Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

1er año de Educación Media

MATEMÁTICA

Guiones Didácticos y Guías para el/la estudiante

1er. año de Educación Media

Matemática

Guiones Didácticos y Guías para el/la estudiante

Ministerio de Educación
División de Educación General
Nivel de Educación Media

Matemática: Guiones Didácticos y Guías para el/la Estudiante
de 1er año de Educación Media

Este material corresponde a una propuesta de apoyo a la implementación curricular, a nivel de aula, elaborado desde el Nivel de Educación Media, de la División de Educación General del Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación
División de Educación General
Av. Bernardo O'Higgins N° 1371
Santiago - Chile

Coordinador Nacional de Educación Media:
Alejandro Hidalgo Zamorano

Coordinación Editorial:
Sergio Reyes Santelices

Diseño:
Verónica Santana

Impresión: AMF Impresores

Registro de Propiedad Intelectual N° 251.654 de marzo de 2015

Edición:
2.200 Ejemplares

Marzo de 2015

Índice

Presentación 5

MARCO CONCEPTUAL 7

- Análisis Disciplinar 8
  - Una mirada Internacional 8
  - Una mirada nacional 12
  - Educación matemática centrada en la diversidad: la matemática inclusiva 14
  - Esquema de Síntesis: ¿Qué se espera de un/una profesor/a en el desarrollo de la Matemática Inclusiva? 17
  - Análisis Curricular 18
  - Énfasis del Ajuste Curricular 2009 en Matemática: requerimientos 18
  - Dificultades en el desarrollo de la Educación Matemática en Chile 19
  - Esquema de Síntesis: ¿Cuáles son los nudos críticos en Chile? 22
- Estrategias Pedagógicas 23
  - El Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) 23
  - Esquema de Síntesis: ¿Cómo diseñar actividades didácticas según el Diseño Universal para el Aprendizaje? 23

GUIONES DIDÁCTICOS Y GUÍAS 27

- Introducción Guiones Didácticos 28
  - Objetivo del Guion 28
  - Estructura del Guion 30
  - Foco curricular y didáctico 33
  - Guion de Enseñanza – Datos y Azar 35
    - Guion para el/la profesor/a: Medidas de posición 35
    - Guías Estudiantes 75
  - Guion de Enseñanza – Álgebra y Geometría 111
    - Guion del/la profesor/a: Composición de Transformaciones Isométricas 111
    - Guía Estudiantes 131

BIBLIOGRAFÍA 152

Presentación

El proceso de Reforma Educacional que se inicia, considera a la educación como un Derecho Social, en que todos/as los/las ciudadanos/as, tienen el derecho a educarse y a elegir con libertad sus trayectorias de vida a la base de una sociedad más justa, democrática y participativa. En este sentido, el desafío de la calidad de la educación debe ser comprendido desde una visión integral y multidimensional, en que el derecho a aprender debe relacionarse con diversas oportunidades y experiencias de enseñanza y aprendizaje, considerando la diversidad de la población estudiantil y sus contextos.

El nivel de Educación Media sitúa en el centro de sus desafíos la calidad de la educación, siendo necesario responder a la heterogeneidad de estudiantes que inician este nivel de enseñanza, con una pedagogía adecuada y pertinente a sus necesidades, que se haga cargo de las diversas disposiciones al aprendizaje y puntos de partida que presentan, permitiéndoles alcanzar aprendizajes de calidad con el propósito de ampliar sus oportunidades de inclusión social y proyectos de vida futuros, especialmente reconociendo la creciente relevancia de la trayectoria escolar y de los estudio post media. En este sentido, comprender el derecho a la educación significa reconocer las necesidades de aprendizaje de todos/as los/las estudiantes y propender a su acceso equitativo.

En este contexto, es necesario reconocer que la situación de diversidad en el aula se vuelve aún más desafiante en contextos de vulnerabilidad socioeducativa, siendo responsabilidad de los actores del Liceo hacerse cargo, desde sus propuestas pedagógicas, de la heterogeneidad de disposiciones de aprendizaje, la situación de rezago y hasta las posibilidades de fracaso escolar.

El Nivel de Educación Media del Ministerio de Educación pone a disposición de los establecimientos educacionales, una propuesta de enseñanza y aprendizaje para acompañar el ejercicio docente, basada en el análisis de las orientaciones y organización de los instrumentos curriculares vigentes, que incluye orientaciones técnicas y didácticas que favorezcan el aprendizaje en el aula, promoviendo un currículum y una pedagogía inclusiva o accesible a todos/as los/las estudiantes. Esta propuesta entrega herramientas que permiten profundizar la formación general y el desarrollo de conocimientos, habilidades y actitudes en las diversas asignaturas, en el contexto del Marco Curricular vigente, promoviendo los diferentes niveles, ritmos y estilos de aprendizaje, como también los valores o concepciones del mundo presentes en la cultura juvenil.

Esta propuesta coopera en la instalación y consolidación de Procesos de Mejoramiento Continuo en los Liceos y apoyo al ciclo permanente que recorren para mejorar sus "Prácticas y Resultados", las que siempre deben estar asociadas a metas de aprendizaje e incorporadas en su Plan de Mejoramiento Educativo.

Marco Conceptual

En el contexto de forjar una educación de calidad, con énfasis en procesos y resultados que otorguen a todos y todas genuinas posibilidades de aprender y de utilizar este aprendizaje para resolver los problemas más esenciales de la vida cotidiana, es que se ha apostado, primero, por relevar la diversidad de todos los educandos (UNESCO, 2001) y, segundo, por explicitar procesos en los que se evidencien diversas maneras de trabajar un determinado concepto dentro del aula.

Así, el presente apartado presenta un recorrido por tres elementos esenciales en el marco de la Educación Matemática que procura entregar una comprensión lógica y detallada de las categorías descriptivas que componen cada uno de los instrumentos desarrollados en este texto. De esta manera, se comienza con un **análisis desde la disciplina**, para continuar con un **análisis curricular** y finalizar con un conjunto de **estrategias pedagógicas** entre las cuales destaca la descripción de las pautas del diseño universal de aprendizaje (DUA).

Análisis Disciplinar

Una mirada Internacional

Variados estudios corroboran la necesidad que el/la docente de matemática sea un/a experto/a en los contenidos que debe enseñar, considerando esto como un factor esencial para que los/las estudiantes puedan alcanzar mejores logros académicos (Monk, 1994; Frome, Lasater & Cooney, 2005). Otros estudios concluyen que el conocimiento del contenido, aunque fundamental, no determina la capacidad de enseñar, relevando nuevos componentes para la definición de lo que un docente debe saber y saber hacer para el logro de buenos resultados por parte de los/las estudiantes (Ball, Hill y Bass, 2005; Ma, 1999), siendo Shulman (1987) quien, reconociendo la importancia del conocimiento del contenido y de las habilidades pedagógicas generales que el/la docente posea, propone una intersección entre ambos factores, lo que denomina *"conocimiento pedagógico del contenido"*.

A partir de esta distinción, se destaca el trabajo desarrollado por Liping Ma (1999), quien efectúa un estudio realizado con profesores/as de matemática altamente calificados/as, levantando una categorización relacionada con lo que ella denomina Comprensión Profunda de la Matemática Fundamental (CPMF) y que se centra en que el conocimiento de la matemática en profesores debe presentar 4 características esenciales:

- **Conexiones:** Un/a profesor/a debe ser capaz de conectar conceptos y procedimientos matemáticos en clase, utilizando tanto, conexiones simples como complejas, evitando el aprendizaje fragmentado de contenidos y posibilitando la comprensión de una red de conocimientos.
- **Múltiples perspectivas:** Un/a profesor/a debe desarrollar diferentes perspectivas de una misma idea matemática junto con los diferentes caminos para su solución, evidenciando las ventajas y desventajas de cada uno de ellos. Se demuestra la flexibilidad dentro de la disciplina.
- **Ideas básicas:** Un/a profesor/a debe reconocer las ideas básicas, simples y cargadas de significancia dentro de la matemática y debe saber el momento de la clase donde esa idea es necesaria y básica para la comprensión del contenido que desarrolla.

- **Coherencia longitudinal:** Un/a profesor/a experto/a en el ámbito curricular está capacitado/a para revisar conceptos trabajados anteriormente con los/las alumnos/as, así como a sentar las bases para los conocimientos que serán adquiridos posteriormente.

Ma (1999) concluye que estas cuatro características se interrelacionan y en su conjunto dan cuenta de una comprensión significativa de las matemáticas, demostrando básicamente los elementos de profundidad, amplitud y completitud en el marco de los contenidos matemáticos escolares.

Tanto las ideas de Shulman como las de Ma, son sometidas a estrictos y diversos estudios, principalmente provenientes de la Universidad de Michigan a cargo de los Académicos Deborah Ball y Hyman Bass (2005), quienes se esfuerzan en comprender cómo el conocimiento de los/las profesores/as da forma a su práctica de aula y cómo estas prácticas finalmente afectan el aprendizaje de sus estudiantes. Los autores han desarrollado el modelo de **Conocimiento Matemático para la Enseñanza** focalizando su investigación en las dimensiones del conocimiento útil para la enseñanza en aula y en lo que los/las profesores/as deben saber para alcanzar con éxito las actividades con sus estudiantes, lo que implica conocimiento matemático, pero en contexto específico de la enseñanza. Los resultados de estas investigaciones indican que los/las profesores/as que poseen habilidades en el conocimiento del contenido y en la enseñanza de éste son los que alcanzan mayores logros académicos con sus estudiantes.

Así, el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza se conforma como un refinamiento de las categorías propuestas por Shulman (1986) y distingue entre Conocimiento del Contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido; se propone una división de cada uno de estos dominios tal como lo muestra la Figura 1.

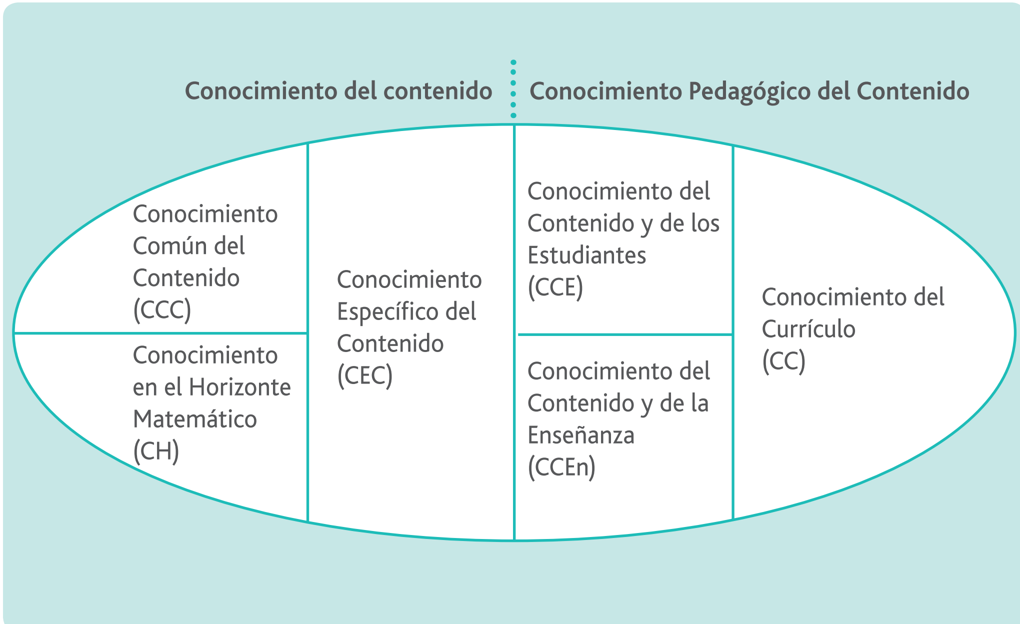


Figura 1. Modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Ball et al, 2008)

Dentro de cada dominio se delimitan tres áreas diferentes de conocimiento a las que Ball et al (2008), define del siguiente modo:

- **Dimensión: Conocimiento del Contenido**
  - *Conocimiento Común del Contenido* (CCC) corresponde al que cualquier persona instruida podría tener. Este conocimiento se adquiere a lo largo de los estudios formales o de la vida cotidiana, y las personas se caracterizan por resolver problemas comunes y operar correctamente.
  - *Conocimiento Específico del Contenido* (CEC) corresponde al conocimiento matemático que le permite al profesor o profesora realizar la labor de la enseñanza. Esto se traduce, por ejemplo, en proporcionar explicaciones matemáticas y representar ideas de diversas formas.
  - *Conocimiento en el Horizonte Matemático* (CH), se refiere al conocimiento de las relaciones existentes entre los distintos temas matemáticos y a su trayectoria en los distintos niveles de aprendizaje escolar.

- **Dimensión: Conocimiento Pedagógico del Contenido**
  - *Conocimiento del Contenido y de los/las Estudiantes* (CCE) es el utilizado al enseñar un contenido específico e incluye conocer aspectos particulares de los/las alumnos/as, por ejemplo, **conocer cómo evoluciona su razonamiento matemático, qué aprendizajes son previos a otros o qué tipos de problemas son comprensibles para su edad.**
  - *Conocimiento del Contenido y la Enseñanza* (CCEn) se refiere a la intersección entre el conocimiento del contenido y el conocimiento de la enseñanza de ese contenido. Esto implica que el docente sea capaz de **construir sus actividades de aula en relación al razonamiento de sus estudiantes, y a sus mecanismos de aprendizaje**.
  - *Conocimiento del Currículo* (CC) se refiere al conocimiento de las orientaciones curriculares, contenidos, objetivos, materiales y recursos disponibles. Se espera que el/la docente sepa, por ejemplo, **reconocer y anticiparse a los errores típicos de sus estudiantes, conocer distintas formas o estrategias para explicar un concepto o un procedimiento matemático**.

Cada uno de los apartados desarrollados y explicitado por las investigaciones de Ball entre otros académicos, dejan en evidencia lo que a nivel internacional se espera de la actividad del/la docente en aula en torno al contenido matemático que enseña, así como a los mecanismos mediante los cuales se logra que este conocimiento tenga sentido para un conjunto de estudiantes en constante cambio y dinamismo. El foco en este sentido, es avanzar desde el saber al saber hacer en el campo de la enseñanza de las matemáticas, donde la variable del grupo de estudiantes es determinante a la hora de diseñar estrategias de actividades con foco en la enseñanza para el aprendizaje.

Es necesario, ahora, dar una mirada a los estándares nacionales sobre lo que es y se espera de un/a docente en aula, para finalizar con el desarrollo de ideas y conceptos sobre el saber hacer, en medio de la diversidad de formas de aprender que cada estudiante o grupos de estudiantes poseen.

Una mirada nacional

En Chile, lo que se espera de un/a docente en aula se encuentra estandarizado por dos documentos legales. Para los/las docentes en ejercicio, el "Marco para la Buena Enseñanza" (MINEDUC, 2003) orienta la práctica profesional docente, buscando representar la totalidad de sus responsabilidades en el desarrollo del trabajo cotidiano. Su objetivo es definir parámetros consensuados por los /las profesionales de la educación, para que cada docente pueda evaluar su práctica docente.

El foco central que conduce y unifica todo el Marco para la Buena Enseñanza, involucra a todos los/las estudiantes en el aprendizaje de contenidos relevantes, de este modo, todos los criterios que lo conforman responde a tres interrogantes fundamentales:

- ¿Qué es necesario saber?
- ¿Qué es necesario saber hacer?
- ¿Cuán bien se debe hacer?

Para dar respuesta a estas preguntas, el Marco para la Buena Enseñanza se ha estructurado en cuatro Dominios que hacen referencia a los distintos procesos de la enseñanza:

- Preparación de la enseñanza.
- Creación de un ambiente propicio para el aprendizaje.
- Enseñanza para el aprendizaje de todos/as los/las estudiantes.
- Responsabilidades profesionales.

Cada Dominio se explicita mediante un conjunto de criterios e indicadores que definen parámetros comunes dentro de cada uno. La idea general es proporcionar una herramienta útil y comprensible de los elementos constituyentes de cada uno de estos cuatro Dominios, con los cuales se completa el ciclo total del proceso de enseñanza.

Por otra parte, los estándares para los egresados de las carreras de pedagogía fueron desarrollados según la estructura de la Ley General de Educación (Ley N° 20.370) promulgada el año 2009 y están orientados a las instituciones formadoras de tales profesores/as, que enseñarán en las disciplinas de Lenguaje y Comunicación, Matemática, Historia, Geografía y Ciencias Sociales y Ciencias Naturales, en los contextos de Enseñanza Básica y Media. Estos estándares están expresados como una orientación acerca de los conocimientos y habilidades necesarios que debiera manejar el/la egresado/a de pedagogía para enseñar determinadas disciplinas (MINEDUC, 2012) y están organizados en dos categorías:

- Estándares Pedagógicos
- Estándares Disciplinarios para la Enseñanza

La categoría de Estándar pedagógico hace referencia a las competencias que debe poseer un/a docente en ejercicio y que se consideran como requisitos para ejercer la docencia. Entre estas competencias, que constituyen elementos generales de la labor pedagógica, se encuentran:

- El conocimiento del currículo.
- El diseño de procesos de aprendizaje y evaluación para el aprendizaje.
- Las habilidades para evaluar y reflexionar acerca de la propia práctica pedagógica.
- La habilidad para aprender en forma continua.

Por su parte, los Estándares Disciplinarios para la enseñanza, apuntan al conocimiento de la disciplina y a las competencias para enseñarla, considerando y conjugando los conocimientos específicos, las habilidades y las actitudes que debe poseer un/a egresado/a de Pedagogía en Educación Media para desempeñarse en este nivel escolar.

En el marco específico del profesor o profesora de Matemática, el propósito es enriquecer la comprensión de la realidad, favorecer la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los/las estudiantes. De esta manera, la categoría aporta indicadores relacionados con el desarrollo de las capacidades de comunicar, razonar, abstraer, confrontar y construir estrategias para resolver problemas y para realizar un análisis crítico de diversas situaciones concretas, incorporando formas habituales de la actividad matemática.

Educación matemática centrada en la diversidad: **la matemática inclusiva**

Al adentrarse en el concepto de lo "inclusivo" en el marco de la educación, se encuentran variadas concepciones que consideran desde la incorporación de diversos trastornos, discapacidades, hasta la incorporación o trabajo equitativo de los grupos socioeconómicos vulnerables dentro del sistema escolar, lo que demanda la incorporación de técnicas y métodos adecuados y pertinentes para garantizar la efectiva inclusión concebida como promoción de una Escuela para Todos y, finalmente, la **inclusión como Educación para Todos** (Alsina y Planas, 2008).

Las fronteras entre cada perspectiva evidenciada no son excluyentes, pero dan cuenta de un amplio abanico de matices respecto del concepto de inclusión en el contexto educativo. En este sentido, lo primero y fundamental es explicitar qué se entenderá, para la construcción del presente material, por **educación inclusiva** y **educación matemática inclusiva**.

La **Educación Inclusiva** se concebirá como la incorporación de todos los niños, niñas y jóvenes en la escuela, en cuanto a que su presencia, participación y logros se desarrollen bajo una educación eficaz y de alta calidad para todos. Esto constituye el mayor reto que deben enfrentar los sistemas educativos en el marco de un sistema que **"sostiene y acoge la diversidad de todos los educandos"** (UNESCO, 2001).

En el mismo sentido, entenderemos por **Educación Matemática Inclusiva**, aquella práctica matemática que sea accesible y comprensible para todos/as los/las educandos, lo que constituye una **Educación de Calidad para Todos.**

Aunque recientes estudios sobre Educación Matemática Inclusiva, han centrado su atención en experiencias de inclusión en aulas comunes de estudiantes con deterioro de la audición y/o de la visión, han relevado el desarrollo de novedosas prácticas manipulativas o con énfasis en los sonidos para la enseñanza, por ejemplo, de la geometría o el álgebra, midiendo su significancia educativa en estos estudiantes.

Aun cuando la Educación Inclusiva en Matemática ha tomado preferentemente este camino, algunos autores han logrado evaluar el impacto de estas prácticas en estudiantes que no presentan Necesidad Educativa Especial Permanente (NEEP), siendo el caso de Healy y do Santos (2014), quienes evalúan la potencialidad de tener estudiantes que presentan algún tipo de discapacidad y que presentan Necesidades Educativas Especiales dentro de un mismo contexto de enseñanza en aula. Las autoras indican que la reflexión en cuanto a estos contextos, se debe centrar en la diferencia en lugar del déficit, lo que conduce a un aula inclusiva donde todos los/las participantes, estudiantes y profesores/as se benefician.

En su investigación Healy y do Santos (2014), relevan la reflexión de un/a docente de matemática en aula, quien explicita la complejidad de enfrentarse a un aula diversa, en donde el trabajo se duplica en la preparación de un material acorde a la diferencia y en la aplicación de éste en aula. Sin embargo, las investigadoras advierten cómo los nuevos métodos empleados para un tipo de estudiante beneficia la comprensión de estudiantes para los cuales no estaba destinado el material, así, si los/las estudiantes no habían logrado comprender una determinada idea, ahora poseían una nueva oportunidad para hacerlo. Del mismo modo, la interacción explicativa que se desarrolla en un contexto de aula diverso, está llena de significado y potencia el aprendizaje desde una comprensión y profundidad mayor del contenido que se desarrolla.

Healy y do Santos concluyen su trabajo, reflexionando sobre la necesidad de crear prácticas inclusivas en el contexto de la educación matemática, y su implicancia con la comprensión de cómo la enseñanza y el aprendizaje están mediados por nuestra identidad "física, racial, étnica, lingüística, de género y de los seres sociales" (p.45), que creemos que es fundamental para involucrar a todos/as los/las que participan en el proceso educativo y para reconocer y valorar sus aportes en la construcción de nuevos conocimientos.

Por otro lado, Griffin, Liga, Griffin y Bae (2013), detallan algunas de las actividades que consideran esenciales dentro de la actividad de aula en matemática mediada por un/a docente, estas son:

- Enseñar con estrategias variadas.
- Ofrecer frecuentes oportunidades para la revisión y la práctica.
- El desarrollo profundo del concepto a través de la utilización de materiales manipulativos y representaciones visuales.
- Un menor énfasis en la instrucción mediada entre pares.

De esta manera se avanza con los propósitos y actividades que en general propician una Educación Matemática de Calidad para Todos.

Finalmente, se reconoce el aporte realizado por Ball Chandra (2012) en la composición de una definición de Educación Matemática Inclusiva, incrustada en las **tradiciones culturales locales**, en sintonía con la necesidad de concretar una producción global del conocimiento. Chandra reflexiona sobre la idea de que tanto profesores/as como estudiantes son propensos a concebir una imagen completa del conocimiento matemático y de las habilidades que son útiles para su presente y futuro, sólo después de haber experimentado múltiples formas de construir la matemática.

A modo de síntesis, podemos decir que, a partir de lo anterior, es necesario reflexionar sobre el camino que tomarán los/las profesores/as para diseñar y desarrollar prácticas que permitan lograr que la enseñanza y el aprendizaje de la matemática sean accesibles a todos los/las estudiantes. Esta reflexión ha de partir de una revisión de la pedagogía, la didáctica y los procesos evaluativos para culminar en la construcción de ambientes flexibles, coherentes y amistosos para el trabajo con la diversidad de educandos en la etapa escolar.

Esquema de Síntesis: ¿Qué se espera de un/una profesor/a en el desarrollo de la Matemática Inclusiva?

Los componentes que focalizan un buen desempeño en el ámbito del profesorado, sus conocimientos y aptitudes para ejercer en aula, nos ayudan a trazar los lineamientos necesarios para comprender qué debemos hacer para forjar una educación matemática inclusiva.

Conocimiento del Contenido

- Resolver problemas y operar correctamente.
- Explicaciones matemáticas representadas de diversas formas.
- Conexión de los contenidos con otros temas y coherencia en el tiempo.

Conocimiento Pedagógico del Contenido

- Evolución del Razonamiento matemático.
- Actividades en función a necesidades y habilidades.
- Reconocer errores y diferentes formas de explicar matemática.

Actividades para proporcionar matemática al alcance de todos

- La enseñanza de estrategias variadas.
- Ofrecer frecuentes oportunidades para la revisión y la práctica.
- El desarrollo profundo del concepto a través de la utilización de materiales manipulativos y representaciones visuales.
- Un menor énfasis en la instrucción mediada entre pares.*

* Este último punto hace referencia a que si bien el trabajo entre pares tiene potencial en el ámbito de la educación matemática, la instrucción de esta mediación por parte del/la docente es dentro del total de actividades, la que menos efectos positivos proporciona en el corto plazo (Griffin et al, 2013).

