequidades existentes entre estudiantes hombres y mujeres en el contexto de la educación matemática en Chile. Según los indicadores de la prueba PISA 2012, las diferencias de género en nuestro país se manifiestan tanto en los resultados de las evaluaciones como en la actitud frente a la clase de matemática.

Existen evidencias que el entorno escolar influye de manera significativa en el rendimiento de los/las estudiantes, de manera especial los procedimientos de gestión y organización escolar. En Chile, un reciente estudio evidencia que tanto profesores como profesoras interactúan menos con estudiantes mujeres, otorgándoles menores posibilidades de participación y aprendizaje durante las clases, en comparación con los estudiantes hombres. Además, se constató que las diferencias de género que ocurre en las aulas, son más pronunciadas en clases a cargo de profesores de género femenino que de profesores de género masculino (Espinoza y Taut, 2014).

Si el/la docente tiene un cabal conocimiento de los distintos énfasis que se proponen para la ejecución de las actividades de aula en matemática, y potencia este conocimiento con la comprensión de las mayores dificultades que a nivel de contenidos, habilidades e interacciones en aula presentan sus estudiantes, tendrá una mayor y mejor oportunidad para ajustar sus prácticas a dichos énfasis y dificultades, y de esta forma, podrá mejorar los resultados de aprendizaje.

Esquema de Síntesis: ¿Cuáles son los nudos críticos en Chile?

El siguiente esquema sintetiza lo trabajado en este apartado en torno a evidenciar los énfasis del Ajuste y las falencias a nivel país, en torno a los contenidos, las habilidades y las interacciones pedagógicas en aula.

Ajuste curricular 2009

Ejes temáticos

1. Números
2. Álgebra
3. Geometría
4. Datos y Azar

Razonamiento Matemático

- Habilidades de análisis, interpretación y síntesis
- Habilidades de Resolución de Problemas
- Habilidades de Investigación
- Habilidades Comunicativas

Dificultades a nivel de contenidos y habilidades

- Definiciones y propiedades en conjuntos numéricos
- Operatoria con números complejos
- Medidas de Posición*
- Variable aleatoria*
- Composiciones isométricas*

- Demostraciones
- Metáforas
- Razonamiento deductivo
- Resolución de problemas
- Conjeturas*

Dificultades a nivel de interacción en clase

Actividades para proporcionar matemática al alcance de todos/as

- La enseñanza de estrategias variadas.
- Ofrecer frecuentes oportunidades para la revisión y la práctica.
- El desarrollo profundo del concepto a través de la utilización de materiales manipulativos y representaciones visuales.
- Un menor énfasis en la instrucción mediada entre pares.

Nota: los elementos marcados con un asterisco (*), representan elementos observados en aula por los profesionales de la educación responsables de la creación del presente material.

Estrategias Pedagógicas

El Diseño Universal para el Aprendizaje

Considerando los elementos presentados de lo que un/una profesor/a de Matemática debe saber y saber hacer, en conjunto con las dificultades curriculares y pedagógicas que poseemos a nivel país, es que nos introduciremos en una construcción comprensiva que aporta y apoya la implementación del currículum vigente a través de múltiples estrategias de enseñanza y aprendizaje en el aula, considerando especialmente la planificación en el marco de los principios que están a la base del Diseño Universal de Aprendizaje.

En este sentido, El Diseño Universal para el Aprendizaje, en adelante DUA, es un marco que aborda el obstáculo que crean los currículos inflexibles para la enseñanza. Este diseño proporciona a todos los/las estudiantes oportunidades justas y equitativas para aprender, categorizado según lo que la norma espera.
El marco del DUA estimula la creación de diseños flexibles desde el principio, que presenten opciones personalizables que permitan a todos los/las estudiantes progresar desde donde ellos verdaderamente están y no desde dónde a priori debieran estar. Así, el DUA asume y valora la diversidad de los/las estudiantes al proponer a los/las profesores/as flexibilidad en los objetivos, métodos, materiales y evaluación que permitan dar respuesta asertiva a dichas necesidades diversas (CAST, 2011).

Basados en este marco y en sus principios, reconocemos uno de los pilares de la Reforma Educacional referidos a una pedagogía inclusiva o accesible a todos. A continuación se detallan los principios fundamentales del DUA:

- **Principio I: El qué del aprendizaje**
  Proporcionar múltiples formas de representación

  Los/las alumnos/as difieren en la forma en que perciben y comprenden la información que se les presenta. En este sentido no existe un medio de representación óptimo para la enseñanza-aprendizaje de todos los/las estudiantes, pues las necesidades en torno a una discapacidad, las dificultades para aprender, las diferencias de lengua o cultura, etc., implican maneras distintas para captar y realizar conexiones lógicas con el contenido que se trabaja; también existen diferencias más sutiles y menos identificables como los diferentes medios por los que un/una estudiante capta más rápido o más eficientemente un contenido. Además, **el aprendizaje y la transferencia del aprendizaje ocurren cuando múltiples representaciones son usadas, ya que eso permite a los/las estudiantes hacer tanto conexiones interiores, como entre conceptos**.

- **Principio II: El cómo del aprendizaje**

  Proporcionar múltiples formas de acción y expresión

  Los/las estudiantes poseen diferentes formas en las que pueden interactuar con un entorno de aprendizaje y diferentes formas de expresar sus conocimientos dentro de estos entornos. Así, algunos pueden ser capaces de expresarse bien con el texto escrito, pero no de forma oral y viceversa. Cada una de las estrategias de acción y expresión que adopte un/una estudiante posee cierta rigurosidad en su proceso y organización, que lo lleva a su grado óptimo, pero cada estudiante puede diferir en el nivel de logro que posee frente a cada estrategia. De este modo, podemos decir que **no hay un medio de acción y expresión óptimo para todos los/las estudiantes**; por lo que proveer opciones para la acción y la expresión es esencial.

- **Principio III: El porqué del aprendizaje**

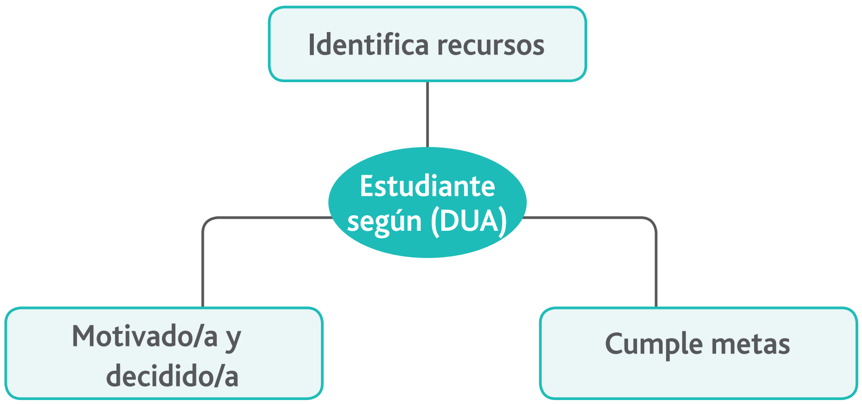
  Proporcionar múltiples formas de implicación

  El componente emocional es un elemento crucial para el aprendizaje, y los/las estudiantes difieren notablemente en los modos en que pueden ser implicados o motivados para aprender. Existen múltiples fuentes que influyen a la hora de explicar la variabilidad individual afectiva, tales como los factores neurológicos y culturales, el interés personal, la subjetividad y el conocimiento previo, junto con otra variedad de factores presentados en estas pautas. Los intereses de los/las estudiantes van desde el trabajo colaborativo al individual o desde la novedad a lo rutinario. En realidad, **no hay un único medio que sea óptimo para todos/as los/las alumnos/as en todos los contextos**.

En este contexto, la base del DUA y los tres principios que lo componen, constituyen la base para la construcción de materiales didácticos con foco en la diversidad del estudiantado.

Esquema de Síntesis: ¿Cómo diseñar actividades didácticas según el Diseño Universal para el Aprendizaje?

Para el Diseño Universal del Aprendizaje, el centro está en las habilidades de cada estudiante y en su proyección hacia la identificación de recursos, el cumplimiento de metas y la motivación, como se grafica en la siguiente imagen:



Cada una de las siguientes dimensiones que se centran en la planificación de ambientes de aprendizajes coherentes con las necesidades y habilidades de los/las estudiantes promueve el logro de los tres componentes antes mencionados.

Representación

- **Percepción** (visual, auditivo, táctil)
- **Opciones para el lenguaje** (clarificar palabras y símbolos, crear mapas conceptuales)
- **Comprensión** (conocimientos previos, destacar patrones, características fundamentales etc., vincular conocimientos mediante analogías o metáforas, conexiones curriculares explícitas).

Identifica recursos

Acción y Expresión

- **Interacción física** (recursos manuales, movilizar el cuerpo)
- **Expresión y fluidez en la comunicación** (diseñar, discutir, herramientas para la construcción y composición, modelos de simulación)
- **Funciones ejecutivas** (definición de metas y objetivos, apoyo en la planificación y desarrollo de estrategias, organizadores gráficos, listas de comprobación, preguntas verificadoras de avances)

Cumple metas

Motivación

- **Captar interés** (contexto amistoso, acorde, cercano; fomentar el uso de la imaginación, explicitar dimensión de la tarea)
- **Mantener el esfuerzo y la persistencia** (metas a largo plazo objetivos a corto plazo, variar dificultad, fomentar colaboración)
- **Auto-regulación** (expectativas y creencias que optimicen la motivación, autoevaluación y reflexión)

Motivado/a y decidido/a

GUIONES DIDÁCTICOS

Introducción Guiones Didácticos

Objetivo del Guion

El guion construido cumple con el objetivo de abordar contenidos matemáticos pertenecientes al Currículum Nacional desde una perspectiva inclusiva. En este sentido, el desarrollo de las actividades didácticas para el trabajo en aula se confecciona desde la diversidad de maneras y formas en las que un concepto puede ser abordado.

La Tabla 1 muestra la potencialidad del material, detallando los objetivos específicos que la conforman y sus respectivas implicancias.

Objetivos específicos	Implicancias
Amplio desarrollo del contenido, esto quiere decir, dar a conocer los elementos fundantes que enmarcan el contenido junto con su progresivo desarrollo dentro del marco curricular.	- Sirve como guía de estudio para el/la profesor/a. - Proporciona guías de trabajo para el/la estudiante.
Mostrar ***diferentes medios y formas*** de tratar el concepto en sus diferentes dimensiones.	- Proporciona variedad de recursos para la enseñanza. - Propicia el interés y participación de un mayor número de estudiantes.
Elaborar un ***material flexible*** para los requerimientos de cada institución Educativa a lo largo del país.	- Permite que el/la profesor/a seleccione los elementos necesarios para elaborar una estrategia de enseñanza apta para su contexto. - Permite que el/la estudiante elabore una ruta de trabajo definida por sus propias habilidades.

Tabla 1. Objetivos específicos e implicancias del material de estudio.

De esta manera, la principal tarea del/la docente es advertir el grado de comprensión que posea sobre los contenidos que el texto trabaja y desarrollar un estudio y/o selección de los componentes que les son útiles para el contexto en que se desarrolla.

Para la selección de los contenidos a desarrollar en este guion, se evaluaron los principales cambios que incorporó el Ajuste curricular año 2009 y lo contrastamos con las problemáticas que investigaciones y el trabajo en terreno desarrollado a nivel nacional nos reportan en los recientes años[2].

La Tabla 2 muestra el contenido a desarrollar dentro de cada eje y contenido mínimo obligatorio en el que este contenido cobra relevancia dentro del Curriculum Nacional.

2° año de Educación Media

Eje	Contenido	CMO
Geometría	Demostración: Ángulos en la circunferencia	15. Identificación de ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia; demostración del teorema que relaciona la medida del ángulo del centro con la del correspondiente ángulo inscrito. **Nota**: este material complementa el CMO 15 extendiendo su contenido a los otros ángulos que se determinan al intersectar rectas y una circunferencia (ángulos semi-inscrito, interior y exterior).
Datos y Azar	Variable Aleatoria	19. Aplicación del concepto de variable aleatoria en diferentes situaciones que involucran azar e identificación de esta como una función.

Tabla 2. Contenido a desarrollar en cada material didáctico.

GUIONES DIDÁCTICOS

2. Se puede acceder a más información en éste tópico dirigiéndose al apartado de "Análisis Curricular" página 28, de este mismo documento.

Estructura del Guion

Cada uno de los 2 contenidos que éste texto desarrolla contempla el material para el/la profesor/a y el material para el/la estudiante. En este sentido, el texto dispone de 2 guiones para el/la profesor/a, cada uno destinado a uno de los contenidos mencionados en la tabla anterior y 2 guías para el/la estudiante que se relacionan con el trabajo desarrollado para el/la profesor/a.

Se procede a detallar cada uno de los materiales junto a sus principales componentes.

Material de el/la profesor/a: Es importante destacar que el guion de el/la profesor/a no establece un número rígido de sesiones y horas en las que debe desarrollar las actividades y/o situaciones propuestas. Parte de la flexibilidad del recurso es que el docente tome decisiones coherentes a su contexto. En este sentido, una situación no implica necesariamente una sesión de clase.

La Tabla 3 (página siguiente), muestra tres elementos importantes que constituyen cada uno de los materiales destinados para el/la profesor/a.

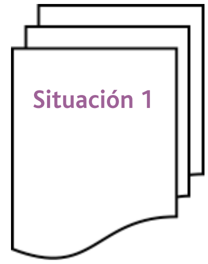
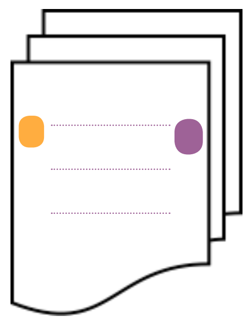
Descripción del guion para el/la profesor/a	Diagrama
Una secuencia ordenada de 1 a 3 situaciones que desarrolla ***un contenido*** desde los elementos más básico a los más complejos. El número de situaciones por contenido varía en función de la potencialidad de la situación, el objetivo es que con ellas se aborde el concepto en su plenitud para el año escolar en que se desarrolla.	
Cada situación se desarrolla en 3 partes, "Comprensión", "Análisis" y "Profundización", en donde se abordan los conocimientos previos, el desarrollo de actividades y la formalización de concepto y análisis de situaciones más complejas y abstractas, respectivamente.	
Por último, el guion de el/la profesor/a se enriquece con: a) Habilidades Matemáticas[3], ubicados al lado izquierdo en recuadro amarillo. b) Comprensión Profunda de la Matemática Fundamental (CPMF)[4], ubicados en recuadro violeta a la derecha.	

Tabla 3. Descripción del guion de el/la profesor/a.

GUIONES DIDÁCTICOS

3. Se puede acceder a más información en éste tópico dirigiéndose al apartado de "Análisis Curricular" página 28, de este mismo material.
4. Se puede acceder a más información en éste tópico dirigiéndose al apartado de "Análisis Disciplinar" página 8, de este mismo material.

Material del/la estudiante: el material del/la estudiante se divide en 1 o 2 guías que se relacionan con el guion desarrollado para el/la docente. Cada guía da cuenta de una de las situaciones desarrolladas en el material del/la docente, correspondiendo siempre a las primeras situaciones expuestas[5]. El/la profesor/a puede y debe decidir qué porcentaje de la guía del/la estudiante es recomendable desarrollar para una sesión en el contexto educativo en donde se desenvuelve.

La Tabla 4 muestra tres elementos importantes que constituyen las guías destinadas a los/las estudiantes.

Descripción guía del/la estudiante	Diagrama
Un material de 1 o 2 guías asociadas a situaciones matemáticas desarrolladas en el guion de el/la profesor/a. Cada guía se articula de tal modo que fomenta el desarrollo autónomo de cada estudiante o de cada grupo de estudiantes, esto significa que el material entrega todas las indicaciones necesarias para avanzar en cada uno de los puntos solicitados. En este sentido, la tarea del/la docente se centra en evaluar los procesos y responder a las dudas que los/las estudiantes posean.	
Cada guía se desarrolla bajo 4 etapas, "Conocimientos Previos", "Secciones de desarrollo constructivo", "Síntesis" y "Autoevaluación", en donde se explicita lo que el/la estudiante debe saber antes de enfrentarse a la actividad, diferentes representaciones en los procesos de enseñanza del contenido, la formalización matemática del contenido desarrollado en la actividad y una evaluación de los procesos desarrollados que debe responder el/la estudiante con el fin de evaluar su proceso en cuanto al contenido y las formas de trabajarlo, respectivamente.	
El material del/la estudiante tiene la flexibilidad de escoger el camino que va a tomar para alcanzar el objetivo de la actividad. En este sentido, se presentan preguntas marcados con un lápiz al inicio de ésta, que representa las preguntas que el/la estudiante no puede omitir, y que servirán de guía para que el/la profesor/a evalúe los avances del/la estudiante. Se aconseja permitir un avance diferenciado a los/las estudiantes que demuestren que no necesitan seguir paso a paso las instrucciones de la guía.	

Tabla 4. Descripción de las guías del/la estudiante.

5. La última situación del material para el/la profesor/a en el ámbito de Datos y Azar tiene un grado de complejidad que supera en dificultad y/o contenido, a los requerimientos curriculares, por lo que se destina para que el/la docente tome decisiones en relación a sus estudiantes más avanzados o para desarrollarlos en otros niveles de enseñanza.

Foco curricular y didáctico

En este apartado encontrará información relevante sobre el material que sirve de sustento para organizar sus sesiones de clases y el foco didáctico que éstas potencian. En este apartado se entenderá por guion al producto desarrollado para el/la docente con su respectivo producto diseñado para el/la estudiante.

Ángulos en la Circunferencia

¿Cuándo implementarlo?	Acorde al Ajuste Curricular 2009, los/las alumnos/as anteriormente deberían haber tenido un acercamiento a la demostración matemática, en este contexto el material debe ser desarrollado después de obtener las destrezas correspondientes al CMO 13 y al CMO 14: CMO 13: Demostración de los teoremas de Euclides relativos a la proporcionalidad de trazos en el triángulo rectángulo; demostración del teorema de Pitágoras y del teorema recíproco de Pitágoras. CMO 14: Aplicación de la noción de semejanza a la demostración de relaciones entre segmentos en cuerdas y secantes en una circunferencia y a la homotecia de figuras planas. Así, el material de circunferencia propone un trabajo en el que se hace cargo tanto del OF y el CMO del Ajuste Curricular 2009 (vigente para este nivel): OF: Identificar ángulos inscritos y del centro en una circunferencia, y relacionar las medidas de dichos ángulos. CMO 15: Identificación de ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia; demostración del teorema que relaciona la medida del ángulo del centro con la del correspondiente ángulo inscrito. En donde se hace relevante las actividades propuestas en el material. Este material complementa el CMO 15 extendiendo su contenido a los otros ángulos que se determinan al intersectar rectas y una circunferencia (ángulos semi-inscrito, interior y exterior).
¿Cuál es el foco del material?	El objetivo de este módulo es realizar una ruta didáctica en la que los/las estudiantes desde los elementos primitivos punto, plano y recta, puedan experimentar y argumentar sobre las diferentes posiciones en el plano que puede tener dos rectas (paralelas, coincidentes, secantes). Posteriormente, analizar las posiciones posibles cuando a las dos rectas se suma una circunferencia. La idea del material es que los/las alumnos/as en todo momento tengan la posibilidad de explorar y realizar conjeturas respecto a todas las posibilidades que pueden generar las dos rectas con la circunferencia. De aquí naturalmente debería salir el concepto de ángulos interiores (cuando las rectas se cortan al interior de la circunferencia) y ángulos exteriores (cuando las rectas se cortan en el exterior de la circunferencia). De las posibilidades de rectas secantes y rectas tangentes, aparecen los conceptos de ángulo central (la intersección ocurre en el centro), ángulo inscrito (la intersección ocurre en la circunferencia) o ángulo semi-inscrito (el vértice está formado por la intersección entre una tangente y una secante).

GUIONES DIDÁCTICOS

¿Cuál es su potencial didáctico?	Se proponen múltiples formas de abordar los conceptos: Geometría mental, papelería, TIC (GeoGebra), uso de instrumentos geométricos (regla, escuadra, transportador, compás), entre otros. Hay que destacar el hecho de que las múltiples formas de trabajar –tienen bastante relevancia– ya que el tema de “ángulos en la circunferencia” tiene un contexto eminentemente geométrico. No se revisan aplicaciones ya que se trataría de contextos muy específicos o forzados y no serían realmente un aporte a la comprensión de lo esencial, que corresponde en este caso a las relaciones entre ángulos. La opción metodológica responde a una apuesta por el grueso de estudiantes que les cuesta la matemática y que requieren un camino previo importante antes de meterse en aspectos como la demostración, que corresponde claramente a una habilidad superior. Se está consciente de que en una parte importante de colegios, el tema de la demostración es algo ausente. No es llegar y ponerse a demostrar con estos/as estudiantes, sino más bien requieren de un camino previo. Y esta es la apuesta de este material, enfatizando las conjeturas y el razonamiento matemático. Antes de eso es necesario proponer a los/las estudiantes, una diversidad de situaciones –como ya se ha mencionado– donde los/las estudiantes tengan la posibilidad de conjeturar sobre las relaciones entre ángulos de la circunferencia. La idea es que exista una introducción a los conceptos de hipótesis-tesis. Del mismo modo a la necesidad de demostrar. Es decir, es importante que los/las estudiantes comprendan que en matemática toda proposición –salvo los axiomas o proposiciones primitivas– puede y debe ser demostrada.
¿Cuál es la situación que se desarrolla?	En este material el trabajo se vuelve eminentemente matemático y el contexto es geométrico, lo que es bueno tener claro desde el principio. Lo que interesa es el desarrollo del pensamiento analítico y deductivo y llegar a la demostración matemática. El propósito es entregar algunos elementos metodológicos para su aprendizaje. **Situación.** Ángulos y relaciones entre ángulos, a partir de la intersección de dos rectas y una circunferencia en el plano. Esta situación posee su respectiva guía para el/la estudiante.

Variable Aleatoria

¿Cuándo implementarlo?	En el contexto de 2º año de Educación Media, el material responde a el CMO 19, el cual indica "Aplicación del concepto de variable aleatoria en diferentes situaciones que involucran azar e identificación de esta como una función", pero debido a que sea construido con el objeto de comprender el concepto total de variable aleatoria, muchas de sus actividades pueden servir de apoyo a los CMO 15, 16, 17 y 18 correspondientes al eje de Datos y Azar de 3er año de Educación Media.
¿Cuál es el foco del material?	El material desarrolla el concepto de variable aleatoria en su totalidad, con el fin de alcanzar una comprensión significativa de su concepto y potencial. En este contexto el material no se puede restringir sólo al reconocimiento de una variable aleatoria, que es lo que se explicita para 2º año de Educación Media. La variable aleatoria tiene que tener una profundización respecto a las distribuciones, de lo contrario no se comprenderá su relevancia y en cursos posteriores se deberá volver al concepto mirado desde otra perspectiva. En otras palabras, cuando estudias el valor esperado se entiende la necesidad de transformar los sucesos a datos. En este sentido, el material hace una apuesta por entregar las herramientas necesarias para la comprensión de la variable aleatoria superando los lineamientos exigidos para 2º año de Educación Media, pero acotando todos sus avances a modalidades de educación en las cuales un estudiante de 2º año de Educación Media pueda desenvolverse sin complicaciones. En este sentido, se privilegia la comprensión profunda del concepto y su enlace con los contenidos venideros como parte de la coherencia matemática que se debe poseer.
¿Cuál es su potencial didáctico?	Como ya lo mencionamos, algunas situaciones desarrolladas en el material pueden incorporar elementos conceptuales que se trabajarán en años posteriores pero que se relacionan con el contenido que el material desarrolla, en este caso la propuesta didáctica se fundamenta en elementos como la metáfora, para hacer comprensible y desarrollable esta situación para los/las estudiantes del año escolar en cuestión. Así, se presentan situaciones problemáticas en contexto y la experimentación con el objetivo de poder encontrarle un sentido al uso de la variable aleatoria y de justificar el estudio de ella.