Análisis Curricular

Énfasis del Ajuste Curricular 2009 en Matemática: requerimientos

El Ajuste Curricular del año 2009, en adelante "el Ajuste" declara que "la matemática se aprende haciendo matemática, reflexionando acerca de lo hecho y confrontando la actuación propia con el conocimiento acumulado y sistematizado" (p.146). Así, el Ajuste enfatiza de manera transversal el desarrollo del Razonamiento Matemático sobre los cuatro ejes temáticos del currículo.

Para desarrollar el Razonamiento Matemático, el Ajuste declara la necesidad de brindar oportunidades de aprendizaje en torno a problemas, desafíos, modelamiento de situaciones o proposición y exploración de relaciones que ofrezcan intervenir sobre el pensamiento creativo y crítico de los/las estudiantes con experiencias de aprendizaje que aporten a la formulación de conjeturas, exploración de caminos alternativos de solución y discusión de la validez de las conclusiones. En este contexto, las situaciones escogidas para presentar los problemas que se deben resolver para un aprendizaje matemático escolar, se clasifican en cuatro tipos: personal, educacional/profesional, pública y científica (OCDE, 2004).

En el ámbito del desarrollo del pensamiento, en Educación Básica y Media, se deben promover entre otras, las siguientes habilidades transversales[1]:

- **Habilidades de análisis, interpretación y síntesis de información y conocimiento.**

  Estas habilidades conducen a que los/las estudiantes sean capaces de establecer relaciones entre las distintas asignaturas; de comparar similitudes y diferencias; de entender el carácter sistémico de procesos y fenómenos; de diseñar, planificar y realizar proyectos; de pensar, monitorear y evaluar el propio aprendizaje; de manejar la incertidumbre y adaptarse a los cambios en el conocimiento.

1. Para mayor información diríjase a: Orientaciones e Instrumentos de Evaluación Diagnóstica, Intermedia y final en Resolución de Problemas 1er año de Educación Media. Mineduc, 2013.

- **Habilidades de Resolución de Problemas**

  Solucionar un problema constituye una situación desafiante para el/la estudiante, pues tiene que movilizar saberes, técnicas, procedimientos, entre otros, para poder dar respuesta a la situación planteada. Requiere aplicar habilidades cognitivas de orden superior, que le permitan relacionar, interpretar y representar la información proveniente del enunciado, proponiendo estrategias de solución, anticipando posibles respuestas y argumentándolas. Es la oportunidad para que los/las estudiantes desarrollen habilidades de tipo cognitivo (indagar, conjeturar, validar y argumentar), y de tipo actitudinal (perseverancia, crítica y autocrítica). Es decir, lo/la pone en situación de aplicar sus conocimientos, relacionarlos y buscar la estrategia óptima que le permita solucionar el problema. No se debe confundir entre solucionar un problema y resolver un ejercicio, esto último sólo implica una actividad rutinaria, en que se aplican habilidades de tipo mecánico, es decir, para resolver un ejercicio basta aplicar un algoritmo previamente aprendido.

- **Habilidades de Investigación**

  Las habilidades de investigación, tienen relación con identificar, procesar y sintetizar información de una diversidad de fuentes; organizar información relevante acerca de un tópico o problema; revisar planteamientos a la luz de nuevas evidencias y perspectivas; suspender los juicios en ausencia de información suficiente.

- **Habilidades Comunicativas**

  Las habilidades comunicativas se vinculan con exponer ideas, opiniones, convicciones, sentimientos y experiencias de manera coherente y fundamentada, haciendo uso de diversas y variadas formas de expresión.

Dificultades en el desarrollo de la Educación Matemática en Chile

En cuanto a los cuatro ejes disciplinares que el Ajuste propone, hoy tenemos evidencia de las principales dificultades que a nivel país poseemos. A continuación detallaremos algunas investigaciones que nos ayudan a dilucidar nuestra actual situación en cuanto a los contenidos, las habilidades y la interacción entre el/la profesor/a y sus estudiantes.

Según los estudios del Centro de Medición de la Pontificia Universidad Católica de Chile, MIDE UC (2013), en Enseñanza Media se evidencia un buen nivel en los ejes de Álgebra y Geometría tanto desde el punto de vista del manejo conceptual como de la operatoria y análisis de problemas, en particular referido a los temas de: operatoria algebraica, funciones lineales y cuadráticas, propiedades de figuras y cuerpos geométricos, teoremas de congruencia y proporcionalidad. En el eje de Geometría también se observa un mayor uso de material manipulativo concreto para el desarrollo de las actividades de aula (Araya y Dartnell, 2008).

Por otro lado, el trabajo en terreno advierte que las dificultades en el razonamiento demostrativo (deductivo) para el eje de geometría, es un tema poco abordado en las aulas chilenas al igual que las conexiones que se pueden desarrollar desde la Geometría al Álgebra, en específico nos referimos a la aplicación de la Composición de Funciones a las Transformaciones Isométricas.

Los ejes de Números y Probabilidades presentan problemas más profundos, centrando sus dificultades en la comprensión conceptual de las definiciones y propiedades de los distintos conjuntos numéricos y en la operatoria dentro de los números complejos; por su parte, en el eje de Datos y Azar sólo se abordan problemas sencillos que involucran medidas de tendencia central o tablas de frecuencia, en situaciones familiares (MIDE UC, 2013).

Las grandes ausencias, presentes transversalmente en los cuatro ejes, se centran en las introducciones de las clases, en las demostraciones y toda forma de razonamiento deductivo (Varas et al, 2008); a nivel del desarrollo completo de la clase, el uso de metáforas no son parte del repertorio habitual de el/la profesor/a/a de matemática en Chile (Cornejo, Silva y Olivares, 2011, en Manzi, González y Sun, 2011).

Por otro lado, si bien las habilidades en torno a la resolución de problemas se ha masificado en la teoría y práctica dentro de las aulas del país, es un tema que se debe seguir enfatizando debido a que los resultados de los/las estudiantes chilenos siguen siendo relativamente débiles en el contexto internacional (Apuntes sobre la calidad de la educación, 2013).

En relación a la interacción entre el/la profesor/a y los/las estudiantes, los estudios realizados en Chile muestran que la enseñanza de la matemática está centrada en el/la profesor/a, quien desarrolla los contenidos por medio de una presentación de casos o ejemplos, seguidos por la definición de conceptos (Araya y Dartnell, 2008; Cornejo, Silva y Olivares, 2011, en Manzi, González y Sun, 2011).

Así, el patrón instruccional se caracteriza por una mayor frecuencia de preguntas orientadas al control del desarrollo de las actividades de clase que al desarrollo de la comprensión de contenidos matemáticos; predominio de preguntas de bajo desafío cognitivo y "baja apertura", reduciendo la participación de los/las estudiantes en la construcción del conocimiento; predominio de formas de seguimiento a las intervenciones de los/las alumnos/as basadas en la repetición y evaluación de las mismas, y escasa retroalimentación con ideas matemáticas por parte del/la docente (Varas et al, 2008); (Radovic y Preiss, 2010).

Dentro de la interacción entre los/las profesores/as y los/las estudiantes, no podemos omitir las inequidades existentes entre estudiantes hombres y mujeres en el contexto de la educación matemática en Chile. Según los indicadores de la prueba PISA 2012, las diferencias de género en nuestro país se manifiestan tanto en los resultados de las evaluaciones como en la actitud frente a la clase de matemática.

Existen evidencias que el entorno escolar influye de manera significativa en el rendimiento de los/las estudiantes, de manera especial los procedimientos de gestión y organización escolar. En Chile, un reciente estudio evidencia que tanto profesores como profesoras interactúan menos con estudiantes mujeres, otorgándoles menores posibilidades de participación y aprendizaje durante las clases, en comparación con los estudiantes hombres. Además, se constató que las diferencias de género que ocurre en las aulas, son más pronunciadas en clases a cargo de profesores de género femenino que de profesores de género masculino (Espinoza y Taut, 2014).

Si el/la docente tiene un cabal conocimiento de los distintos énfasis que se proponen para la ejecución de las actividades de aula en matemática, y potencia este conocimiento con la comprensión de las mayores dificultades que a nivel de contenidos, habilidades e interacciones en aula presentan sus estudiantes, tendrá una mayor y mejor oportunidad para ajustar sus prácticas a dichos énfasis y dificultades, y de esta forma, podrá mejorar los resultados de aprendizaje.

Esquema de Síntesis: ¿Cuáles son los nudos críticos en Chile?

El siguiente esquema sintetiza lo trabajado en este apartado en torno a evidenciar los énfasis del Ajuste y las falencias a nivel país, en torno a los contenidos, las habilidades y las interacciones pedagógicas en aula.

Ajuste curricular 2009

Ejes temáticos

1. Números
2. Álgebra
3. Geometría
4. Datos y Azar

Razonamiento Matemático

- Habilidades de análisis, interpretación y síntesis
- Habilidades de Resolución de Problemas
- Habilidades de Investigación
- Habilidades Comunicativas

Dificultades a nivel de contenidos y habilidades

- Definiciones y propiedades en conjuntos numéricos
- Operatoria con números complejos
- Medidas de Posición*
- Variable aleatoria*
- Composiciones isométricas*

- Demostraciones
- Metáforas
- Razonamiento deductivo
- Resolución de problemas
- Conjeturas*

Dificultades a nivel de interacción en clase

Actividades para proporcionar matemática al alcance de todos/as

- La enseñanza de estrategias variadas.
- Ofrecer frecuentes oportunidades para la revisión y la práctica.
- El desarrollo profundo del concepto a través de la utilización de materiales manipulativos y representaciones visuales.
- Un menor énfasis en la instrucción mediada entre pares.

Nota: los elementos marcados con un asterisco (*), representan elementos observados en aula por los profesionales de la educación responsables de la creación del presente material.

Estrategias Pedagógicas

El Diseño Universal para el Aprendizaje

Considerando los elementos presentados de lo que un/una profesor/a de Matemática debe saber y saber hacer, en conjunto con las dificultades curriculares y pedagógicas que poseemos a nivel país, es que nos introduciremos en una construcción comprensiva que aporta y apoya la implementación del currículum vigente a través de múltiples estrategias de enseñanza y aprendizaje en el aula, considerando especialmente la planificación en el marco de los principios que están a la base del Diseño Universal de Aprendizaje.

En este sentido, El Diseño Universal para el Aprendizaje, en adelante DUA, es un marco que aborda el obstáculo que crean los currículos inflexibles para la enseñanza. Este diseño proporciona a todos los/las estudiantes oportunidades justas y equitativas para aprender, categorizado según lo que la norma espera. El marco del DUA estimula la creación de diseños flexibles desde el principio, que presenten opciones personalizables que permitan a todos los/las estudiantes progresar desde donde ellos verdaderamente están y no desde dónde a priori debieran estar. Así, el DUA asume y valora la diversidad de los/las estudiantes al proponer a los/las profesores/as flexibilidad en los objetivos, métodos, materiales y evaluación que permitan dar respuesta asertiva a dichas necesidades diversas (CAST, 2011).

Basados en este marco y en sus principios, reconocemos uno de los pilares de la Reforma Educacional referidos a una pedagogía inclusiva o accesible a todos. A continuación se detallan los principios fundamentales del DUA:

- **Principio I: El qué del aprendizaje**
  Proporcionar múltiples formas de representación

  Los/las alumnos/as difieren en la forma en que perciben y comprenden la información que se les presenta. En este sentido no existe un medio de representación óptimo para la enseñanza-aprendizaje de todos los/las estudiantes, pues las necesidades en torno a una discapacidad, las dificultades para aprender, las diferencias de lengua o cultura, etc., implican maneras distintas para captar y realizar conexiones lógicas con el contenido que se trabaja; también existen diferencias más sutiles y menos identificables como los diferentes medios por los que un/una estudiante capta más rápido o más eficientemente un contenido. Además, **el aprendizaje y la transferencia del aprendizaje ocurren cuando múltiples representaciones son usadas, ya que eso permite a los/las estudiantes hacer tanto conexiones interiores, como entre conceptos**.

- **Principio II: El cómo del aprendizaje**

  Proporcionar múltiples formas de acción y expresión

  Los/las estudiantes poseen diferentes formas en las que pueden interactuar con un entorno de aprendizaje y diferentes formas de expresar sus conocimientos dentro de estos entornos. Así, algunos pueden ser capaces de expresarse bien con el texto escrito, pero no de forma oral y viceversa. Cada una de las estrategias de acción y expresión que adopte un/una estudiante posee cierta rigurosidad en su proceso y organización, que lo lleva a su grado óptimo, pero cada estudiante puede diferir en el nivel de logro que posee frente a cada estrategia. De este modo, podemos decir que **no hay un medio de acción y expresión óptimo para todos los/las estudiantes**; por lo que proveer opciones para la acción y la expresión es esencial.

- **Principio III: El porqué del aprendizaje**

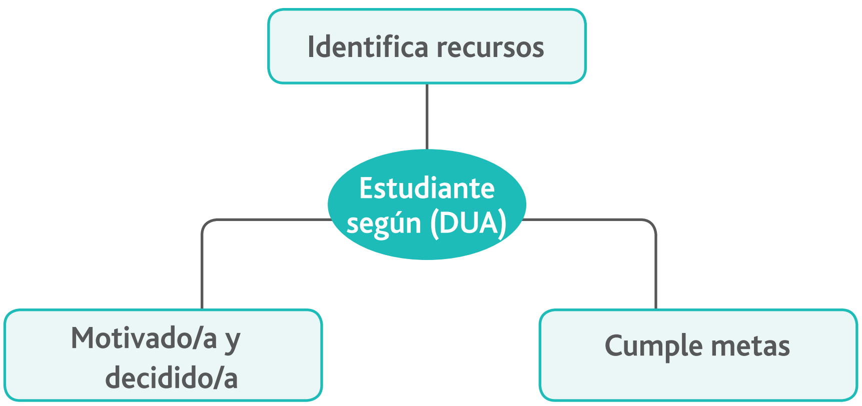
  Proporcionar múltiples formas de implicación

  El componente emocional es un elemento crucial para el aprendizaje, y los/las estudiantes difieren notablemente en los modos en que pueden ser implicados o motivados para aprender. Existen múltiples fuentes que influyen a la hora de explicar la variabilidad individual afectiva, tales como los factores neurológicos y culturales, el interés personal, la subjetividad y el conocimiento previo, junto con otra variedad de factores presentados en estas pautas. Los intereses de los/las estudiantes van desde el trabajo colaborativo al individual o desde la novedad a lo rutinario. En realidad, **no hay un único medio que sea óptimo para todos/as los/las alumnos/as en todos los contextos**.

En este contexto, la base del DUA y los tres principios que lo componen, constituyen la base para la construcción de materiales didácticos con foco en la diversidad del estudiantado.

Esquema de Síntesis: ¿Cómo diseñar actividades didácticas según el Diseño Universal para el Aprendizaje?

Para el Diseño Universal del Aprendizaje, el centro está en las habilidades de cada estudiante y en su proyección hacia la identificación de recursos, el cumplimiento de metas y la motivación, como se grafica en la siguiente imagen:



Cada una de las siguientes dimensiones que se centran en la planificación de ambientes de aprendizajes coherentes con las necesidades y habilidades de los/las estudiantes promueve el logro de los tres componentes antes mencionados.

Representación	Acción y Expresión	Motivación
• **Percepción** (visual, auditivo, táctil) • **Opciones para el lenguaje** (clarificar palabras y símbolos, crear mapas conceptuales) • **Comprensión** (conocimientos previos, destacar patrones, características fundamentales etc., vincular conocimientos mediante analogías o metáforas, conexiones curriculares explícitas).	• **Interacción física** (recursos manuales, movilizar el cuerpo) • **Expresión y fluidez en la comunicación** (diseñar, discutir, herramientas para la construcción y composición, modelos de simulación) • **Funciones ejecutivas** (definición de metas y objetivos, apoyo en la planificación y desarrollo de estrategias, organizadores gráficos, listas de comprobación, preguntas verificadoras de avances)	• **Captar interés** (contexto amistoso, acorde, cercano; fomentar el uso de la imaginación, explicitar dimensión de la tarea) • **Mantener el esfuerzo y la persistencia** (metas a largo plazo objetivos a corto plazo, variar dificultad, fomentar colaboración) • **Auto-regulación** (expectativas y creencias que optimicen la motivación, autoevaluación y reflexión)
Identifica recursos	**Cumple metas**	**Motivado/a y decidido/a**

GUIONES DIDÁCTICOS

Introducción Guiones Didácticos

Objetivo del Guion

El guion construido cumple con el objetivo de abordar contenidos matemáticos pertenecientes al Curriculum Nacional desde una perspectiva inclusiva. En este sentido, el desarrollo de las actividades didácticas para el trabajo en aula se confecciona desde la diversidad de maneras y formas en las que un concepto puede ser abordado.

La Tabla 1 muestra la potencialidad del material, detallando los objetivos específicos que la conforman y sus respectivas implicancias.

Objetivos específicos	Implicancias
Amplio desarrollo del contenido, esto quiere decir, dar a conocer los elementos fundantes que enmarcan el contenido junto con su progresivo desarrollo dentro del marco curricular.	- Sirve como guía de estudio para el/la profesor/a. - Proporciona guías de trabajo para el/la estudiante.
Mostrar ***diferentes medios y formas*** de tratar el concepto en sus diferentes dimensiones.	- Proporciona variedad de recursos para la enseñanza. - Propicia el interés y participación de un mayor número de estudiantes.
Elaborar un ***material flexible*** para los requerimientos de cada institución educativa a lo largo del país.	- Permite que el/la profesor/a seleccione los elementos necesarios para elaborar una estrategia de enseñanza apta para su contexto. - Permite que el/la estudiante elabore una ruta de trabajo definida por sus propias habilidades.

Tabla 1. Objetivos específicos e implicancias del material de estudio.

De esta manera, la principal tarea del/la docente es advertir el grado de comprensión que posea sobre los contenidos que el libro trabaja y desarrollar un estudio y/o selección de los componentes que les son útiles para el contexto en que se desarrolla.

Para la selección de los contenidos a desarrollar en este guion, se evaluaron los principales cambios que incorporó el Ajuste curricular año 2009 y los contrastamos con las problemáticas que investigaciones y el trabajo en terreno desarrollado a nivel nacional nos reportan en los recientes años[2].

La Tabla 2 muestra el contenido a desarrollar dentro de cada eje y contenido mínimo obligatorio en el que éste cobra relevancia dentro del Curriculum Nacional.

1er año de Educación Media

Eje	Contenido	CMO
Datos y Azar	Medidas de Posición	17. Obtención de información a partir del análisis de los datos presentados en histogramas, polígonos de frecuencia y de frecuencias acumuladas, considerando la interpretación de medidas de tendencia central y posición. 19. Análisis de una muestra de datos agrupados en intervalos, mediante el cálculo de medidas de tendencia central (media, moda y mediana) y medidas de posición (percentiles y cuartiles), en diversos contextos y situaciones.
Geometría	Composición de funciones en Transformaciones Isométricas	11. Estudio de la composición de funciones, análisis de sus propiedades y aplicación a las transformaciones isométricas[3].

Tabla 2. Contenido a desarrollar en cada material didáctico.

GUION DIDÁCTICO N° 1

2. Se puede acceder a más información en éste tópico dirigiéndose al apartado de “Análisis Curricular” página 18, de este mismo documento.

3. El CMO 11 se desarrolla dentro del contexto del Eje de Álgebra para 1er año Medio, pero dentro de éste material se desarrollará dentro del Eje de Geometría por centrarse en la Aplicación de la Composición de Funciones a las Transformaciones Isométricas.

Estructura del Guion

Cada uno de los 2 contenidos que este texto desarrolla contempla el material para el/la profesor/a y el material para el/la estudiante. En este sentido, el texto dispone de 2 guiones para el/la profesor/a, cada uno destinado a uno de los contenidos mencionados en la tabla anterior y 2 guías para el/la estudiante que se relacionan con el trabajo desarrollado para el/la profesor/a.

Se procede a detallar cada uno de los materiales junto a sus principales componentes.

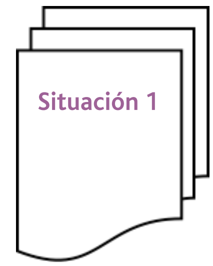
Material de el/la profesor/a: Es importante destacar que el guion de el/la profesor/a no establece un número rígido de sesiones y horas en las que debe desarrollar las actividades y/o situaciones propuestas. Parte de la flexibilidad del recurso es que el docente tome decisiones coherentes a su contexto. En este sentido, una situación no implica necesariamente una sesión de clase.

La Tabla 3 (página siguiente), muestra tres elementos importantes que constituyen cada uno de los materiales destinados para el/la profesor/a.

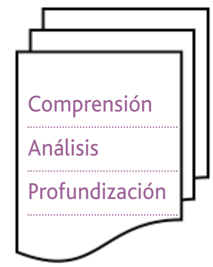
Descripción del guion para el/la profesor/a | **Diagrama**

Una secuencia ordenada de 1 a 3 situaciones que desarrolla ***un contenido*** desde los elementos más básicos a los más complejos.

El número de situaciones por contenido varía en función de la potencialidad de la situación, el objetivo es que con ellas se aborde el concepto en su plenitud para el año escolar en que se desarrolla.



Cada situación se desarrolla en 3 partes, “Comprensión”, “Análisis” y “Profundización”, en donde se abordan los conocimientos previos, el desarrollo de actividades y la formalización de concepto y análisis de situaciones más complejas y abstractas, respectivamente.



Por último, el guion de el/la profesor/a se enriquece con:

a) Habilidades Matemáticas[4], ubicados al lado izquierdo en recuadro amarillo.
b) Comprensión Profunda de la Matemática Fundamental (CPMF)[5], ubicados al lado derecho en recuadro violeta.

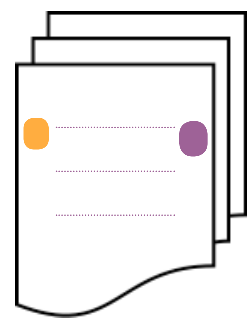


Tabla 3. Descripción del guion de el/la profesor/a.

4. Se puede acceder a más información en éste tópico dirigiéndose al apartado de “Análisis Curricular” página 18, de este mismo material.

5. Se puede acceder a más información en éste tópico dirigiéndose al apartado de “Análisis Disciplinar” página 8, de este mismo material.

Material del/la estudiante: el material del/la estudiante se divide en una o dos guías que se relacionan con el guion desarrollado para el/la docente. Cada guía da cuenta de una de las situaciones desarrolladas en el material del/la docente, correspondiendo siempre a las primeras situaciones expuestas[6]. El/la profesor/a puede y debe decidir qué porcentaje de la guía del estudiante es recomendable desarrollar para una sesión en el contexto educativo en donde se desenvuelve.

La Tabla 4 muestra tres elementos importantes que constituyen las guías destinadas a los/las estudiantes.

Descripción guía del/la estudiante	Diagrama
Un material de una o dos guías asociadas a situaciones matemáticas desarrolladas en el guion de el/la profesor/a. Cada guía se articula de tal modo que fomenta el desarrollo autónomo de cada estudiante o de cada grupo de estudiantes, esto significa que el material entrega todas las indicaciones necesarias para avanzar en cada uno de los puntos solicitados. En este sentido, la tarea del/la docente se centra en evaluar los procesos y responder a las dudas que los/las estudiantes posean.	
Cada guía se desarrolla bajo 4 etapas, "Conocimientos Previos", "Secciones de desarrollo constructivo", "Síntesis" y "Autoevaluación", en donde se explicita lo que el/la estudiante debe saber antes de enfrentarse a la actividad, diferentes representaciones en los procesos de enseñanza del contenido, la formalización matemática del contenido desarrollado en la actividad y una evaluación de los procesos desarrollados que debe responder el/la estudiante con el fin de evaluar su proceso en cuanto al contenido y las formas de trabajarlo, respectivamente.	
El material del/la estudiante tiene la flexibilidad de escoger el camino que va a tomar para alcanzar el objetivo de la actividad. En este sentido, se presentan preguntas marcadas con un lápiz al inicio de ésta, que representa las preguntas que el/la estudiante no puede omitir, y que servirán de guía para que el/la profesor/a evalúe los avances del/la estudiante. Se aconseja permitir un avance diferenciado a los/las estudiantes que demuestren que no necesitan seguir paso a paso las instrucciones de la guía.	

Tabla 4. Descripción de las guías del estudiante.

6. La última situación del material para el/la profesor/a en el ámbito de Datos y Azar tiene un grado de complejidad que supera en dificultad y/o contenido, a los requerimientos curriculares, por lo que se destina para que el docente tome decisiones en relación a sus estudiantes más avanzados o para desarrollarlos en otros niveles de enseñanza.

Foco curricular y didáctico

En este apartado encontrará información relevante sobre el material que sirve de sustento para organizar sus sesiones de clases y el foco didáctico que éstas potencian. En él se entenderá por guion al producto desarrollado para el/la docente con su respectivo producto diseñado para el/la estudiante.

Medidas de Posición

¿Cuándo implementarlo?	17. Obtención de información a partir del análisis de los datos presentados en histogramas, polígonos de frecuencia y de frecuencias acumuladas, considerando la interpretación de medidas de tendencia central y posición. 19. Análisis de una muestra de datos agrupados en intervalos, mediante el cálculo de medidas de tendencia central (media, moda y mediana) y medidas de posición (percentiles y cuartiles), en diversos contextos y situaciones.
¿Cuál es el foco?	El foco del material es la comprensión de los conceptos asociados a las medidas de posición junto a la aplicación en contextos reales de los mismos. Así, la idea es potenciar el ***uso*** de las medidas de posición para comparar los elementos de uno o varios conjuntos de datos. El/la estudiante desarrollará habilidades para calcular y para interpretar información en donde se requiere de las medidas de posición. El punto clave, que interpreten, que sean capaces de calcular, qué ven y qué dice.
¿Cuál es su potencial didáctico?	El material se desarrolla desde la contextualización del concepto en torno a diversa información en contexto real y nacional, para avanzar en la necesidad de calcular medidas de posición con el fin de organizar conjuntos de datos e interpretar sus resultados. Se potencia el cálculo y la gráfica como proceso manual y también digital. El material se compone de una rica variedad de recursos digitales de alta calidad que facilitan los diferentes procesos de cálculo y gráfica, apoyando la organización del tiempo en torno a la interpretación de la información.
¿Cuáles son las situaciones que se desarrollan?	Las primeras dos situaciones se centran en la parte conceptual de las medidas de posición de datos no agrupados. Para cada una de ellas se presentan actividades en las respectivas guías Así la: **Situación 1.** Interpreta la información desde el contexto. **Situación 2.** Desarrolla el concepto y cálculo de las medidas de posición. La última situación se la juega por entregar un método no memorístico de obtener las medidas de posición de datos agrupados. Esta situación es desarrollada sólo para el docente por lo que no contempla guía para el/la estudiante. Así la: **Situación 3.** Introduce el cálculo de percentiles en datos agrupados.

GUION DIDÁCTICO Nº 1

Composición de Funciones en Transformaciones Isométricas

¿Cuándo implementar?	Este material se encuentra entre dos ejes del nivel de 1° Medio, esto es Álgebra y Geometría. Si bien es posible ubicar el objetivo de éste guion de forma explícita en el CMO 11 del eje de Álgebra: "Estudio de la composición de funciones, análisis de sus propiedades y aplicación a las transformaciones isométricas", en realidad, sus implicancias no deben estar apartadas de las propias del eje de geometría, esto debido a que es una extensión evidente del CMO 15 del eje de Geometría: "Formulación de conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de traslaciones, reflexiones y rotaciones sobre figuras geométricas en el plano cartesiano y verificación, en casos particulares, de dichas conjeturas mediante el uso de un procesador geométrico o manualmente".
¿Cuál es el foco?	Este guion se presenta como una oportunidad para enlazar los tópicos matemáticos de los ejes antes mencionados, y no trabajar de forma parcelada la matemática escolar. El foco se relaciona con la aplicación de la composición de funciones al campo de la geometría, específicamente las transformaciones isométricas. El/la profesor/a debe considerar que los/las estudiantes ya deben haber trabajado el concepto de funciones, pero en cuanto a las transformaciones isométricas esta restricción no debe ser tan estricta. Primero, porque las transformaciones isométricas ya han sido estudiadas en niveles anteriores, solo que no en el plano cartesiano. Segundo, porque de forma natural se puede esperar que al hacer una transformación sobre un cuerpo se aplique de inmediato otra de forma consecutiva. Eventualmente el/la profesor/a podría enseñar una traslación luego la composición de ellas, y luego avanzar hacia las rotaciones. Entonces, es posible ubicar este guion luego del estudio de las funciones y luego o en conjunto con el estudio de las transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
¿Cuál es su potencial didáctico?	Se propone en el guion la representación gráfica, en el plano y con diagramas (apuntando a la regla de correspondencia) y usando un lenguaje simbólico adecuado al nivel, esto debido a que no se debe olvidar que en estos niveles los/las estudiantes deben comenzar a prepararse para realizar demostraciones de diversas propiedades matemáticas, lo que sin duda no podrían hacer sin estar familiarizados con los argumentos matemáticos expresados formalmente y de forma simbólica.
¿Cuál es la situación que se desarrolla?	La situación a desarrollar se denomina: **Composición de transformaciones isométricas** En donde se ilustra que las transformaciones isométricas son funciones, de ahí el uso de la palabra transformación, y la aplicación sucesiva de las transformaciones isométricas a un objeto en el plano no es otra cosa que la composición de funciones. Es por ello que se crea esta propuesta de cómo abordar la composición de transformaciones isométricas desde una mirada geométrica y algebraica, siempre imbricadas.

DATOS Y AZAR

Guion Didáctico 1

Guion para el/la profesor/a: Medidas de posición

El estudio de la Estadística es algo que los alumnos y alumnas han realizado desde la enseñanza básica, a través de ciertos elementos fundamentales. Por ejemplo, han aprendido a interpretar información representada en tablas y gráficos, así como también han resumido y comparado conjuntos de datos, por ejemplo, usando estadísticos tales como media, moda y mediana. Esto de alguna manera está respondiendo curricularmente a la tendencia mundial, donde los argumentos responden a la alfabetización de los/las estudiantes y si hay una matemática que todos deben aprender esa es sin duda la Estadística, ya que permite conectarnos con el mundo de la información. En esta etapa los/las estudiantes deben incorporar nuevas herramientas y conceptos para manejar e interpretar diferentes conjuntos de datos. Uno de estos conceptos tiene que ver con las medidas de posición o localización, las cuales permiten obtener más información acerca de un conjunto de datos y, a la vez, compararlo con otros. Es habitual en los medios de comunicación escuchar términos tales como quintiles, cuartiles o percentiles en general. El propósito de este guion es introducir estos contenidos y entregar algunos elementos metodológicos para su aprendizaje.

Las situaciones de aprendizaje que se desarrollarán a lo largo del guion de el/la profesor/a son:

- **Situación 1:** ¿En qué quintil me dijo? Interpretando información estadística desde los medios.
- **Situación 2:** ¿Cosas del fútbol? ¿Qué nos dicen los Diagramas de Caja?
- **Situación 3**: ¿Y si los datos están agrupados? ¿Qué sucede con las medidas de posición?

A continuación, se describe en detalle la **primera situación:**

Parte 1: Comprensión de la situación

Habilidades comunicativas

Los/las estudiantes ya han realizado un recorrido por la Estadística desde los años previos y, además de los conocimientos, han ganado en el desarrollo de habilidades tales como, análisis e interpretación de la información o bien producción de información a través de la organización de los datos mediante tablas y gráficos. Además ya han usado ciertos estadísticos o estadígrafos para resumir información.

Coherencia longitudinal: Es importante establecer una relación entre las medidas de tendencia central que los/las estudiantes ya conocen y los nuevos conceptos. La mediana es la medida clave que puede establecer el vínculo.

El propósito de esta situación de aprendizaje es introducir el concepto de medidas de posición. Para ello se propone que los/las estudiantes se familiaricen con un lenguaje habitualmente utilizado en los medios de comunicación e información estadística de encuestas nacionales. Por ejemplo, cuando se categoriza a la población por rangos socioeconómicos, generalmente, aparecen los términos **quintiles** o **deciles**, y en forma más amplia **percentiles**. Así, los/las estudiantes que postulan a becas en la universidad deben estar en un quintil específico para tener verdaderas opciones. La distribución del ingreso de los chilenos, habitualmente se entrega agrupado por deciles. ¿Qué significan estos conceptos? ¿Por qué se utilizan? ¿Cómo se determinan?

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

La presente actividad es importante, ya que permite que los/las estudiantes sigan alfabetizándose estadísticamente y no solo sepan usar e interpretar las medidas de tendencia central, sino que puedan ampliar el conocimiento a otras medidas o estadísticos que permitan describir y comparar diferentes conjuntos de datos.

Como ya se ha mencionado los/las estudiantes hasta aquí lo que conocen son las medidas de tendencia central: moda, media y mediana. El uso de estas medidas les ha permitido resumir un conjunto de datos, describiendo el centro de la distribución. No obstante, a través de la mediana han podido interpretar características de un conjunto de datos ordenado, a partir del dato o datos que se encuentran en la mitad. Por ejemplo, han formulado expresiones tales como que el 50% de los individuos no supera 1,75 metros de estatura. Por otra parte, los/las estudiantes ya están habituados al uso de porcentajes y su interpretación en diferentes contextos. Con la mediana por primera vez aparece el concepto de ordenar los datos e identificar el o los datos que se ubican en el centro. El hecho de buscar la "posición central" permite introducir el concepto de medida de posición, la cual no solo debería involucrar el 50% de los datos, sino también cabría preguntarse por porcentajes tales como 10%, 20%, 25%, 75% u otros más.

Ideas Básicas: Es importante recordar que para hablar de medidas de posición el conjunto de datos debe estar ordenado. Por otra parte, no se debe confundir entre la medida de posición y la posición misma.

Una de las principales dificultades que presenta el estudio de las medidas de posición es justamente comprender que primero los datos deben ser ordenados en forma creciente. Si este paso se olvida, todo lo que viene luego estará incorrecto. La otra dificultad típica tiene que ver con la confusión entre la posición y el dato. La medida de posición no es la posición, sino que es el dato que se encuentra en dicha posición. La forma de remediar esto tiene que ver con la explicación clara del concepto y la ejercitación con ejemplos sencillos que luego deben ir complejizándose.

La motivación central para abordar la situación propuesta es el hecho de comprender el significado de palabras claves tales como "quintil" o "decil", etc. ¿Qué dicen las informaciones o noticias? A continuación se dan algunos ejemplos de informaciones encontradas en la web:

Conexiones: las expresiones quintil, decil o percentil son conceptos estadísticos usados en diversas áreas. Comprenderlos permite a los/las estudiantes continuar su proceso de alfabetización matemática o estadística.

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

Distribución del ingreso en Chile (2008) mantiene gran desigualdad en últimos 10 años, según INE[7]

Quintil más alto concentra un 51,03% del ingreso total del país, mientras que el más pobre llega a sólo 5,38%.

Las becas[8] de arancel del Mineduc están destinadas principalmente a estudiantes de los quintiles 1 al 3, es decir, a alumnos pertenecientes al 60% de la población de menores ingresos del país; aunque también existen becas que se otorgan a alumnos hasta el quintil 4, y otras que no exigen una determinada condición socioeconómica.

Los créditos se entregan a un grupo más amplio, llegando a estudiantes del quintil 4 y algunos tramos del quintil 5.

¿Qué es la distribución del ingreso por decil (quintil) de ingreso autónomo per cápita del hogar?[9]
— Para medir la distribución del ingreso entre los hogares, éstos son clasificados en deciles (quintiles), de acuerdo al ingreso autónomo per cápita percibido por el hogar; estimándose luego la participación porcentual de los ingresos de los hogares de cada decil (quintil) en el total de ingresos del total de hogares del país.

La pregunta final será ¿cómo organizar una muestra de individuos, o conjunto de datos en quintiles o deciles? ¿Por qué hacerlo? ¿Qué información entrega?

7. http://aquevedo.wordpress.com/2008/11/21/distribucion-del-ingreso-en-chile-mantiene-brecha-en-ultimos-10-anos-segun-estudio-del-ine-2/
8. http://aquevedo.wordpress.com/2008/11/21/distribucion-del-ingreso-en-chile-mantiene-brecha-en-ultimos-10-anos-segun-estudio-del-ine-2/
9. http://portal.becasycreditos.cl/index2.php?id_contenido=25657&id_portal=74&id_seccion=4752

Parte 2: Análisis de la situación

Para representar la información expresada en quintiles o deciles, es natural hacerlo en las siguientes formas:

Habilidades de resolución de problemas

1. Numéricamente usando la relación con los porcentajes. Lo primero es comprender acerca de los porcentajes que involucran los términos quintil y decil. Los/las estudiantes deben indagar que los porcentajes asociados son 20% y 10%, respectivamente. Por ejemplo, se puede suponer que se tiene una muestra o conjunto de datos de 60 personas, ¿a cuánto equivale el 20% de ellos? ¿A cuánto equivale el 10%? Aquí lo primero es activar el conocimiento sobre porcentaje y que los/las estudiantes puedan determinar cómodamente a qué cantidad corresponde cada porcentaje a partir de un cierto número definido. Vale aquí reforzar el concepto si es necesario para que no se transforme en un obstáculo, ya que aquí deben aplicarlo.

Múltiples perspectivas:
El concepto de medidas de posición puede ser abordado desde lo numérico y el concepto de porcentajes, así como también a través de representaciones como tablas y gráficos.

2. En tablas o diagramas que resuman la información. Aquí los/las estudiantes pueden establecer tablas o diagramas, por ejemplo, que relacionen los quintiles/deciles con el porcentaje o cantidad de individuos involucrados:

Ideas Básicas:
Cuando un conjunto de datos se separa usando quintiles, entre dos quintiles consecutivos se encuentra el 20% de los datos.

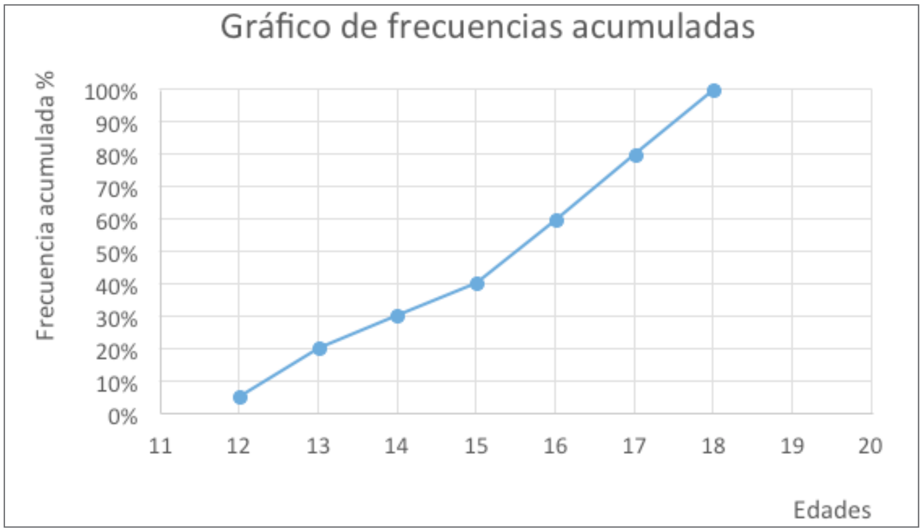
Quintil	% de individuos bajo el quintil
Quintil 1	20%
Quintil 2	40%
Quintil 3	60%
Quintil 4	80%

A partir de esto se pueden hacer preguntas tales como: ¿Qué quiere decir la siguiente información? *"Las becas de arancel del Mineduc están destinadas principalmente a estudiantes de los quintiles 1 al 3..."*. ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes involucrado en estos tres primeros quintiles?

Es importante destacar que no se suele hablar del Quintil 5 ni de Decil 10 (los deciles se abordarán más adelante) dado que en ambos casos, bajo ese dato se encuentra el 100% de la población.

Habilidades comunicativas

3. Usando un gráfico de frecuencias acumuladas. Aquí cobra sentido el uso de estos gráficos donde el porcentaje es acumulado. Por ejemplo, el siguiente gráfico muestra las edades de un grupo de jóvenes, donde se pueden apreciar fácilmente los quintiles acorde a los porcentajes (20%, 40%, 60%, ...)



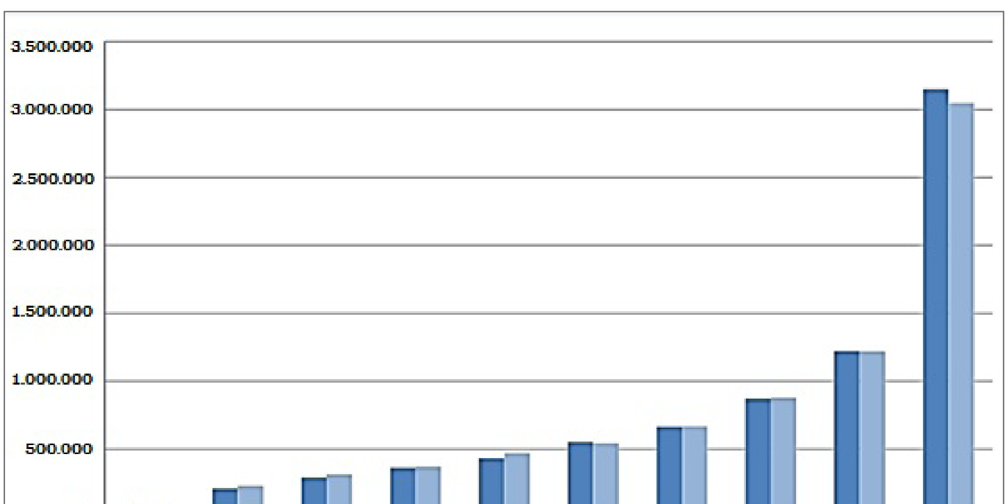
Ideas Básicas:
Es importante explicitar cuando se hable de quintil o decil como dato o como intervalo. Una opción es escribirlo con mayúscula para el dato y minúscula para el intervalo. De todos modos se debe tener presente que los medio de información masiva no hacen este distingo y es el/la lector/a quien debe interpretar la información.

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

4. En gráficos que muestren claramente una distribución por decil. Por ejemplo, en la distribución de ingresos según deciles[10], la idea es establecer comparaciones entre los diferentes quintiles o deciles.

Ideas Básicas:
Cuando un conjunto de datos se separa usando deciles, entre dos deciles consecutivos se encuentra el 10% de los datos.

Ingreso autónomo per cápita del hogar



	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
2009	68.536	210.289	291.235	363.334	434.386	552.632	666.103	872.234	1.223.683	3.150.076
2011	85.741	228.621	315.200	371.054	470.642	544.193	667.302	878.816	1.219.273	3.048.821

10. Evolución del ingreso autónomo promedio de los hogares, por decil de ingreso autónomo per cápita del hogar (pesos de Noviembre 2011). Fuente: Ministerio del Desarrollo Social. CASEN 2009 – 2011.

Acorde a las representaciones de las medidas de posición, según lo anterior, los/las estudiantes deberían trabajar las expresiones de quintil, decil o percentil de diversas maneras. Por ejemplo:

Ideas Básicas: A partir de los conceptos de quintil y decil, resulta natural generalizar al caso de percentiles.

1. Que relacionen porcentajes con las palabras quintil, decil o percentil.

Expresión	Porcentaje relacionado
Quintil	Dividir a la población (total de datos), en 5 partes, tal que en cada tramo quede el 20% de toda la información. Para esto se necesitan 4 "marcas" (que llamamos quintiles): La 1ª deja el 20% de los datos bajo ella y el 80% sobre ella; la 2ª deja bajo ella el 40% de los datos y el 60% sobre ella… etc.
Decil	Dividir a la población (total de datos), en 10 partes, tal que en cada tramo quede el 10% de toda la información.
Percentil	Dividir a la población (total de datos), en 100 partes, tal que en cada tramo quede el 1% de toda la información.

Múltiples perspectivas: Es importante que los/las estudiantes aborden los conceptos construyendo tablas o gráficos, escribiendo el significado de los conceptos, o bien haciendo representaciones metafóricas que permitan una mayor comprensión.

2. Que construyan una tabla, por ejemplo, con los quintiles de ingreso y que expliquen el significado.

Habilidades de investigación

Quintil	Ingreso per cápita	Significado en palabras
Quintil 1	*Ingresos desde $0 hasta $70.543 per cápita.*	El 20% de la población recibe ingresos per cápita igual o inferior a $70.543.
Quintil 2	*Desde $70.544 hasta $118.145.*	El 40% de la población tiene ingresos per cápita de $118.145 o menos.
Quintil 3		
Quintil 4		

Nota: si bien el tema de los quintiles de ingreso es una realidad y es muy patente cuando los/las estudiantes postulan a los créditos y becas para la universidad, no es la idea que los/las estudiantes se comparen y se ubiquen en alguno de los quintiles.

3. Que hagan representaciones gráficas o pictóricas donde se muestren los quintiles de ingreso, y esto refleje metafóricamente el significado de la información. Por ejemplo:

http://www.secundarios.com/blogs/educacion/como-funcionan-los-quintiles-en-el-proceso-de-admision-2014-l21779/

Habilidades de resolución de problemas

4. Que construyan un gráfico con los deciles de ingreso, por ejemplo, asociado a una información específica. Que reproduzcan esta información tanto en tabla como gráfico. Que sean capaces de llevar de una representación a otra.

5. Pueden ejemplificar con diferentes conjuntos de datos y organizarlos en quintiles según alguna característica. Por ejemplo, que registren las estaturas de todos los alumnos del curso. Las ordenen de menor a mayor y las organicen según quintiles:

Quintil	Rango de estaturas
Quintil 1	
Quintil 2	
Quintil 3	
Quintil 4	

Múltiples perspectivas: Los/las estudiantes pueden utilizar información levantada en su propio curso (edad, estatura, etc.) y hacer una distribución en quintiles o deciles. La idea es que haciendo la experiencia los conceptos se internalicen.

GUION DIDÁCTICO N° 1

6. A partir de diferentes informaciones tomadas de diarios y revistas, que interpreten el significado:

Se debe tener presente, que la información de diarios y revistas deben ser interpretadas matemáticamente y que siempre es bueno que el/la docente acompañe la tarea, puesto que los fines que la provocan no siempre aportan a una fácil comprensión al razonamiento matemático que buscamos.

En este contexto es importante reconocer si se habla de Quintil como dato o como intervalo, lo cual provoca más de una confusión en los/las estudiantes.

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

Información	Lo que quiere decir:
Quintil más alto concentra un 51,03% del ingreso total del país, mientras que el más pobre llega a sólo 5,38%.	
Dentro de los requisitos propuestos se encuentra el que hace referencia a "pertenecer a los dos primeros quintiles de ingreso".	
"En el caso de los padres que estaban en el quintil más bajo, o sea, en la pobreza, el 31 por ciento de sus hijos se ubica en el mismo quintil. Pero un 21 por ciento sube un quintil, otro 21 por ciento sube dos, un 19 por ciento sube tres y un 7 por ciento, cuatro".	

Conexiones: a través de las expresiones quintil, decil o percentil es posible revelar la realidad social que caracteriza a nuestro país.

Una vez que los/las estudiantes han interpretado quintiles, deciles y percentiles, en diferentes situaciones y con distintas representaciones, es necesario pasar a la etapa de profundización en la que se formalicen estos conceptos y se presenten expresiones matemáticas para calcularlos.

Posteriormente, la idea es que los/las estudiantes busquen nuevas informaciones y las interpreten a la luz del conocimiento formalizado. Pueden además hacer el ejercicio de determinar, por ejemplo, quintiles o deciles para un determinado conjunto de datos obtenidos desde el mismo curso de estudiantes.

Parte 3: Profundización

Lo primero es formalizar el concepto de quintil, decil o percentil.

Habilidades comunicativas

Quintiles. Cuando hablamos de quintil nos estamos refiriendo a cada uno de los 4 valores que separan al total de los datos en 5 grupos de igual tamaño. En consecuencia cada grupo representa al 20% de la población. Generalmente en estudios estadísticos se habla del quintil inferior o superior para señalar algún aspecto de la población estudiada. Por ejemplo, se tiene en cuenta los quintiles de ingreso superior o inferior para definir políticas sociales para la asignación a becas.

Ideas Básicas: Las fórmulas para obtener quintiles o deciles, en general, medidas de posición, son sensibles a si el número de datos es par o impar.