¿Cuáles son las situaciones que se desarrollan?	En este material se expondrá cómo la variable aleatoria constituye uno de los pilares fundamentales para que los/las estudiantes logren determinar y analizar modelos probabilísticos. A su vez, se relevarán las vinculaciones de la variable aleatoria con otros conceptos matemáticos, estadísticos y probabilísticos que en ella convergen, tales como variable, distribución, dispersión, probabilidad, entre otros. En el desarrollo del presente material para el/la profesor/a se desarrollarán las tres situaciones siguientes: **Situación 1: Variable aleatoria y su distribución de probabilidad** Esta situación se centra exclusivamente dentro de los márgenes que curricularmente se proponen para 2° año de Educación Media y presenta una guía para el/la estudiante. **Situación 2: Esperanza de Variables Aleatorias** Aquí se aborda la esperanza pero desde la distribución de probabilidades, es una mezcla entre los contenidos de 2° y 3er año de Educación Media, dado que el valor esperado se trabaja en 3er año de Educación Media, pero desde la mirada de la metáfora y el equilibrio, es completamente abordable en 2° año de Educación Media y le da sentido a calcular la variable aleatoria. Esta situación presenta su correspondiente guía para el/la estudiante. **Situación 3: Suma de Variables Aleatorias** Esta situación une los conceptos desarrollados en las dos situaciones anteriores y prepara al estudiante para trabajar el modelo binomial de 3er año de Educación Media de modo abordable para 2° año de Educación Media. Si bien, la suma no se explicita curricularmente para 3er año de Educación Media, se propone trabajar con el modelo binomial y en tal caso la suma cobra sentido. Por las características avanzadas con respecto al currículo de esta situación solo se plantea como una actividad para el/la docente y no para el/la estudiante. Dando la libertad a cada profesor/a sobre las decisiones de abordarlo en 2° año de Educación Media o en 3er año de Educación Media, dada su pertinencia para ambos niveles.

GEOMETRÍA

Guion Didáctico 1

Guion para el/la profesor/a: Ángulos en la Circunferencia

El estudio de la Geometría es algo que los alumnos y alumnas han realizado desde la enseñanza básica, desde los elementos primitivos. Ellos, a través de los conceptos euclidianos de plano, punto y recta, han construido la geometría hasta el estudio de los ángulos, triángulos, cuadriláteros y polígonos en general. Lo más importante ha sido establecer propiedades y proposiciones geométricas de validez universal. Esta construcción probablemente comenzó mediante el uso de regla y compás, para luego derivar en el estudio más analítico y la resolución de problemas. Por otra parte el uso de contextos y la conexión con la realidad, tal vez ha sido uno de los elementos claves en el estudio y avance de la geometría por parte de los/las estudiantes. Algunos slogans que han podido ayudar son como el siguiente: "la geometría está en todos lados". Ciertamente, al mirar el entorno, las figuras planas se reproducen en todas partes, en las construcciones, edificaciones, plazas, escuelas, etc. La circunferencia, en particular es un ente geométrico que también encuentra representantes en la vida cotidiana: una rueda de bicicleta, por ejemplo. Si bien estas relaciones con la realidad pueden introducir el estudio básico de la circunferencia y sus elementos, no necesariamente acompañan el nuevo estudio respecto a los ángulos en la circunferencia. Aquí el trabajo se vuelve eminentemente matemático y el contexto es geométrico, lo que es bueno tener claro desde el principio. Lo que interesa ahora es desarrollar el pensamiento analítico y deductivo y llegar a la demostración matemática. El propósito de este guion es entregar algunos elementos metodológicos para su aprendizaje.

La situación de aprendizaje que se desarrollará a lo largo del guion de el/la profesor/a es:

Situación: Ángulos y relaciones entre ángulos, a partir de la intersección de dos rectas y una circunferencia en el plano.

A continuación, se describe en detalle la primera situación:

Parte 1: Comprensión de la situación

Habilidades comunicativas

Los/las estudiantes ya han realizado un recorrido por la Geometría desde los años previos, revisando diferentes conceptos básicos y también desarrollando habilidades de pensamiento en el contexto geométrico. Por ejemplo, conocen los ángulos y sus clasificaciones, conocen los triángulos y sus caracterísicas según lados y ángulos. También han revisando propiedades o proposiciones matemáticas. Por ejemplo: que "las medidas de los ángulos interiores de un triángulo suman 180° ", o que "la medida del ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes".

Coherencia longitudinal: Es importante establecer una relación entre el conocimiento previo geométrico y los nuevos conceptos. Las propiedades de los ángulos y los triángulos serán clave para abordar esta nueva situación de aprendizaje

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

Habilidades comunicativas

El propósito de esta situación de aprendizaje es hacer un recorrido desde lo que conocen hasta la relación entre ángulos inscritos, semi-inscritos y centrales en una circunferencia. Para ello se propone recordar los elementos básicos de la Geometría: planos, puntos, rectas, semirrectas y trazos. Aquí se propone comenzar el trabajo con una actividad especial denominada "Geometría Mental"[6]. La idea de esta actividad es que los/las estudiantes hagan el ejercicio mental de "visualizar" estos objetos geométricos y tomen conciencia de se tratan de "entes de razón"[7]. Posteriormente el trabajo se debe orientar a recordar los ángulos y las relaciones entre ángulos. Notar que este trabajo debe ser desarrollado a partir de la posición relativa de dos rectas en el plano. El trabajo se extiende para que los/las estudiantes tengan la posibilidad de reconocer tipos de ángulos: contiguos, complementarios, suplementarios, opuestos por el vértice, agudos, obtusos, rectos, congruentes.

Ideas Básicas: Una forma de preparar el terreno para el trabajo con ángulos en la circunferencia tiene que ver con explorar la intersección entre dos rectas con una circunferencia.

Posteriormente se deben trabajar los elementos básicos en la circunferencia. Aquí será clave el uso de regla y compás para las construcciones. Los/las estudiantes tendrán que explorar el significado de una cuerda, una secante, una tangente, un diámetro, un radio. Como una forma de llegar a la parte culminante de esta situación de aprendizaje, los/las estudiantes tendrán que explorar la relación que se

6. Esta actividad ha sido propuesta por el Dr. Fidel Oteiza Morra en varias oportunidades. Por ejemplo, en el proyecto Fondef "Aprender Matemática Creando Soluciones", posteriormente en el curso Geometria.cl del Centro Comenius USACH. Es una forma interesante de trabajar con "la mente" los entes abstractos o ideales.

7. En el libro The Mathematical Experience, se muestra un unicornio que dice: "Tú me piensas, luego existo". Con esta metáfora, parafraseando a René Decartes, muestran la naturaleza de un ente de razón. Es un ente que existe en tanto y en cuanto es pensado.

produce al intersectar dos rectas con una circunferencia. Aquí se podrá llegar a la noción de ángulo inscrito, semi-inscrito y central. También las nociones de ángulo interior y exterior.

La presente actividad es importante, ya que por una parte permite establecer una conexión con el conocimiento geométrico previo, su profundización con otros aspectos, pero además permite revisar un aspecto clave de este nivel escolar propuesto en el marco curricular vigente: la formulación de teoremas y la demostración matemática.
En esta actividad, algunas dificultades que pueden presentarse tiene que ver con el hecho de conectar todo el conocimiento geométrico previo, no solo respecto a la circunferencia y sus elementos básicos, sino lo relacionado con ángulos, triángulos y sus propiedades. Por otra parte, el trabajo con la demostración matemática puede ser un tema que no sea simple y deba ser muy apoyado y guiado por el/la profesor/a. Conceptos tales como hipótesis y tesis, probablemente no sean nociones intuitivas para los/las alumnos/as. Otra dificultad, como ya se mencionó antes, tiene que ver con la ausencia de contextos reales para el estudio.

Habilidades de resolución de problemas

Cabe destacar que para esta situación de aprendizaje, a diferencia de otros temas geométricos, el contexto será fundamentalmente geométrico. Lo que interesa desarrollar con los/las estudiantes tiene que ver con las habilidades de pensamiento (aplicar, analizar) y las dimensiones de resolución de problemas y argumentación.

Por lo anterior, la motivación debe ser entendida como un avance en el estudio de la geometría y el desarrollo del razonamiento a partir de la exploración, verificación de conjeturas y la posterior demostración formal.

La pregunta en esta situación será ¿qué es y cómo hacer una demostración matemática?, ¿qué es la hipótesis?, ¿qué es la tesis?

Parte 2: Análisis de la situación

Habilidades comunicativas

Para desarrollar la exploración de los ángulos en la circunferencia, desde los elementos básicos hasta la mencionada relación entre ángulos, se proponen las siguientes formas o estrategias.

1. Geometría Mental[8]. En esta actividad, el profesor o profesora, apelando a la imaginación de sus estudiantes, invita a los "actores" que participarán en la unidad (las nociones elementales) usando geometría a ojos cerrados: se les presenta, actualiza y "enriquece". Se trata de traer a la mente del/la alumno/a visualizaciones de objetos geométricos de modo que vuelva a reconocerlos, a convivir con ellos. Se pretende poner de manifiesto que los elementos de la Geometría son entes de razón y, por lo tanto, son esencialmente mentales: lograr que los/las alumnos/as hagan algunos experimentos mentales con las propiedades que tienen los objetos geométricos, imaginar una recta en un plano, "ver" su infinitud, colocar una circunferencia en el mismo plano de la recta, determinar los casos posibles de intercepción entre la recta y la circunferencia, etc.

   Visualizando un plano: "*Ustedes saben lo que es un plano. Ahora, les propongo que lo veamos con nuestra imaginación. Cierren los ojos. ¿Pueden imaginar un plano? Algo así como el vidrio de una vitrina, sin nada, nada encima, que se extiende, se extiende,... no tiene límites. ¿Pueden verlo? ¿Pueden "mirarlo desde arriba"? ¿Hacerlo "girar" hacia delante? ¿Hacia atrás? Es importante. En ese plano y en otros semejantes, jugaremos con la geometría que estamos aprendiendo".*

   Visualizando una recta: *"Imaginen una recta sobre ese plano, extendiéndose en ambas direcciones, "sin límite", "más allá". Imaginen puntos sobre ella, "tantos como se pueda o se quiera". ¿Pueden ver una recta sobre el plano? Sólo una recta. Observen cómo se extiende hacia un lado y hacia el otro, sin límite, más allá, hacia ambos lados. ¿Ven cómo la recta divide al plano en dos partes? A estas partes se las llama semiplanos. Colorea uno de rojo y el otro de azul, con colores brillantes, luminosos. ¿Los pueden ver? Ahora, ¿pueden girar la recta? ¿Qué pasa con los colores?*

Múltiples perspectivas: Los ángulos en la circunferencia se pueden abordar desde diferentes estrategias. Por ejemplo: geometría mental, uso de instrumentos geométricos, uso de papelería, uso de GeoGebra.

Ideas Básicas: Se pretende poner de manifiesto que los elementos de la Geometría son entes de razón y, por lo tanto, son esencialmente mentales.

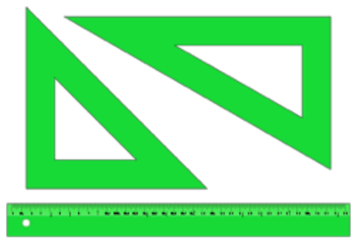
8. Adaptado del Material del Profesor de 2° Medio de Aprender Matemática Creando Soluciones. Centro Comenius USACH.
9. Puntos, rectas, semirrectas, trazos, circunferencias, arcos, ángulos, planos, semiplanos y algunas de las propiedades que se dan cuando se interceptan entre ellos.

Usando esta estrategia la idea es que los/las estudiantes puedan mentalmente visitar los diferentes objetos geométricos de una manera interesante y probablemente no realizada antes. El objetivo es que de lo básico se llegue finalmente a la visualización de la circunferencia y rectas que la cortan.

Ideas Básicas: El uso de instrumentos geométricos tales como regla, escuadra y compás, serán claves en la ruta didáctica para llegar a la relación entre ángulos en la circunferencia.

Habilidades de resolución de problemas

2. Uso de regla y/o escuadra. Los/las estudiantes deben tener la oportunidad de explorar qué sucede con la disposición de dos rectas en el plano.



Por ejemplo, pueden utilizar el plano P para estudiar las propiedades que tienen dos rectas paralelas. Dibujan dos rectas paralelas:

P

Luego, pueden utilizar el plano P para estudiar las propiedades que tienen dos rectas que se intersectan. Algunas preguntas que pueden responderse:

¿Cuántas regiones se generan? ¿Cuántas fronteras hay? ¿Hay puntos de intersección? ¿Se generan semirrectas?

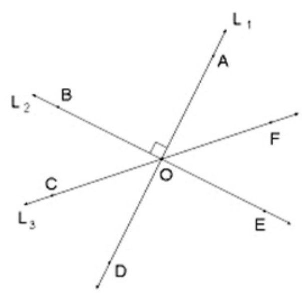
3. Uso de transportador. Dentro de la secuencia propuesta el propósito es que los/las estudiantes exploren diferentes tipos de ángulos, a partir de la disposición de rectas que se cortan y determinen además sus propiedades. Esta exploración en principio la pueden realizar con el uso de transportador, directamente midiendo los ángulos y obteniendo sus propias conclusiones.

GUION DIDÁCTICO N° 1

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

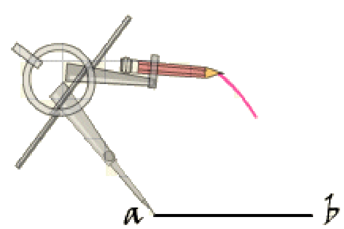
Por ejemplo, en la siguiente figura aparecen tres rectas, L_1, L_2 y L_3, que se interceptan en el punto *O*. ¿Cuánto miden los ángulos? ¿Qué relaciones se pueden establecer entre ellos?

Ideas Básicas: Toda la construcción parte en la intersección de dos o más rectas en el plano.



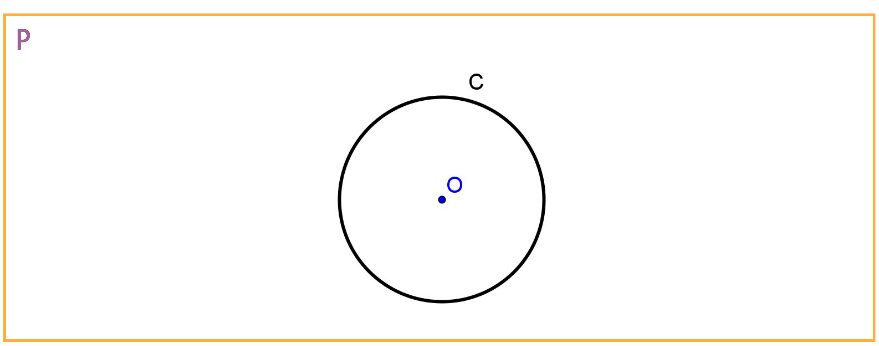
Aquí deben aparecer las nociones de ángulos adyacentes, complementarios, suplementarios, opuestos por el vértice, agudos, obtusos, rectos, congruentes.

4. Uso de regla y compás. Mediante regla y compás los/las estudiantes pueden explorar los elementos básicos de una circunferencia.



Ideas Básicas:
El trabajo con el compás permite recordar a la circunferencia como el lugar geométrico de "todos los puntos que equidistan de un punto llamado centro".

Primero deben dibujar una circunferencia C en un plano P:

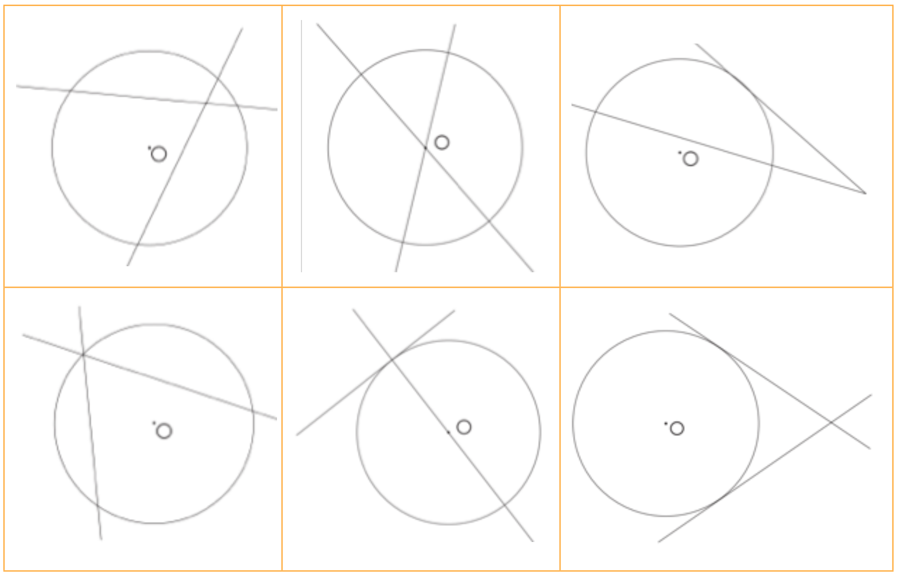


Luego deben ir dibujando diferentes elementos: radio, diámetro, cuerda, recta tangente, recta secante y arco.

Algunas preguntas que pueden potenciar este trabajo son: ¿Qué es un radio? ¿Cuántos radios se pueden construir? ¿Qué es un diámetro? ¿Cuántos diámetros se pueden construir? ¿Cuál es la relación entre el radio y el diámetro?
Similares preguntas se pueden hacer respecto de una cuerda, una recta secante, una recta tangente y un arco de circunferencia.

Un trabajo posterior tiene que ver con la posición relativa de dos rectas que se intersectan con una circunferencia. Es aquí donde se pueden ir configurando los diferentes ángulos que se pueden encontrar en una circunferencia. A modo de ejemplo:

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis



5. Uso de papelería

Habilidades comunicativas

Los/las estudiantes también tienen la posibilidad de usar papelería para comprobar relaciones entre ángulos. Ellos/as pueden construir sus circunferencias en cartulina, usar colores para las rectas que se intersectan. También pueden utilizar papel transparente (diamante o sueco) para "calcar" los ángulos y después compararlos con otros, simplemente superponiendo el papel transparente y desplazarlo o girarlo cuando sea necesario.

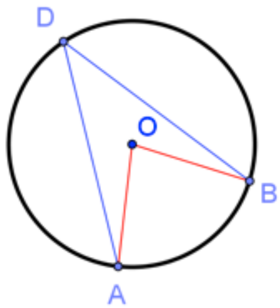
Ideas Básicas: TIC versus papelería.
Es importante que los/las estudiantes experimenten estas dos dimensiones para una mejor comprensión.

Habilidades de resolución de problemas

6. Uso de la tecnología. GEOGEBRA.

A través del uso del procesador geométrico GeoGebra, los/las estudiantes pueden explorar dinámicamente relaciones angulares en la circunferencia. Lo más interesante es que se pueden crear los objetos y estos se pueden manipular y cambiar de posición fácilmente. Además GeoGebra permite medir los ángulos. Con ello los/las estudiantes pueden verificar sus conjeturas y reafirmarlas.

Ideas Básicas:
El potencial que ofrece GeoGebra es indiscutido. La interacción y el movimiento permiten que los/las estudiantes puedan descubrir y generalizar propiedades.



Acorde a las estrategias descritas anteriormente los/las estudiantes pueden trabajar en las siguientes actividades:

Múltiples perspectivas:
El potencial de trabajo que ofrece la Geometría Mental, puede ser insospechado. Solo con cerrar los ojos y abrir la "pantalla mental" se puede activar la imaginación de los/las estudiantes.

Habilidades comunicativas

Habilidades de investigación

1. Realizan Geometría Mental[10].

Esta actividad se trata de que los/las estudiantes vuelvan a relacionarse con los elementos básicos de la Geometría, y que comprendan que el trabajo se centra en lo que sucede cuando algunos elementos geométricos se interceptan en un plano (intercepción entre rectas y entre rectas y circunferencias). Se sugiere que el profesor o profesora haga "vivir nuevamente" los conceptos básicos de la Geometría, los "actores invitados", con la imaginación.

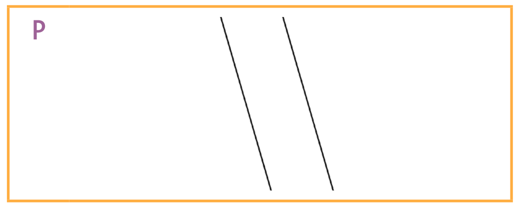
Los/las estudiantes, con los ojos cerrados, harán una visita guiada por el/la profesor/a a los conceptos de punto, recta, plano, ángulo, algunas relaciones entre ellos (incidencia entre una recta y un plano, por ejemplo). Se espera, además, que lleguen a la noción de concepto enriquecido, es decir, se sugiere que el profesor o profesora haga algo más que sólo recordar los elementos con los que es necesario trabajar en la unidad. Esto significa que a los "actores invitados" se les actualiza y se les enriquece con el estudio de nuevas propiedades y características, de manera tal, que se pueda posteriormente utilizar todo el conocimiento que está disponible cuando se considera o se encuentra con uno de ellos. La actividad se realiza en la sala de clases. El profesor o profesora interactúa con los/las alumnos/as, creando un ambiente que motive el interés por actualizar y enriquecer los conceptos básicos de la Geometría necesarios en esta unidad.

10. Adaptado del Material del Profesor de 2° Medio de Aprender Matemática Creando Soluciones. Centro Comenius USACH.

2. Establecen lo que sucede al disponer dos rectas L_1 y L_2 de distintas maneras en relación a un plano P.[11]

Primera situación: dos rectas paralelas

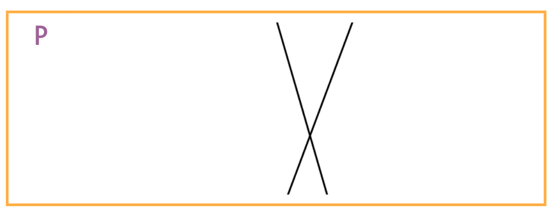
Los/las estudiantes con la ayuda de regla y escuadra deben dibujar en el plano dos rectas paralelas:



Las preguntas: ¿Cuántas regiones se generan? ¿Cuántas fronteras hay? ¿Hay puntos de intersección? ¿Cuántos? ¿Se generan semirrectas? ¿Cuántas? ¿Se generan ángulos?

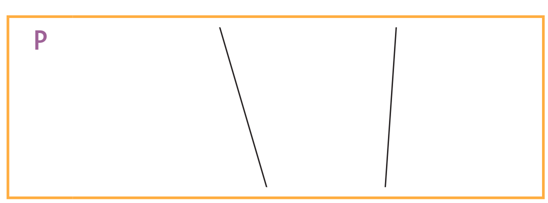
Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

Segunda situación: dos rectas secantes



Las preguntas: ¿Cuántas regiones se generan? ¿Cuántas fronteras hay? ¿Hay puntos de intersección? ¿Cuántos? ¿Se generan semirrectas? ¿Cuántas? ¿Se generan ángulos?

También es recomendable poner a los/las estudiantes en un caso como el siguiente:



Y recordar que el plano se "extiende sin fin en todas direcciones" y que por lo tanto esas dos rectas son secantes.

11. Adaptado del Texto del Estudiante "La circunferencia y un par de rectas en el plano", de los autores Fidel Oteiza, Lucrecia Zamorano y Osvaldo Baeza.

Tercera situación: dos rectas coincidentes. ¿Qué ocurre en este caso? Justificar.

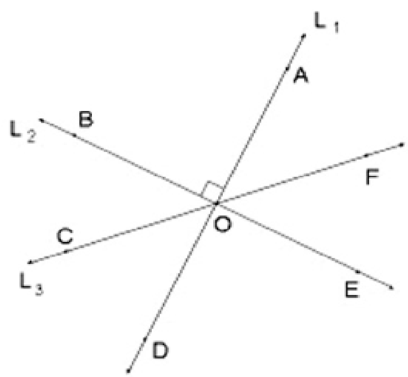
La idea es que los/las estudiantes comparen ambas situaciones y establezcan sus conclusiones. Además, a través de esta actividad los/las estudiantes pueden reforzar los conceptos de: plano, punto, recta, rayo, semirrecta, trazo, rectas paralelas, rectas secantes o rectas que se interceptan, región, frontera, ángulos.

3. Establecen la relación entre ángulos

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

A partir de rectas que se cortan los/las estudiantes, estudian la relación entre diferentes ángulos. En principio, esto lo pueden hacer utilizando el transportador para luego establecer propiedades que permitan inferir acerca del valor de un cierto ángulo. Por ejemplo:

En la siguiente figura aparecen tres rectas, L_1, L_2 y L_3, que se interceptan en el punto ***O***.



- Si $L_1 \perp L_2$, ¿cuánto mide el $\angle$ AOB?
- ¿Cuánto mide $\angle$FOE + $\angle$EOD + $\angle$DOC? ¿Por qué?
- ¿Cuánto mide $\angle$BOC + $\angle$AOF? ¿Por qué?
- Determina y justifica cuáles son: ángulos adyacentes, complementarios, suplementarios, opuestos por el vértice, agudos, obtusos.
- Determina y justifica cuáles son ángulos congruentes. ¿Por qué?

Habilidades de resolución de problemas

4. Establecen la relación entre ángulos y triángulos a partir de rectas que se cortan[12]

Esta actividad es una extensión de la anterior y pretende relacionar ángulos y triángulos, a partir de rectas que tienen diferentes disposiciones:

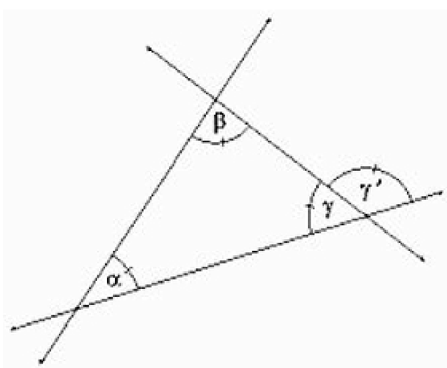
a) 3 rectas coincidentes
b) 2 rectas coincidentes y la otra corta las anteriores
c) 2 rectas coincidentes y la otra es paralela a las anteriores
d) Las 3 rectas son paralelas
e) 2 rectas paralelas y la otra corta a las anteriores
f) Las 3 rectas se cortan en un punto
g) Las 3 rectas se cortan en tres puntos (de dos en dos)

Ideas Básicas: A partir de dos o más rectas que son paralelas, o coincidentes, o que se cortan, es posible extender la exploración de los ángulos a los triángulos que se pueden formar.

Nota: la idea de trabajar con tres rectas corresponde a la comparación con el triángulo. Debe ocurrir que al realizar la actividad surja más de un ejemplo en cada una de las casillas que el recuadro indica, esto es muy positivo para iniciar el diálogo y la formulación de conjeturas.

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

A partir de la última situación se pueden establecer relaciones entre ángulos interiores y exteriores en un triángulo:



Ideas Básicas: recordar las propiedades de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo permitirá más adelante introducir la demostración matemática.

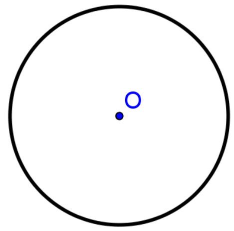
A partir de lo anterior los/las estudiantes pueden recodar o explorar ciertas propiedades en los triángulos:

- Propiedades de un ángulo interior en un triángulo.
- Propiedades de un ángulo exterior en un triángulo.
- Suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo.
- Suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo.
- Relación entre un ángulo exterior y los ángulos interiores no adyacentes.

12. Adaptado del Texto del Estudiante "La circunferencia y un par de rectas en el plano", de los autores Fidel Oteiza, Lucrecia Zamorano y Osvaldo Baeza.

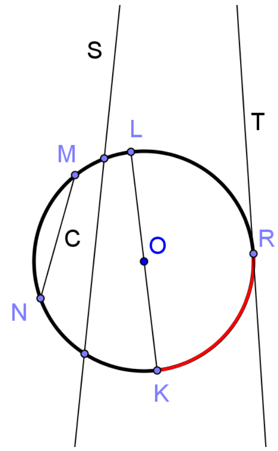
Habilidades de resolución de problemas

5. Exploran los elementos básicos en la circunferencia. Los/las estudiantes pueden explorar los elementos básicos de la circunferencia, desde la construcción misma. Lo primero será revisar cómo construir una circunferencia de radio dado r y centro O definido. Para ello deben usar compás:



Ideas Básicas: recordar los elementos básicos de una circunferencia será clave para lograr el propósito de esta situación de aprendizaje. Más aún, construir dichos elementos hará más significativo el recuerdo.

Posteriormente deben ir dibujando cada uno de los elementos: radio OK, diámetro LK, cuerda $\overline{MN}$, recta secante S, recta tangente T y arco ***KR***, usando regla y compás.



Algunas preguntas a contestar:

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

- ¿Cuál es la relación entre un diámetro y un radio?
- ¿Cuál es la cuerda de mayor longitud que se puede trazar en una circunferencia?
- ¿Qué es una recta secante? ¿Qué es una recta tangente?
- ¿Qué es un arco de circunferencia?

6. Exploran la relación entre dos rectas que se cortan y una circunferencia[13]. Aquí los/las estudiantes deben revisar las posibilidades de dos rectas y una circunferencia en cuanto a su posible intersección. Pueden realizar dibujos según las siguientes situaciones:

	2 rectas paralelas	2 rectas coincidentes	2 rectas que se cortan
No Interceptan a la circunferencia			
Interceptan a la circunferencia			

Conexiones: La ruta didáctica propuesta (desde las rectas que se cortan o no en el plano, hasta las rectas que se cortan o no en la circunferencia) permite una mayor conexión con los elementos primarios y fundamentales de la Geometría Euclidiana.

Nota: en cada casilla del recuadro puede y debe ir más de un ejemplo asociado. La comparación con el trabajo de otros/as estudiantes es esencial para conocer el número finito de opciones que cada casilla posee.

Algunas preguntas:

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

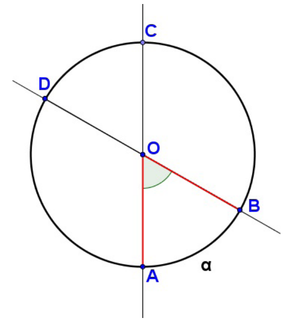
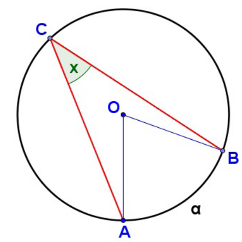
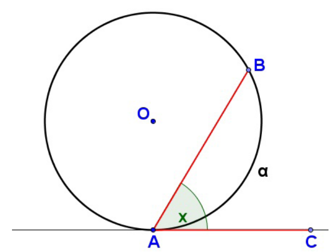
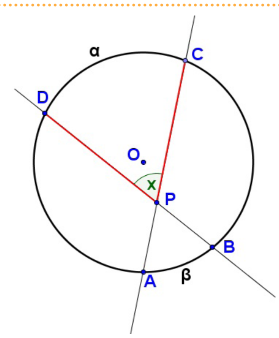
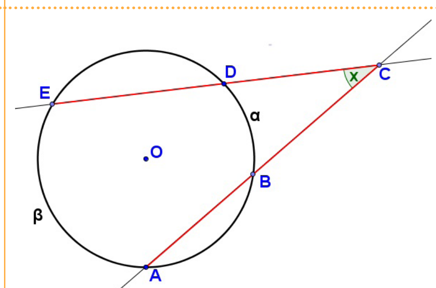
- En el caso de dos rectas paralelas que son secantes a la circunferencia: ¿Cuántas cuerdas se generan? ¿Cuántos arcos se generan?
- En el caso de dos rectas que se cortan y que son secantes a la circunferencia: ¿Cuántas cuerdas se generan? ¿Cuántos arcos se generan?
- En el caso de dos rectas que se cortan y son secantes a la circunferencia: ¿Cuántos casos se pueden dar según la intersección de las rectas?

Recordar que habrían al menos 4 casos a distinguir: se intersectan en el exterior, en la circunferencia misma, en el centro de la circunferencia o en cualquier otro punto en el interior de ella.

13. Adaptado del Texto del Estudiante "La circunferencia y un par de rectas en el plano", de los autores Fidel Oteiza, Lucrecia Zamorano y Osvaldo Baeza.

Habilidades de investigación

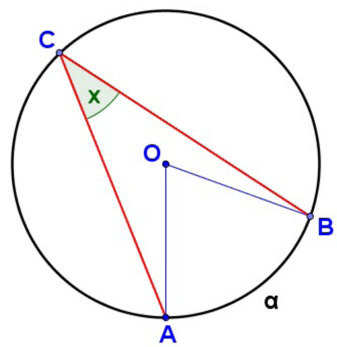
A partir de lo anterior, se puede introducir primeramente el concepto de ángulo del centro y su relación con el arco que subtiende; luego se presentan los conceptos de ángulo inscrito, semi-inscrito, interior y exterior, enfatizando la identificación de los arcos subtendidos en cada caso. Pueden completar la tabla:

Ángulo central: se forma a partir de dos rectas que se intersectan en el centro de la circunferencia. En otras palabras es aquél que se forma por dos radios.	
Ángulo inscrito: se forma a partir de dos rectas secantes que se intersectan en un punto de la circunferencia. En otras palabras es aquel que se forma de dos cuerdas que comparten un vértice.	
Ángulo semi-inscrito: se forma a partir de dos rectas, una recta secante a la circunferencia y una recta tangente a la circunferencia en uno de los dos puntos en donde la recta secante corta a la circunferencia.	
Ángulo interior: se forma a partir de dos rectas secantes a la circunferencia que se intersectan en el interior de una circunferencia. En otras palabras, sus lados son cuerdas que se intersectan en un vértice que se encuentra al interior de la circunferencia.	
Ángulo exterior: se forma a partir de dos rectas secantes que intersectan fuera de la circunferencia. Estas rectas pueden ser secantes o tangentes a la circunferencia; también puede ocurrir la combinación de una recta tangente y una secante a la circunferencia. Nota: el ejemplo sólo ilustra uno de los casos.	

7. Exploran la relación entre el ángulo inscrito y el ángulo central:
Una vez que tienen claridad de los tipos de ángulos involucrados, se pueden establecer relaciones entre ellos. Por ejemplo:

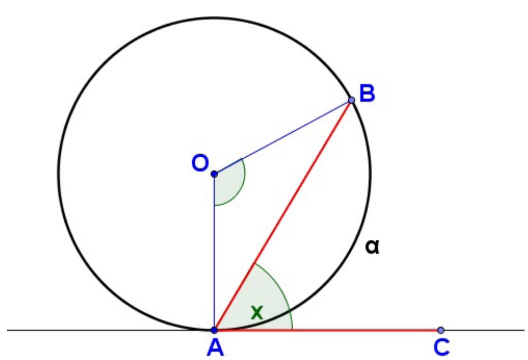
Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

Si un ángulo inscrito, subtiende el mismo arco que un ángulo central, ¿cuánto mide el ángulo inscrito, si el ángulo central subtiende un arco que mide α?



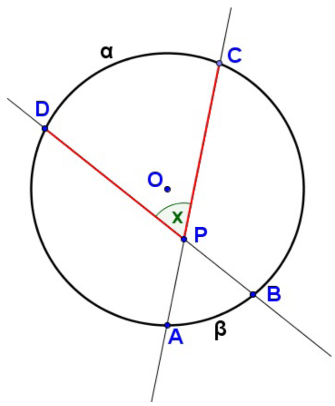
La idea es que los/las estudiantes puedan explorar esta relación mediante papelería, o bien usando GeoGebra. Que realicen sus conjeturas a partir de diferentes casos particulares y luego las vayan verificando.

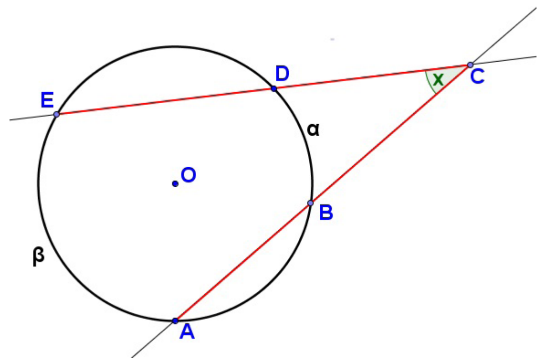
Posteriormente, pueden explorar la relación entre el ángulo semi-inscrito y el ángulo del centro que subtiende el mismo arco:



GUION DIDÁCTICO N° 1

8. Exploran la relación entre el ángulo interior o exterior y los arcos de circunferencia involucrados:





Finalmente, la pregunta tiene que ver con la forma en que estos resultados se pudieran demostrar para cualquier ángulo. Esto introduce la demostración matemática.

Parte 3: Profundización

Habilidades comunicativas

Lo primero es formalizar los conceptos principales involucrados en la situación de aprendizaje.

Ángulo central. Es aquel cuyo vértice es el centro de la circunferencia.

Ángulo inscrito. Es aquel cuyo vértice está en la circunferencia y sus rayos (lados) son secantes a ella.

Habilidades de investigación

Ángulo semi-inscrito. Es aquel cuyo vértice está en la circunferencia y uno de sus rayos (lados) es tangente y el otro secante

Ángulo interior. Es aquel cuyo vértice está en el interior de la circunferencia y sus rayos (lados) son secantes a ella.

Ángulo exterior. Es aquel cuyo vértice está en el exterior de la circunferencia y sus rayos (lados) son secantes a ella o uno de ellos es secante y el otro tangente o ambos son tangentes.

Lo segundo es introducir/recordar el concepto de demostración matemática.

A partir de los actores geométricos en escena y sus relaciones, es posible enunciar conjeturas siguiendo el esquema siguiente:

Si $\boxed{\qquad\quad ,}$ $\longrightarrow$ **entonces** $\boxed{\qquad\quad}$.

Esta es la oportunidad para recordar, introducir, enriquecer los conceptos de axioma, definición, teorema, hipótesis, tesis y demostración[14].

Es importante que los y las jóvenes comprendan, tanto lo que es una demostración, como las razones de por qué son importantes. Se puede recurrir a la historia de la matemática para poder ilustrar cómo ha sido desarrollada. Por ejemplo, los matemáticos griegos, cinco siglos antes de Cristo, introdujeron la noción de "afirmaciones que se refieren a toda una familia de objetos". Thales, al afirmar que "Toda recta que pasa por el centro de una circunferencia la divide en dos partes iguales", introduce, por primera vez en la historia, la noción de una afirmación general para toda una clase de objetos[15].

14. Adaptado del Material del Profesor de 2° Medio de Aprender Matemática Creando Soluciones. Centro Comenius USACH.
15. Se recomienda leer la novela de Guedj (2001), El Teorema del Loro. En las páginas 39-41 introduce esta idea. El libro, escrito por un matemático profesor de Historia de la Ciencia de la Universidad de París, es rica en situaciones que usted podrá usar en clases.

Se propone hacer de la demostración un objetivo transversal de la unidad, es decir, tratarla en distintos momentos del desarrollo. El propósito es lograr que el/la estudiante comprenda tanto el significado como el propósito de una demostración.

Se puede establecer con los/las alumnos/as que "ninguna propiedad geométrica", excepto los postulados iniciales o axiomas, puede ser aceptada si no es demostrada matemáticamente".

Es importante que la demostración sea realizada en interacción con el grupo. Que revisen lo siguiente: ¿Cuál es el punto de partida?, ¿qué es lo que sabemos?, ¿qué queremos demostrar?, ¿cómo podemos estar seguros? Por ejemplo, con GeoGebra se puede verificar que el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, independiente de la forma del triángulo. Posteriormente, se puede orientar a los/las alumnos/as a conjeturar acerca de los motivos por los cuales se debe demostrar. Es importante que quede claro que con GeoGebra se puede explorar, mostrar o verificar un cierto teorema, sin embargo, esto no constituye en sí una demostración formal.

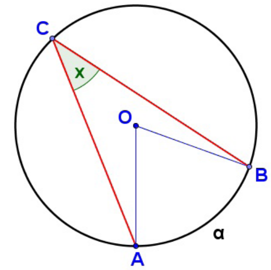
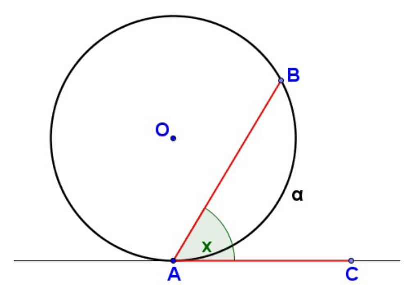
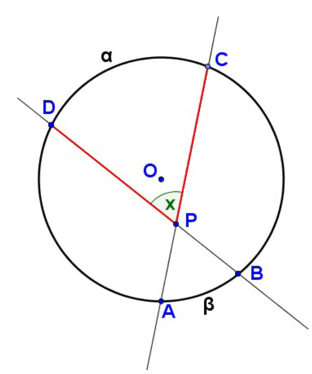
Antes de realizar con los/las estudiantes demostraciones formales respecto a las relaciones entre los ángulos de la circunferencia, se recomienda recordar algunas demostraciones de teoremas anteriores. Por ejemplo, que "la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo suman 180°". Se recomienda que organicen la demostración en términos de Hipótesis – Tesis, además del desarrollo y las conclusiones. Pueden ejercitar además con otras demostraciones. Por ejemplo, que las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo cualquiera suman 360°. O bien, "que la medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes".

Finalmente, se puede proponer demostraciones respecto a los ángulos en la circunferencia.

Nota: La medida o longitud de un arco de circunferencia tiene dos acepciones:

1. La longitud métrica, expresada en unidades de longitud (metros, centímetros, pulgadas, etc.), la cual depende del "tamaño" (radio) de la circunferencia y del ángulo central que lo determina.
2. La longitud angular, expresada en unidades de medida de ángulos (grados, radianes, etc.), la cual depende solo de la medida del ángulo del centro y es independiente del "tamaño" (radio) de la circunferencia.

Cuando se trabaja con arcos de circunferencia, suele encontrase en los textos escolares, por ejemplo, que un arco AB mide 36°. En este caso es necesario aclarar que en estricto rigor la medida del arco AB está asociada a un ángulo del centro que mide 36° y que subtiende dicho arco. Para simplificar la lectura se puede mencionar que la "longitud angular" del arco AB es 36°. Por lo tanto, mientras se tenga en cuenta esta consideración, no habrá problemas al enunciar los teoremas sobre ángulos de la circunferencia en términos de los arcos subtendidos en ella.

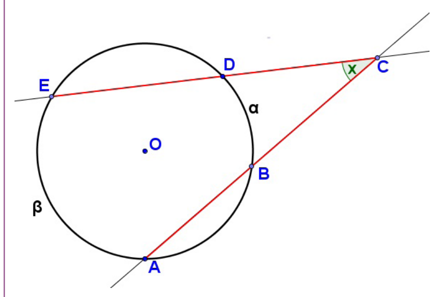
Teorema 1: La medida del ángulo inscrito en una circunferencia corresponde a la mitad de la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco, o bien a la mitad de la medida angular del arco que subtiende (o, simplemente, mide la mitad del arco que subtiende). Caso1: una de las cuerdas del ángulo inscrito pertenece a la misma recta que uno de los radios del ángulo del centro. Caso2: las cuerdas del ángulo inscrito no pertenecen a la misma recta que los radios del ángulo del centro. Caso3: una de las cuerdas del ángulo inscrito intersecta a uno de los radios del ángulo del centro.	
Teorema 2: La medida del ángulo semi-inscrito en una circunferencia corresponde a la mitad de la medida angular del arco que subtiende.	
Teorema 3: La medida de un ángulo interior en una circunferencia (determinado por dos rectas que se cortan al interior) corresponde a la semi suma de las medidas angulares de los arcos que subtiende.	

Teorema 4: En una circunferencia, un ángulo exterior (determinado por dos rectas secantes que se cortan al exterior) mide la semi diferencia positiva de las medidas de los arcos subtendidos.

Caso1: ángulo formado por dos rectas secantes

Caso2: ángulo formado por dos rectas tangentes

Caso3: ángulo formado por una tangente y una secante

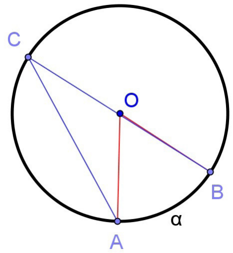
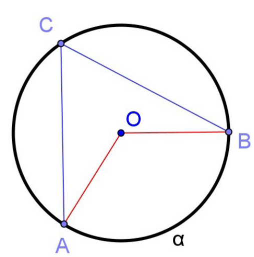
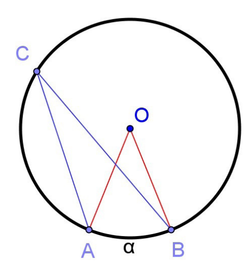


Para el teorema 1, la demostración se puede preparar de la siguientes forma:

Teorema 1:
El ángulo inscrito en una circunferencia mide la mitad del arco que subtiende

Este enunciado supone que el/la estudiante conoce, comprende y utiliza correctamente los conceptos involucrados: ángulo inscrito y medida (angular) de arco subtendido, lo cual ya se ha trabajado suficientemente con anterioridad. Cuanto más simple es el enunciado, más fácil de recordar.

Ilustración
Notar que para esta demostración existen tres casos:

Caso 1	Caso 2	Caso 3
		

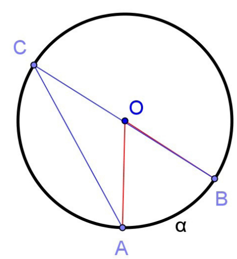
Estructura:
<u>Si</u>: en una circunferencia de centro O, un ángulo del centro tiene medida, $m(\angle AOB) = \alpha$
<u>entonces</u>: el ángulo inscrito que subtiende el mismo arco tiene medida $m(\angle ACB) = \dfrac{\alpha}{2}$

Hipótesis:
En una circunferencia de centro O, un ángulo del centro tiene medida $m(\angle AOB)=\alpha$

Tesis:
El ángulo inscrito que subtiende el mismo arco tiene medida $m(\angle ACB)=\dfrac{\alpha}{2}$

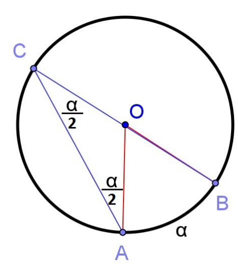
Demostración Caso 1:

1. En este caso, $\angle AOB$ corresponde a un ángulo exterior del triángulo ACO.



2. Usando el teorema del ángulo exterior, que dice "la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes", se tiene que dichos ángulos interiores deben sumar α.