Deciles. Cuando hablamos de decil nos estamos refiriendo a cada uno de los 9 valores que separan al total de los datos en 10 grupos de igual tamaño. En consecuencia cada grupo representa al 10% de la población.

Al igual que las otras medidas, tienen aplicación en varios contextos en donde se requiere destacar esa porción de los datos.

A partir de un conjunto de datos ¿Cómo se establece un quintil?

Una vez ordenados los n datos de menor a mayor, para determinar la posición p que determina el Quintil_1 y el Quintil_2, por ejemplo, se recurre a la siguiente regla[11]:

- Posición de Quintil_1: $p=(n+1)\cdot 0,20$
- Posición de Quintil_2: $p=(n+1)\cdot 0,40$

Si p es número entero, el quintil corresponde al dato en el lugar p. Si p no es un entero, el quintil será el valor promedio de los datos ubicados en [p] y [p]+1. Donde [] indica la parte entera.

En el caso de los deciles, la posición del primer decil sería determinada por $p=(n+1)\cdot 0,10$. En general, se puede hablar de **percentiles** cuando se quiere hacer énfasis en cualquier porcentaje. Por ejemplo, el percentil 50 equivale a la mediana, el percentil 20 corresponde al primer quintil o al segundo decil.

11. Adaptado de Saavedra, E. (2005). Contenidos Básico de Estadística y Probabilidad. Editorial Universidad de Santiago. Colección Ciencias. Santiago, Chile.

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

Aquí la idea es profundizar con otras informaciones en las que los/las estudiantes puedan interpretar correcta y completamente dicha información. Por ejemplo:

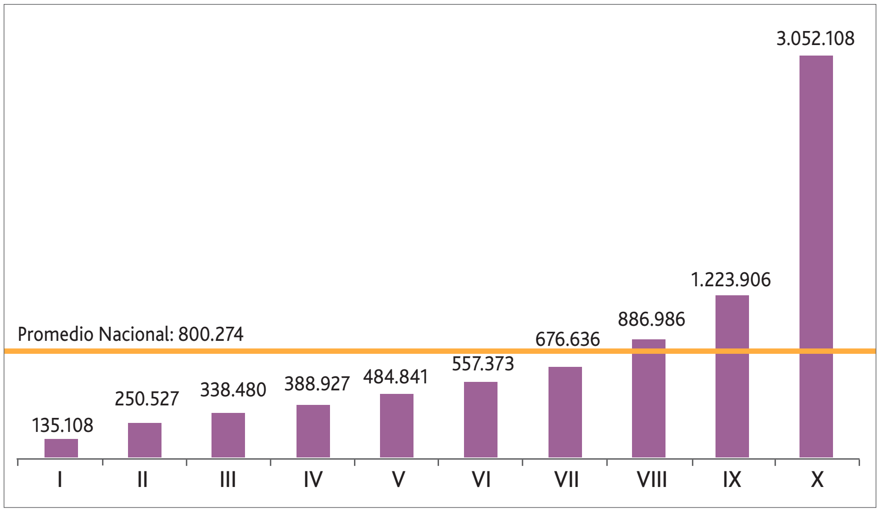
$800 mil es el ingreso familiar promedio, según cifras de la Casen[12]

La remuneración de los hogares de más altos ingresos, que ganan más de 3 millones, eleva el monto. En los próximos días se harán públicos los datos de la desigualdad por regiones y qué tan felices somos los chilenos.

Conexiones: a través de las expresiones quintil, decil o percentil es posible revelar la realidad social que caracteriza a nuestro país.

Ingreso monetario* promedio de los hogares, por decil de ingreso autónomo per cápita del hogar 2011

(pesos de noviembre de 2011)



Fuente: Ministerio de Desarrollo Social, CASEN 2011

Nota: Se debe tener en cuenta que este gráfico muestra los deciles como grupos y no como datos que marcan fronteras. En este sentido, cada barra representa al 10% de la población, es decir, aproximadamente 1.700.000 personas.

12. http://www.lanacion.cl/-800-mil-es-el-ingreso-familiar-promedio-segun-cifras-de-la-casen/noticias/2012-07-24/192837.html

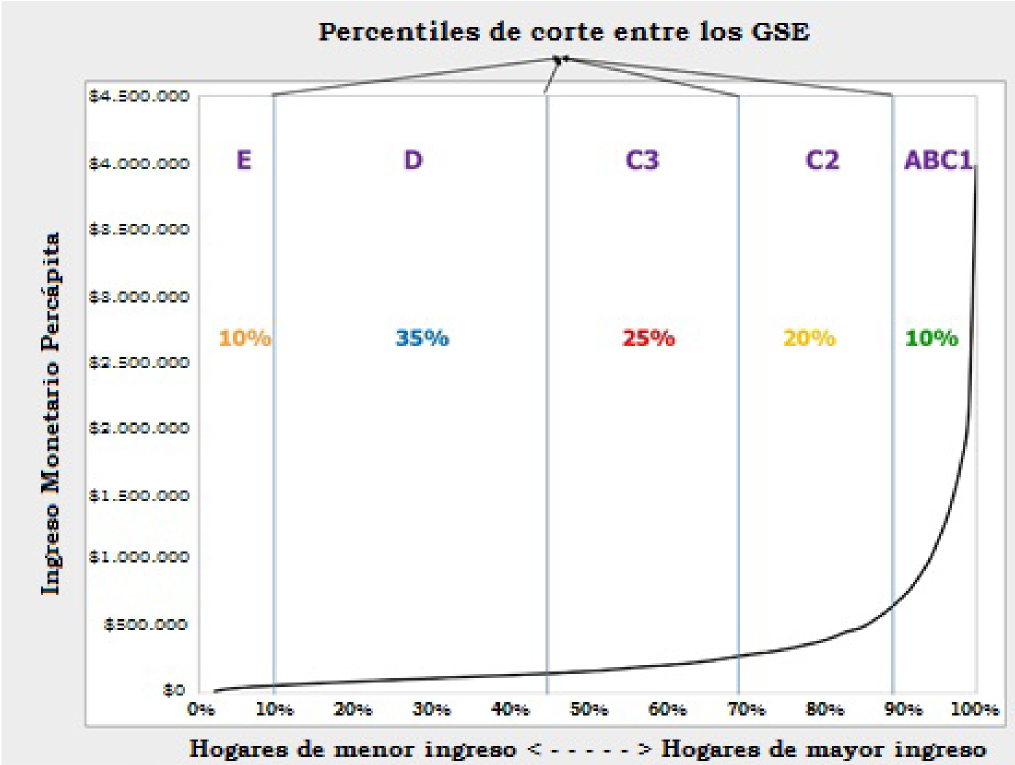
Desigualdad en Chile: el problema es el 1% más rico[13]

Valores mínimo, máximo, medio y medianos del ingreso autónomo mensual de los hogares, por decil de ingreso autónomo per cápita del hogar

	Decil	Promedio	Mediana	APERTURA DEL ULTIMO DECIL	Percentiles	Promedio	Mediana
(10 % más pobre) →	I	$ 63.891	$ 43.424		P91	$ 1.521.418	$ 1.491.305
	II	$ 197.402	$ 186.745		P92	$ 1.793.662	$ 1.684.765
	III	$ 273.316	$ 258.398		P93	$ 1.700.295	$ 1.757.942
	IV	$ 341.124	$ 333.342		P94	$ 1.799.060	$ 1.876.408
	V	$ 407.711	$ 403.325		P95	$ 2.125.636	$ 2.059.203
	VI	$ 517.888	$ 510.850		P96	$ 2.353.057	$ 2.434.166
	VII	$ 625.247	$ 594.099		P97	$ 2.762.197	$ 2.720.716
	VIII	$ 816.434	$ 797.196		P98	$ 3.093.899	$ 3.190.736
	IX	$ 1.146.236	$ 1.100.346		P99	$ 4.547.566	$ 3.734.295
(10 % más rico) →	X	$ 2.951.815	$ 2.178.597	(1% más rico) →	P100	$ 7.843.061	$ 6.823.309

Fuente: Fundación SOL, micro-datos de Casen 2009

ESTIMACIÓN DE LOS INGRESOS POR GSE
A PARTIR DE DATOS DE ENCUESTA CASEN 2011[14]



13. http://www.elmostrador.cl/opinion/2012/04/02/desigualdad-en-chile-el-problema-es-el-1-mas-rico/
14. http://www.adimark.cl/es/documentos/GSE_CASEN_2011.pdf

Situación 2: ¿Cosas del fútbol? ¿Qué nos dicen los diagramas de caja?

Parte 1: Comprensión de la situación

Habilidades comunicativas

El propósito de esta **segunda situación** de aprendizaje es continuar el estudio de las medidas de posición, ahora profundizando en otro concepto también muy usado: el **cuartil**. Es habitual encontrar información organizada en cuartiles, donde aparecen términos tales como: primer cuartil, segundo cuartil o tercer cuartil. Cabe destacar que como medidas de posición es posible establecer ciertas equivalencias. Por ejemplo, el cuartil 2 (Q_2) corresponde a la mediana (Me) de un cierto conjunto de datos, o bien al percentil 50 (P_{50}) si se prefiere. Las preguntas para esta situación corresponden a: ¿Qué significan los cuartiles? ¿Por qué se utilizan? ¿Cómo se determinan?

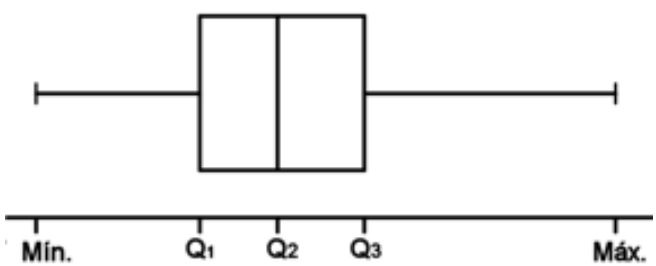
Coherencia longitudinal: Por ejemplo, el cuartil 2 (Q_2) corresponde a la mediana (Me) de un cierto conjunto de datos, o bien al percentil 50 (P_{50}) si se prefiere.

La presente actividad es importante, ya que permite que los/las estudiantes adquieran nuevas herramientas para comparar dos o más conjuntos de datos. Cabe destacar que los cuartiles además permiten comparar la **variabilidad o dispersión** de los datos. Esto queda muy bien representado a través de los denominados gráficos de **"caja y bigotes"** o simplemente de **"caja"** (***Box Plot***, en inglés) como se verá más adelante. Para efectos de este guion, se utilizará el término "gráfico de caja", comprendiendo que existen otras denominaciones. En el contexto de las notas, muy cercano a los/las estudiantes por cierto, se puede analizar la siguiente situación: ¿dos cursos que tienen de promedio un 5,4 en matemática tienen el mismo comportamiento o variabilidad? La respuesta probablemente sea no, sin embargo, ¿cómo graficar la situación de modo que quede más claro este comportamiento? De hecho, esto serviría a los/las profesores/as para graficar la situación de sus cursos y, por cierto, la eventual toma de decisiones. Es claro que trabajar con un curso que tiene mucha variabilidad en los resultados, no es lo mismo que hacer clases a un curso que es más homogéneo o sus resultados son más cercanos al promedio.

Como ya se ha mencionado, los cuartiles como medida de posición cobran relevancia cuando es posible comparar conjuntos de datos. Para ello es muy util considerar 5 medidas: Mínimo (Mín), Primer Cuartil (Q_1), Segundo Cuartil (Q_2), Tercer Cuartil (Q_3) y Máximo (Máx.). Estos valores se pueden organizar en una tabla, por ejemplo, para un conjunto de datos:

Medida	Conjunto
Mín	
Q_1	
Q_2	
Q_3	
Máx	

En un gráfico de caja, lo anterior quedaría visualmente graficado como:



Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

A partir de esta gráfica, es natural darse cuenta que para distintos conjuntos de datos el gráfico será diferente. Lo primero a visualizar es qué tan distantes están el mínimo y el máximo. Esto dará una rápida noción del "rango" de valores. La separación entre el primer y tercer cuartil también entrega una noción de la variabilidad o dispersión de los datos (rango intercuartil). Entonces, para diferentes conjuntos o muestras de datos, los gráficos de caja serán más "alargados" o más "achatados".

GUION DIDÁCTICO N° 1

Una motivación central para abordar la situación, tiene que ver con contextos cercanos a los/las estudiantes. Por ejemplo, el tema de las notas en alguna asignatura o bien las estaturas de los jugadores de fútbol que jugaron el último mundial. En la última Copa del Mundo[15] que se jugó en Brasil, se mostraron los equipos en toda su magnitud. Lo primero que se puede apreciar es que las selecciones de los diferentes continentes en promedio no miden lo mismo. Y esto puede ser una entrada interesante ya que permite comparar. ¿Qué diferencias hay entre los equipos europeos, los americanos, africanos o asiáticos? ¿Cómo se puede mostrar esto gráficamente? ¿Es la selección chilena la más baja?

(COLOMBIA)[16]

(CHILE)[17]

(ALEMANIA)[18]

(R. DE COREA)[19]

La pregunta será entonces ¿de qué manera comparar los diferentes equipos mundialistas? ¿Sobre qué estatura está el 50% de los jugadores de un equipo? ¿Bajo qué estatura está el 75%? ¿Cuál es la diferencia entre los distintos equipos? ¿Cuáles son los más altos? ¿Cuáles son los más bajos?

15. http://es.fifa.com/worldcup/
16. http://es.fifa.com/worldcup/teams/team=43926/index.html
17. http://es.fifa.com/worldcup/teams/team=43925/profile.html
18. http://es.fifa.com/worldcup/teams/team=43948/profile.html
19. http://es.fifa.com/worldcup/teams/team=43822/profile.html

Parte 2: Análisis de la situación

Para representar la información expresada en cuartiles, es natural hacerlo en las siguientes formas:

Múltiples perspectivas: El concepto cuartil puede ser abordado desde lo numérico los porcentajes, así como también a través de representaciones como tablas y gráficos.

Habilidades de resolución de problemas

1. Numéricamente usando la relación con los porcentajes. Lo primero es comprender acerca de los porcentajes que involucran los términos primer cuartil, segundo cuartil o tercer cuartil. Los/las estudiantes deben indagar que dichos porcentajes asociados son 25%, 50% y 75%, respectivamente. Por ejemplo, en un grupo de 80 estudiantes que han rendido un examen y sus puntajes están ordenados en cuartiles, las preguntas naturales pueden ser ¿bajo qué nota o puntaje se encuentra el 50% de los/las estudiantes? ¿qué rango de notas o puntajes se encuentran entre el primer y tercer cuartil? Vale aquí reforzar el concepto de porcentaje si es necesario para que no se transforme en un obstáculo, ya que aquí deben aplicarlo.

Ideas Básicas: Cuando un conjunto de datos se separa usando cuartiles, los porcentajes asociados son 25%, 50% y 75%.

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

2. En tablas o diagramas que resuman la información. Aquí los/las estudiantes pueden establecer tablas o diagramas, por ejemplo, que relacionen los cuartiles con el porcentaje o cantidad de individuos involucrados:

Cuartil	% de individuos bajo el cuartil
Q_1	25%
Q_2	50%
Q_3	75%

Ideas Básicas: A través de 5 medidas: Mín., Q_1, Q_2, Q_3 y Máx. es posible llevar a información a los diagramas de caja.

En el ámbito del fútbol, se puede averiguar qué estatura representa cada cuartil en un equipo determinado.

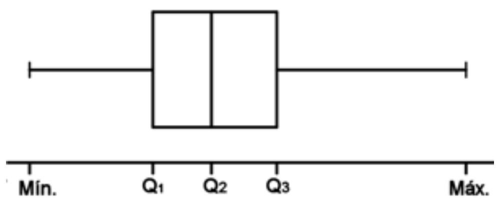
Por ejemplo, si se toman las estaturas de la selección chilena el cuadro podría ser como sigue:

Medida	Valor	Significado
MÍN	168	Es la menor estatura registrada en el conjunto de jugadores.
Q_1	172	Si los datos están ordenados de menor a mayor, el 25% inferior de los jugadores queda bajo esta estatura.
Q_2	177	Corresponde a la MEDIANA. Si los datos están ordenados de menor a mayor, el 50% de los jugadores queda bajo esta estatura. El otro 50% queda sobre ella.
Q_3	179,5	Si los datos están ordenados de menor a mayor, el 75% de los jugadores queda bajo esta estatura.
MÁX	186	Es la máxima estatura registrada en el conjunto de jugadores.

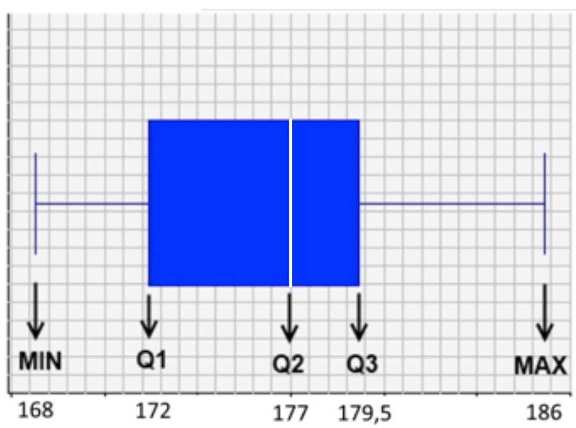
Como refuerzo conceptual es importante que los/las estudiantes puedan, además de completar los datos, escribir el significado o interpretación para cada valor.

Ideas Básicas:
Cuando un conjunto de datos se separa usando cuartiles, el porcentaje asociado corresponde al 25%.

3. Usando gráficos de caja. Estos gráficos son muy utilizados y su potencial es justamente la comparación entre conjuntos de datos.



En el caso de las estaturas de la selección nacional, el gráfico podría quedar como sigue:

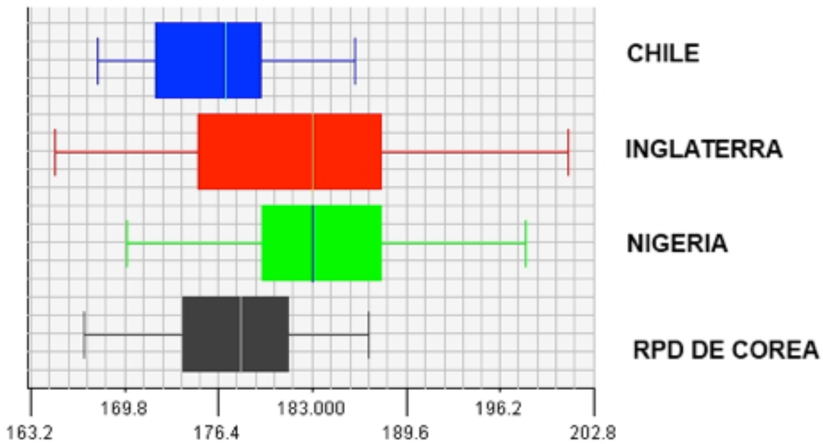


Selección chilena

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

4. En gráficos comparativos que muestren claramente el uso de cuartiles. Por ejemplo, utilizando las estaturas de los equipos mundialistas es posible establecer una comparación gráfica.

Ideas Básicas: El potencial de los gráficos de caja es justamente la comparación entre dos o más conjuntos de datos

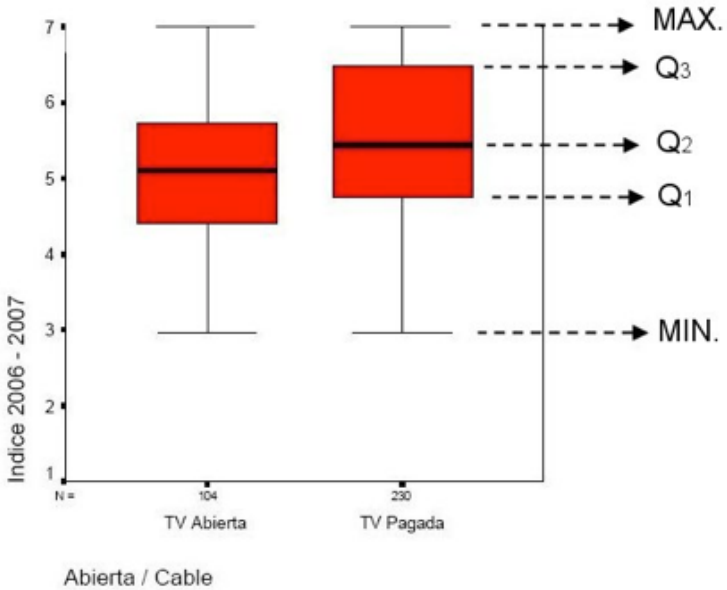


Lo interesante es que visualmente ya se establecen las diferencias. Por ejemplo, los más altos están entre el grupo de Nigeria e Inglaterra. Chile y Corea tienen estaturas similares.

En otro contexto, el Consejo Nacional de Televisión realiza estudios que permiten sondear, por ejemplo, la valoración del público hacia ciertos programas, considerando televisión abierta o pagada. En la siguiente tabla se muestra la valoración (puntaje), hace algunos años, hacia las opciones de TV abierta y TV pagada respecto de la programación infantil[20]. Se evaluaron 297 programas en dicha oportunidad.

Cuartiles	TV Abierta	TV Pagada
MÍN	2,97	2,97
Q_1	4,4	4,73
Q_2	5,08	5,43
Q_3	5,72	6,48
MÁX	7	7

20. Fuente: Departamento de Estudios, Consejo Nacional de Televisión 2007

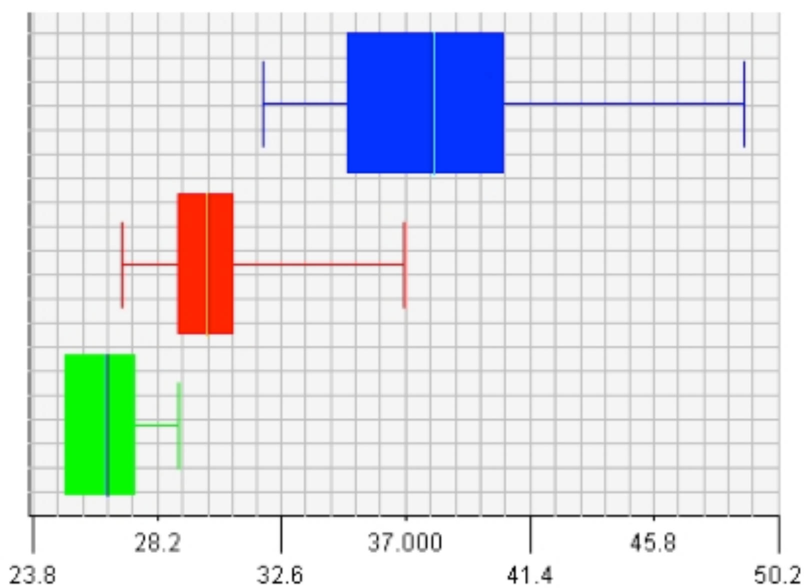


5. Uso de la tecnología para construir gráficos de caja.

Habilidades de investigación

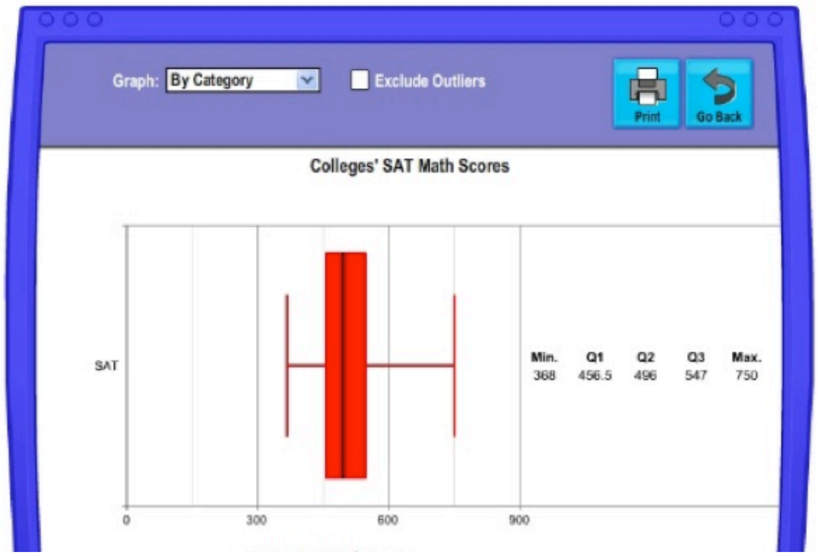
A través del uso de TIC, es posible visualizar rápidamente un conjunto de datos en un gráfico de caja (Box Plot). En la Web hay muchos recursos digitales que permiten obtener este tipo de gráfico. Por ejemplo, se tienen las siguientes direcciones:

Múltiples Perspectivas: A través del uso de TIC, es posible graficar rápidamente un conjunto de datos en un diagrama de Cajas (Box Plot).



(SHODOR)[21]

21. http://www.shodor.org/interactivate/activities/BoxPlot/



(*ILLUMINATIONS - NCTM*)[22]

Habilidades de resolución de problemas

Mediante el uso de las TIC, se sugiere que los/las estudiantes:

- Se familiaricen con estas representaciones, revisando los ejemplos incorporados.
- Ingresen diferentes datos (pueden ser tomados del mismo curso: edad, altura, notas, etc.)
- Ingresen más de un conjunto de datos para comparar.

Acorde a las representaciones de las medidas de posición, según lo anterior, los/las estudiantes deberían trabajar las expresiones de cuartiles de diversas maneras. A continuación se proponen diferentes ejemplos, los cuales no necesariamente están relacionados unos con otros. El propósito es mostrar diversas situaciones.

1. Que relacionen porcentajes con las palabras primer cuartil, segundo cuartil y tercer cuartil.

Expresión	Porcentaje asociado
Q_1	25%
Q_2	50%
Q_3	75%

Múltiples perspectivas: Es importante que los/las estudiantes aborden los conceptos construyendo tablas o gráficos, escribiendo el significado de los conceptos, o bien haciendo representaciones que permitan una mayor comprensión.

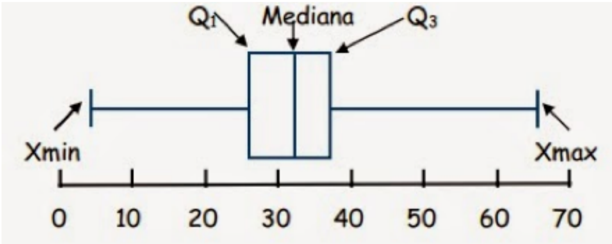
22. http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3476

2. Que construyan una tabla, por ejemplo, con los resultados de una prueba de matemática, organizada en cuartiles y expliquen el significado:

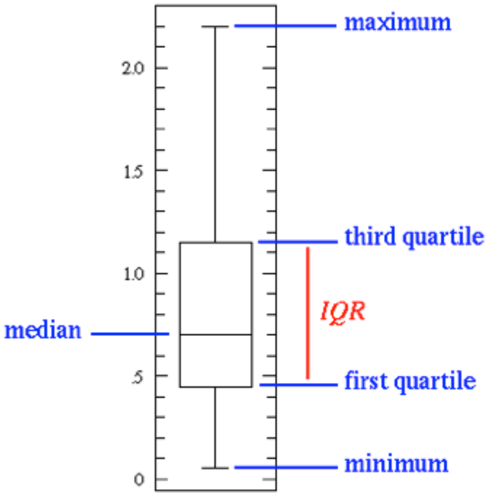
Habilidades de investigación

Medida	Nota	Significado en palabras
MÍN	2,5	La mínima nota registrada fue un 2,5.
Q_1	4,8	El 25% de los/las estudiantes tiene nota inferior a 4,8.
Q_2	5,5	El 50% de los/las estudiantes no supera el 5,5.
Q_3	6,4	El 75% de los/las estudiantes no supera el 6,4.
MÁX	7	La máxima nota fue un 7

3. Que hagan gráficos de caja, indicando sus componentes lo más visual posible. Por ejemplo[23]:



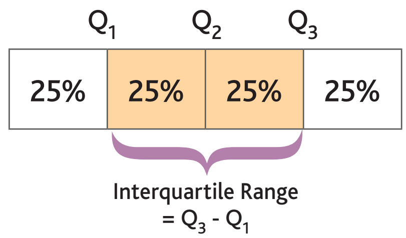
Otro ejemplo[24]:



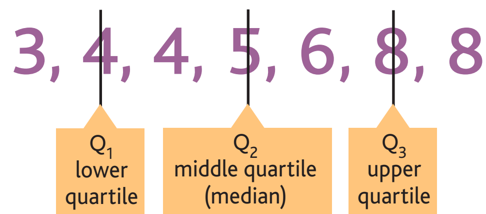
23. http://mathsattacks.blogspot.com/2014/02/diagrama-de-caja-y-bigotes.html
24. http://www.physics.csbsju.edu/stats/box2.html

4. Que hagan representaciones visuales de la división en cuartiles.

Por ejemplo[25] :



Otro ejemplo[26]:

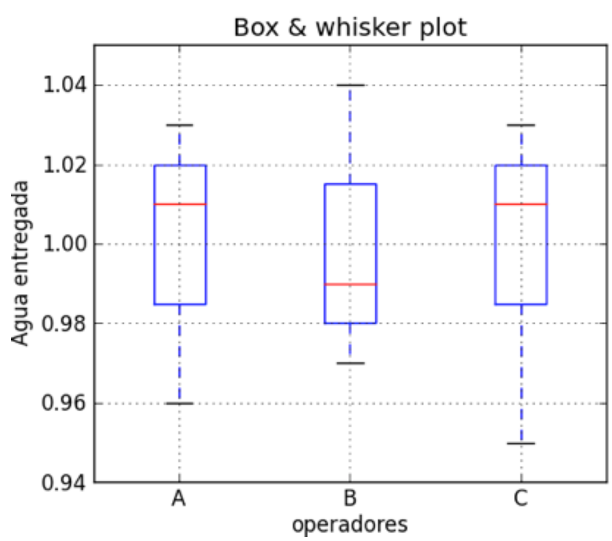


Conexiones: a través de las expresiones los cuartiles es posible trabajar diferentes situaciones.

5. Que busquen otros ejemplos[27] en la prensa donde se muestre información expresada en cuartiles y/o a través de gráficos de caja.

En el siguiente gráfico se muestra el funcionamiento de tres operadores mecánicos para distribuir agua. Dada la disposición y extensión de las "cajas" y los "bigotes o extremos", los autores concluyen que no hay diferencias significativas entre el funcionamiento de los operadores.

Múltiples perspectivas: Los/las estudiantes pueden utilizar información levantada en su propio curso (edad, estatura, etc.) y hacer una distribución en cuartiles. La idea es que haciendo la experiencia los conceptos se internalicen.



25. http://www.mathsisfun.com/data/quartiles.html
26. http://www.mathsisfun.com/data/quartiles.html
27. http://selobu.blogspot.com/

6. Que consigan el promedio de notas de matemática de cada estudiante de 1[er] año de Educación Media y comparen el rendimiento en todos los cursos de este nivel. Para ellos ordenar la información en tablas y luego la grafiquen con apoyo de recursos TIC. Primero pueden completar una tabla como sigue:

Medida	1° A	1° B	1° C
MÍN			
Q_1			
Q_2			
Q_3			
MÁX			

Nota: Un detalle importante tiene que ver con el cálculo de los cuartiles en un conjunto de datos. Para el mismo caso de las notas, por ejemplo, se puede tener las calificaciones de un grupo de 40 estudiantes. Estas notas se ordenan de mayor a menor. A continuación se muestran las notas de los 14 primeros alumnos de un curso cualquiera:

Alumno	Nota	
1	1,1	
2	1,1	
3	1,2	
4	1,3	
5	1,5	
6	1,5	
7	1,7	
8	1,7	
9	2,2	
10	2,2	$\leftarrow Q_1 = 2,2$
11	2,2	
12	2,6	
13	2,6	
14	2,8	
...	...	
40		

Por ejemplo, si se determina el primer cuartil usando Excel, el valor será $Q_1 = 2{,}2$ (manualmente dará el mismo valor). La ubicación de este cuartil 1 estará entre la posición 10 y 11. Dado que se ubica "entre" la posición 10 y 11, el número de datos que queda "bajo" el Q_1 es justamente 10 y esto corresponde al 25% del total. Es importante aclarar a los/las estudiantes que el Q_1 – en este caso– además queda debajo del dato de la posición 11 que es también 2,2. Que el Q_1 sea 2,2 no significa que todos los datos bajo él sean menores o iguales a 2,2. Lo único que quiere decir, es que el Q_1 (una vez que todos los datos están ordenados) es aquel valor bajo el cual queda el 25% de los datos, ya que las medidas de posición actúan buscando justamente la "posición". Esto suele suceder cuando las notas se repiten.

Habilidades de investigación

7. **Que reúnan la información (estatura) de los equipos de fútbol que jugaron la última Copa Mundial en Brasil 2014**. Pueden escoger de 3 a 5 equipos, ojalá de diferentes continentes, y los comparen usando diagramas de caja. Pueden completar primero una tabla como:

Medida	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3	Equipo 4
MÍN				
Q_1				
Q_2				
Q_3				
MÁX				

GUION DIDÁCTICO N° 1

Parte 3: Profundización

Habilidades comunicativas

Lo primero es formalizar el concepto de cuartil. Los cuartiles son los tres valores de la variable que dividen a un conjunto de datos ordenados en cuatro partes iguales. Q_1, Q_2 y Q_3 determinan los valores correspondientes al 25%, al 50% y al 75% de los datos. Q_2 coincide con la mediana. La forma de determinar los cuartiles no es única. La siguiente tabla[28] resume algunos métodos comunes para calcular la posición del primer y tercer cuartil desde una muestra de tamaño n. En la tabla $[x]$ corresponde a la función parte entera.

Ideas Básicas: La forma de determinar los cuartiles no es única. Por ejemplo, usando Geogebra y Excel se obtienen valores diferentes. Depende del método.

Habilidades de investigación

Método	Primer cuartil *n* par	Primer cuartil *n* impar	Tercer cuartil *n* par	Tercer cuartil *n* impar
Minitab	$\frac{n+1}{4}$	$\frac{n+1}{4}$	$\frac{3n+3}{4}$	$\frac{3n+3}{4}$
Tukey (Hoaglin et al. 1983)	$\frac{n+3}{4}$	$\frac{n+2}{4}$	$\frac{3n+1}{4}$	$\frac{3n+2}{4}$
Moore and McCabe (2002)	$\frac{n+1}{4}$	$\frac{n+2}{4}$	$\frac{3n+3}{4}$	$\frac{3n+2}{4}$
Mendenhall and Sincich (1995)	$\left[\frac{n+1}{4}\right]$	$\left[\frac{n+1}{4}\right]$	$\left[\frac{3n+3}{4}\right]$	$\left[\frac{3n+3}{4}\right]$
Freund and Perles (1987)	$\frac{n+3}{4}$	$\frac{n+3}{4}$	$\frac{3n+1}{4}$	$\frac{3n+1}{4}$

28. Fuente: http://mathworld.wolfram.com/Quartile.html

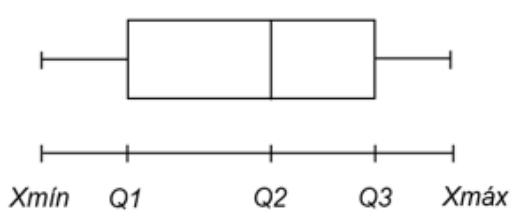
En lo práctico se puede realizar un ejercicio simple usando GEOGEBRA y EXCEL, para comparar que para un mismo conjunto de datos el primer cuartil, por ejemplo, es diferente en valor. Si se tiene la serie de datos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Al ingresarlos tanto a Excel como Geogebra, los resultados son como sigue:

Habilidades de investigación

Primer Cuartil (Q_1)	EXCEL/ Valor	GEOGEBRA/ Valor
Función 1	=CUARTIL.INC(B3:B11;1)	Q_1[A5:A13]
	3	2,5
Función 2	=CUARTIL.EXC(B3:B12;1)	
	2,75	

Se recomienda entonces escoger un método, explicitarlo y utilizarlo con los/las estudiantes en el estudio de las medidas de posición.

Los gráficos de caja permiten analizar un conjunto de datos a partir de cinco valores: valor mínimo (Xmín), primer cuartil (Q_1), mediana o segundo cuartil (Q_2), tercer cuartil (Q_3) y valor máximo (Xmáx).



El rango intercuartil corresponde a la diferencia entre el tercer cuartil (Q_3) y el primer cuartil (Q_1). Esta medida permite resolver el problema de la sensibilidad del rango común a los ***outliers*** o valores extremos.

Ideas Básicas: Las fórmulas para obtener cuartiles, y en general, medidas de posición, son sensibles a si el número de datos es par o impar.

A partir de un conjunto de datos, ¿cómo se establecen los cuartiles?

Para localizar los valores asociados a los cuartiles (Q_1, Q_2, Q_3), se procede de manera similar al procedimiento de encontrar la mediana, dividiendo la muestra en porciones equivalentes, sólo que esta vez se divide en cuartos. Como Q_1, Q_2, Q_3, corresponden al 25%, 50% y 75% de las frecuencias, respectivamente, y Q2 es realmente la mediana, el procedimiento se reduce a calcular solo Q_1 y Q_3.

Para efectos del trabajo con éste guion, para determinar los cuartiles se procederá de la siguiente forma. Una vez ordenados los datos de menor a mayor, para determinar la posición ***q*** que determina Q_1 y Q_3, se recurre a la siguiente regla[29]:

- Posición de Q_1: $q = (n+1) \cdot 0{,}25$
- Posición de Q_3: $q = (n+1) \cdot 0{,}75$

Si ***q*** es número entero, el cuartil corresponde al dato en el lugar q. Si q no es un entero, el percentil será el valor promedio de los datos ubicados en [q] y [q]+1. Donde [] indica la parte entera.

Una vez que se profundice en el concepto de cuartil, se propone que los/las estudiantes interpreten diversas informaciones donde se realicen comparaciones utilizando cuartiles y mediante gráficos de caja.

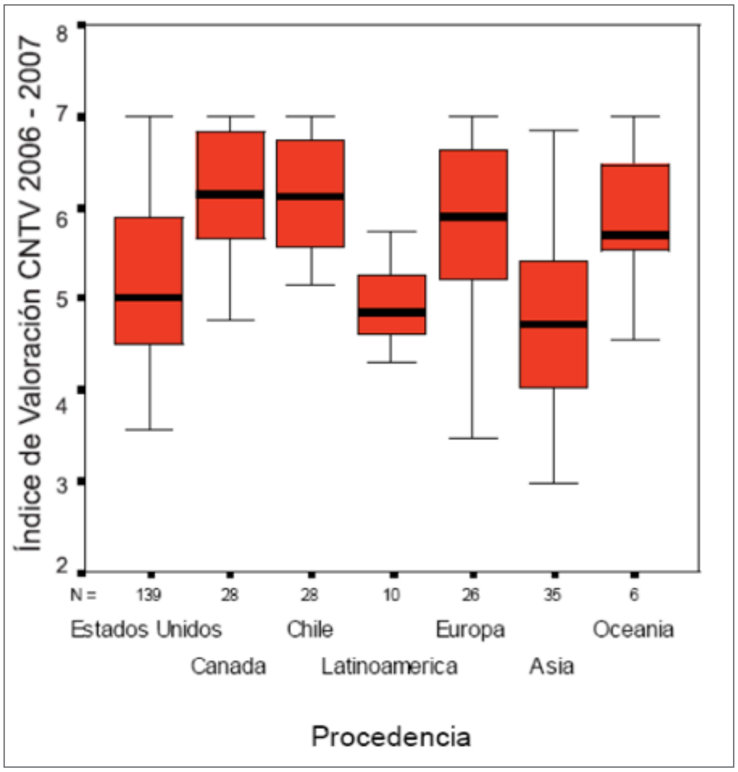
Aquí la idea es profundizar con otras informaciones en las que los/las estudiantes puedan interpretar correcta y completamente dicha información. Por ejemplo:

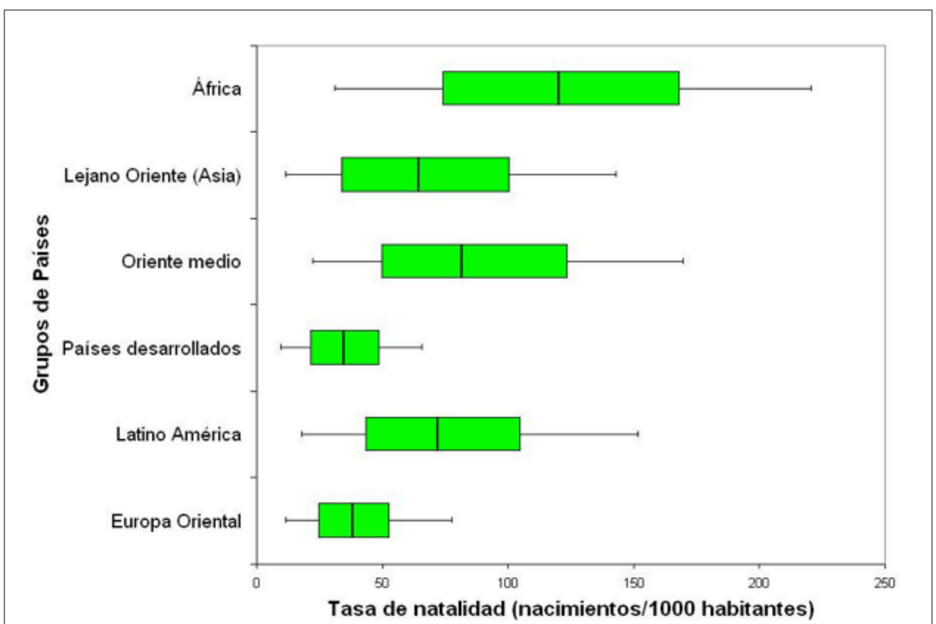
En el mismo contexto de TV, el Departamento de Estudios del Consejo Nacional de Televisión acorde al estudio de la Programación Infantil en la Televisión Chilena 2006-2007[30], establece una comparación respecto a la valoración de acuerdo a la procedencia de los programas. Observa el gráfico e interpreta comparativamente la información. ¿Cómo se interpreta? ¿Qué nos dice el conjunto de diagramas de caja?

Conexiones:
a través los cuartiles es posible establecer contacto con diferentes informaciones del medio.

29. Saavedra, E. (2005). Contenidos básicos de Estadística y Probabilidad. Editorial Universidad de Santiago. Colección Ciencias. Santiago, Chile.
30. Fuente: Departamento de Estudios, Consejo Nacional de Televisión 2007

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis





Fuente[31]:

GUION DIDÁCTICO N° 1

31. http://estossonlosdiasdenuestrasvidas.blogspot.com/2010/09/tasa-de-natalidad-de-diferentes-grupos.html

Situación 3: ¿Y si los datos están agrupados? ¿Qué sucede con las medidas de posición?

Nota: esta guía se presenta como una continuación natural de los temas abordados anteriormente y se expresa sólo como apoyo para el/la docente. En este sentido no se le asocia una guía para el/la estudiante.

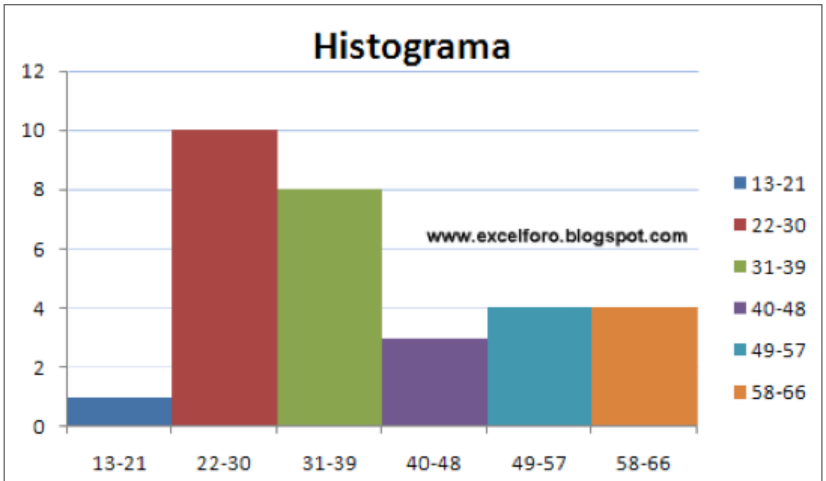
Parte 1: Comprensión de la situación

Habilidades comunicativas

Hasta el momento los/las estudiantes han trabajado medidas de posición con datos generalmente, no agrupados o a "granel". Es válido entonces preguntarse de qué manera se obtienen medidas de posición tales como quintiles, cuartiles o percentiles en general, considerando un conjunto de datos en una tabla con intervalos y frecuencias. ¿De dónde se obtienen las fórmulas que habitualmente se encuentran en la literatura estadística o en la Web? Es una buena pregunta a responder.

Coherencia longitudinal: Como extensión del aprendizaje estadístico es interesante saber cómo determinar medidas de posición cuando los datos están agrupados, caso en el que se pierde cierta información.

Es importante recordar que cuando se utilizan datos agrupados, se pierde cierta información, sin embargo, se gana en otros aspectos que permiten una mejor interpretación de la información. Esta tercera situación es justamente una instancia para profundizar en estos y otros temas. Por ejemplo, ¿cómo determinar medidas de posición a partir de un histograma?



Fuente[32]

Ideas Básicas: Los estudiantes deben familiarizarse con los histogramas y los gráficos de tallo y hoja, así como también con tablas de frecuencia con datos agrupados

32. http://hhjose99.blogspot.com/2013/06/las-siete-herramientas-basicas-para-el.html

Otra pregunta interesante a resolver es, ¿cómo determinar medidas de posición a partir de gráficos de Tallo y Hoja? Estos gráficos, que también forman parte de los contenidos curriculares, son útiles cuando se quiere comparar dos conjuntos de datos. Lo importante es saber leerlos correctamente.

Tallo	Hoja
11	9, 6, 8,7,5
12	2, 2, 9, 1, 7, 8, 1, 9
13	4, 6, 2, 5, 9, 8
14	3, 8, 6, 3, 3, 9, 3, 3
15	6, 4, 3, 4, 6, 7
16	2, 0,3, 7, 3

Fuente[33]

La presente situación de aprendizaje es clave, ya que permite que los/las estudiantes adquieran herramientas para comparar dos o más conjuntos de datos, cuando estos están agrupados en intervalos, en una tabla de frecuencia o bien en un histograma, o bien cuando están en un gráfico de tallos y hojas. Lo importante es relacionar diferentes tipos de representaciones gráficas.

Idas Básicas: Notar que al tratarse de medidas de posición, cobra relevancia el gráfico de frecuencias acumuladas u ojiva.

Las **dificultades** principales que se pueden presentar aquí, tienen que ver con el manejo e interpretación de otras representaciones gráficas tales como los mencionados histogramas y gráficos de tallo y hoja. Lo otro tiene que ver directamente con qué tan habituados están los/las estudiantes con el uso de tablas de frecuencia, con la variante en este caso de que los datos están agrupados.

Clases	Mi	f
90 – 97	93.5	7
98 – 105	101.5	9
106 – 113	109.5	13
114 – 121	117.5	3
122 – 129	125.5	4
130 – 137	133.5	3
138 - 145	141.5	1
Total		40

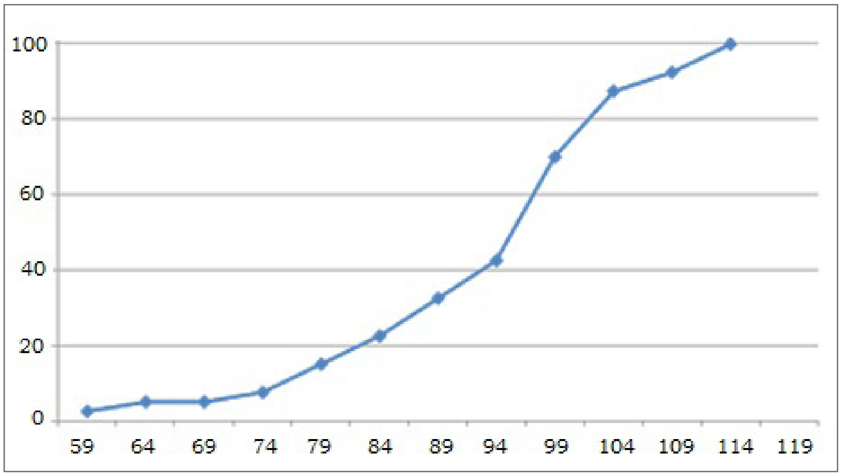
Fuente[34]

33. http://es.temariosolalto2009.wikia.com/wiki/Estad%C3%ADstica
34. http://habitantedelinfinito.blogspot.com/2009/08/distribucion-de-frecuencia-para-datos.html

Es necesario recordar que la particularidad en este tipo de casos es que, al existir intervalos, es necesario obtener un valor representante, el cual por lo general corresponde al punto medio de cada intervalo (también conocido como marca de clase). Por ello, al obtener una medida de tendencia central o de posición, en realidad se está realizando una aproximación.