3. Pero dado que el triángulo ACO es isósceles (CO es congruente con OA por ser radios), se tiene que los ángulos basales miden cada uno entonces $\dfrac{\alpha}{2}$.



4. En conclusión, $m(\angle ACB)=\dfrac{\alpha}{2}$.

Que era lo que se deseaba demostrar.

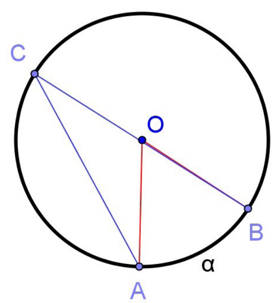
Esta demostración emplea un lenguaje más bien "literario" que la hace muy accesible para algunos/as estudiantes.

A continuación se presenta una demostración que emplea una "taquigrafía" más matemática y que puede resultar más adecuada para otros/as estudiantes. El/la profesor/a, en esta y otras demostraciones, puede proponer ambas "redacciones" o utilizar aquella que considere más adecuada atendiendo a las características de sus estudiantes.

Así, la demostración del Teorema 1, caso 1, podría ser redactado de la siguiente manera:

Enunciado: La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco que subtiende.

Ilustración caso 1:



Hipótesis: (Sabemos que)

$\angle ACB$ es inscrito y subtiende el arco AB

$m\angle AOB = \alpha$ y subtiende el arco AB, luego $mAB = \alpha$

Tesis: (Por demostrar)

$$m\angle ACB = \frac{\alpha}{2}$$

Demostración: (Razonamiento)

1. $AO = CO \ (radios) \Rightarrow \Delta OAC \ es \ isósceles \ y \ \angle ACO \cong \angle OAC$

2. $Sea \ m\angle ACO = m\angle OAC = x$

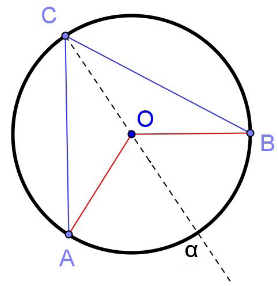
3. $\alpha = 2x \quad (Teorema \ del \ ángulo \ exterior \ de \ un \ triángulo)$

4. $x = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow m\angle ACB = \frac{\alpha}{2}$

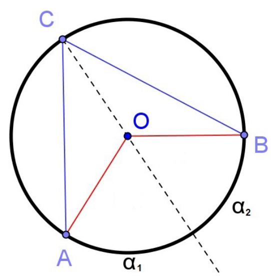
Ahora, continuaremos con el Teorema 1, caso 2.

Demostración Caso 2:

En este segundo caso, los rayos de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle ACB$ no pertenecen a la misma recta.

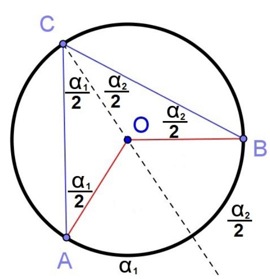


1. Se traza un rayo $\overline{CO}$ que divide al ángulo α en dos ángulos: α_1 y α_2 (no necesariamente congruentes) :



2. Usando el teorema del ángulo exterior en los triángulos ACO y BCO, que dice "la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes", se tiene que dichos ángulos interiores deben sumar α_1 y α_2 respectivamente.

3. Pero dado que los triángulos ACO y BCO son isósceles (CO es congruente con OA y con OB por ser radios), se tiene que los ángulos basales miden respectivamente en cada triángulo $\frac{\alpha_1}{2}$ y $\frac{\alpha_2}{2}$.



4. En conclusión $m(\angle ACB) = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}$, es decir, $m(\angle ACB) = \frac{\alpha}{2}$.

Que era lo que se deseaba demostrar.

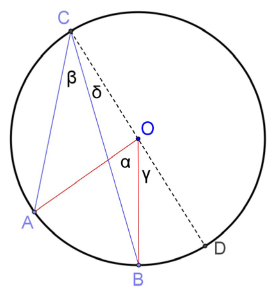
GUION DIDÁCTICO Nº 1

Y, finalmente el caso 3 del Teorema 1.

Demostración Caso 3:

Para la demostración del caso 3, algunas indicaciones:

1. Se puede trazar el segmento CD que pase por O:



2. Se identifican los ángulos α, β, γ y δ tal como se muestra en la figura anterior.
3. Se puede utilizar el resultado del **caso 1** (ya fue demostrado) para establecer que:
   - $\delta = \frac{\gamma}{2}$
   - $\beta + \delta = \frac{(\alpha + \gamma)}{2}$
4. De lo anterior se puede concluir que: $\beta = \frac{\alpha}{2}$

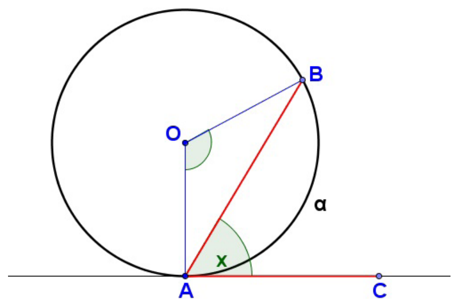
Se puede ordenar la demostración acorde a alguno o ambos de los esquemas presentados para el caso 1.

A continuación, las demostraciones de los teoremas 2, 3 y 4.

Teorema 2

Enunciado: La medida del ángulo semi - inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco que subtiende.

Ilustración:



Hipótesis: (Sabemos que)

La recta L es tangente a la circunferencia en A

Arco AB = (alfa)

El $\angle BAC$ es inscrito

Tesis: (Por demostrar)

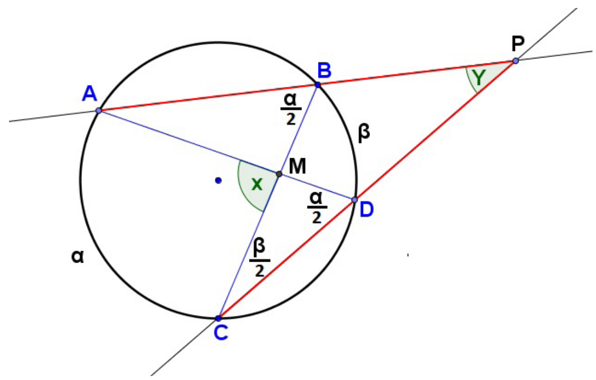
$$m\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$$

Demostración: (Razonamiento)

1. Se trazan $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, radios	
2. Sea $m\angle BAC = x$	
3. $m\angle AOB = \alpha$	(Por ser ángulo del centro)
4. $m\angle OAC = 90^\circ$	(El radio es perpendicular a la tangente)
5. Luego, $m\angle OAB = 90^\circ - x$	
6. $m\angle OBA = 90^\circ - x$	(ΔOAB es isósceles)
7. $m\angle AOB + m\angle OAB + m\angle OBA = 180^\circ$	(Suma de ángulos interiores del triángulo)
8. $\alpha + (90^\circ - x) + (90^\circ - x) = 180^\circ$	
9. $\alpha + 180^\circ - 2x = 180^\circ$	
10. $\alpha = 2x \Rightarrow x = \frac{\alpha}{2}$	

Queda demostrado el teorema del ángulo semi-inscrito

Teoremas 3 y 4, Caso 1

Enunciado: En una circunferencia, un ángulo interior mide la semi suma de los arcos que subtiende y el ángulo exterior mide la semi diferencia positiva de los arcos que subtiende.
Ilustración: 
Hipótesis: (Sabemos que)
El $\angle APC$ es exterior y el $\angle AMC$ es interior. Ambos ángulos subtienden los arcos AC y DB La $mAC = \alpha$ y la $mDB = \beta$
Tesis: (Por demostrar)
$m\angle AMC = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ y $m\angle APC = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$
Demostración: (Razonamiento)
1. Sea $m\angle AMC = x$; $m\angle APC = y$ 2. $m\angle ADC = \dfrac{\alpha}{2}$ y $m\angle BCD = \dfrac{\beta}{2}$ (Teorema del ángulo inscrito) 3. $m\angle AMC = \dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}$ (Teorema del ángulo exterior de un triángulo) <u>Queda demostrado el teorema del ángulo interior</u> 4. $m\angle ABC = \dfrac{\alpha}{2}$ y $m\angle BCD = \dfrac{\beta}{2}$ (Teorema del ángulo inscrito) 5. Luego, $m\angle PBC = 180° - \dfrac{\alpha}{2}$ (Suplemento del $\angle ABC$) 6. $y+\dfrac{\beta}{2}+\left(180°-\dfrac{\alpha}{2}\right)=180°$ (Suma de los ángulos interiores del ΔPBC) 7. Despejado y se obtiene $y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ <u>Queda demostrado el teorema del ángulo exterior</u>

GUÍA ESTUDIANTE

Ángulos en la circunferencia

GUÍA
1

Objetivo:

Explorar los ángulos que se forman en la circunferencia, a partir de dos rectas que se intersectan con dicha circunferencia. Demostrar la relación entre el ángulo inscrito y el central.

Ten presente que: Puedes desarrollar las actividades en el orden que más te ayude a aprender, pero no dejes de contestar las preguntas que tienen un ícono de un lápiz, con ellas podrás evaluarte y saber si estás logrando las metas de la clase.

Preguntas previas

- ¿Qué tanto recuerdas de lo que has aprendido hasta ahora en la unidad de Geometría? Conversa con tus compañeros y luego responde las siguientes preguntas:

  - ¿Qué recuerdas sobre circunferencia? ¿Cómo puede definirse una circunferencia como "lugar geométrico"? ¿Qué debe entenderse entonces por círculo? Argumenta.

  - Utiliza un compás para dibujar una circunferencia C en el plano P.
  - A continuación dibuja en la circunferencia los elementos básicos de ella. Destaca en color el concepto de círculo.

P

- A partir de lo anterior, ¿cuáles son los elementos básicos de una circunferencia? Nómbralos y defínelos a continuación.

- ¿Cuál es la relación entre un diámetro y un radio? ¿Cuál es la cuerda de mayor longitud? ¿En cuántas partes divide esta cuerda mayor a la circunferencia? ¿Sucede esto en cualquier circunferencia? Discute con tus compañeros/as y el/la profesor/a.

- Respecto de una tangente, ¿qué propiedad cumple el radio que une el centro de la circunferencia con el punto de tangencia? Dibuja la situación y verifica tu conjetura.

P

Un plano, dos rectas y una circunferencia[1]

- Cuando en un plano se dibujan dos rectas cualesquiera y una circunferencia, ellas pueden tener distintas posiciones en el plano. Dibuja distintas posibilidades y compara tu respuesta con las de otros/as compañeros/as.

A continuación completa la siguiente tabla y compara las respuestas de la actividad anterior.

	2 rectas paralelas	2 rectas coincidentes	2 rectas que se cortan
No interceptan a la circunferencia			
Interceptan a la circunferencia			

1. Adaptado del Texto del Estudiante "La circunferencia y un par de rectas en el plano", de los autores Fidel Oteiza, Lucrecia Zamorano y Osvaldo Baeza.

- En el caso de dos rectas paralelas que son secantes a la circunferencia: ¿Cuántas cuerdas se generan? ¿Cuántos arcos se generan? Ponle letras a las intersecciones de las rectas con la circunferencia en la tabla anterior. Anota con simbología matemática los elementos mencionados.

- En el caso de dos rectas que se cortan y que son secantes a la circunferencia: ¿Cuántas cuerdas se generan? ¿Cuántos arcos se generan? Ponle letras a las intersecciones de las rectas con la circunferencia en la tabla anterior. Anota con simbología matemática los elementos mencionados.

Identificando elementos en las circunferencias[2]

Observa las siguientes figuras:

Figura A	Figura B

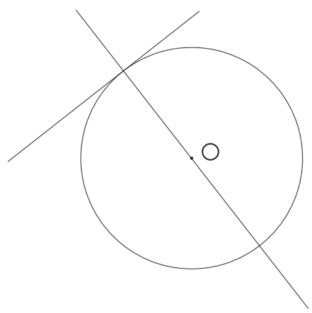
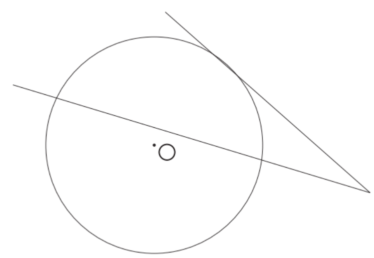
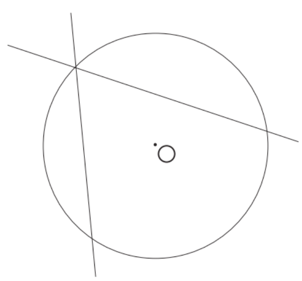
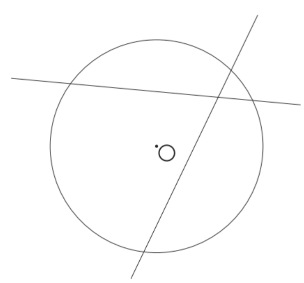

	

Figura C	**Figura D**
	

¿Cuál de las figuras anteriores (A, B, C, D) muestra rectas que se intersectan en la circunferencia?

2. Adaptado del Texto del Estudiante "La circunferencia y un par de rectas en el plano", de los autores Fidel Oteiza, Lucrecia Zamorano y Osvaldo Baeza.

- Asígnales letras del alfabeto griego a los ángulos formados por la intersección de las rectas en la figura.

¿Es posible determinar el valor de los ángulos que forma la intersección de las rectas? Justifica

¿Cuál de las figuras anteriores (A, B, C, D) muestra a dos secantes que se intersectan en la circunferencia?

- Identifica con letras mayúsculas, los puntos de intersección de las secantes con la circunferencia escogida.
- Asígnale una letra del alfabeto griego al ángulo formado por la intersección de las dos rectas en la figura.

¿Cuál es el arco que subtiende el ángulo anterior? ¿Qué nombre recibe dicho ángulo? Discute con tus compañeros/as y el/la profesor/a.

- Identifica y escribe los segmentos que se generan en la figura a partir de las intersecciones.

¿Cuál de las figuras anteriores (A, B, C, D) muestra a dos rectas secantes que se interceptan en el interior de la circunferencia?

- Identifica con letras griegas los ángulos que se forman al interior de la circunferencia escogida.

¿Cuáles son ángulos opuestos por el vértice? ¿Cuáles son ángulos suplementarios? Justifica.

- Identifica con letras mayúsculas, los puntos de intersección de las secantes con la circunferencia.
- Escribe los segmentos generados en la figura.

¿Cuál de las figuras anteriores (A, B, C, D) muestra a una secante y una tangente que se intersectan en el exterior de la circunferencia?

- Identifica con letras mayúsculas, los puntos de intersección entre las rectas, y las intersecciones de ellas con la circunferencia.
- Escribe todos los segmentos generados en la figura y todos los arcos de circunferencia.

Identificando ángulos interiores y exteriores a la circunferencia

- A partir del trabajo anterior, identifiquen lo que sucede en las siguientes figuras. Marquen con mayúsculas las intersecciones entre las rectas y con la circunferencia. Designen los ángulos formados con letras griegas. Identifiquen los trazos formados y los arcos de circunferencia.

Figura E	Figura F

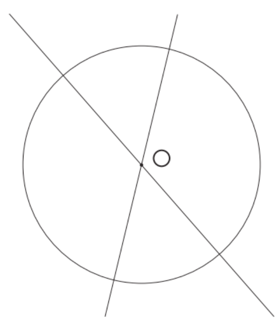
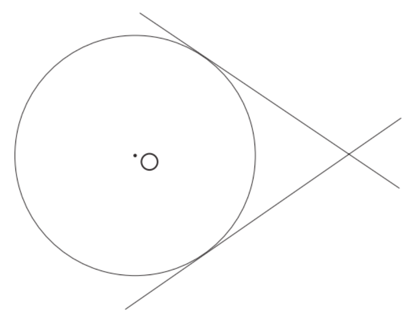
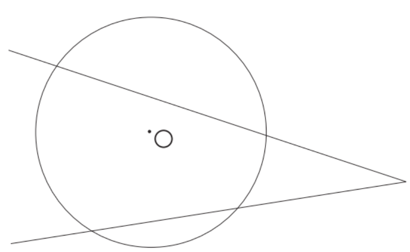
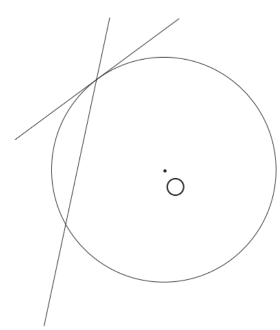

	

Figura G	**Figura H**
	

¿En cuáles de las figuras (E, F, G, H) se forman ángulos interiores o exteriores?
¿En qué figuras se forman ángulos congruentes? Justifica.

¿En cuáles de las figuras (E, F, G, H) se muestran ángulos centrales o del centro?
Discute con tus compañeros/as y el/la profesor/a.

Relación entre el ángulo central y el ángulo inscrito

- A continuación se propone explorar si existe alguna relación entre un ángulo central y un inscrito que subtienden cuando subtienden el mismo arco.

  - Utiliza un compás para dibujar al menos tres circunferencias en el plano P. A continuación en cada una de ellas dibuja un ángulo central y un ángulo inscrito que subtiendan el mismo arco. La idea es que en las tres circunferencias se plasmen tres posibles (pero distintas) configuraciones para estos ángulos.

P

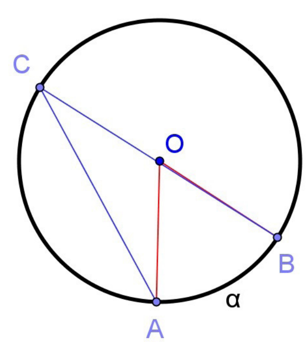
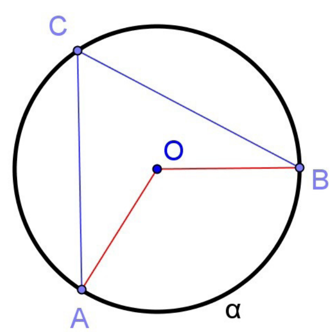
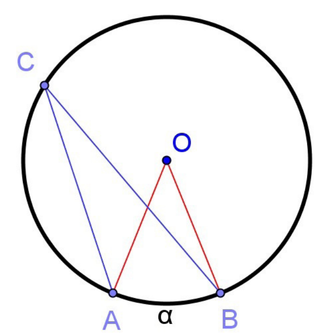
Midan el ángulo inscrito y el ángulo del centro que subtienden el mismo arco. Plantea una conjetura respecto a la relación entre ellos.

- Reafirmen su conjetura utilizando algún papel transparente (por ejemplo, papel diamante o similar). Para cada una de las figuras anteriores "calquen" la circunferencia y los ángulos. Después hagan calzar el ángulo inscrito y el ángulo central de la misma circunferencia. ¿Es posible establecer alguna relación? ¿Se aprecia esto en todas las circunferencias dibujadas? Justifiquen.

Verifiquen su conjetura usando transportador, o bien usando GEOGEBRA. Comparen sus hallazgos con el resto de sus compañeros/as. Discutan los resultados con el/la profesor/a.

Demostrando la relación entre el ángulo central y el ángulo inscrito

- A continuación se propone formalizar la relación entre el ángulo inscrito y el ángulo central, cuando subtienden el mismo arco en una circunferencia. Esta actividad la debes realizar en conjunto con el/la profesor/a.
  - En la actividad tuviste que dibujar tres circunferencias donde se mostrarán diferentes disposiciones para el ángulo inscrito y el central de modo que siempre subtendieran el mismo arco. Probablemente, pensaron en alguna de las siguientes tres posibilidades:

Caso 1	Caso 2	Caso 3
		

  - ¿Cuál es la diferencia? Descríbela a continuación.

¿Por qué debe realizarse la demostración en cada uno de estos casos? Discute con tus compañeros/as y el/la profesor/a.

Realicen la demostración para el Caso 1, siguiendo la estructura propuesta.

Teorema:

Hipótesis:

Tesis:

Demostración (Caso 1):

GUÍA 1 N° 1 / ESTUDIANTE

- ¿Qué conocimiento previo fue necesario traer a colación para elaborar los argumentos de la demostración? Describe a continuación.

- ¿Cuán diferente puede ser la demostración en los otros casos? Discute con tus compañeros/as y el/la profesor/a.

- Realiza las demostraciones de los casos 2 y 3 en tu cuaderno. Discute con tus compañeros/as y el/la profesor/a de qué manera se plantean los argumentos. ¿Cuál fue el conocimiento previo requerido en estos casos?

Síntesis

- Conversa con tu clase y responde las preguntas, con las conclusiones extraídas de las ideas más relevantes:

  - ¿Qué posiciones existen cuando se tienen dos rectas y una circunferencia en el mismo plano? Den algunos ejemplos.

  - ¿Qué tipos de ángulos se forman cuándo se intersectan dos rectas y una circunferencia?

GUÍA 1 Nº 1 / ESTUDIANTE

- En conjunto con tus compañeros/as y profesor/a definan formalmente:

Ángulo central:

Ángulo inscrito:

Ángulo semi-inscrito:

Ángulo interior:

Ángulo exterior:

- ¿Qué relación existe entre el ángulo central y los ángulos no centrales (inscritos, semi-inscritos, interiores y exteriores) cuando subtienden el mismo arco? Describe.

- Demuestra las relaciones anteriores.

- Crea, para cada caso, un ejercicio de aplicación de estas relaciones o teoremas.

Evaluando mi proceso de aprendizaje:

Revisa tu desempeño en la siguiente evaluación: primero marca en los espacios que corresponda en la tabla y luego responde a las preguntas.

- Instrucción: En una escala de 1 a 5, califica de acuerdo al nivel de logro.
  1: No necesité hacer esta actividad
  2: No entendí esta actividad
  3: Aprendizaje nivel bajo
  4: Aprendizaje nivel medio
  5: Aprendizaje nivel avanzado

Aspecto a evaluar	1	2	3	4	5
Identificar los elementos básicos de una circunferencia: radio, diámetro, cuerda, recta secante, recta tangente, arco.					
Describir los elementos básicos de una circunferencia.					
Identificar las diferentes disposiciones que pueden tener dos rectas y una circunferencia en el plano.					
A partir de las disposiciones que pueden tener dos rectas y una circunferencia en el plano, identificar ángulos, trazos y arcos de circunferencia.					
Identificar ángulos centrales, inscritos y semi-inscritos.					
Identificar ángulos interiores y exteriores.					
Identificar la relación entre un ángulo central y un ángulo inscrito cuando subtienden el mismo arco.					
Demostrar la relación entre un ángulo central y un ángulo inscrito cuando subtienden el mismo arco (casos 1, 2 y 3).					

- ¿Cuál es la mejor forma o material que te ayudó a comprender los conceptos trabajados?

- Otros aspectos de tu aprendizaje que quisieras resaltar. Descríbelos.

DATOS Y AZAR

Guion Didáctico 2

Guion para el/la profesor/a: Variables Aleatorias

De manera recurrente, se hace presente en la tarea de el/la profesor/a el conectar la matemática con la realidad de los/las estudiantes presentes en su sala de clases. Pues bien, en este guion se presentará la Variable Aleatoria como una de las herramientas para lograr esta vinculación tan necesaria. Más aún, se expondrá cómo la variable aleatoria constituye uno de los pilares fundamentales para que los/las estudiantes logren determinar y analizar modelos probabilísticos. A su vez, se relevarán las vinculaciones de la variable aleatoria con otros conceptos matemáticos, estadísticos y probabilísticos que en ella convergen, tales como variable, distribución, dispersión, probabilidad, entre otros.