Por otra parte, a partir de las mismas tablas de frecuencia, ahora cobra relevancia el uso de la frecuencia acumulada, ya que indica más menos en qué intervalo está el percentil buscado. En otras palabras lo que cobra relevancia es el uso e interpretación de los gráficos de frecuencia acumulada u ojivas.

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis



Fuente[35]

La motivación central para abordar esta tercera situación, tiene que ver con la profundización de las medidas de posición ahora en el caso de datos agrupados en intervalos. Esto implica focalizar el trabajo en las tablas de frecuencia para datos agrupados y las representaciones gráficas tales como histogramas, polígonos de frecuencia y ojivas.

Respecto a un conjunto de datos agrupados, las preguntas serán: ¿cómo determinar la mediana? ¿Cómo determinar el primer cuartil o el percentil 65?, etc. También vale cuestionarse si estos valores son exactos o aproximados.

35. http://poligonosyojivas.blogspot.com/

Parte 2: Análisis de la situación

Habilidades de resolución de problemas

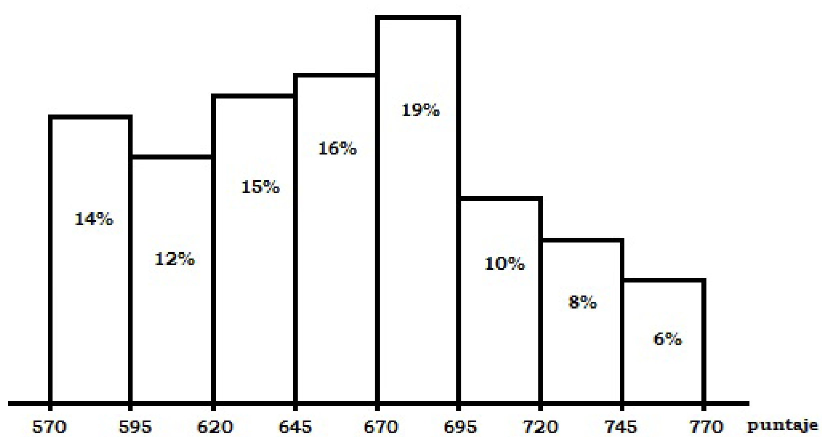
1. ¿Cómo obtener la mediana desde un histograma?[36]

Supongamos que se tienen los resultados de 100 alumnos en una prueba estandarizada tipo SIMCE o PSU. Estos datos se registran en una tabla como sigue:

Múltiples perspectivas: Relacionar diferentes representaciones de datos será clave. En este caso una tabla de frecuencias y un histograma.

Intervalo	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa %
[570 – 595[	14	0,14	14%
[595 – 620[	12	0,12	12%
[620 – 645[	15	0,15	15%
[645 – 670[	16	0,16	16%
[670 – 695[	19	0,19	19%
[695 – 720[	10	0,1	10%
[720 – 745[	8	0,08	8%
[745 – 770]	6	0,06	6%
Total	100	1	100%

El histograma asociado es el siguiente:



Ideas Básicas: En un histograma el porcentaje asociado a un rectángulo o barra corresponde a su área. Luego la altura se obtiene desde el cociente entre área y amplitud del intervalo.

GUION DIDÁCTICO Nº 1

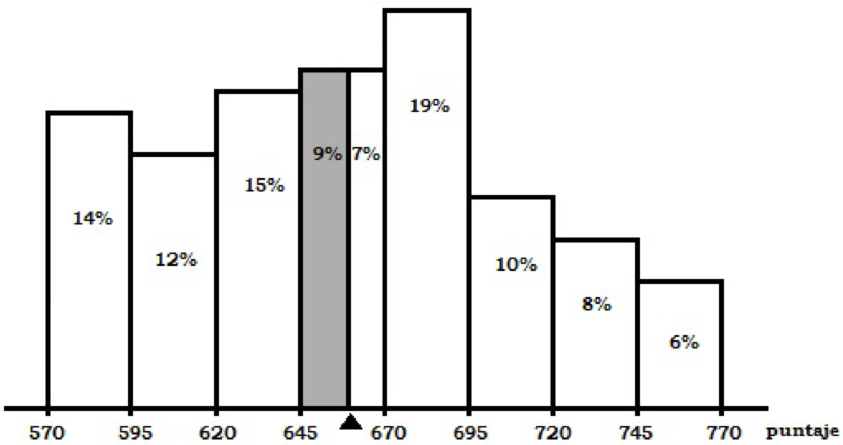
36. Adaptado de Saavedra, E. (2009). Material de Referencia curso datosyazar.cl. Centro Comenius USACH. Santiago, Chile. Complementado con Lipschutz, S. y Schiller, J. (2000). Introducción a la probabilidad y estadística. Mac Graw Hill.

Para encontrar la mediana se pueden realizar los siguientes pasos:

- Buscar un valor entre 570 y 770 de modo que divida al área del histograma en dos mitades iguales (50% a cada lado del valor).
- El área del primer rectángulo (14%) es menor que 50%.
- El área de los dos primeros rectángulos (26%) es menor que 50%.
- El área de los tres primeros rectángulos (41%) es menor que 50%.
- El área de los cuatro primeros rectángulos (57%) es mayor que 50%. Luego, la mediana será un valor situado entre 645 y 670.

La mediana (Md) buscada debe cumplir con lo siguiente:

- Md = 645 + x (donde x es base del rectángulo sombreado)



Ideas Básicas:
La mediana, a diferencia de la moda es única. Pero en forma similar a la moda no utiliza toda la información del conjunto.

Habilidades de resolución de problemas

- El área sombreada debe corresponder a 9% (ya que 41% + 9% = 50%).
- La altura del rectángulo sombreado es $\frac{16\%}{25} = 0,64\%$ (ya que el área del rectángulo es 16% y la base es 645 – 670 = 25)
- Luego, el área sombreada es igual a x · 0,64%.
  Entonces x · 0,64% = 9%, por lo tanto:

$$x = \frac{9}{0,64} = 14,1$$

- Finalmente, la mediana es igual a Md = 645 + 14,1 = 659,1.

Cabe recordar que para cualquier conjunto de datos la mediana es única, a diferencia de la moda (pueden haber dos o más modas). La mediana tampoco usa toda la información del conjunto de datos, solo respecto al o los datos centrales.

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

2. ¿Cómo obtener la mediana desde tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos?[37]

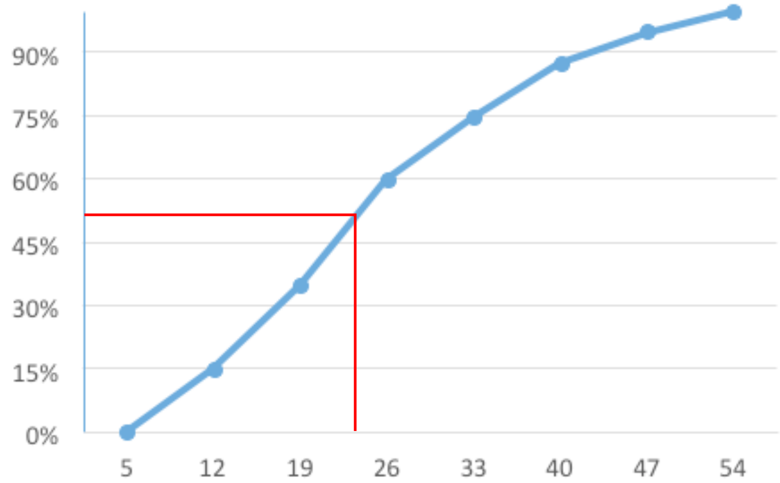
Consideremos la siguiente tabla de frecuencias con datos agrupados, por ejemplo respecto a las edades de un grupo heterogéneo de 80 personas:

Intervalo	Frecuencia	Punto medio del intervalo	Frecuencia relativa %	Frecuencia relativa acumulada
[5 – 12[	12	8,5	15%	15%
[12 – 19[	16	15,5	20%	35%
[19 – 26[	20	22,5	25%	60%
[26 – 33[	12	29,5	15%	75%
[33 – 40[	10	36,5	12,5%	87,5%
[40 – 47[	6	43,5	7,5%	95%
[47 – 54[	4	50,5	5%	1
Total	80		1	

Los pasos para determinar la mediana del conjunto de datos son los que siguen:

- A partir de la tabla anterior se obtiene el gráfico de frecuencias acumuladas u ojiva.
- Se grafica el punto $(\boldsymbol{a}_0, 0)$, donde $\boldsymbol{a}_0$ es el extremo izquierdo del primer intervalo.
- Luego se grafican los puntos de la forma (a_i, F_i), donde F_i es la frecuencia relativa acumulada asociada al intervalo $[a_i\text{-}1, a_i[$.
- Los puntos a graficar son los siguientes: (5, 0); (12, 0.15); (19, 0.35); (26, 0.60); (33, 0.35); (40, 0.875); (46, 0.95); (54, 1).

37. Adaptado de Saavedra, E. (2005). Contenidos Básicos de Estadística y Probabilidad. Editorial Universidad de Santiago. Colección Ciencias. Santiago, Chile. Complementado con Lipschutz, S. y Schiller, J. (2000). Introducción a la probabilidad y estadística. Mac Graw Hill.



- La mediana se encuentra intersectando la recta y = 50 con la recta que pasa por los puntos (19, 0.35) y (26, 0.6).

- Se puede comprobar que la ecuación de la recta que pasa por

(19, 0.35) y (26, 0.6) es $y = \frac{25}{7}x - \frac{230}{7}$.

- La intersección de la recta anterior con y = 50 entrega el valor x = 23,2 que corresponde a la mediana. Luego Md = 23,2.

3. ¿Cómo obtener cuartiles desde gráficos de tallos y hojas?[38]

Habilidades de resolución de problemas

Suponga que se tienen los datos de los resultados de una prueba tipo SIMCE/PSU, de un curso de 30 estudiantes, organizados en un gráfico de tallos y hojas:

Ideas Básicas: en el gráfico se usa como tallo la centena y decena, y como hojas las unidades.

Tallo	Hojas						
22	8	2	8				
23	3	5	6	7	3	4	6
24	0	0	5	9			
25	8	0	6	2	7	3	3
26	0						
27	5						
28	8	1	6	2			
29	1	9	8				

Notar que en el gráfico se usa como tallo la centena y decena, y como hojas las unidades. Posteriormente se procede a ordenar los datos de menor a mayor:

Tallo	Hojas						
22	2	8	8				
23	3	3	4	5	6	6	7
24	0	0	5	9			
25	0	2	3	3	6	7	8
26	0						
27	5						
28	1	2	6	8			
29	1	8	9				

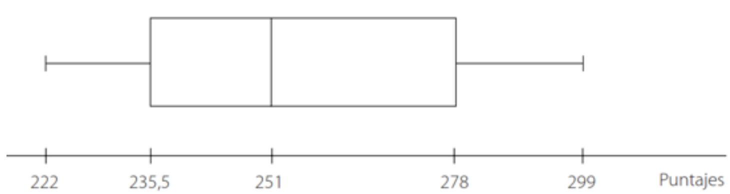
38. Adaptado de Saavedra, E. (2009). Material de Referencia curso datosyazar.cl. Centro Comenius USACH. Santiago, Chile. Complementado con Lipschutz, S. y Schiller, J. (2000). Introducción a la probabilidad y estadística.
Mac Graw Hill.

Del mismo gráfico se puede observar que los extremos (mínimo y máximo) son: $E_1 = 222$ y $E_2 = 299$. Esto entrega parte de la información para los diagrama de caja y bigotes. A continuación se determinan los cuartiles Q_1, Q_2 y Q_3 :

Cuartil	Percentil	Cálculo	Valor
Q_1	P_{25}	$(30+1) \cdot 0{,}25 = 7{,}75$. Q_1 está entre las posiciones 7 y 8.	$Q_1 = \frac{235+236}{2} = 235{,}5$
Q_2	P_{50}	$(30+1) \cdot 0{,}5 = 15{,}5$. Q_2 está entre las posiciones 15 y 16.	$Q_2 = \frac{250+252}{2} = 251$
Q_3	P_{75}	$(30+1) \cdot 0{,}75 = 23{,}25$. Q_3 está entre las posiciones 23 y 24.	$Q_3 = \frac{275+281}{2} = 278$

Habilidades comunicativas

El gráfico de caja y bigotes es el siguiente:



Parte 3: Profundización

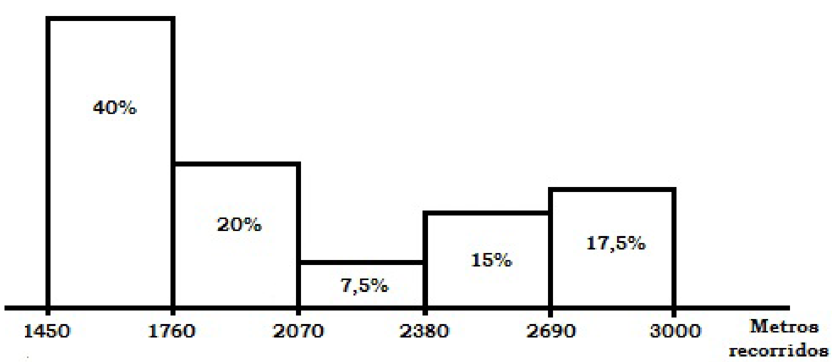
Habilidades de investigación

1. ¿Cómo encontrar percentiles en general, a partir de histogramas?

Para calcular percentiles con datos agrupados, se utiliza el histograma asociado a la tabla de frecuencia. Primero se encuentran las frecuencias relativas y relativas porcentuales. Suponga que se tienen los datos de 40 alumnos/as que rindieron una prueba de resistencia física[39].

Metros recorridos	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa %
[1450 – 1760[	16	0,4	40%
[1760 – 2070[	8	0,2	20%
[2070 – 2380[	3	0,075	7,5%
[2380 – 2690[	6	0,150	15%
[2690 – 3000]	7	0,175	17,5%
	40	1	100%

La información anterior en un histograma queda:



Para encontrar el percentil 65, se pueden realizar los siguientes pasos:

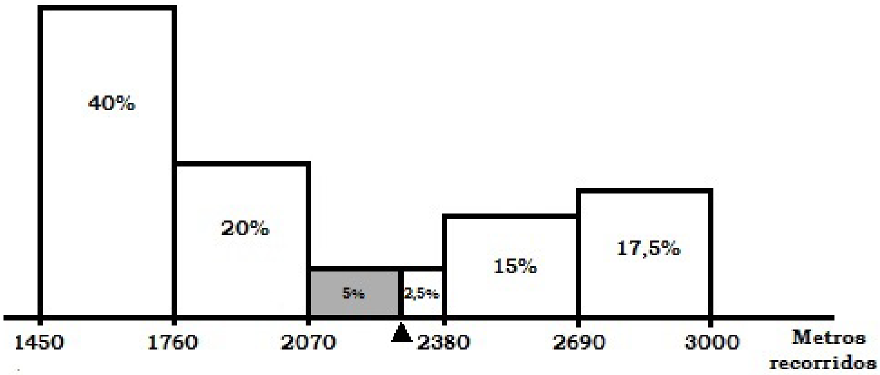
- Buscar un valor entre 1450 y 3000 de modo que divida al área del histograma en dos partes (65% a la izquierda y 35% a la derecha).
- El área del primer rectángulo (40%) es menor que 65%.
- El área de los dos primeros rectángulos (60%) es menor que 65%.
- El área de los tres primeros rectángulos (67,5%) es mayor que 65%. Luego, el percentil 65 será un valor situado entre 2070 y 2380.

39. Adaptado de Saavedra, E. (2009). Material de Referencia curso datosyazar.cl. Centro Comenius USACH. Santiago, Chile. Complementado con Lipschutz, S. y Schiller, J. (2000). Introducción a la probabilidad y estadística. Mac Graw Hill.

GUION DIDÁCTICO N° 1

El percentil 65 buscado debe cumplir con lo siguiente:

- P_{65} = 2070 + x (donde x es base del rectángulo sombreado)



- El área sombreada debe corresponder a 5% (ya que 60% + 5% = 65%).

- La altura del rectángulo sombreado es $\frac{7,5\%}{310} = 0,024\%$ (ya que el área del rectángulo es 7,5% y la base es 2070 – 2380 = 310)

- Luego, el área sombreada es igual a x · 0,024%. Entonces x · 0,024% = 5%, por lo tanto:

$$x = \frac{5}{0,024} = 208,3$$

- Finalmente, el percentil 65 es igual a P_{65} = 2070 + 208,3 = 2278,3.

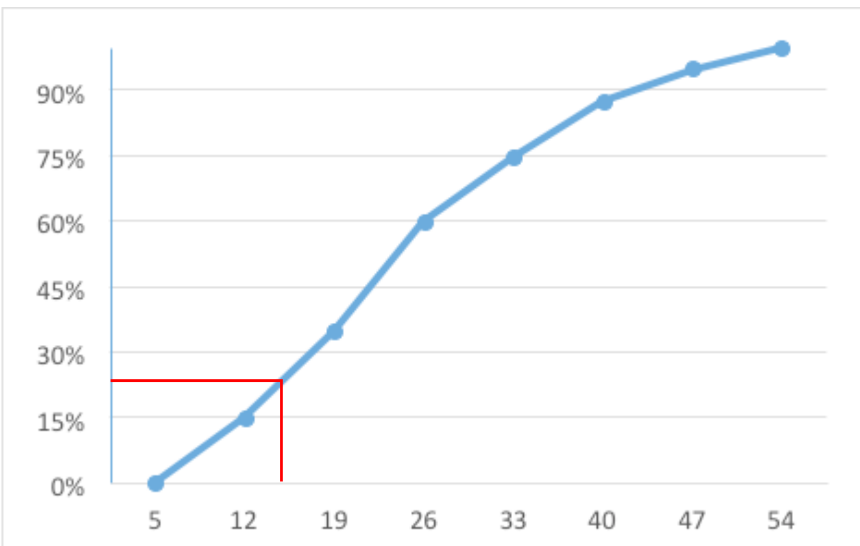
Ideas Básicas:
La mediana, a diferencia de la moda es única. Pero en forma similar a la moda no utiliza toda la información del conjunto.

2. ¿Cómo obtener percentiles desde tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos?[40]

Tal como se determinó la mediana antes, es posible determinar cualquier percentil a partir de una tabla con datos agrupados. Por ejemplo si se quiere determinar el primer cuartil o percentil 25 desde los datos:

Intervalo	Frecuencia	Punto medio del intervalo	Frecuencia relativa %	Frecuencia relativa acumulada %
[5 – 12[	12	8,5	15%	15%
[12 – 19[	16	15,5	20%	35%
[19 – 26[	20	22,5	25%	60%
[26 – 33[	12	29,5	15%	75%
[33 – 40[	10	36,5	12,5%	87,5%
[40 – 47[	6	43,5	7,5%	95%
[47 – 54[	4	50,5	5%	100%
Total	80		100%	

El gráfico de frecuencia acumulada es:



40. Adaptado de Saavedra, E. (2005). Contenidos Básico de Estadística y Probabilidad. Editorial Universidad de Santiago. Colección Ciencias. Santiago, Chile. Complementado con Lipschutz S., Schiller J. (2000). Introducción a la probabilidad y estadística. Mac Graw Hill.

GUION DIDÁCTICO Nº 1

Habilidades de investigación

El primer cuartil (Q_1) o percentil 25 sería la abscisa del punto (Q_1, 25) correspondiente a la intersección entre la recta que pasa por (12,15) y (19,35), y la recta y=25. La ecuación que pasa por los puntos mencionados es:

$y=\frac{20}{7}x-\frac{135}{7}$, por lo que Q_1 satisface la ecuación: $25=\frac{20}{7}\cdot Q_1-\frac{135}{7}$

De donde Q_1 = 15,5

Conexiones:
Mediante la determinación de un percentil cualquiera, se establece una conexión con el contenido de ecuación de la recta.

En general, para obtener cualquier percentil[41] se puede realizar lo siguiente. Dada la tabla:

Intervalo	Largo del intervalo	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
$[a_0, a_1[$	$\Delta_1=a_1-a_0$	f_1	F_1
$[a_1, a_2[$	$\Delta_2=a_2-a_1$	f_2	F_2
....			
$[a_{k-1}, a_k[$	$\Delta_k=a_k-a_{k-1}$	f_k	$F_k=1$
Total	a_k-a_0	1	

Si se quiere determinar el percentil a, donde 0 < a <100, entonces se realiza lo siguiente:

Se encuentra el entero j, de modo que $F_{j-1}<\alpha$ y $F_j\geq\alpha$

Se determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a_{j-1,}F_{j-1})$ y $(a_{j,}F_j)$. Esta ecuación es:

$$y=\frac{f_i}{\Delta_j}x+F_{j-1}-a_{j-1}\cdot\frac{f_i}{\Delta_j}$$

Se encuentra la intersección de la recta anterior con la recta $y=\alpha$. Es decir, se resuelve:

$$\alpha=\frac{f_i}{\Delta_j}x+F_{j-1}-a_{j-1}\cdot\frac{f_i}{\Delta_j}$$

La solución de la ecuación anterior es el percentil $\alpha\cdot 100\%$, que se anota como $x(\alpha)$:

$$x(\alpha)=\frac{f_i}{\Delta_j}x+F_{j-1}-a_{j-1}\cdot\frac{f_i}{\Delta_j}$$

41. Adaptado de Saavedra, E. (2005). Contenidos Básicos de Estadística y Probabilidad. Editorial Universidad de Santiago. Colección Ciencias. Santiago, Chile. Complementado con Lipschutz, S. y Schiller, J. (2000). Introducción a la probabilidad y estadística. Mac Graw Hill.

GUÍAS ESTUDIANTES

¿En qué quintil me dijo?

GUÍA 1

Objetivo:

Explorar los conceptos de quintil, decil o percentil, en general, a partir del análisis de información presente en los medios de comunicación.

Ten presente que: Puedes desarrollar las actividades en el orden que más te ayude a aprender, pero no dejes de contestar las preguntas que tienen un ícono de un lápiz, con ellas podrás evaluarte y saber si estás logrando las metas de la clase.

Preguntas previas

- ¿Qué tanto recuerdas de lo que has aprendido hasta ahora en la unidad de Estadística? Conversa con tus compañeros/as y luego responde las siguientes preguntas:

  - ¿Recuerdan los porcentajes? ¿Qué significado tienen? ¿Qué dice aquella información expresada en porcentajes? Den algunos ejemplos.

  - ¿Recuerdan los conceptos de media, moda y mediana? Expliquen brevemente el significado de cada una de estas palabras.

Para los siguientes datos: 5, 8, 20, 2, 8, 1, 14. Determinen media, moda y mediana. ¿Cómo lo hicieron? Si se agrega al conjunto el valor 3, ¿cómo cambian las medidas de tendencia central? Verifica con tus compañeros y explica el resultado.

¿Qué porcentaje de los datos se encuentra bajo la mediana? ¿Qué porcentaje de los datos se encuentra sobre la mediana? Discute con tus compañeros/as y el/la profesor/a.

Buscando información en la Web y entrando en materia

- Utilicen algún buscador en la Web e ingresen algunas palabras claves tales como “quintil ingresos”, “deciles ingresos”, “percentiles ingresos”, etc.

    - Seleccionen un link que les parezca interesante y transcriban o sinteticen la información a continuación, indicando la fuente desde donde la extrajeron:

    - Anoten las palabras claves que aparecen en la información anterior y, en lo posible, su significado.

    - ¿Qué dice la información anterior? Explíquenlo con sus propias palabras.

Interpretando información

Los siguientes párrafos fueron extraídos desde diferentes fuentes:

Noticia 1

Distribución del ingreso en Chile (2008) mantiene gran desigualdad en últimos 10 años, según INE[42]

Quintil más alto concentra un 51,03% del ingreso total del país, mientras que el más pobre llega a sólo 5,38%.