En el desarrollo del presente guion para el/la profesor/a se desarrollarán las tres situaciones siguientes:

- **Situación 1**: Variable aleatoria y su distribución de probabilidad
- **Situación 2:** Esperanza de Variables Aleatorias
- **Situación 3:** Suma de Variables Aleatorias

A continuación, se describe en detalle la primera situación:

Parte 1: Comprensión de la situación

Hasta el momento, los/las estudiantes han tenido una serie de experiencias que los han acercado al estudio de la estadística y la probabilidad. Ya desde el primer nivel de enseñanza básica *han desarrollado habilidades de lectura, análisis crítico e interpretación de información presentada en tablas y gráficos. Por otra parte, han desarrollado la habilidad para recolectar, organizar, extraer conclusiones y presentar información. Ahora bien, en la Educación Media, se procura que desarrollen conceptos y técnicas propias de la estadística y la teoría de probabilidades, que les permitan realizar inferencias a partir de información de naturaleza estadística y distinguir entre los fenómenos aleatorios y los deterministas*[18].

El propósito de esta situación es introducir el concepto de Variable Aleatoria (VA) en distintas situaciones que involucren el azar, presentándola como una función, de modo de conectar la probabilidad estudiada con el estudio de las funciones, propio del eje curricular de Álgebra.

Coherencia longitudinal:
Luego de la VA los estudiantes podrán estudiar modelos de distribuciones de probabilidad de datos, tales como binomial y normal.

A partir de algunos ejemplos, se propone que el/la profesor/a permita a los/las estudiantes pasar del estudio de los sucesos aislados al estudio de las distribuciones de probabilidad y, más adelante, entender la función de probabilidad como una potente herramienta que permite hacer un análisis matemático de un fenómeno que es aleatorio.

Antes de adentrarse en los ejemplos sugeridos al profesor para iniciar el estudio de la Variable Aleatoria, se le recomienda analizar qué conocimientos previos poseen los alumnos y su nivel de comprensión, dado que de ello dependerá el éxito de las actividades propuestas más adelante. Inicialmente, es importante que los/las estudiantes tengan una clara idea de lo que es el azar y de cómo éste se encuentra presente en distintas situaciones de contexto. Junto a ello, el/la docente debe considerar que los/las estudiantes ya han profundizado en los Experimentos aleatorios y deterministas, probabilidad laplaciana, medidas de tendencia central, posición, dispersión.

18. Ministerio de Educación, 2009. Actualización Curricular.

Se sugiere entonces realizar algunas preguntas que hagan reflexionar a los/las estudiantes y que, a su vez, puedan poner a prueba su intuición haciendo referencia a lo que han estudiado en años anteriores. Algunos ejemplos de situaciones son:

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

1. ¿Cuántas veces has tenido que responder pruebas de selección múltiple? Es muy probable que te hayas encontrado con alguna pregunta que no sabías responder, ¿cómo actuaste frente a esa situación?

Y si en una de tus pruebas el/la profesor/a señalara que una pregunta mal respondida descuenta puntaje y que si se deja en blanco no afecta, ¿te arriesgarías igual a responder al azar? Y, si en preguntas de cuatro alternativas, hay dos que seguro no son la respuesta correcta y de las dos que quedan una es la correcta, pero no sabes cuál, ¿Te arriesgarías por una de las dos alternativas?, ¿por qué?

2. Imagina que participas en un concurso en el que debes elegir entre dos opciones:

Opción A: Recibir $1 000 000 de pesos si respondes correctamente a una pregunta de actualidad.

Opción B: Lanzar una ruleta justa con dos opciones igualmente probables (equiprobables). Recibes $0 si aciertas a la opción incorrecta o $2 000 000 si aciertas a la opción correcta.

¿Cuál de las dos opciones elegirías y por qué?

3. Comprueba tus intuiciones sobre el azar. ¿Tienes una buena intuición? ¿Cómo piensas que deberían ser los resultados de lanzar una moneda 20 veces seguidas? ¿Serías capaz de escribir 20 resultados del ejercicio de lanzar una moneda (sin lanzarla realmente, sino como tú pienses que debieran ser los resultados) de forma que otras personas piensen que has lanzado la moneda en realidad? En este contexto, ¿podría otra persona adivinar que estás "haciendo trampa"?[19]

Posiblemente, en el ejemplo 3 el/la profesor/a podría notar que gran parte de los/las estudiantes tiende a mostrar de forma muy clara la equiprobabilidad de los eventos, mostrando igual cantidad de caras que de sellos, y además con rachas muy cortas. Esto puede

19. Ruiz B. Adaptado de Tesis Doctoral: Análisis Epistemológico de la Variable Aleatoria. Universidad de Granada.

ser luego comprobado al pedir a los/las estudiantes que hagan de forma experimental el lanzamiento de la moneda y que de ese modo contrasten con su intuición inicial. Es importante notar que la equiprobabilidad, en este caso, es teórica y que no necesariamente será evidenciada en un experimento con tan pocas repeticiones.

El/la profesor/a también debe asegurarse que los/las estudiantes conocen la regla de Laplace, de modo que puedan calcular algunas probabilidades teóricas usando tal modelo. En este caso, los ejemplos tradicionales tienden a ser muy efectivos y rápidos, teniendo presente que se espera recordar un trabajo previo con las probabilidades. Por ejemplo, lanzamiento de uno o dos dados, sacar una carta de un mazo, lanzar una moneda, entre otras.

También, en este momento se pueden recordar los conceptos relacionados con los experimentos aleatorios y los deterministas, de modo que no queden dudas sobre lo que más adelante será el dominio de la Variable Aleatoria.

Una vez activados los conocimientos previos, se puede dar paso al estudio de la Variable Aleatoria, para ello es recomendable iniciar con situaciones sencillas, en las que no sea extremadamente complejo determinar el espacio muestral. Un ejemplo inicialmente sencillo pero que permite analizar todos los conceptos requeridos en el nivel es el siguiente:

En una bolsa obscura hay 100 pelotitas de cinco colores diferentes. 10 naranjas, 10 amarillas, 20 verdes, 30 rojas y 30 azules. Si sacas una pelotita sin mirar ¿podrías asegurar a priori qué color saldrá?

Ante esta situación, se pueden realizar preguntas que permitan establecer las condiciones mínimas requeridas para definir correctamente una Variable Aleatoria, entre ellas: ¿Podría esta situación corresponder a un experimento aleatorio, por qué? ¿Cuál es el espacio muestral en este experimento? ¿Crees que se pueda simular este experimento pero sin tener las 100 pelotitas? Explica como podrías hacerlo.

Antes de profundizar en las actividades que permitan la comprensión del concepto de Variable Aleatoria, por parte de los/las estudiantes, el/la profesor/a debe tener presente que el estudio estará, en este nivel, limitado al estudio de la Variable Aleatoria Discreta, quedando la Variable Aleatoria Continua postergada al nivel siguiente –3^er^ año de Educación Media–, sin embargo, se sugiere al profesor tomar la decisión que le parezca más pertinente, pues si considera que su grupo de estudiantes puede avanzar al estudio del fenómeno continuo puede incorporar actividades para ello. En este material, se hablará de Variable Aleatoria para referirse al caso discreto, sin la necesidad de especificarlo en cada ocasión.

Brevemente, se aclara que la Variable Aleatoria Continua es aquella que puede tomar cualquier valor en un intervalo de números reales. Sin embargo, a diferencia de las Variables Aleatorias Discretas, la probabilidad de que salga un valor específico es prácticamente nula. Lo que tiene sentido, en el caso de las Variables Continuas, es la probabilidad de que un valor esté en un intervalo determinado.

Finalmente, se destaca que al proceder al estudio de la Variable Aleatoria, el/la profesor/a debe tener presente que una de las principales dificultades con las que el/la estudiante se podría enfrentar en la construcción de la noción de Variable Aleatoria sería no visualizar la presencia del azar en el fenómeno aleatorio que se está tratando de modelar a través de la Variable Aleatoria. Junto a ello, es común que el/la estudiante confunda el valor asignado a la Variable Aleatoria con el resultado del fenómeno aleatorio, es por ello que no se recomienda el tratamiento de la Variable Aleatoria como asociada al valor de los datos.

Parte 2: Análisis de la situación

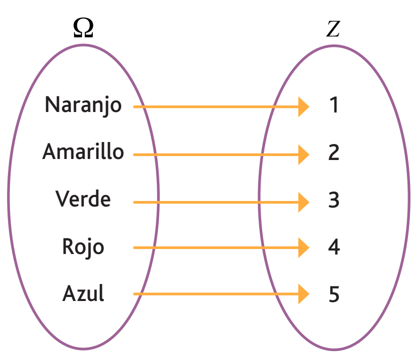
En el estudio de la Variable Aleatoria se recomienda usar más de una representación para cada experimento realizado, de modo de relacionar el lenguaje simbólico con las representaciones pictóricas y el uso de manipulativos, sean estos concretos o digitales.

Inicialmente, el/la estudiante debe descubrir que la Variable Aleatoria es una función, para ello se propone, usando el ejemplo de las 100 pelotitas en la bolsa, realizar algunas simulaciones del experimento, con una cantidad menor (sólo si no cuenta con todo el material) o con las 100 pelotitas. De este modo, los/las estudiantes podrán primero definir las **Variables Experimentales (VE)**. En este caso, las Variables Experimentales no necesariamente coincidirán con la Variable Aleatoria, ya que dependerá de la cantidad de sacadas, y por cierto, del azar.

Reconocida la variable y comprendido que es aleatoria, es posible comenzar a hablar de variable aleatoria.

Habilidades de resolución de problemas

Es importante que el/la estudiante pueda definir el espacio muestral de los experimentos que realice. Luego, que asigne un valor numérico a cada uno de los elementos de dicho espacio, de modo de tener una regla de correspondencia entre el espacio muestral y los números reales, la que estará definida por una función llamada Variable Aleatoria. Por ejemplo, usando un diagrama sagital, los/las estudiantes pueden realizar la siguiente representación:



En este caso, el espacio muestral es:

$\Omega = \{Naranjo, Amarillo, Verde, Rojo, Azul\}$ y la regla de correspondencia es la dada por las flechas desde Ω hasta Z. En este momento, es conveniente relacionar con los conocimientos de los/las estudiantes sobre las funciones, de modo de introducir la notación adecuada, identificando a X como la función cuyo dominio es Ω y cuyo recorrido es Z.

Ideas Básicas: Es importante notar que la VA es una función, definida desde el espacio muestral a los números reales.

También es posible denotar la función como: $X:\Omega \rightarrow Z$, teniendo presente que los valores del recorrido podrían ser distintos a 1, 2, 3, 4, 5, ya que dependerá de la definición que el/la estudiante pueda dar. Esta notación permitirá luego definir la distribución de probabilidad de forma simbólica.

Habilidades de investigación

Otros ejemplos en los que el/la estudiante puede practicar definiendo una Variable Aleatoria se listan a continuación. En ellos es recomendable siempre identificar el espacio muestral y explicitar la regla de correspondencia, siguiendo con la descripción del recorrido.

1. Consideremos el lanzamiento de una moneda. El espacio muestral está constituido por dos posibles resultados, "Cara" y "Sello".

   Sea entonces $X(Cara)=0$ y $X(Sello)=1$; de esta manera se han transformado los dos posibles resultados del espacio muestral en puntos sobre la recta de los reales.

2. Consideremos el lanzamiento de dos dados y los 36 resultados posibles. Se define la variable aleatoria Y como la suma de los valores de las dos caras de los dados. Sobre este mismo ejemplo se puede profundizar el uso de la notación formal, solicitando determinar el espacio muestral S , $Y(1,5)$, $Y(6,3)$, etc., donde Y es la variable aleatoria que asigna a cada punto (a,b) de S la suma de los números; es decir, $Y(a,b)=a+b$.

3. Verifican que la función $X:S \rightarrow R$ es una variable aleatoria, donde S es el espacio muestral del experimento (que consiste en lanzar cinco veces una moneda) y $X(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$, con A_i cara o sello, corresponde al número de caras o sellos que se obtiene.

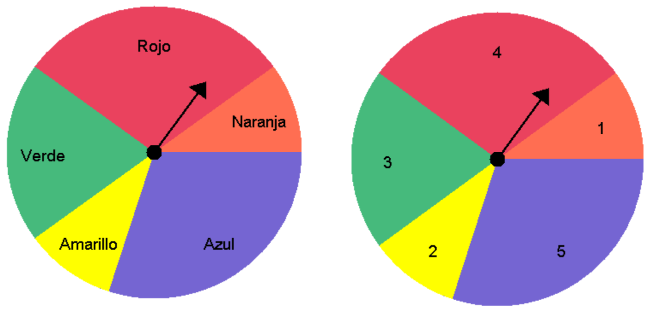
Otra de las posibles representaciones que se recomienda es la ruleta[20]. Ella se relaciona con situaciones de azar pues, luego de hacerla girar, la flecha se detendrá en alguno de los sectores. Si la ruleta está bien equilibrada, el resultado será aleatorio.

Múltiples perspectivas:
Una VA se puede imaginar como una ruleta numerada, al hacerla girar se puede determinar la probabilidad de los sucesos según sus sectores.

Desde un punto de vista probabilístico, en la ruleta cada sector será un suceso o evento de un experimento aleatorio; así también, cada suceso tiene una probabilidad de ocurrencia determinada por el tamaño del sector de la ruleta al cual está asociado, por lo tanto, si la flecha se detiene en un sector, el evento al cual está relacionado será el resultado del experimento.

20. Araya, R. 2008. Aprender matemática creando soluciones. Material de referencia. Enlaces Matemática.

Siguiendo con el ejemplo de la bolsa obscura, la ruleta estaría dividida en 100 partes. De ellas, el 10% corresponde a las pelotitas naranjas, 10 % a las amarillas, el 20% a las verdes, el 30% a las rojas y el 30% a las pelotitas azules.



En este caso, es muy importante simular el experimento, ya que basta con hacer girar la ruleta. De este modo se podrá contrastar la Variable Experimental con la Variable Aleatoria de forma simple y concreta. Sigue siendo importante que el/la estudiante pueda definir la Variable Aleatoria como función, indicando el dominio y el recorrido usando, finalmente, la ruleta numerada, en lugar de aquella con los nombres de los colores.

Otro ejemplo que puede ser estudiado, usando la metáfora de la ruleta se describe a continuación:

Habilidades de resolución de problemas

En una ciudad, durante un mes se encuesta a los asistentes a un teatro. Según la encuesta, a la mitad de los espectadores les gusta ver obras de comedia, mientras que un cuarto prefiere representaciones dramáticas y el resto se reparte en partes iguales entre ballet y orquestas de música clásica. Si se elige uno de los encuestados al azar ¿cuál es la probabilidad de que éste prefiera el ballet por sobre las otras opciones?

Los pasos que se pueden seguir para analizar la situación y responder el problema son:

Describir la función X que a cada elemento del espacio muestral Ω

Sea $X:\Omega \to R$

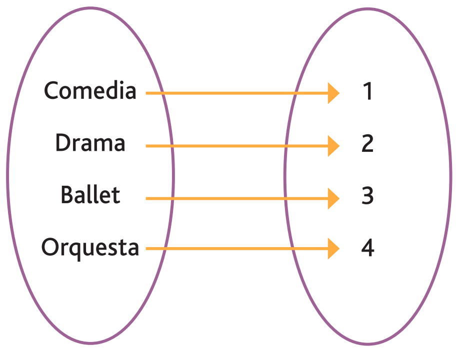
Donde: $\Omega = \{Comedia, Drama, Ballet, Orquesta\}$

Y la regla de correspondencia está dada por:

$$X(Comedia) = 1$$
$$X(Drama) = 2$$
$$X(Ballet) = 3$$
$$X(Orquesta) = 4$$

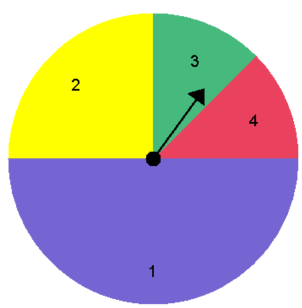
GUION DIDÁCTICO N° 2

2. Dibujar el diagrama que relaciona cada elemento del espacio muestral con $\text{Rec}\,X = \{1, 2, 3, 4\}$.



Habilidades de investigación

3. Hacer la ruleta que represente la situación de la encuesta, usando 4 sectores y los números del 1 al 4. Considerando que los sectores de la ruleta deben ser asignados en respuesta a la situación planteada.



4. Llenar una tabla con los resultados experimentales, al hacer girar la ruleta[21], al menos 10 veces. En este caso, si se cuenta con un manipulativo virtual que permita simular el giro de la ruleta se puede considerar un total de 100 giros. Se muestra un ejemplo de llenado en la siguiente tabla:

X (categoría)	Frecuencia relativa
1	0,49
2	0,25
3	0,14
4	0,12

21. http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_186_g_3_t_5.html?open=activities

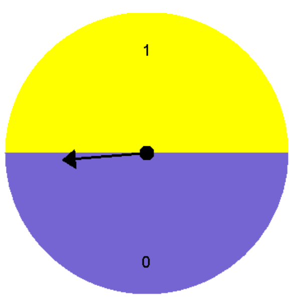
5. Llenar una tabla con las mismas características que la anterior, esta vez con los resultados teóricos (esperados) al girar la ruleta.

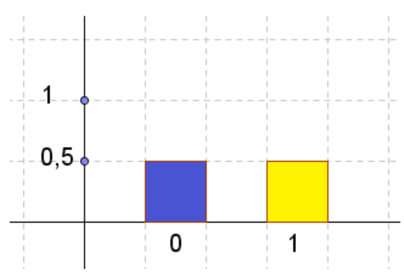
X (categoría)	Probabilidad teórica
1	0,5
2	0,25
3	0,125
4	0,125

6. Comparar las dos tablas y diferenciar la Variable Experimental de la Variable Aleatoria.

Una forma conveniente de representar las probabilidades de la Variable Aleatoria es usando gráficos. Esto es lo que se conoce como Distribución de Probabilidades de la Variable Aleatoria. Por ejemplo:

Si se lanza una moneda es posible obtener cara o sello. A este experimento se le puede asociar una variable aleatoria Y con recorrido 0 (cara) y 1 (sello), es decir, $\mathrm{Rec}\, Y = \{0, 1\}$, como se muestra en la ruleta. En este caso, la probabilidad de que Y tome cada valor es 0,5. Su gráfico, que representa la distribución de probabilidad se muestra en la imagen junto a la ruleta:

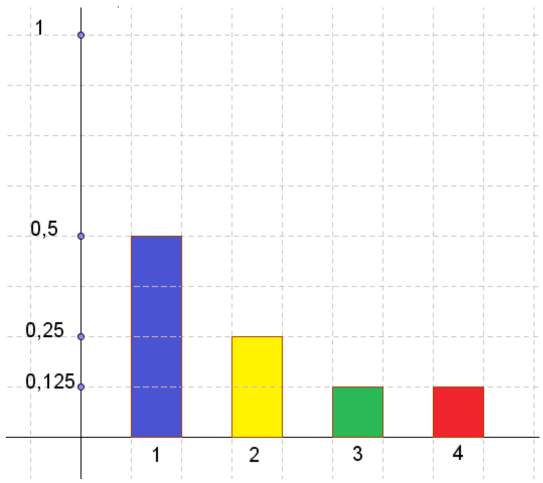




Del gráfico se desprende que: $P(Y = 0) = 0,5$ y $P(Y = 1) = 0,5$.

GUION DIDÁCTICO N° 2

En el ejemplo de la encuesta, la distribución de probabilidad está dada por el gráfico:



De donde:

$P(X=1)=0,5$; $P(X=2)=0,25$; $P(X=3)=0,125$; $P(X=4)=0,125$.

Con esta información se puede dar respuesta a la pregunta planteada en el problema del teatro.

Finalmente, se recomienda que en cada situación presentada, el/la estudiante pueda realizar múltiples representaciones, con el fin de simular los experimentos y calcular sus probabilidades, ya sean experimentales o teóricas.

Parte 3: Profundización

En estos momentos, se hace necesario definir formalmente los conceptos estudiados a partir de la experimentación y las formulaciones teóricas de la Variable Aleatoria. Es por ello que se propone una definición pertinente al nivel escolar de los/las estudiantes:

Una ***variable aleatoria*** *se define como el resultado numérico de un experimento aleatorio. Matemáticamente es una aplicación (función)* $X:\Omega \rightarrow R$ *que asigna un valor numérico real a cada suceso en el espacio muestral de los resultados posibles del experimento*[22].

Ideas Básicas: La VA discreta se puede entender como aquella en que sus valores están en correspondencia 1 a 1 con los valores del recorrido.

De igual modo, se define la distribución de probabilidad:
Para Variables Aleatorias discretas es posible graficar las probabilidades de sus diferentes valores. Esto es llamado la ***distribución de probabilidades de la variable aleatoria****. En otras palabras se trata del modelo teórico que describe la forma en que varían los resultados de un experimento aleatorio y que puede verse gráficamente.*

Ahora, se recomienda que los/las estudiantes puedan poner en práctica lo aprendido de modo de corregir posibles errores. Además, se recomienda que en todo momento puedan exponer al curso sus hallazgos, con el fin de desarrollar las habilidades comunicativas, producto del aprendizaje colaborativo.

Habilidades comunicativas

Algunos ejemplos que pueden aportar a la práctica y la profundización del concepto de Variable Aleatoria son:

1. Un club cuenta con 100 socios. A través de un cuestionario se recoge cierta información y se resume en la tabla:

	Hombres	Mujeres
Practican deporte	48	12
No practican deporte	16	24

Si se selecciona una de estas personas al azar:

¿Cuál es la probabilidad de que se trate de un hombre, de una mujer, de un practicante de deportes, de un no practicante de deportes y de un hombre que practica deportes?

22. Araya, R. 2008. Otro paso en el estudio de las probabilidades. Material de referencia. Enlaces Matemática.

2. Carmen y Daniel han inventado un juego de dados con las siguientes reglas: Lanzan dos dados consecutivamente y calculan la diferencia (positiva) de puntos[23].

Si resulta una diferencia de 0, 1 o 2, entonces Carmen gana una ficha.
Si resulta 3, 4 o 5 es Daniel quien gana una ficha.

El juego comienza con un total de 20 fichas y termina cuando ya no quedan fichas.

a. ¿Te parece que este juego es equitativo?
b. Si pudieras jugar ¿cuál jugador preferirías ser?

Ahora, se cambian las reglas del juego:
Si resulta una diferencia de 0, 1 o 2, entonces Carmen gana una ficha.
Si resulta 3, 4 o 5 entonces Daniel gana dos fichas.

c. ¿Te parece que este juego es equitativo?
d. Si pudieras jugar ¿cuál jugador preferirías ser?

Practica con un compañero 5 veces el juego (puedes usar una ruleta) y registra en la tabla siguiente:

Diferencia de puntos		Recuento	Número de veces	Frecuencia relativa
Gana C	0			
	1			
	2			
Gana D	3			
	4			
	5			
		Total de lanzamientos	100	

A la vista de estos resultados ¿confirmas tu primera opinión sobre si tu juego es justo o no?

23. Sáenz, C. 1999. Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades. Propuesta de un modelo teórico. Cuadernos del ICE.

Además:

a. Enumera todos los resultados posibles que puedes obtener al lanzar dos dados.

b. Define la Variable Aleatoria en este caso, de forma teórica.

c. Indica las probabilidades de cada caso.

En estas actividades propuestas, lo importante es poner en juego todo lo aprendido sobre Variable Aleatoria y que usen las representaciones estudiadas para simular los juegos y el gráfico para asignar las probabilidades. De este modo, cuando les corresponda estudiar la Esperanza de la Variable Aleatoria (en la situación 2) ya estarán familiarizados con los elementos que se requieren para observar, por ejemplo, "el equilibrio en las barras" de la distribución de probabilidad.

Situación 2: Esperanza de Variables Aleatorias

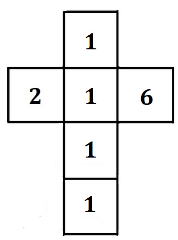
Parte 1: Comprensión de la situación

Al igual que en la situación anterior, se propondrá al profesor/a hacer un análisis del nuevo concepto de Esperanza de una variable aleatoria (VA), desde una perspectiva familiar al estudiante. En este caso, el modelo sería en forma inicial meramente intuitivo.

Por ejemplo, se pueden presentar experimentos aleatorios simples y comunes (lanzar un dado, lanzar una moneda) y preguntar qué resultado esperan en promedio obtener antes de realizar el experimento. Si bien la tarea puede parecer muy simple en este nivel no es trivial, pues es común confundir Esperanza con moda. Por tanto, es recomendable que todos los/las estudiantes inicien el estudio del concepto de forma intuitiva. Más adelante verán los métodos para calcularla de forma exacta.

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

Una situación concreta que puede aportar al estudio inicial del concepto de Esperanza es usando un dado como el que se muestra en la figura. Los/las estudiantes pueden conjeturar sobre qué número creen que saldrá al realizar 1, 2, 10, 100 o una gran cantidad de veces el experimento.



Al preguntar por cuál creen que será el resultado en promedio es probable que no lo asocien con el cálculo del promedio aritmético de forma inmediata, por lo que se recomienda estudiar algunos ejemplos concretos de estimación del promedio hasta evidenciar que distinguen ambas ideas.

Ideas Básicas:
La Esperanza es el valor que en promedio se espera que tome la Variable Aleatoria.

No es frecuente que los/las estudiantes comprendan, incluso luego de estudiar teóricamente la Esperanza, que ella puede diferir del suceso con mayor probabilidad, esto puede derivar incluso de una confusión previa entre la media y la moda, cuando realizaron estudios estadísticos. Es por ello relevante que el/la estudiante haga uso de las Variables Aleatorias para calcular la Esperanza y, más aún, que la relacione de forma constante con el valor esperado en promedio y no con el valor que más se espera que ocurra.

En el ejemplo del dado, el valor de la Variable Aleatoria con mayor probabilidad de ocurrir es 1, pero en promedio se espera que salga 2. Pese a lo complejo que pueda parecer, en rigor, lo que ocurre es muy similar a lo que sucede cuando los/las estudiantes obtienen los promedios de sus notas.

Usando primero un ejemplo simple (con promedio aritmético) se les puede pedir hacer el cálculo del promedio, pero luego el/la profesor/a puede proponer una situación en la que las notas de un semestre "tengan distinto peso", es decir, esta vez no se determinará el promedio aritmético, sino el **promedio ponderado**.

En la tabla se muestran las notas parciales de un estudiante y las ponderaciones de ellas ¿Cuál es la nota final de el/la estudiante?

Conexiones: La Esperanza se puede relacionar con el promedio ponderado de datos, que han determinado desde niveles anteriores.

Notas parciales	6	7	3	4	7
Ponderación	20%	20%	10%	20%	30%

Para calcular la nota final (NF), se realiza el siguiente cálculo:

$$NF = 6 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}3 = 5{,}8$$

En este caso, el promedio aritmético sería 5,4. Es importante comparar ambos valores y analizar la diferencia en la forma de calcularlos. En el caso del promedio ponderado se evidencia el "peso" de cada nota al multiplicar cada una de ellas por un número decimal.

Pues bien, cuando los/las alumnos/as relacionen la Esperanza con el promedio notarán que en este caso la probabilidad de ocurrencia ya no es la misma para los diferentes valores de la Variable Aleatoria. Haciendo una analogía con el ejemplo, los pesos de las notas corresponderían a las probabilidades de ocurrencia.

Una de las dificultades con las que el/la docente puede encontrarse en la primera parte del estudio del concepto es con el uso de la terminología adecuada -promedio, promedio ponderado, esperanza-, por ello se recomienda hacer una relación directa con el estudio de la estadística. Por ejemplo, promedio y promedio ponderado son términos usados en estadística (descriptiva), mientras que Esperanza es un término propio de la probabilidad.

Por último, es importante tener presente que el cálculo de la Esperanza está sujeto a un experimento aleatorio, en el cual se defina la Variable Aleatoria previamente.

Parte 2: Análisis de la situación

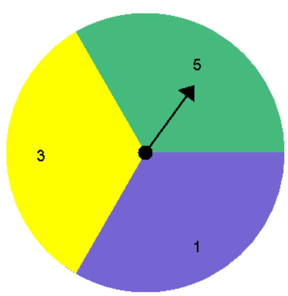
El estudio de las Variables Aleatorias debe ser visto como una posibilidad de estudiar matemáticamente la distribución de las probabilidades de los sucesos de un experimento aleatorio, es por ello que la Esperanza cobra gran relevancia.

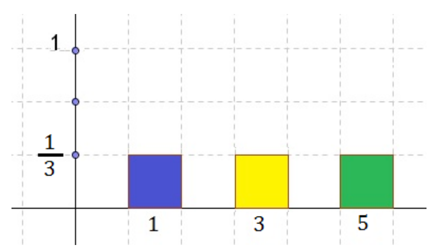
Múltiples perspectivas: La Esperanza puede ser interpretada como el punto de equilibrio en las barras de la distribución de probabilidad.

Se sugiere para el cálculo de la Esperanza comenzar con la metáfora de la balanza[24], pues es un aporte a la idea intuitiva de buscar un punto de equilibrio en el gráfico de distribución de probabilidades. Luego de ello es mucho más sencillo determinar de forma exacta el valor de numérico. De este modo el concepto de Esperanza se asocia a un concepto más cotidiano para los/las estudiantes: el promedio, extendiéndolo a la idea de promedio ponderado.

Un ejemplo del uso de la metáfora de la balanza que permite encontrar la Esperanza de forma exacta es el siguiente:

Si se tiene una Variable Aleatoria Y definida por:

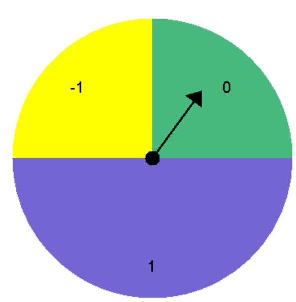




En este caso, cada rectángulo tiene altura 1/3. Visualmente, es fácil notar que el punto de equilibrio está en 3. De este modo, la Esperanza para esta Variable Aleatoria es 3 –más adelante se introduce la notación matemática adecuada–. Se recomienda que los/las estudiantes argumenten del por qué deciden ubicar la "cuña" en cierto lugar, haciendo referencia al equilibrio del que se ha estado hablando.

Habilidades de resolución de problemas

En ocasiones el equilibrio encontrado será solo una aproximación, ya que la Distribución de Probabilidad mostrará barras con distintas alturas, que no son fáciles de equilibrar. Por ejemplo: se tiene previamente la siguiente ruleta que representa una Variable Aleatoria X discreta:

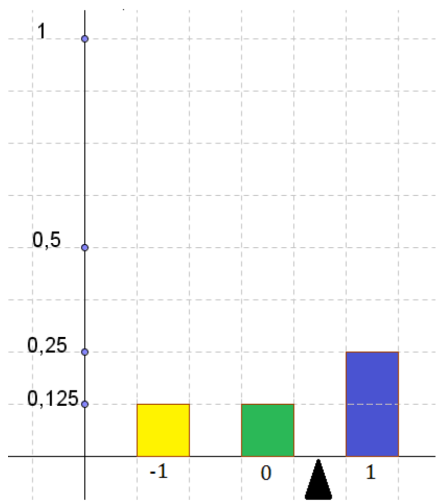


24. Araya, R. 2008. Otro paso en el estudio de las probabilidades. Material de referencia. Enlaces Matemática.

Se puede preguntar ¿Dónde se encuentra el punto de equilibrio?

Es muy probable que los/las estudiantes hagan referencia al cero, pues es el promedio aritmético entre -1, 0 y 1. Es aquí donde se debe analizar la importancia de los "pesos" de cada valor. En este caso no hay igual probabilidad de ocurrencia, por lo que el promedio aritmético no puede ser usado.

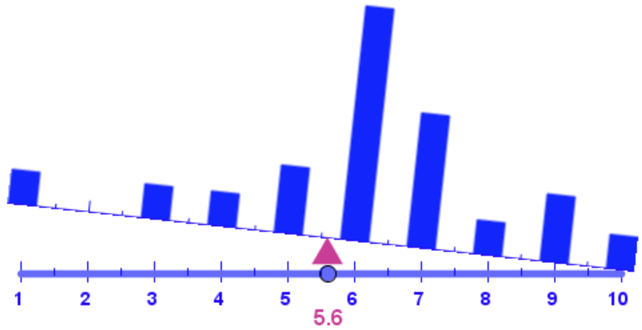
Ahora, al usar la representación gráfica (distribución de probabilidad) es más simple encontrar o aproximarse al equilibrio. Basta poner una "cuña", que en este caso será imaginaria y desplazarla hasta lograr el equilibrio, según los pesos de cada barra. Este ejemplo solo espera una aproximación del valor de la Esperanza.



Habilidades de investigación

El recurso digital "La media y la gráfica"[25] permite explorar el concepto de equilibrio y asociarlo a la Esperanza, éste se encuentra disponible de forma gratuita en el portal del Proyecto Gauss[26]. En el recurso se pueden ver barras de alto fijo, que el/la profesor/a puede asociar a una situación de un experimento aleatorio, y mover la cuña hasta equilibrar la base donde están apoyadas las barras. Según la figura[27], se podría crear una situación en la que la Variable Aleatoria, definida para algún experimento aleatorio, tome los valores de 1 a 10, con probabilidades respectivas de 0,05; 0; 0,05; 0,05; 0,1; 0,35; 0,2; 0,05; 0,1; 0,05. Al mover la cuña se logrará el equilibrio en 6,2, siendo este valor la Esperanza de esta Variable Aleatoria.

25. http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/primaria/actividades/estadistica_medidas.htm
26. http://recursostic.educacion.es/gauss/web/indice.htm
27. En el recurso es la situación Equilibrio 1.



Una manera de corroborar que el equilibrio es adecuado, es haciendo alusión a las distancias al punto de equilibrio. Siguiendo con el ejemplo de la Variable Aleatoria Y:

Como la cuña logra el equilibrio en 3, se cumple que:

$$\frac{1}{3}(1-3)+\frac{1}{3}(3-3)+\frac{1}{3}(5-3)=0$$

En cambio, si se ubicara la cuña en 4 no se equilibraría la balanza, obteniendo un resultado distinto de cero, como se muestra:

$$\frac{1}{3}(1-4)+\frac{1}{3}(3-4)+\frac{1}{3}(5-4)=-1$$

Una vez que se comprende este procedimiento de comprobación con ejemplos sencillos, se puede aplicar a casos más complejos, como por ejemplo en el caso de la Variable Aleatoria X. En ese momento se estimó que la Esperanza de X es 0,5. La comprobación estaría dada por:

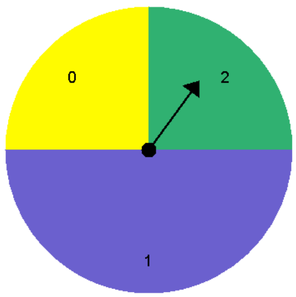
$$0{,}125\,(-1-0{,}5)+0{,}125\,(0-0{,}5)+0{,}25\,(1-0{,}5)=-0{,}125$$

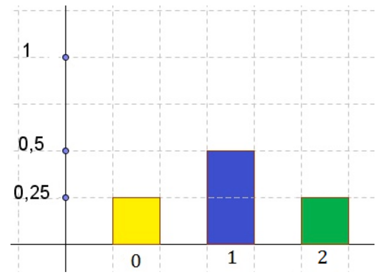
Es importante interpretar adecuadamente este resultado. Como no es cero, la Esperanza de X no es 0,5, pero está cerca de ese valor, además se puede deducir que está más a la izquierda de 0,5. Probando con la Esperanza de X igual a 0,25 se tiene:

$$0{,}125\,(-1-0{,}25)+0{,}125\,(0-0{,}25)+0{,}25\,(1-0{,}25)=0$$

Otro ejemplo, con el interés de sistematizar el método anterior, es proponer establecer una ecuación, donde la incógnita será el valor de la Esperanza, y la ecuación debe estar igualada a cero. Se muestra cómo proceder a partir de la definición de la Variable Aleatoria T:

Definición de la Variable Aleatoria T





Ecuación considerando el equilibrio en la distribución de probabilidad:

$$0,25\left(0-e\right)+0,5\left(1-e\right)+0,25\left(2-e\right)=0$$

De donde: $e=1$

Por lo tanto, la Esperanza de la Variable Aleatoria T es 1

Otra manera de presentar estas situaciones es como se muestra en el ejemplo siguiente:

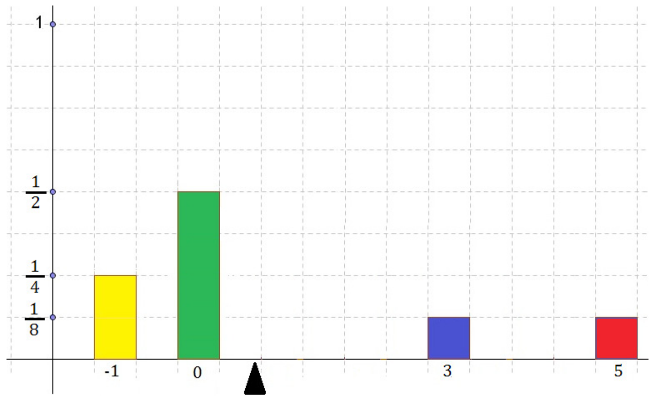
1. Dada la Variable Aleatoria X, tal que $\operatorname{Rec} X=\{-1,0,3,5\}$, donde

   $P\left(X=-1\right)=\dfrac{1}{4}$; $\quad P\left(X=0\right)=\dfrac{1}{2}$; $\quad P\left(X=3\right)=\dfrac{1}{8}$; $\quad P\left(X=5\right)=\dfrac{1}{8}$.

   Encontrar la Esperanza de X.

- Se muestra la distribución de probabilidad.
- Se encuentra visualmente el punto de equilibrio o se aproxima uno.
- Se busca o se corrobora usando la ecuación de las distancias al punto de equilibrio, igualada a cero.

GUION DIDÁCTICO N° 2



Es importante reflexionar sobre el gráfico obtenido. En él las barras no se encuentran separadas la misma distancia, lo que se debe a los "valores que no toma la variable aleatoria". Se recomienda preguntar previamente a los/las estudiantes cómo harían el gráfico y ver luego la diferencia con la representación correcta. Es esperable que los/las estudiantes aún no hayan notado que en el eje X se grafican valores reales, ya que es el recorrido de la Variable Aleatoria. Por tanto, como toda recta numérica en los reales, requiere que los números estén en orden.

Para encontrar de forma exacta el valor de la Esperanza de X se procede con la ecuación, igualada a cero. Designemos la esperanza por e

$$\frac{1}{4}(-1-e)+\frac{1}{2}(0-e)+\frac{1}{8}(3-e)+\frac{1}{8}(5-e)=0$$

De donde e= $E(X)=\dfrac{3}{4}$

Coherencia longitudinal: La noción de Equilibrio usada para la Esperanza aportará a que, más tarde, los/las estudiantes puedan comprender el concepto de Varianza y dispersión de datos.

En estos momentos se ha introducido la notación, pero el/la docente debe tener presente que puede hacerlo en el momento en que lo estime conveniente, siempre y cuando haya dado suficiente tiempo a comprender el concepto, para no dificultar de forma innecesaria el estudio de la Esperanza.

Con el fin de avanzar hacia la fórmula habitual usada para el cálculo de la Esperanza de una Variable Aleatoria, se propone analizar en detalle la ecuación anterior y "despejar la Esperanza". A continuación, se muestra cómo, usando el mismo ejemplo anterior y la notación formal:

$$\frac{1}{4}(-1-E(X))+\frac{1}{2}(0-E(X))+\frac{1}{8}(3-E(X))+\frac{1}{8}(5-E(X))=0$$

$$P(x=-1)(-1-E(X))+P(x=0)(0-E(X))+P(x=3)(3-E(X))+P(x=5)(5-E(X))=0$$

$$E(X) = \frac{-1\cdot \mathrm{P(x=-1)}+0\cdot \mathrm{P(x=0)}+ 3\cdot P(x=3)+5\cdot P(x=5)}{\mathrm{P(x=-1)}+\mathrm{P(x=0)}+\mathrm{P(x=3)}+\mathrm{P(x=5)}}$$

$$E(X)=-1\cdot (P(x=-1)+0\cdot P(x=0)+3\cdot P(x=3)+5\cdot P(x=5)$$

Es fundamental comprender por qué el denominador de la fracción anterior es 1. Esto corresponde a la suma de todas las probabilidades de los valores de la Variable Aleatoria, en otras palabras, se está calculando la probabilidad del espacio muestral en su totalidad.

Analizando la expresión para $E(X)$ (qué más adelante se propone de forma general), se debe notar cómo cada probabilidad de que la Variable Aleatoria tome cierto valor es multiplicada por dicho valor (por ejemplo, $P(X=-1)$ es multiplicada por -1), además de notar que todos estos valores son sumados.

Otra alternativa para desarrollar el concepto en clases, es que el/la profesor/a decida no analizar de forma tan profunda el concepto de equilibrio en la balanza y solo usar el método para la visualización del concepto. De esta forma, podría presentar la fórmula para calcular la Esperanza y pedir que el resultado sea comparado con la aproximación hecha en la balanza. Es claramente una forma más sintética pero que no deja de lado la comprensión del concepto, relevándolo por sobre el cálculo.

Finalmente, se recomienda hacer hincapié en que cada vez que se requiera determinar la Esperanza de una Variable Aleatoria, es posible utilizar múltiples caminos, asociados a distintas representaciones y que, todos ellos, llevan a un valor, pero fundamentalmente, permiten comprender cuál es el significado de dicho valor y cómo puede ser interpretado.

Parte 3: Profundización

Habilidades comunicativas

Tal como en la situación 1, se propone que luego de la exploración del concepto se formalice matemáticamente, con el fin de generalizar procedimientos utilizados y hacer uso de la terminología adecuada a la asignatura.

La ***Esperanza*** *de una Variable Aleatoria* X*, denotada por* $E(X)$ *o por* μ*, corresponde al valor esperado de la variable al realizar el experimento aleatorio. Si el recorrido de* X *es de* N *valores, entonces la Esperanza se calcula como*[28]*:*

$$E(X) = x_1P(X = x_1) + x_2P(X = x_2) + x_3P(X = x_3) + \dots + x_NP(X = x_N)$$

Si se considera pertinente, se puede utilizar la forma más abreviada, recurriendo a la sumatoria:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_iP(X = x_i)$$

Con respecto a la interpretación de la Esperanza como el punto de equilibrio en la distribución de probabilidad, se muestra a continuación la generalización:
Supóngase un gráfico con N bloques

Se considera el producto $A_i \cdot D_i$, donde:
A_i es la altura o peso del bloque i en el gráfico ($i = 1, 2, \dots, N$)
D_i es la distancia entre la posición de la cuña y el tope ($i = 1, 2, \dots, N$)

La cuña está ubicada en una posición de equilibrio si se cumple que:

$$A_1 \cdot D_1 + A_2 \cdot D_2 + \dots + A_N \cdot D_N = 0$$

Ideas Básicas: La Esperanza puede ser un valor no observable en el Experimento Aleatorio.

Habilidades de resolución de problemas

Algunos ejemplos con los que se puede reforzar el contenido desarrollado hasta ahora, se listan a continuación:

1. Un/a jugador/a de dardos tiene probabilidad 0,2 de obtener 5 puntos al lanzar, una probabilidad de 0,25 de obtener 10 puntos, 0,15 de obtener 50 puntos y 0,4 de obtener 20 puntos. Si consideramos la variable aleatoria puntuación ¿Cuál es su Esperanza?

28. Araya, R; Moya, M; Venegas, M

2. Un/a trabajador/a recibirá un premio de $30 000, $20 000 o $10 000, según el tiempo que tarde en realizar un trabajo en menos de 10 horas, entre 10 y 15 horas y más de 15 horas, respectivamente. La probabilidad de realizar el trabajo en cada uno de estos casos es 0,1; 0,4 y 0,5.

   - Determinar la Distribución de Probabilidad y la Esperanza de la Variable Aleatoria X : Premio recibido.
   - Definir una nueva Variable Aleatoria Y , con valor 1 si el trabajador tarda menos de 10 horas, y valor 0 en caso contrario. Obtener la Distribución de Probabilidad y la Esperanza de Y

3. Se lanza 3 veces una moneda. El resultado C supone ganar[29].
   - Define la Variable Aleatoria asociada a ganar.
   - Grafica la Distribución de Probabilidad.
   - Calcula la Esperanza de la Variable Aleatoria.

4. Se lanza dos veces un dado normal (cúbico y no cargado). Sobre esa experiencia aleatoria se puede definir diferentes variables, por ejemplo:

X : número obtenido en el primer lanzamiento

Y : Suma de los números obtenidos en el primer y segundo lanzamiento

   - Define otras 3 Variables Aleatorias.
   - Determina el espacio muestral, la distribución de probabilidad y la Esperanza de cada una de las Variables Aleatorias que has definido.

El/la profesor/a debe observar si los/las estudiantes definen adecuadamente la Variable Aleatoria y si utilizan las múltiples representaciones estudiadas para encontrar el valor de la Esperanza y cómo interpretan ese valor en cada caso.

29. Sáenz, C. 1999. Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades. Propuesta de un modelo teórico. Cuadernos del ICE.

Situación 3: Suma de Variables Aleatorias

Parte 1: Comprensión de la situación

Una forma de conjugar los conceptos trabajados hasta ahora, es determinando los resultados de dos o más experimentos aleatorios realizados al mismo tiempo, los que pueden ser interpretados por la suma de Variables Aleatorias.

Siguiendo con la propuesta de las situaciones anteriores, se propone el estudio de la suma de Variables Aleatorias a partir de la experimentación y variadas formas de representar el concepto, para concluir con el cálculo y las definiciones matemáticas formales.

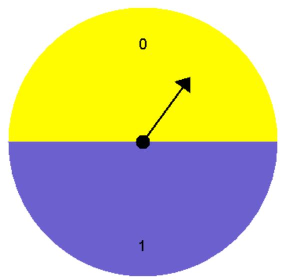
Conexiones: La suma de Variables Aleatorias se puede relacionar con la realización de dos o más experimentos aleatorias de forma simultánea.

Se sugiere iniciar con un ejemplo de experimento aleatorio ya conocido por los/las estudiantes, esto es: el lanzamiento de dos monedas, simultáneamente. Cada una de las monedas representa un experimento aleatorio, y las dos monedas lanzadas al mismo tiempo representan otro experimento aleatorio. Hasta ahora, estos experimentos han sido estudiados de forma aislada, por lo que es el momento de comprender cómo se relacionan, de forma tan simple como realizando una suma.