Noticia 2

Beca Bicentenario[43]

La Beca Bicentenario es para estudiantes de escasos recursos que hayan tenido un buen rendimiento académico y que se matriculen en una carrera regular de alguna de las Universidades del Consejo de Rectores o también llamadas universidades tradicionales. El beneficio principal es que Financia el monto del Arancel de Referencia anual de la carrera. Dentro de los requisitos propuestos se encuentra el que hace referencia a "pertenecer a los dos primeros quintiles de ingreso".

Noticia 3

Clases medias y estratos socio-económicos en Chile, por R. Mendez (Adimarx)[44]

En los últimos 20 años, Chile ha vivido una serie de cambios que han marcado la nueva identidad nacional. En este nuevo Chile, cuatro segmentos de población emergen con particular fuerza. Los ancianos, las mujeres activas, los jóvenes y la nueva clase media son quienes determinarán el futuro de nuestro país.

"En el caso de los padres que estaban en el quintil más bajo, o sea, en la pobreza, el 31 por ciento de sus hijos se ubica en el mismo quintil. Pero un 21 por ciento sube un quintil, otro 21 por ciento sube dos, un 19 por ciento sube tres y un 7 por ciento, cuatro".

42. http://aquevedo.wordpress.com/2008/11/21/distribucion-del-ingreso-en-chile-mantiene-brecha-en-ultimos-10-anos-segun-estudio-del-ine-2/
43. http://www.becasycreditos.cl/ayudas/b_bb.html
44. http://aquevedo.wordpress.com/2008/05/27/clases-medias-y-estratos-socio-economicos-en-chile-por-r-mendez-adimarx-2/

- En grupos, tomen una de las informaciones anteriores, sinteticen lo que señala y anoten las palabras claves.

¿Qué dice la información anterior? Explícalo con tus propias palabras.

GUÍA Nº 1 / ESTUDIANTE

Quintiles de ingreso

Con relación a las becas de estudio, busquen información en la Web sobre los "quintiles de ingreso" y completen la siguiente tabla:

Quintil	Ingreso per cápita	Significado en palabras
I	*Ingresos desde $0 hasta $70.543 per cápita.*	El 20% inferior de la población tiene un ingreso per cápita ...
II		
III		
IV		
V		

¿Cuál es la relación entre el concepto de quintil y porcentajes? Explícalo con tus palabras.

- En la Web, se pueden encontrar algunas representaciones gráficas y hasta "metafóricas" de esta organización por quintiles de ingreso. Por ejemplo, se puede mostrar la siguiente, extraída de la página de los secundarios[45]:

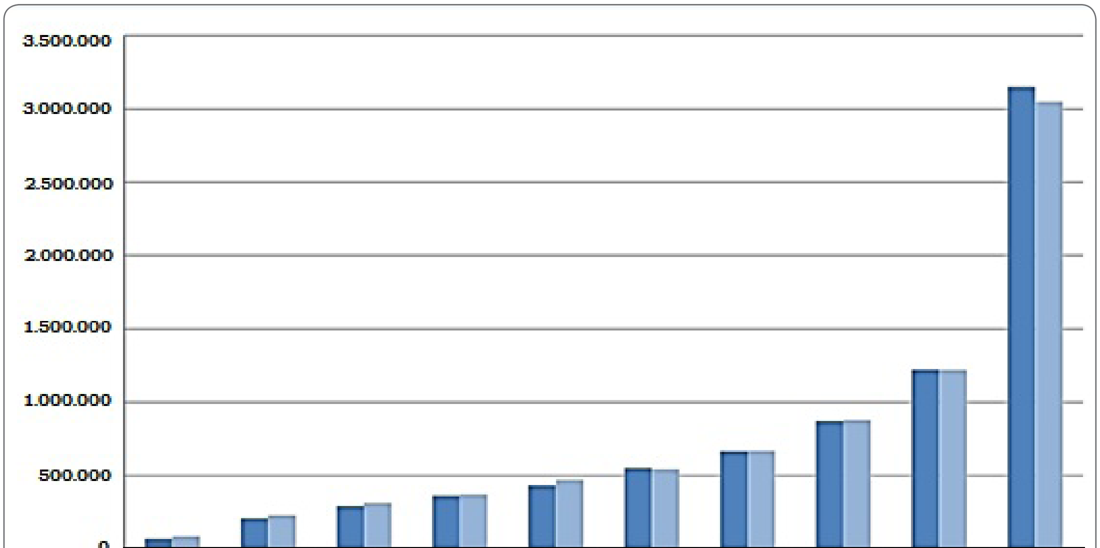
- En grupo, inventen su propia representación visual de los quintiles de ingreso. Dibujen aquí el modelo.

45. http://www.secundarios.com/blogs/educacion/como-funcionan-los-quintiles-en-el-proceso-de-admision-2014-l21779/

Ahora con deciles

- En los medios de comunicación, también es habitual encontrar información expresada en "deciles". A continuación se muestra un gráfico organizado en deciles de ingreso[46].

  - ¿Qué información se entrega?



	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
2009	68.536	210.289	291.235	363.334	434.386	552.632	666.103	872.234	1.223.683	3.150.076
2011	85.741	228.621	315.200	371.054	470.642	544.193	667.302	878.816	1.219.273	3.048.821

Ingreso autónomo per cápita del hogar

46. Evolución del ingreso autónomo promedio de los hogares, por decil de ingreso autónomo per cápita del hogar (pesos de Noviembre 2011). Fuente: Ministerio del Desarrollo Social. CASEN 2009 – 2011.

- En grupos, describan los elementos principales del gráfico anterior.

¿Qué dice la información anterior? Explícalo con tus propias palabras.

GUÍA Nº 1 / ESTUDIANTE

¿Qué es un percentil?

- En los medios de comunicación, también es habitual encontrar información expresada en "percentiles". A continuación se muestra una tabla que muestra deciles y percentiles. ¿Qué información se entrega? ¿Qué significa "apertura del último decil"?

Desigualdad en Chile: el problema es el 1% más rico[47]

Valores mínimo, máximo, medio y medianos del ingreso autónomo mensual de los hogares, por decil de ingreso autónomo per cápita del hogar

	Decil	Promedio	Mediana		Percentiles	Promedio	Mediana
(10 % más pobre) →	I	$ 63.891	$ 43.424	*APERTURA DEL ULTIMO DECIL*	*P91*	*$ 1.521.418*	*$ 1.491.305*
	II	$ 197.402	$ 186.745		*P92*	*$ 1.793.662*	*$ 1.684.765*
	III	$ 273.316	$ 258.398		*P93*	*$ 1.700.295*	*$ 1.757.942*
	IV	$ 341.124	$ 333.342		*P94*	*$ 1.799.060*	*$ 1.876.408*
	V	$ 407.711	$ 403.325		*P95*	*$ 2.125.636*	*$ 2.059.203*
	VI	$ 517.888	$ 510.850		*P96*	*$ 2.353.057*	*$ 2.434.166*
	VII	$ 625.247	$ 594.099		*P97*	*$ 2.762.197*	*$ 2.720.716*
	VIII	$ 816.434	$ 797.196		*P98*	*$ 3.093.899*	*$ 3.190.736*
	IX	$ 1.146.236	$ 1.100.346		*P99*	*$ 4.547.566*	*$ 3.734.295*
(10 % más rico) →	X	$ 2.951.815	$ 2.178.597	*(1% más rico) →*	*P100*	*$ 7.843.061*	*$ 6.823.309*

Fuente: Fundación SOL, micro-datos de Casen 2009

47. http://www.elmostrador.cl/opinion/2012/04/02/desigualdad-en-chile-el-problema-es-el-1-mas-rico/

- En grupos, describan los elementos principales de la tabla anterior y anoten las palabras claves.

¿Qué dice la información anterior? ¿Qué indican los percentiles? ¿Qué relación tienen con los deciles? Explícalo con tus propias palabras.

Traduciendo a porcentajes

- Traduce la siguiente información a porcentajes:

"El primer quintil de la población ... "	
"Los tres últimos deciles de la población ... "	
"El porcentaje de la población que se encuentra bajo el percentil 75 ... "	

- Completa lo siguiente:

  - En un conjunto de datos, el Quintil 1 es un valor bajo el cual se encuentra el .... % de ellos.
  - Entre el Quintil 2 y el Quintil 3, se encuentra el .... % de los datos de un conjunto.
  - Entre el Decil 1 y el Decil 4, se encuentra el .... % de los datos de un conjunto.
  - En un conjunto de datos, el Percentil 85 es un valor bajo el cual se encuentra el .... % de ellos.
  - Entre el Percentil 65 y el Percentil 85, se encuentra el .... % de los datos de un conjunto.

- En el caso de la mediana, ¿a qué Decil corresponde?, ¿a qué Percentil equivale?

GUÍA Nº 1 / ESTUDIANTE

Un asunto de estaturas, calculando percentiles

Realicen una pequeña encuesta acerca de las estaturas de los/las estudiantes del curso y regístrenlas de alguna manera. En el siguiente recuadro anoten todas las estaturas, asegurándose de que estén ordenadas de menor a mayor:

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Estatura (cm)										

Posición	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Estatura (cm)										

Posición	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Estatura (cm)										

Posición	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Estatura (cm)										

Posición	41	42	43	44	45					
Estatura (cm)										

Nota: si posees acceso a un computador te recomendamos simular el experimento, usando la función *"**aleatorio entre**"* de Excel, una distribución aleatoria de 40 estaturas entre 150 cms y 176 cms, lo que podría representar las estaturas solicitadas.

Determinen: Quintil 1 y 3, mediana, Decil 8, Percentil 85. Discutan el procedimiento para obtener estos valores, a partir del porcentaje que representan. Interpreten el significado de cada uno de estos valores.

Síntesis

- Conversa con tu clase y responde las preguntas, con las conclusiones extraídas de las ideas más relevantes:

  - ¿En qué situaciones de lo cotidiano aparecen términos como quintiles, deciles o percentiles? Den algunos ejemplos.

  - Expresen con sus palabras el significado de los conceptos anteriores.

- En conjunto a tus compañeros/as y profesor/a definan formalmente:

Quintil:

Decil:

Percentil:

Expresiones matemáticas para calcular quintiles, deciles y percentiles en general

Evaluando mi proceso de aprendizaje:

- Revisa tu desempeño en la siguiente evaluación: primero marca en los espacios que corresponda en la tabla y luego responde a las preguntas.

  - Instrucción: En una escala de 1 a 5, califica de acuerdo al nivel de logro.

    1: No necesité hacer esta actividad

    2: No entendí esta actividad

    3: Aprendizaje nivel bajo

    4: Aprendizaje nivel medio

    5: Aprendizaje nivel avanzado

Aspecto a evaluar	1	2	3	4	5
Determinar media, moda y mediana en un conjunto de datos.					
Significado de los conceptos media, moda y mediana.					
Interpretar información escrita expresada en términos de quintiles, deciles y percentiles.					
Interpretar información gráfica expresada en términos de quintiles, deciles y percentiles.					
Significado de los conceptos quintil, decil y percentil.					
Relacionar quintiles, deciles y percentiles con porcentajes.					
Relación entre quintiles, deciles y percentiles.					
Calcular quintiles, deciles y percentiles a partir de un conjunto de datos.					

- ¿Cuál es la mejor forma o material que te ayudó a comprender los conceptos trabajados?

- Otros aspectos de tu aprendizaje que quisieras resaltar. Descríbelos.

Cosas del fútbol y diagramas de caja

GUÍA
2

Objetivo:

Explorar el concepto de cuartil y su relación con los diagramas de caja, así como también interpretar información expresada en cuartiles.

Ten presente que: Puedes desarrollar las actividades en el orden que más te ayude a aprender, pero no dejes de contestar las preguntas que tienen un ícono de un lápiz, con ellas podrás evaluarte y saber si estás logrando las metas de la clase.

Preguntas previas

- ¿Qué tanto aprendiste sobre los conceptos de quintil, decil y percentil? Conversa con tus compañeros/as y luego responde las siguientes preguntas:

    - ¿En cuántas partes se divide un conjunto de datos al usar quintiles, deciles o percentiles? ¿Qué porcentaje del conjunto de datos se ubica entre cada quintil, decil o percentil?

    - ¿Qué relación existe entre la mediana, los deciles y los percentiles? Comenta con tus compañeros/as y explica a continuación.

GUÍA Nº 2 / ESTUDIANTE

Para los siguientes datos: 1, 15, 25, 8, 20, 2, 8, 1, 14, 28, 29, 30, 4. Determinen mediana, quintiles 1 y 2, decil 8 y percentil 75. ¿Cómo lo hiciste? Compara el resultado con tus compañeros/as.

Explica el siguiente enunciado: "*Se puede postular a algunas becas de estudio si perteneces a los tres primeros quintiles de ingreso...*".

Cosas del fútbol, ahora con cuartiles

- Busquen información en la Web sobre los jugadores chilenos que participaron en la última copa del mundo en Brasil. Puedes buscar en http://es.fifa.com/worldcup/

Copia los datos de todos los jugadores de la selección nacional que jugó en Brasil 2014.

Equipo: Selección Chilena 2014

Núm.	Nombre	Altura (m)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		

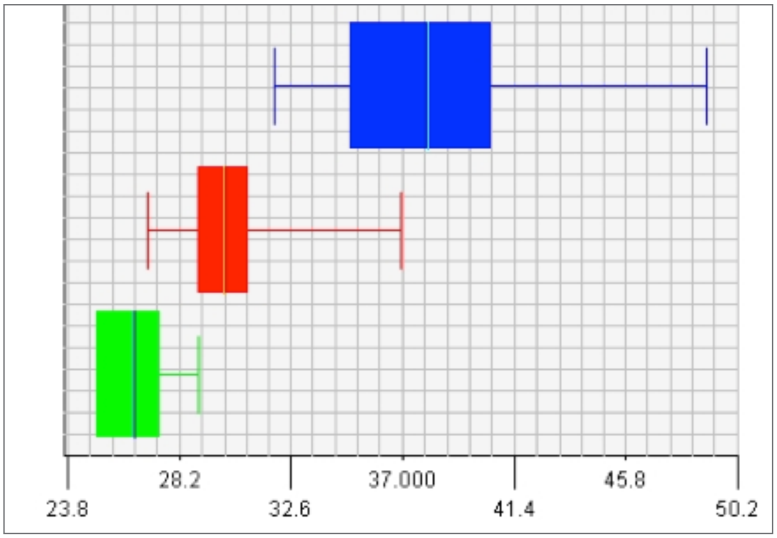
- ¿Cuál es la estatura promedio de la selección chilena? Muestra tu procedimiento.

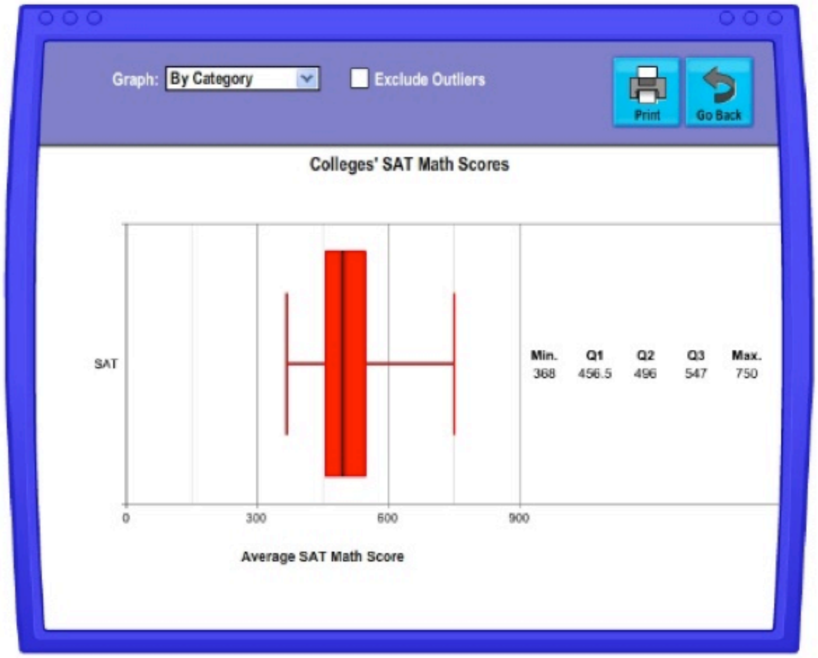
- ¿Cuál es el rango de estaturas del equipo nacional?

Si se ordena al equipo de menor a mayor estatura, determina el primer cuartil (Q_1), la mediana o segundo cuartil (Q_2) y el tercer cuartil (Q_3) ¿Cómo se interpretan estos valores?

Diagramas de caja

- A continuación podrás utilizar algunos recursos digitales[48] para obtener diagramas de caja que reflejen información clave sobre las estaturas.





48. http://shodor.org/interactivate/activities/BoxPlot/
http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3476

GUÍA Nº 2 / ESTUDIANTE

Ingresa los datos anteriores a alguno de los recursos digitales propuestos. A partir de la información obtenida desde el recurso, completa la siguiente tabla:

Medida	Valor entregado por el recurso digital	Significado
MÍN		
Q_1		
Q_2		
Q_3		
MÁX		

- Compara con los valores obtenidos en la sección anterior. ¿Hay diferencias? ¿A qué crees que se debe esta situación? Conversa con tus compañeros/as y el/la profesor/a.

Copia a continuación el gráfico que muestra el recurso digital. Indica claramente a qué partes corresponde MÍN, Q_1, Q_2, Q_3 y MÁX.

En términos generales, describe la estatura que tienen los jugadores nacionales

GUÍA Nº 2 / ESTUDIANTE

Comparando con otros equipos mundialistas

- Ahora el propósito es comparar a la selección nacional con otros equipos del mundial de Brasil.

Usando la información de las estaturas en la Web, completen la siguiente tabla con los datos de otras dos selecciones de la Copa Mundial. Consideren dos equipos favoritos a elección.

Equipo 2:		
Núm.	Nombre	Altura (m)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		

Equipo 3:		
Núm.	Nombre	Altura (m)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		

A partir de los datos anteriores, completen la siguiente tabla. Discute con tus compañeros/as y el/la profesor/a sobre la manera de obtener cada medida de posición.

Medida	Selección chilena	Equipo 2:	Equipo 3:
MÍN			
Q_1			
Q_2			
Q_3			
MÁX			

- Ingresa los datos de la selección nacional y los otros dos equipos mundialistas al recurso digital. Compara los datos de la tabla anterior con los obtenidos por el recurso. Discute con tus compañeros, sobre las posibles diferencias. ¿A qué se debe esto?

Considerando los datos de la tabla anterior, construye manualmente los gráficos de caja correspondientes a los tres equipos. Usa una escala apropiada a los rangos de estaturas. Usa colores.

- Obtén con el recurso digital los gráficos de caja y compara con los que dibujaste más arriba. ¿Hay diferencias? ¿A qué se debe?

- Compara los equipos a partir del rango de estaturas. ¿Cuál tiene mayor rango? ¿Cuál tiene menor rango? ¿Qué significado tiene esto?

- ¿Qué par de selecciones tienen estaturas similares? ¿Cómo se observa eso en los diagramas de caja?

En términos generales, describe comparativamente las estaturas de los tres equipos de fútbol. ¿Quién tiene mayores posibilidades de un mejor juego aéreo? Justifiquen.

Síntesis

- Conversa con tu clase y responde las preguntas, con las conclusiones extraídas de las ideas más relevantes:

    - ¿En qué medidas de posición se basan los diagramas de caja? ¿Qué otras medidas intervienen?

    - ¿Por qué son útiles los diagramas de caja para comparar dos o más conjuntos de datos?

GUÍA Nº 2 / ESTUDIANTE

- En conjunto a tus compañeros/as y profesor/a definan formalmente:

Primer Cuartil (Q_1):

Segundo Cuartil (Q_2):

Tercer Cuartil (Q_3):

Expresiones matemáticas para calcular Q_1, Q_2 y Q_3	

Evaluando mi proceso de aprendizaje:

- Revisa tu desempeño en la siguiente evaluación: primero marca en los espacios que corresponda en la tabla y luego responde a las preguntas.

  - Instrucción: En una escala de 1 a 5, califica de acuerdo al nivel de logro.

    1: No necesité hacer esta actividad

    2: No entendí esta actividad

    3: Aprendizaje nivel bajo

    4: Aprendizaje nivel medio

    5: Aprendizaje nivel avanzado

Aspecto a evaluar	1	2	3	4	5
Calcular Q_1, Q_2 y Q_3 en un conjunto de datos.					
Significado del concepto "Cuartil".					
Significado de MÍN, Q_1, Q_2, Q_3 y MÁX.					
Interpretar información escrita expresada en términos de cuartiles.					
Interpretar información gráfica expresada en términos de cuartiles.					
Comparar información gráfica expresada en términos de cuartiles.					
Relacionar cuartiles con porcentajes.					
Construir un diagrama de caja.					

- ¿Cuál es la mejor forma o material que te ayudó a comprender los conceptos trabajados?

- Otros aspectos de tu aprendizaje que quisieras resaltar. Descríbelos.

ALGEBRA Y GEOMETRÍA

Guion Didáctico 2

Guion del/la profesor/a: Composición de Transformaciones Isométricas

Es esperable que relacionar los ejes temáticos de la enseñanza de la matemática no sea una tarea simple, esto debido a que cada eje por sí solo representa un desafío para la enseñanza y es conceptualmente desafiante, en ocasiones hasta podría considerarse complejo. Pues bien, la Geometría y el Álgebra presentan una excelente oportunidad para lograr dicha relación.

En general, solo se llega a esta relación a partir de la gráfica de las diversas funciones estudiadas, como la recta en la función lineal, la parábola en la función cuadrática, entre otras. Pero esta relación es mucho más enriquecedora, por ejemplo, las transformaciones isométricas son funciones, de ahí el uso de la palabra transformación, y la aplicación sucesiva de las transformaciones isométricas a un objeto en el plano no es otra cosa que la composición de funciones. Es por ello que a continuación se pretende hacer una propuesta de cómo abordar la composición de transformaciones isométricas desde una mirada geométrica y algebraica, siempre imbricadas.

Situación: Composición de transformaciones isométrica

Parte 1: Comprensión de la situación

Desde los primeros niveles de escolaridad, los/las estudiantes se han relacionado con las transformaciones isométricas, primero con las reflexiones de objetos, luego trasladando, rotando y reflejando en el plano Euclidiano, para llegar en 1° Medio a realizar una tarea similar, ahora en el plano Cartesiano. Esto último trae consigo una conexión inherente con el eje de Álgebra, a partir del uso de fórmulas.

Coherencia longitudinal: Antes de la **composición de tras**formaciones isométricas, los estudiantes han estudiado las transformaciones en el plano y la composición de funciones.

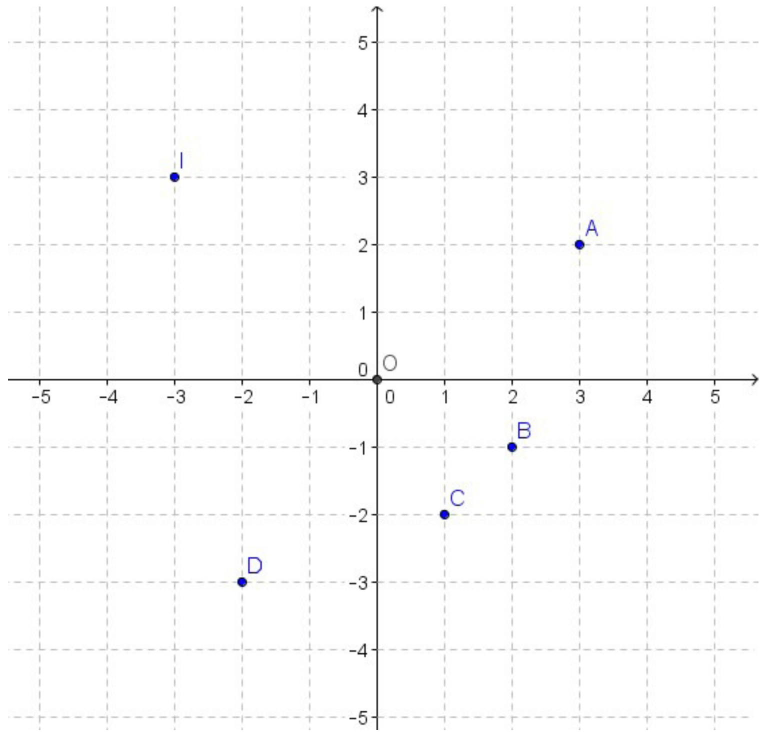
En esta situación, el propósito es analizar en detalle la composición de las transformaciones isométricas, desde los ejemplos concretos hasta la formulación de modelos que permitan generalizar los hallazgos y poder caracterizar la composición, agregando las restricciones propias de la composición de funciones, relacionadas con el Dominio y el Recorrido.