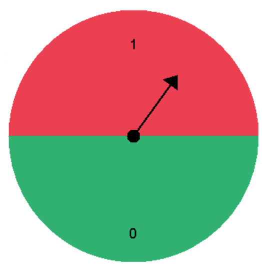
Si el/la profesor/a lo estima, puede desafiar a los/las estudiantes proponiendo situaciones en que las Variables Aleatorias no solo se sumen, también pueden restarse, multiplicarse por una constante, multiplicarse entre sí, entre otras operaciones. En todos estos casos, los/las estudiantes deben notar cómo los resultados no son más que la reunión de dos o más experimentos aleatorios que se han llevado a cabo de forma conjunta o bien, uno a continuación del otro.

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

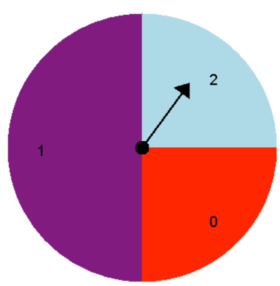
Volviendo al ejemplo de las monedas, se sugiere al/la profesor/a permitir que los/las estudiantes visualicen de forma separada tres ruletas, estas son:



X : Ruleta del lanzamiento de una moneda (la primera moneda)



Y : Ruleta del lanzamiento de una moneda (la segunda moneda)



Z : Ruleta del lanzamiento de dos monedas

La intención es visualizar las ruletas sin relacionarlas aún. Luego se puede pedir a los/las estudiantes que simulen una gran cantidad de veces los experimentos con las tres ruletas. Usando las dos ruletas iguales se puede pedir que sumen los resultados que obtienen cada vez, y que completen una tabla de frecuencias como la que muestra a continuación:

X	Y	$X+Y$	Frecuencia relativa
0	0	0	0,26
0	1	1	0,24
1	0	1	0,28
1	1	2	0,22

Luego de varias repeticiones, los/las estudiantes podrán notar que las frecuencias relativas tienden a estabilizarse en torno a los valores que se muestran en la última columna. Con ello pueden concluir (o verificar) que la probabilidad teórica es ¼, en cada caso.

Nótese que aún no se suman las probabilidades del centro de la tabla, ello debido a que primero se busca que los/las estudiantes comprendan cómo realizar dos experimentos de forma conjunta.

Por otro lado, los/las estudiantes pueden simular el experimento de la tercera ruleta, para luego comparar sus resultados con la simulación de las dos ruletas por separado. La tabla que llenen los/las estudiantes puede ser como la siguiente:

Z	Frecuencia relativa
0	0,24
1	0,53
2	0,23

Parte 2: Análisis de la situación

Simulados los experimentos, el objetivo será encontrar la ruleta equivalente para dicha suma y su correspondiente distribución de probabilidades.

Continuando con el ejemplo de las monedas, se sugiere al/la profesor/a pedir que en conjunto definan el Recorrido de $X+Y$. Luego que lo comparen con el Recorrido de Z.

Habilidades comunicativas

Para guiar la discusión de la clase, el/la profesor/a puede realizar preguntas como:

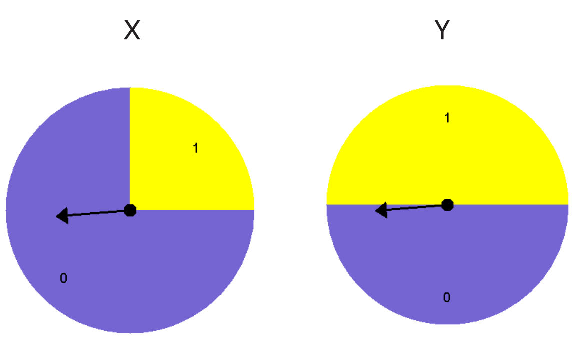
- ¿Cuál es el recorrido de la Variable $X+Y$, es decir, qué se obtiene si se hace girar la ruleta X, se anota el valor obtenido, se gira la ruleta Y y valor se suma con el valor anterior?
- ¿A qué suceso o resultado del experimento de lanzar dos monedas está asociado cada valor de la nueva variable $X+Y$?

Coherencia longitudinal: En niveles superiores, los/las estudiantes podrán usar la noción de suma de Variables Aleatorias para estudiar la distribución binomial, en experimentos en los que se extraen bolitas de una urna con reposición.

Otra alternativa es que el/la profesor/a solo inste a los/las estudiantes a descubrir la tercera ruleta, sin la comparación propuesta recientemente. Para ello, con dos ruletas simulan el experimento y luego dibujan la ruleta conjunta. En este caso, el/la profesor/a debe prestar atención al caso Cara Sello y Sello Cara. No necesariamente los/las estudiantes unirán estos dos sucesos sumando las probabilidades de cada uno de ellos, por lo que se puede guiar la discusión en torno a por qué se puede sumar y qué interpretación tendría en el experimento.

Habilidades de resolución de problemas

Un ejemplo más complejo implicaría experimentar con la suma de Variables Aleatorios con diferentes probabilidades. Esto aportaría a fortalecer la técnica del cálculo a partir del uso de la ruleta:



Según las ruletas, para los valores de las variables se tienen las siguientes probabilidades:

Variable X: $P(X=0)=\frac{3}{4}$ y $P(X=1)=\frac{1}{4}$

Variable Y: $P(Y=0)=\frac{1}{2}$ y $P(Y=1)=\frac{1}{2}$

Los resultados pueden ser resumidos en la siguiente tabla:

X	Y	$X+Y$	Probabilidad
0	0	0	$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$
0	1	1	$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$
1	0	1	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
1	1	2	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

Entonces, los resultados posibles para la nueva ruleta son: 0, 1 y 2, y sus probabilidades son:

$$P(X+Y=0)=\frac{3}{8}$$

$$P(X+Y=1)=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

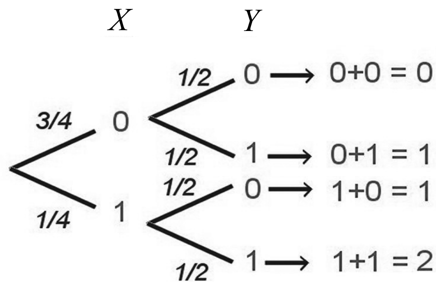
$$P(X+Y=2)=\frac{1}{8}$$

Múltiples perspectivas: La suma de Variables Aleatorias permite relacionar la representación con ruletas y los diagramas de árbol de forma pictórica. Siendo ambas herramientas fundamentales para la interpretación y cálculo de probabilidades.

Otra de las posibles representaciones para comprender el concepto de suma, y que ya ha sido trabajada por los/las estudiantes, es el diagrama de árbol. Este permite de forma gráfica comprender en qué casos las probabilidades se multiplican y en qué casos se suman, dando un apoyo complementario a los cálculos recién mostrados.

Habilidades de investigación

Para el ejemplo anterior, el diagrama de árbol se muestra en la figura:



Pues bien, ahora que se ha analizado la suma de Variables Aleatorias y se ha corroborado que corresponde también a una Variable Aleatoria, es entonces posible determinar la Esperanza de esta última.

Con el fin de incentivar la exploración de los/las estudiantes, se propone que primeramente calculen las Esperanzas de cada Variable Aleatoria, las dos que se suman y la nueva, para luego comparar los resultados y descubrir que son iguales, concluyendo una importante propiedad de la esperanza, esta es: La suma de las Esperanzas es igual a la Esperanza de la suma, en Variables Aleatorias.

Continuando con el ejemplo de las Variables X e Y, se puede proceder como a continuación se describe:

- Determinar la Esperanza de la Variable Aleatoria X

$$E(X)=\frac{3}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}$$

- Determinar la Esperanza de la Variable Aleatoria Y

$$E(Y)=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

- Determinar la Esperanza de la Variable Aleatoria $X+Y$

$$E(X+Y)=\frac{3}{8}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{8}\cdot 2=\frac{3}{4}$$

- Calcular el valor de $E(X)+E(Y)$
- Comparar el valor de $E(X)+E(Y)$ con el valor de $E(X+Y)$

GUION DIDÁCTICO Nº 2

Otras propiedades de la Esperanza podrían ser comprobadas a partir de las operaciones entre Variables Aleatorias, por lo que se recomienda al/la profesor/a poner a prueba la comprensión del concepto por parte de los/las estudiantes desafiándolos a descubrirlas, usando ejemplos concretos.

Se puede preguntar en ese momento ¿Qué sucede si en lugar de la suma de variables aleatorias se considera la resta? De este modo, el/la estudiante deberá analizar la variable $X-Y$. Puede también preguntarse: ¿Qué diferencias podría haber en cuanto a los procedimientos descritos anteriormente?

Parte 3: Profundización

Habilidades comunicativas

Para profundizar en los contenidos recién trabajados, se propone que los/las estudiantes describan los pasos realizados para sumar, logrando una sistematización del procedimiento utilizado. El/la profesor/a puede orientarlos con preguntas como:

- ¿Qué debemos hacer para determinar los valores de una variable aleatoria construida a partir de la suma de dos variables aleatorias conocidas?
- ¿Qué debemos hacer para calcular la probabilidad de cada uno de los valores de la nueva variable aleatoria?

A continuación, se sugiere formalizar matemáticamente las propiedades encontradas en relación a la Esperanza de Variables Aleatorias que han sido sumadas, multiplicadas, etc. Las propiedades más comunes son las siguientes:

1. La Esperanza de la suma de Variables Aleatorias es la suma de las Esperanzas de cada una de ellas:

   $$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

2. Para cualquier número real a, la Esperanza de "a veces" una variable es "a veces" la Esperanza de la variable:

   $$E(aX)=a\,E(X)$$

3. La Esperanza de un valor constante c, es el mismo valor:

   $$E(c)=c$$

Se muestra la demostración de la primera propiedad enunciada, por ser la más simple y pertinente con el nivel matemático que idealmente deben alcanzar los/las estudiantes:

GUION DIDÁCTICO N° 2

Demostración Propiedad 1:

Considérese la Esperanza de la suma, en el caso que X e Y sean Variables Aleatorias discretas con dos valores cada una.

$$E(X+Y)=(x_1+y_1)P(X=x_1)P(Y=y_1)+(x_2+y_1)P(X=x_2)P(Y=y_1)+$$
$$(x_1+y_2)P(X=x_1)P(Y=y_2)+(x_2+y_2)P(X=x_2)P(Y=y_2)$$

Agrupando y factorizando por x_1 y por x_2, al igual que por y_1 y por y_2, se tiene:

$$E(X+Y)=x_1\big(P(X=x_1)P(Y=y_1)+P(X=x_1)P(Y=y_2)\big)+$$
$$x_2\big(P(X=x_2)P(Y=y_1)+P(X=x_2)P(Y=y_2)\big)+$$
$$y_1\big(P(X=x_1)P(Y=y_1)+P(X=x_2)P(Y=y_1)\big)+$$
$$y_2\big(P(X=x_1)P(Y=y_2)+P(X=x_2)P(Y=y_2)\big)$$

Se vuelve a reagrupar y se tiene presente que $P(X=x_1)+P(X=x_2)=1$ (de igual modo se cumple para Y), entonces:

$$E(X+Y)=x_1\,P(X=x_1)+x_2\,P(X=x_2)+y_1\,P(Y=y_1)+y_2\,P(Y=y_2)$$

Finalmente:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

Ideas Básicas:
Volviendo a la interpretación de la Esperanza como promedio ponderado, lo que se desprende de esta propiedad es que el promedio de la suma es la suma de los promedios.

GUÍAS ESTUDIANTES

Variables Aleatorias

GUÍA
1

Objetivo:

Analizar experimentos aleatorios a partir de sus sucesos y la probabilidad de ellos. Para alcanzar este objetivo se utilizaran las Variables Aleatorias (VA).

Ten presente que: Puedes desarrollar las actividades en el orden que más te ayude a aprender, pero no dejes de contestar las preguntas que tienen un ícono de un lápiz, con ellas podrás evaluarte y saber si estás logrando las metas de la clase.

Preguntas previas

- ¿Qué tal es tu intuición en el azar? Conversa con tus compañeros/as y luego responde las preguntas:

    - ¿Cómo piensas que deberían ser los resultados de lanzar una moneda 20 veces seguidas?

    - Escribe 20 resultados de lanzar una moneda (sin lanzarla realmente, sino como tú pienses que debieran salir) de forma que otros piensen que has lanzado la moneda en realidad.

- Ahora lanza la moneda 20 veces y escribe los resultados. ¿Difiere de los lanzamientos que tú imaginaste? ¿Qué tan cerca o lejos estás de tu intuición para el azar?

¿Crees que el experimento anterior es un experimento aleatorio? Argumenta:

Representando un experimento aleatorio

- Lee la siguiente situación:

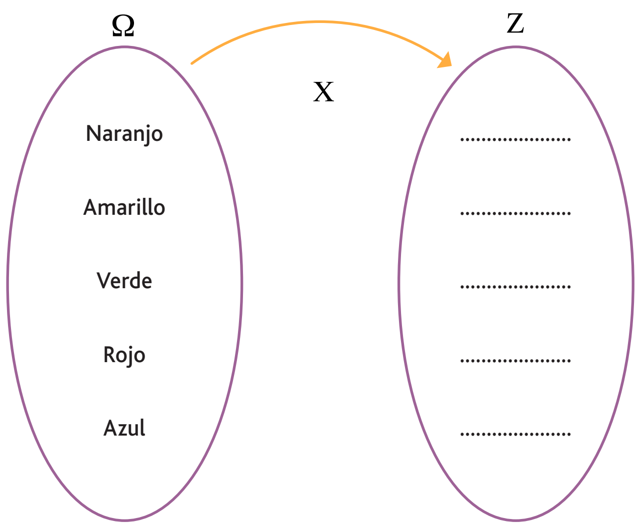
En una bolsa obscura hay 100 pelotitas de cinco colores diferentes. 10 naranjas, 10 amarillas, 20 verdes, 30 rojas y 30 azules. Si sacas una pelotita sin mirar ¿podrías asegurar a priori qué color saldrá?

- ¿Crees que esta situación corresponde a un experimento aleatorio? ¿Por qué? Además, escribe el experimento.

- ¿Cuáles son todos los resultados posibles de este experimento? Describe el espacio muestral Ω.

- Apuesta con 3 o 4 compañeros por el color que saldrá al realizar el experimento ¿Crees que tienes más opciones de ganar que tus compañeros? ¿Por qué?

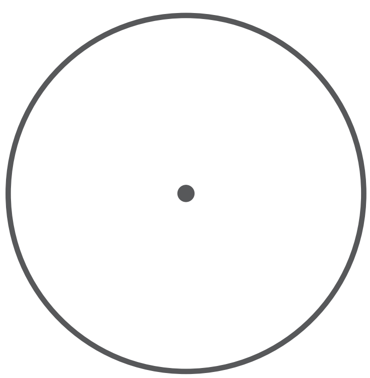
Asigna a cada elemento del espacio muestral Ω un número entre 1 y 5. Ordénalos en el diagrama y usa flechas paar conectar el suceso con el número que le asignaste.



Representa el experimento usando una ruleta. Puedes construirla o usar el recurso digital Ruleta-NLVM[30].

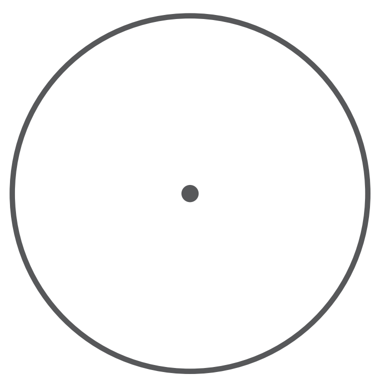
- Dibuja tu representación del experimento en las ruletas:

Con colores



En Ω

Con números



En Z

30. http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_186_g_3_t_5.html?open=activities

- ¿Qué relación hay entre la cardinalidad del espacio muestral y la cantidad de partes en que dividiste la ruleta?

- ¿Qué relación hay entre la cantidad de pelotitas de cada color y los tamaños de cada sector de la ruleta?

GUÍA Nº 1 / ESTUDIANTE

En busca de la Variable Aleatoria y su distribución de probabilidad

- Ahora, simula 20 veces el experimento usando la ruleta y luego completa la tabla.

Color	Número asignado	Frecuencia
Naranjo		
Amarillo		
Verde		
Rojo		
Azul		
	Total repeticiones:	

- Según los resultados de la tabla ¿ganaste o perdiste el juego?
- Si jugaras 100 veces más ¿mantendrías o cambiarías tu apuesta? Argumenta:

- Juega otras 100 veces y completa la tabla agregando los resultados de los lanzamientos anteriores (en total **tendrás** 120 lanzamientos)

Variable Experimental X_E	Frecuencia	Frecuencia relativa
1		
2		
3		
4		
5		
Total repeticiones:		

- Ahora, grafica los resultados obtenidos y compáralos con los de otros compañeros/as ¿Qué conclusiones has obtenido?

- Anota tus conclusiones:

- ¿Cuál es la probabilidad de la Variable Experimental? Completa:

$P(X_E = 1) =$ ______ $P(X_E = 2) =$ ______ $P(X_E = 3) =$ ______

$P(X_E = 4) =$ ______ $P(X_E = 5) =$ ______

Ahora discute con tu clase: ¿Para calcular la probabilidad teórica es posible utilizar el Modelo Laplace? Si no se puede usar ¿de qué forma podrían calcularla? Argumenta:

- Completa la tabla con la probabilidad teórica de la Variable:

Variable Aleatoria (X)	Probabilidad Teórica
1	$P(X = 1) =$ ______
2	
3	
4	
5	
Suma total:	

- Observa la tabla ¿Por qué crees que la Variable experimental ahora se llama Variable Aleatoria? Discute con tus compañeros/as.

- Grafica las probabilidades obtenidas:

- ¿Cómo es la distribución de la probabilidad de la Variable Aleatoria? Explica:

Discute con tus compañeros: ***Es posible afirmar que la Variable Aleatoria es una función*** ¿qué significa esto?

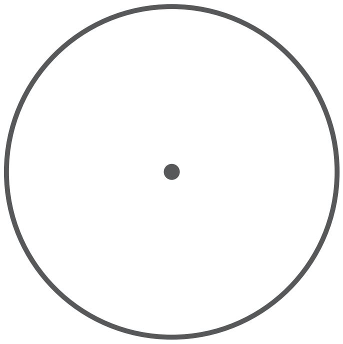
- En el experimento que has estado analizando: ¿Cuál es el Dominio? ¿Cuál es el recorrido?:

La Variable Aleatoria en las encuestas:

- Lee la siguiente situación:

  En una ciudad, durante un mes se encuesta a los asistentes a un teatro. Según la encuesta, a la mitad de los/las espectadores/as les gusta ver obras de comedia, mientras que un cuarto prefiere representaciones dramáticas y el resto se reparte en partes iguales entre ballet y orquestas de música clásica. Si se elige uno/a de los/las encuestados/as al azar ¿cuál es la probabilidad de que éste prefiera el ballet por sobre las otras opciones?

- Representa la situación de la encuesta en la ruleta y juega algunas veces para saber cómo serían los/las encuestados/as elegidos/as.

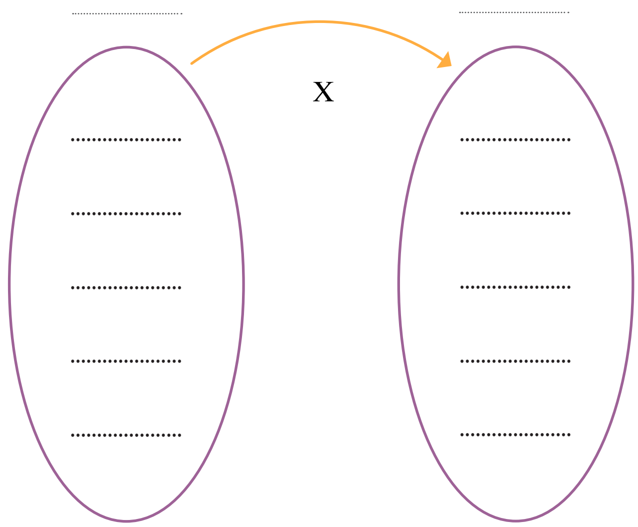


  - ¿Cómo es la distribución de la probabilidad de la Variable Aleatoria? Explica:

  - ¿Cuál es el espacio muestral Ω?

Define la Variable Aleatoria en este experimento:

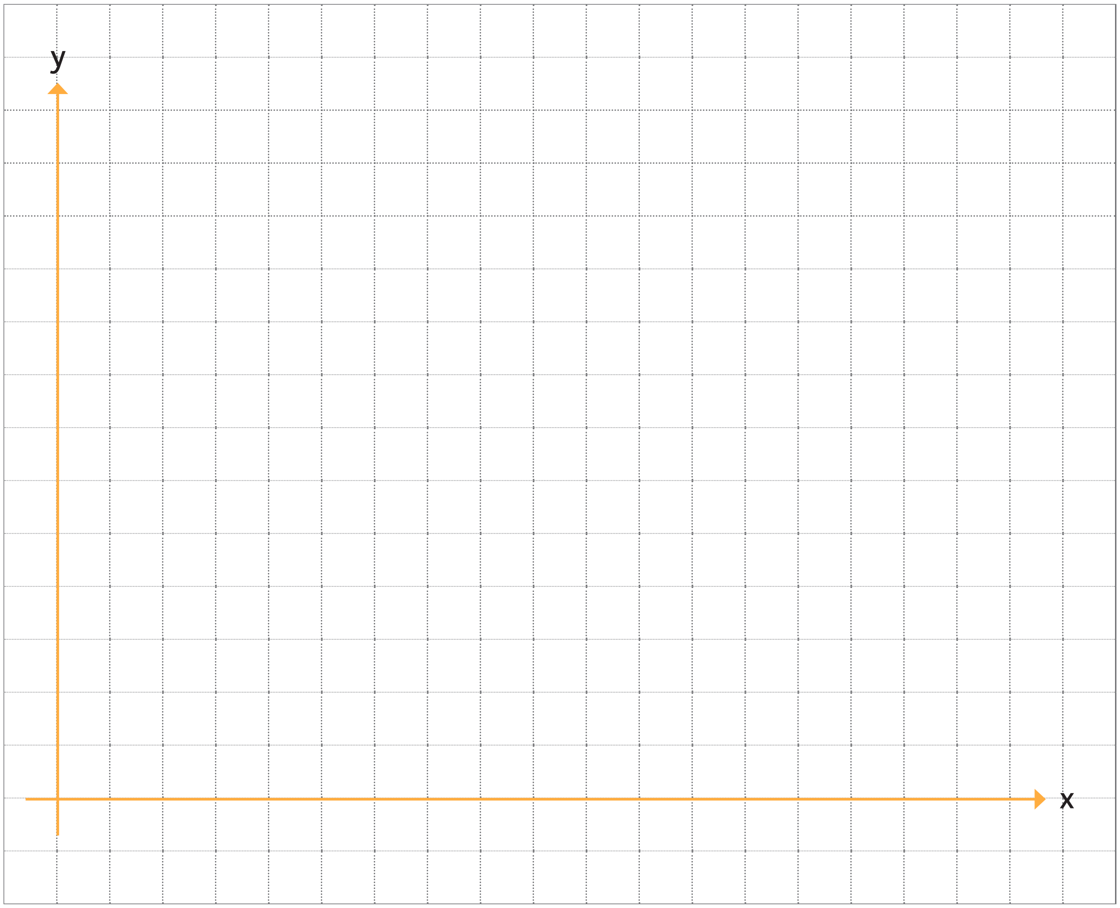
X: .... → ....



Completa la tabla con las probabilidades teóricas:

Variable Aleatoria (X)	Probabilidad Teórica
1	$P(X = \_\_\_) = \_\_\_\_\_$
2	
3	
4	
5	
Suma total:	

- ¿Cuál es distribución de probabilidad? Grafícala:



Síntesis

Conversa con tu clase y responde las preguntas, con las conclusiones extraídas de las ideas más relevantes:

¿Para qué creen que se utilizan las Variables Aleatorias? ¿Cómo ayudan a comprender mejor los resultados de los experimentos aleatorios?

En conjunto con tus compañeros/as y profesor/a definan formalmente:

Variable Aleatoria:

Distribución de probabilidad:

Evaluando mi proceso de aprendizaje:

- Revisa tu desempeño en la siguiente evaluación: primero marca en los espacios que corresponda en la tabla y luego responde a las preguntas.

  - Instrucción: En una escala de 1 a 5, califica de acuerdo al nivel de logro.

    1: No necesité hacer esta actividad

    2: No entendí esta actividad

    3: Aprendizaje nivel bajo

    4: Aprendizaje nivel medio

    5: Aprendizaje nivel avanzado

Aspecto a evaluar	1	2	3	4	5
Definir la Variable aleatoria usando un diagrama con flechas.					
Representar un experimento aleatorio usando una ruleta.					
Simular experimentos aleatorios jugando con ruletas.					
Graficar las probabilidades para ver su distribución.					
Comparar los resultados experimentales con los resultados teóricos de las probabilidades.					

- ¿Cuál es la mejor forma o material que te ayudó a comprender los conceptos trabajados?

- Otros aspectos de tu aprendizaje que quisieras resaltar. Descríbelos.

Variables Aleatorias

GUÍA
2

Objetivo:

Interpretar el valor esperado o Esperanza de una Variable Aleatoria

Ten presente que: Puedes desarrollar las actividades en el orden que más te ayude a aprender, pero no dejes de contestar las preguntas que tienen un ícono de un lápiz, con ellas podrás evaluarte y saber si estás logrando las metas de la clase.

Preguntas previas

- ¿Sabes sacar promedios? ¿En qué situaciones lo has hecho? Da un ejemplo para mostrar el procedimiento que usas:

¿Cuál será la diferencia entre un "promedio tradicional" (promedio aritmético) y uno en que las notas no tengan todas el "mismo peso" (promedio ponderado)? Conversa con tus compañeros/as en qué caso las notas podrían tener distinto porcentaje de incidencia en el promedio final.

- En la tabla se muestran las notas parciales de un/a estudiante y las ponderaciones de ellas. Antes de calcular analiza ¿cuál crees que será el promedio de el/la estudiante? ¿Cuál es la nota final de el/la estudiante?.

Notas parciales	6	7	3	4	7
Ponderación	20%	20%	10%	20%	30%

- Anota tus cálculos

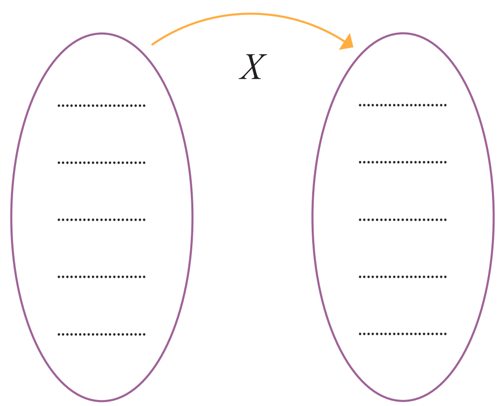
- ¿Cuál es la diferencia con un promedio aritmético? ¿Cómo se relaciona con el resultado el que las notas tengan distintas ponderaciones?

El valor esperado y el equilibrio

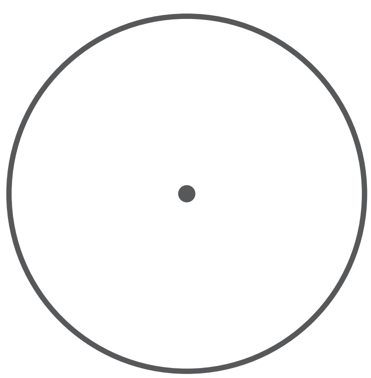
- Considera el experimento aleatorio: "lanzar un dado y registrar los puntos de la cara superior".

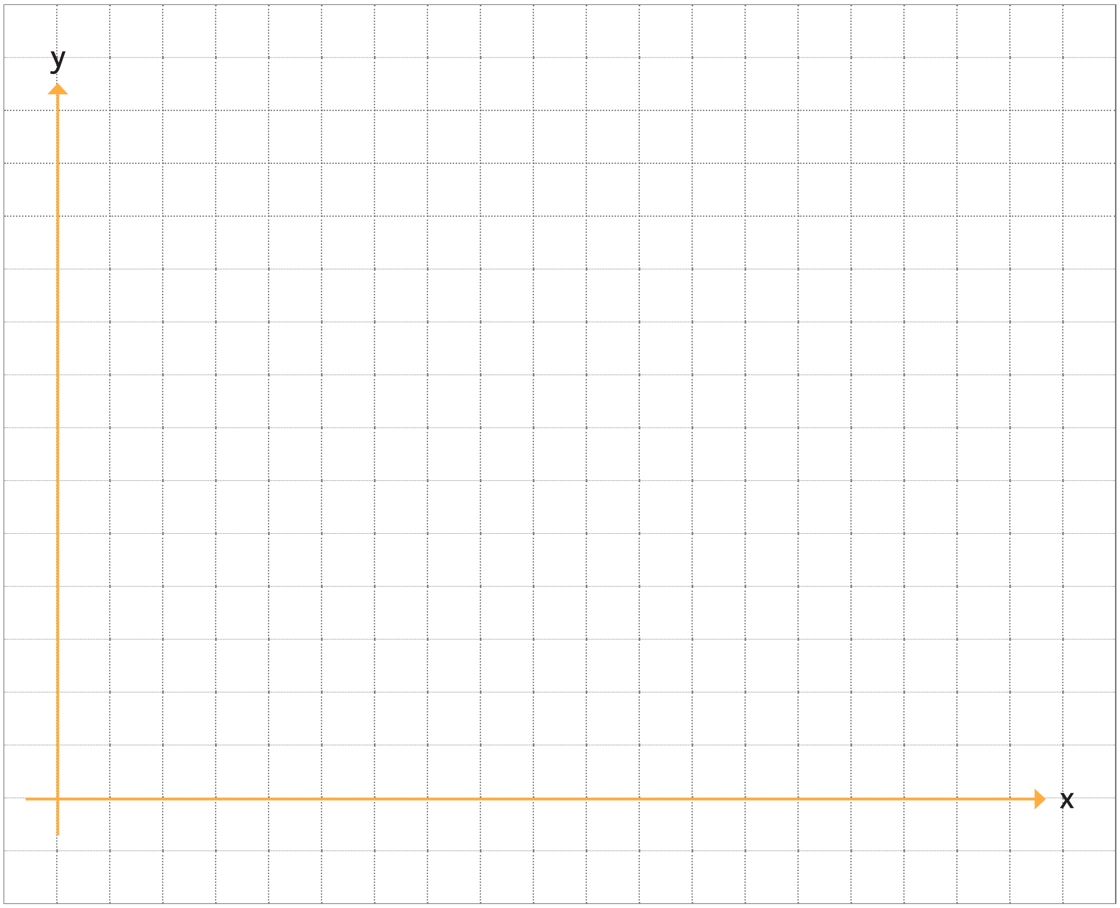
  - Define la Variable Aleatoria X

    X: .... → ....



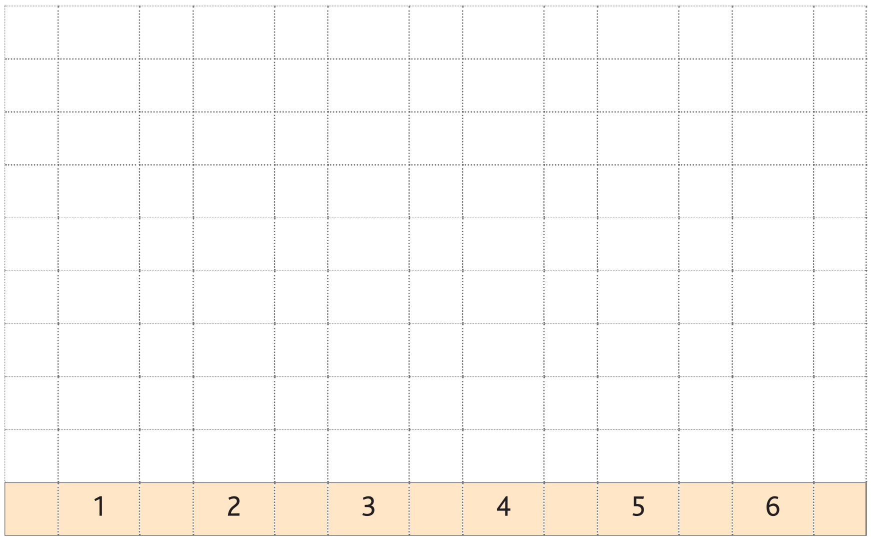
- Usa una ruleta para representar el experimento y luego grafica la distribución de probabilidad:





Si realizaras este experimento: ¿Qué valor esperas que en promedio tenga la Variable Aleatoria? argumenta

- Dibuja en la balanza las barras asociadas a cada valor de la Variable Aleatoria en la distribución de probabilidad. Dibuja una cuña (Δ) en donde se equilibre la balanza.



  - ¿Cuál es el valor en el punto de equilibrio? ¿Coincide con tu estimación del valor esperado?

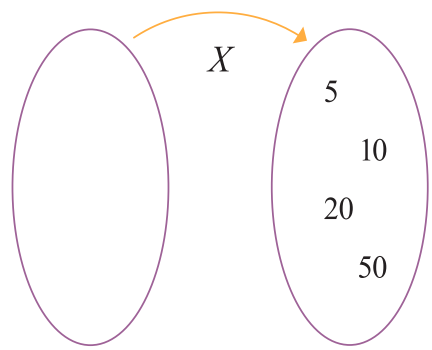
Calculando la Esperanza

- Lee la siguiente situación:

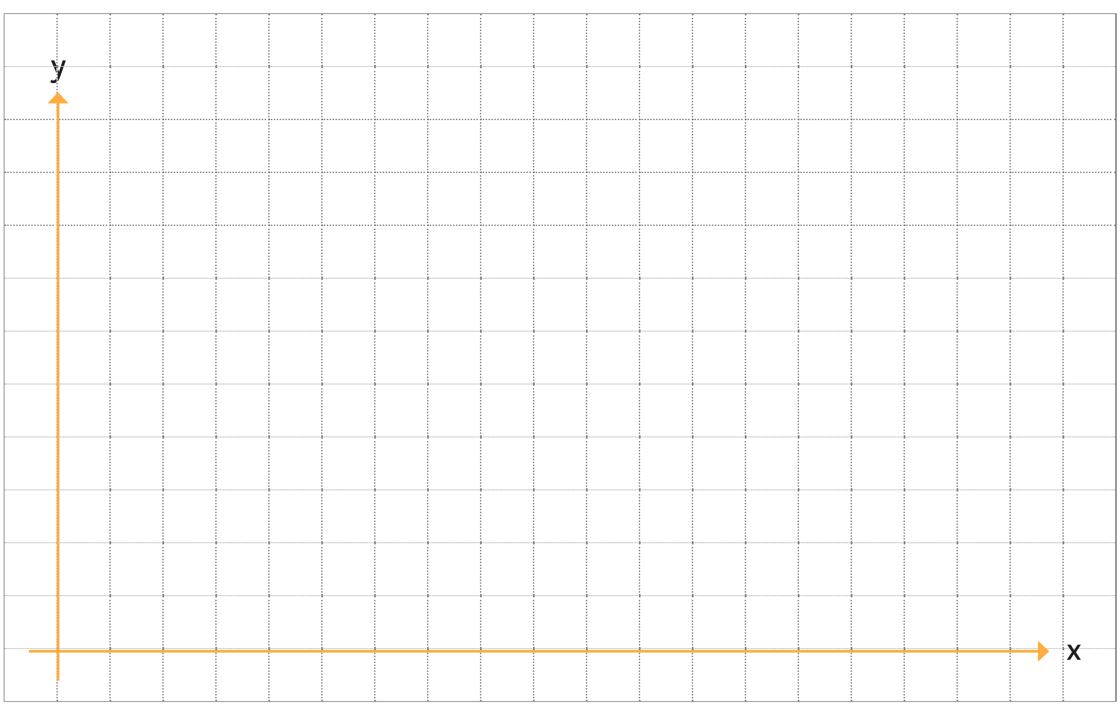
Un jugador de dardos tiene probabilidad 0.2 de obtener 5 puntos al lanzar, una probabilidad de 0.25 de obtener un 10, 0.15 de obtener 50 puntos y 0.4 de obtener 20 puntos. Si consideramos la Variable Aleatoria puntuación ¿Cuál es su Esperanza o valor esperado?

- Define la Variable Aleatoria X

X: .... → ....



- Grafica la distribución de probabilidad:



- Dibuja en la balanza las barras asociadas a cada valor de la Variable Aleatoria en la distribución de probabilidad. Dibuja una cuña (Δ) en donde se equilibre la balanza.

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

  - ¿Por qué crees que se han dejado espacios en valores que no toma la Variable Aleatoria? Conversa con tu clase y escribe tu conclusión:

¿Cuál es tu estimación del valor esperado o punto de equilibrio de la Variable Aleatoria X?

Reemplaza los valores en esta fórmula y calcual el valor de $E(X)$

$$E(X) = x_1P(X = x_1) + x_2P(X = x_2) + x_3P(X = x_3) + x_4P(X = x_4)$$

Ten presente que:

x_1, x_2, x_3, x_4 corresponde a los valores que puede tomar la Variable Aleatoria.

$P(X = x_1), P(X = x_2), P(X = x_3), P(X = x_4)$ corresponde a la probabilidad de que la Variable Aleatoria tome cada uno de los valores asignados a los sucesos.

Anota aquí tus cálculos:

¿Qué relación hay entre el resultado de la fórmula evaluada $E(X)$ y el valor esperado aproximado de la Variable Aleatoria X ?

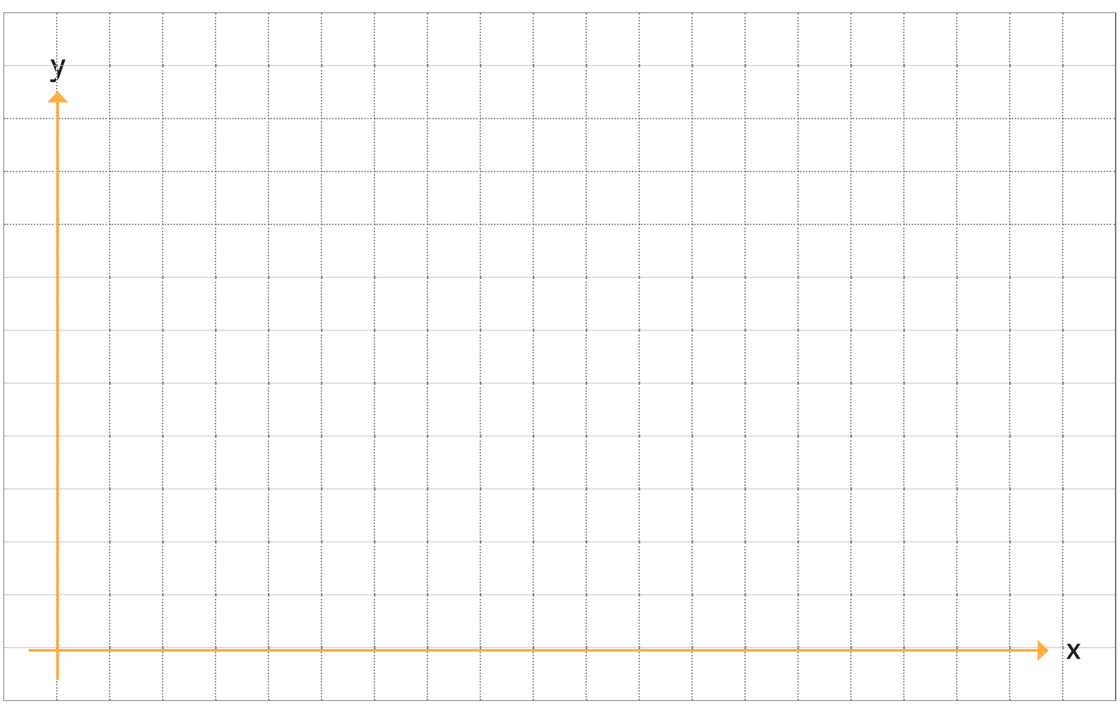
GUÍA Nº 2 / ESTUDIANTE

- Ahora, usa el procedimiento para calcular el promedio ponderado, utilizando las probabilidades y los valores de la Variable Aleatoria. ¿Qué representaría la probabilidad en el promedio ponderado?
- Anota tus cálculos:

- Compara el valor del promedio ponderado con la Esperanza de la Variable Aleatoria $E(X)$. Anota las principales conclusiones.

Estimar y calcular la Esperanza

- Observa la ruleta que representa un experimento aleatorio y la definición de la Variable Aleatoria y, luego grafica la distribución de probabilidad:



- Calcula o estima la Esperanza de la Variable Aleatoria $E(Y)$ ubicando el punto de equilibrio entre las barras. Registra ese valor:

- Usa la fórmula para calcular $E(Y)$. Anota sus cálculos:

- Compara ambos valores y luego da una interpretación para $E(Y)$.

Síntesis

Junto a tu clase analiza la interpretación del valor esperado o Esperanza de una Variable Aleatoria. Relaciona la Esperanza con el concepto de promedio ponderado que conoces.

Ahora, definan formalmente:

Esperanza de una Variable Aleatoria:

Cálculo de la Esperanza:

GUÍA Nº 2 / ESTUDIANTE

Evaluando mi proceso de aprendizaje:

- Revisa tu desempeño en la siguiente evaluación: primero marca en los espacios que corresponda en la tabla y luego responde a las preguntas.

  - Instrucción: En una escala de 1 a 5, califica de acuerdo al nivel de logro.

    1: No necesité hacer esta actividad

    2: No entendí esta actividad

    3: Aprendizaje nivel bajo

    4: Aprendizaje nivel medio

    5: Aprendizaje nivel avanzado

Aspecto a evaluar	1	2	3	4	5
Representar un experimento aleatorio usando una ruleta.					
Graficar las probabilidades para ver su distribución.					
Estimar la Esperanza de una Variable Aleatoria como el equilibrio de una balanza.					
Calcular la Esperanza de una Variable Aleatoria usando una fórmula matemática.					
Relacionar la Esperanza de una Variable Aleatoria con el promedio ponderado de datos.					
Comparar los resultados exactos con los estimados de las Esperanzas.					

- ¿Cuál es la mejor forma o material que te ayudó a comprender los conceptos trabajados?

- Otros aspectos de tu aprendizaje que quisieras resaltar. Descríbelos.

GUÍA Nº 2 / ESTUDIANTE

Bibliografía

Alsina, A. y Planas N. (2008). Matemática Inclusiva: Propuestas para una educación matemática accesible. Narcea Ediciones. España

Araya, R. y Dartnell, P. (2008). Saber Pedagógico y Conocimiento de la Disciplina Matemática en Profesores de Educación General Básica. Proyecto FONIDE Nº 212 2006.

Ball, D. L., Hill, H.C, y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? American Educator, 29(3), 14-46.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

CAST (2011). Universal Design for Learning Guidelines version 2.0. Wakefield, MA: Author. Traducción al español version 2.0. (2013)

Chandra, B. (2012). Mathematics as an im/pure knowledge system: symbiosis, (w)holism and synergy in mathematics education. International Journal of Science and Mathematics Education (2013) 11: 65Y87

Espinoza, A., y Taut, S. (2014). El rol del género en las interacciones pedagógicas de aulas de matemática chilenas: Un análisis de evidencia audiovisual. Actas Tercer Congreso Interdisciplinario de Investigación en Educación. Santiago de Chile. Recuperado el 01/09/14 de: www.ciie2014.cl/download.php?file=sesiones/141.pdf

Frome, P., Lasater, B., y Cooney, S. (2005). Well-qualified teachers and high quality teaching: Are they the same? Atlanta, GA: Southern Regional Educational Board.

Griffin, C., Liga, M. , Griffin, V. y Bae, J. (2013). Discourse Practices in Inclusive Elementary Mathematics Classrooms. Learning Disability Quarterly

Hely, L. y do Santos, H. (2014). Changing perspectives on inclusive mathematics education: Relationships between research and teacher education. Education as Change, 18:sup1, S121-S136, DOI:10.1080/16823206.2013.877847

Lipschutz, S. y Schiller, J. (2000). Introducción a la probabilidad y estadística. Mac Graw Hill.

Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. NJ: Lawrence Erlbaum.

Manzi, J., González, R., y Sun, Y. (2011) La Evaluación Docente en Chile. Centro de Medición Mide UC. Pontificia Universidad Católica de Chile

Ministerio de Educación, República de Chile. (2012). Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Media. Recuperado el 09/06/2014 de http://www.cpeip.cl/usuarios/cpeip/File/librosestandaresvale/libromediafinal.pdf

Ministerio de Educación de Chile (2012). Orientaciones e Instrumentos de Evaluación Diagnóstica, Intermedia y final en Resolución de Problemas. 1er año de Educación Media.

Ministerio de Educación de Chile (2013). Diferencias actitudinales entre hombres y mujeres en matemática resultados Prueba PISA 2012: APUNTES SOBRE LA CALIDAD DE LA EDUCACIÓN

Ministerio de Educación de Chile (2013). Resultados transversales en resolución de problemas PISA 2012: APUNTES SOBRE LA CALIDAD DE LA EDUCACIÓN.

Ministerio de Educación de Chile (2003). Marco para la Buena Enseñanza.

Ministerio de Educación de Chile (2009). Actualización Curricular.

Monk, D. H. (1994). Subject area preparation of secondary mathematics and science teachers and students achievements. Economics of Education Review, 13(2), 125-145.

Oteiza, F.; Zamorano, L.; Baeza, O. (2008a). Aprender Matemática Creando Soluciones. Material del Profesor. 2° Medio. Proyecto Enlaces Matemática. Santiago: Editorial Zig-Zag.

Oteiza, F.; Zamorano, L.; Baeza, O. (2008b). Aprender Matemática Creando Soluciones. Material del Alumno. 2° Medio. Proyecto Enlaces Matemática. Santiago: Editorial Zig-Zag.

Oteiza, F.; Zamorano, L.; Baeza, O. (2008c). Aprender Matemática Creando Soluciones. Material de Referencia. 2° Medio. Proyecto Enlaces Matemática. Santiago: Editorial Zig-Zag.

Radovic, D., y Preiss, D. (2010). Patrones de discurso observados en el aula de matemática de 2° ciclo básico. PSYKHE, 19(2), 65-79.

Rodríguez, M. (2013). ¿Cuánto saben de matemática los docentes que la enseñan y cómo se relaciona ese saber con sus prácticas de enseñanza?. Proyecto FONIDE N° F611150

Ruiz, B. (2006). Análisis epistemológico de la variable aleatoria. (Tesis Doctoral inédita). Universidad de Granada. Granada.

Saavedra, E. (2005). Contenidos Básicos de Estadística y Probabilidad. Santiago: Editorial Universidad de Santiago.

Saavedra, E. (2009). Material de Referencia curso datosyazar.cl. Santiago: Centro Comenius USACH.

Shulman L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Varas, L., Cubillos, L., y Jiménez, D. (2008). Análisis de la calidad de clases de matemática. Teorema de Pitágoras y razonamiento matemático. Proyecto FONIDE Nº: 209-2006.

Ministerio de
Educación

Gobierno de Chile