Se recomienda, antes de profundizar en el estudio de la composición de isometrías, analizar en detalle cuáles son los conocimientos previos de los/las estudiantes y cuál es el nivel de conocimiento de todos ellos, esto determinará que las actividades más adelante propuestas sean desarrolladas sin inconvenientes.

Si el/la profesor/a lo estima puede analizar de forma separada los conocimientos previos relacionados con la geometría y los conocimientos previos de álgebra, sin embargo, en concordancia con lo que se propondrá más adelante, a continuación se muestra una única actividad para la activación de los conocimientos geométricos y algebraicos, en forma conjunta.

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

- En la figura siguiente se muestra un plano cartesiano, un punto fijo O, un punto I y cuatro puntos A, B, C y D que pueden ser transformados isométricamente.



- Definiendo un vector según se desee, se pueden trasladar los puntos A, B, C y D por el plano.
- El punto O es fijo y está ubicado en el punto $(0,0)$, toda rotación que se haga en este plano debe tener al punto O como centro de rotación.
- Los ángulos para realizar las rotaciones pueden ser positivos o negativos, se sugieren los ángulos de medidas 90°, 180° y 270°.

Habilidades de resolución de problemas

- Para reflejar los puntos solo se puede hacer uso de los ejes cartesianos.
- La tarea es aplicar tres transformaciones isométricas distintas a cualquiera de los puntos A, B, C o D y llegar exactamente al punto I, en otras palabras, conseguir que el punto I sea la imagen de uno de los puntos mediante tres transformaciones isométricas sucesivas y distintas.

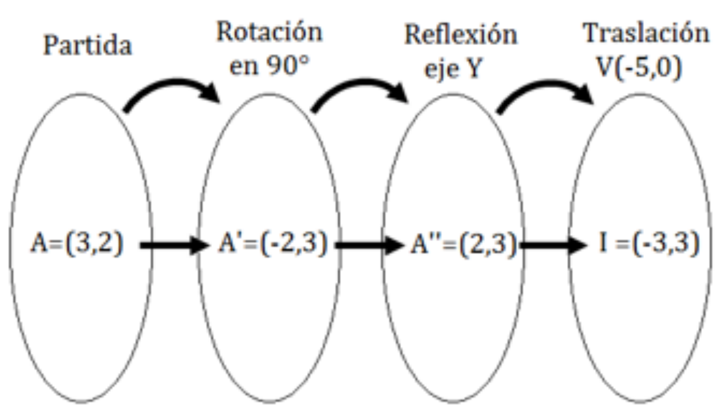
Una posible respuesta a la tarea recién planteada es:

- Trasladar el punto A según el vector $\vec{v}\ (0,1)$. Se obtiene el punto imagen A' de coordenadas $(3,3)$.
- Rotar el punto A' respecto al punto O en $180°$. Se obtiene el punto imagen A'' de coordenadas $(-3,-3)$.
- Reflejar el punto A'' según el eje X, se obtiene A''' de vértices $(-3,3)$ el que coincide de forma exacta con el punto I.

Realizada la tarea, los/las estudiantes pueden responder algunas o todas las preguntas siguientes, lo que dependerá de sus propias necesidades:

- Si se aplican los mismos movimientos a los otros tres puntos ¿cuáles son sus imágenes, respectivamente?
- ¿Cómo se expresan algebraicamente las transformaciones isométricas realizadas a cada punto?
- ¿Cómo es la figura que se obtiene como imagen de A, B, C y D luego de los tres movimientos isométricos aplicados?
- ¿Bajo qué condiciones se puede afirmar que una transformación isométrica es una función? ¿Cuál sería la regla de trasformación de los puntos?
- ¿Cuáles serían las variables en este caso?
- Considera que la función f corresponde a la traslación de A en A'. A su vez, sea h la función que traslada al punto A' al punto A''. Sea k la función que traslada al punto A'' al punto I ¿Hay alguna función que permita mover el punto A al punto I de una sola vez?
- ¿Cómo se completa el diagrama que muestra la sucesión de los tres movimientos realizados?

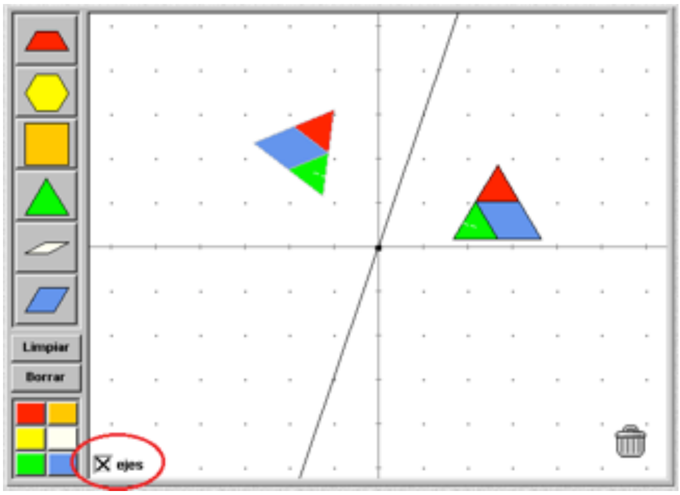
Conexiones: La composición de transformaciones isométricas se puede relacionar con la composición de funciones.



- ¿Cuál es el conjunto de partida y cuál es el conjunto de llegada en cada transformación isométrica realizada?

Si el/la profesor/a estima que el/la estudiante requiere aún más trabajo con los conceptos previos, es recomendable que se apoye de algunos recursos digitales interactivos que permiten, más allá de la práctica, tener representaciones visuales manipulables:

- Transformaciones – Reflexión:



http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_206_g_1_t_3.html

En este recurso se puede seleccionar la opción ejes y con ello se puede transitar desde una mirada Euclidiana a una Cartesiana de forma sencilla. Otros recursos de igual índole para la traslación y la rotación se encuentran en: http://nlvm.usu.edu/es/nav/topic_t_3.html

- Dibujando líneas:

https://phet.colorado.edu/es/simulation/graphing-lines

Al elegir la opción descargar, se puede utilizar el recurso que presenta cuatro opciones distintas, las dos primeras son de utilidad en este caso, ya que la primera permite explorar el concepto de pendiente y la segunda encontrar la ecuación de la recta, que puede de inmediato ser analizada desde el punto de vista de las funciones, dándole un contexto a las rectas dibujadas.

Con estas preguntas se espera que el/la estudiante realice múltiples representaciones de los contenidos, desde la gráfica a las representaciones algebraicas, con el fin de utilizarlas de forma flexible y comprendiendo las equivalencias entre ellas.

Como recurso adicional, y debido a la importancia de que los/las estudiantes comprendan las transformaciones isométricas antes de adentrarse en las composiciones de ellas, se sugieren algunos videos que permiten visualizar construcciones en el plano, con distintas estrategias:

- Traslación, rotación y simetría, usando GeoGebra.
  https://www.youtube.com/watch?v=7wN9135qxtM

- Movimientos en el plano, explicación completa y ejemplos cotidianos.
  https://www.youtube.com/watch?v=APA2uWgC550

- Traslaciones de polígono en el plano cartesiano.
  https://es.khanacademy.org/math/geometry/transformations/exploring-rigid-transformations/v/translations-of-polygons

Una vez activados los conocimientos previos, se puede dar paso al estudio de la composición de transformaciones isométricas, para ello es recomendable iniciar con situaciones sencillas, con pocos vértices a mover, pues lo que se realice con un vértice debe ser extrapolado a los demás vértices de la figura.

Finalmente, se destaca que al proceder al estudio de la composición de transformaciones isométricas, el/la profesor/a debe tener presente que una de las principales dificultades con las que el/la estudiante se podría enfrentar, es no considerar los elementos que definen cada transformación isométrica por lo que no las distinguen a cabalidad, además, no siempre logran reflejar una figura solo porque no pueden graficar correctamente rectas en el plano, las que vienen expresadas de forma algebraica. Es posible que aún no comprendan adecuadamente el concepto de función y/o no comprenden que la composición de funciones es también una función.

Parte 2: Análisis de la situación

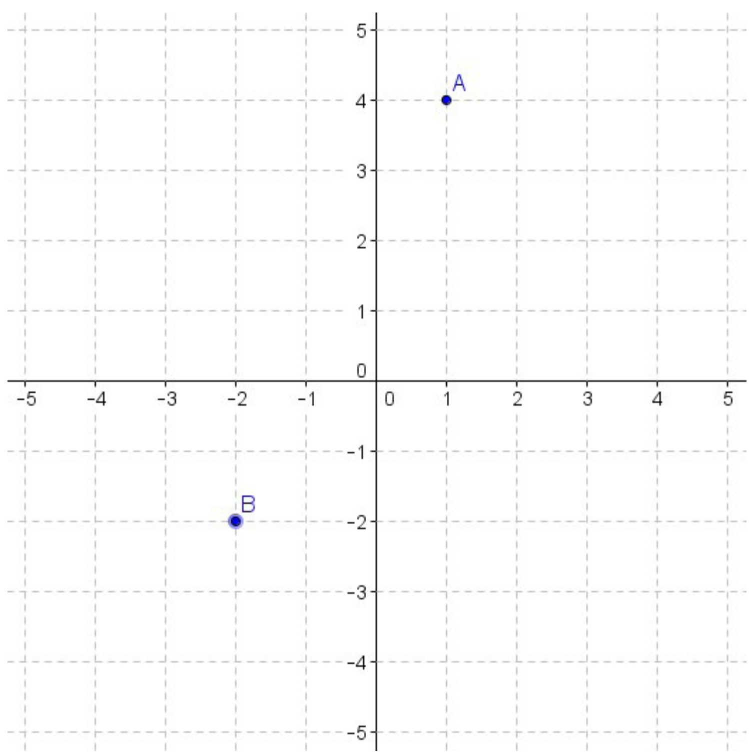
Teniendo presente todo lo que el/la estudiante ya conoce sobre las transformaciones isométricas y sobre las funciones y la composición de ellas. Es pertinente comenzar con el estudio de la composición de las transformaciones isométricas.

Inicialmente, el/la estudiante debe descubrir que la composición de dos transformaciones isométricas iguales corresponde a otra transformación, también isométrica. Para ello se sugiere comenzar estudiando la composición de a dos funciones y de un mismo tipo. Por ejemplo, componer dos traslaciones con distintos vector, o dos rotaciones con igual centro pero con distinto ángulo, entre otros.

Se recomienda que cada composición venga acompañada del lenguaje algebraico formal, pero también de la representación gráfica en el plano cartesiano y con diagramas y, dentro de lo posible con un desafío inicial que pueda darle sentido a los movimientos realizados.

Composición de traslaciones

En la figura se muestra el punto A que corresponde a la posición de un Pirata y el punto B corresponde al tesoro que debe encontrar.



Múltiples perspectivas: Las transformaciones isométricas pueden ser representadas gráficamente en el plano cartesiano o usando lenguaje algebraico que dé cuenta del tipo de movimiento hecho y de los elementos que lo definen.

GUION DIDÁCTICO N° 2

- Para llegar solo cuenta con un papel que tiene escrito lo siguiente:

$$T_1(-3,-4)$$
$$T_2(0,-2)$$

- ¿El pirata llega a su destino siguiendo las pistas dadas?
- El pirata desea hacer el camino más corto para llegar al tesoro y luego dejarlo en un papel como el que él tenía. ¿Qué pista debería escribir?

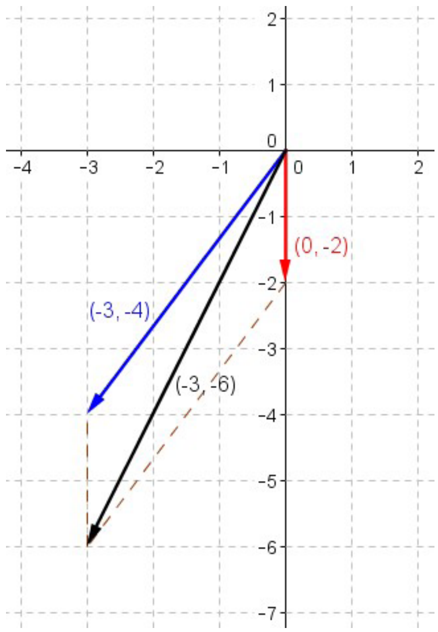
Con situaciones de este tipo, que pueden adecuarse para ser más o menos complejas, el/la profesor/a puede introducir el concepto de composición. En este caso, es posible notar que la nueva traslación, por el camino más corto, será la resultante de componer dos traslaciones. De esta forma, al realizar dos traslaciones sucesivas se obtiene como resultante una nueva traslación. Simbólicamente esto puede ser escrito como:

$$T_1 \ o \ T_2 = T_3$$

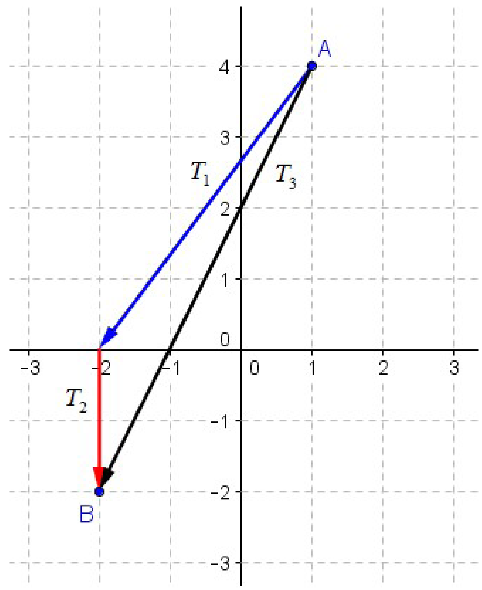
Además, se cumple que la compuesta es fácilmente obtenida a partir de la suma de las componentes de los vectores de T_1 y T_2. Simbólicamente:

$$T_1(x_1, y_1) \ o \ T_2(x_2, y_2) = T_3(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Gráficamente, esto queda claro al realizar la suma de vectores. Usando el ejemplo inicial se tiene:



Esta misma conclusión es posible realizarla -o corroborarla- desde el contexto del problema, siendo aún más simple comprender el resultado de la composición. Para ello se puede primero trasladar dos veces el punto A según T_1 y T_2, y luego trasladarlo una única vez, según T_3.



Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

De forma natural, en problemas de este tipo se puede estudiar la propiedad conmutativa, para ello se puede pedir a los/las estudiantes que realicen la composición $T_2 \ o \ T_1$ y que el resultado lo comparen con el obtenido en $T_1 \ o \ T_2$. Notarán que en ambos casos los resultados son iguales.

El/la profesor/a puede ir más allá y ahora pedir a los/las estudiantes que generalicen un resultado para la composición de dos o más traslaciones, cada una según un vector dado. De este modo notarán que la compuesta de traslaciones es siempre una traslación, cuyo vector se obtiene sumando las coordenadas de los otros vectores.

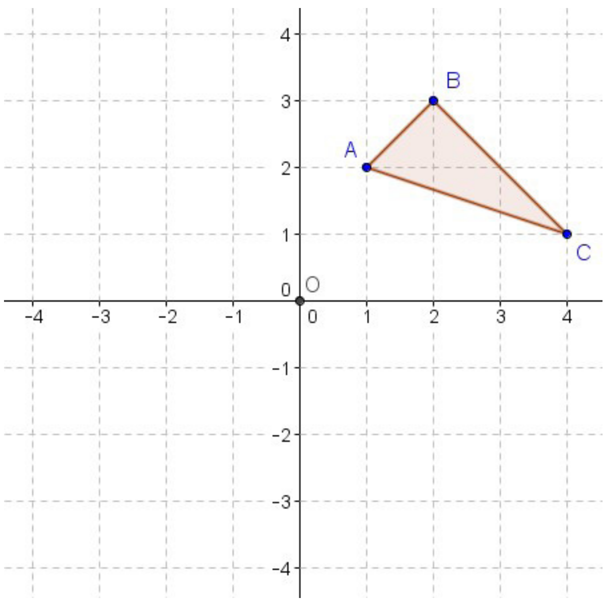
Ideas Básicas: La composición de traslaciones es equivalente a una traslación.

De este mismo modo se recomienda realizar los análisis correspondientes a la composición de rotaciones y a la composición de reflexiones.

Composición de rotaciones

En este caso se recomienda usar el mismo centro de rotación para ambas rotaciones y solo variar las medidas angulares. En cuanto al contexto, el/la profesor/a puede usar el mismo del tesoro y el pirata o idear alguno que le parezca más desafiante para sus estudiantes. En esta propuesta, se agrega ahora el trabajo con polígonos, con el fin de avanzar en la interpretación de las composiciones y de evitar que los/las estudiantes generalicen que cualquier composición de transformaciones isométricas es equivalente a una traslación, lo que se tiende a creer al hacer movimientos con solo un punto.

- En la figura, se desea llegar desde mover el triángulo ΔABC al cuarto cuadrante, haciendo solo rotaciones en torno al punto O de coordenadas $(0,0)$. Estas rotaciones deben ser en sentido antihorario y con medidas 90º y $180º$.

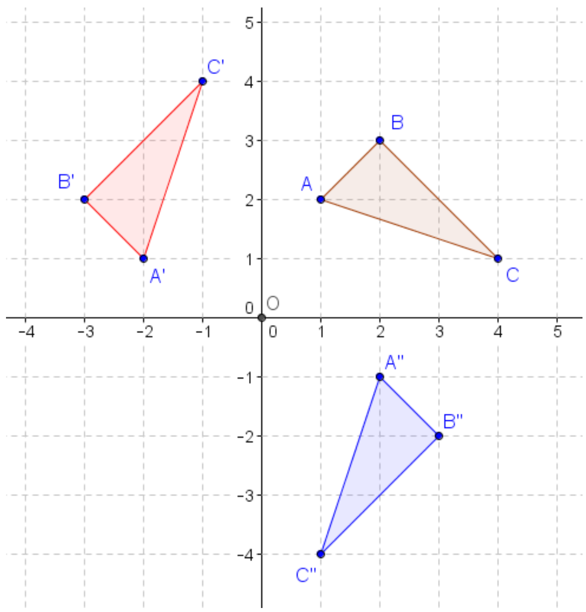


- ¿Hay una sola rotación que permita, en el mismo sentido antihorario, llegar desde A hasta B? ¿Cómo se caracteriza?

Con este problema, y otros similares, se espera que los/las estudiantes noten que la aplicación sucesiva de dos rotaciones, con un mismo centro, da como resultado otra rotación, que conserva el centro de la rotación y cuyo ángulo de giro es la suma de los dos ángulos iniciales. Simbólicamente esto puede escribirse como:

$$R_1(O,\alpha)\ o\ R_2(O,\beta) = R_3(O,\alpha+\beta)$$

Es importante complementar la notación matemática con las representaciones gráficas, con ejemplos concretos, de modo de relacionar siempre las representaciones y transitar libremente por ellas:



Cuando la composición de rotaciones se lleva a cabo y los ángulos de cada una de ellas suman más de 360° se puede observar cómo la figura da un giro completo sobre el centro de rotación. Por ejemplo, si se lleva a cabo la composición siguiente, donde O es el centro del plano cartesiano:

$$R_1(O,180^\circ)\ o\ R_2(O,270^\circ) = R_3(O,450^\circ)$$

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

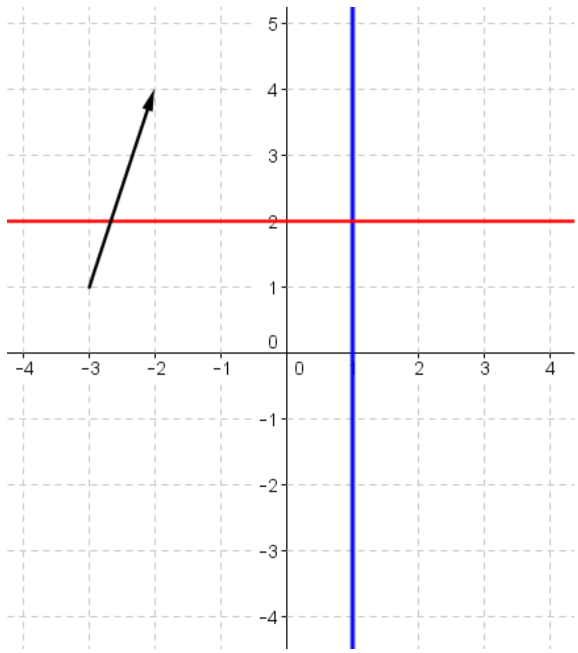
A su vez, se debe tener presente que un giro completo equivale a 360°, por lo que 450° puede ser considerado como $360^\circ + 90^\circ$. Es decir, la composición de R_1 y R_2 es equivalente a una rotación en 90°.

Para componer tres o más rotaciones, se puede proceder usando las mismas representaciones anteriores, con el fin de descubrir que la composición de rotaciones es equivalente a una rotación, cuando el centro de rotación en todos los casos es el mismo, y la medida del ángulo de giro será la resultante de la suma de las medidas de los ángulos de cada rotación por separado.

Ideas Básicas: La composición de rotaciones con el mismo centro es equivalente a una rotación.

Composición de reflexiones

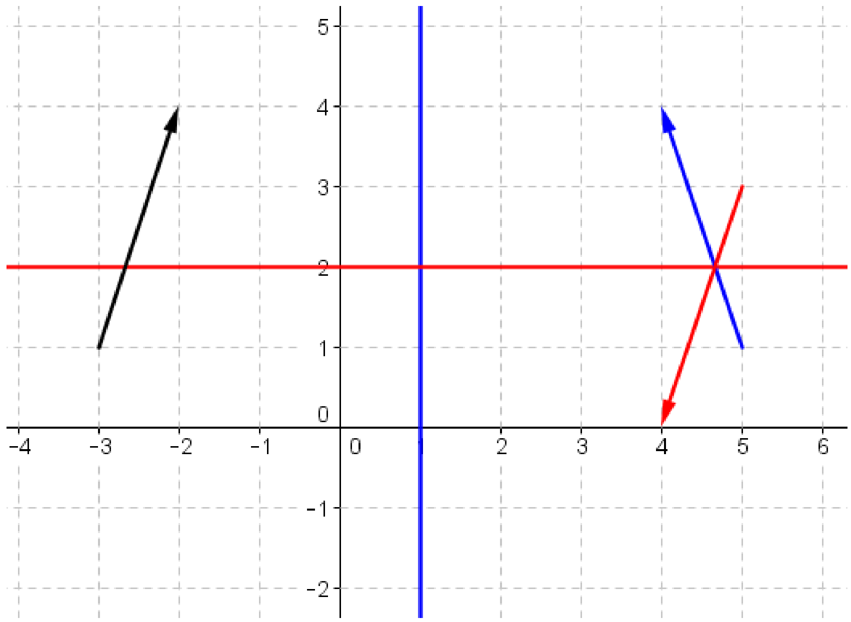
En la figura se muestra una flecha y dos rectas, como ejes de simetría. Se espera que al aplicar las reflexiones sea posible dejar la flecha "apuntando hacia el mismo lado" que en la figura original. ¿Es posible lograrlo aplicando las dos reflexiones?



- ¿Se puede dibujar una recta que permita reflejar la flecha y hacerla coincidir con la resultante de las dos reflexiones anteriores?

Ante esta pregunta se espera que los/las estudiantes analicen si la composición de reflexiones es también una reflexión. Primeramente se recomienda que los/las estudiantes busquen la recta adecuada a partir de la gráfica en el plano cartesiano, pero si se presentan dificultades, es preferible recurrir de inmediato al doblado de papel, y luego volver a esta representación.

En este caso, al aplicar en forma sucesiva las reflexiones, la flecha queda como se muestra en la figura, en la resultante roja:



Habilidades de investigación

En este ejemplo, los/las estudiantes pueden deducir de forma simple que no hay una recta que permita hacer la reflexión desde la flecha negra a la roja. Ahora bien, si solo fuese un punto si sería posible encontrar el eje de simetría. Es importante entonces que los/las estudiantes analicen varios casos antes de generalizar, más aún, se puede pedir a los/las estudiantes extraer conclusiones parciales según si se refleja un punto o una figura. Además, las conclusiones variarán según las posiciones relativas de los ejes de reflexión usados. En este caso se puede estudiar las opciones para:

- dos rectas paralelas,
- dos rectas perpendiculares
- o dos rectas secantes (no perpendiculares)

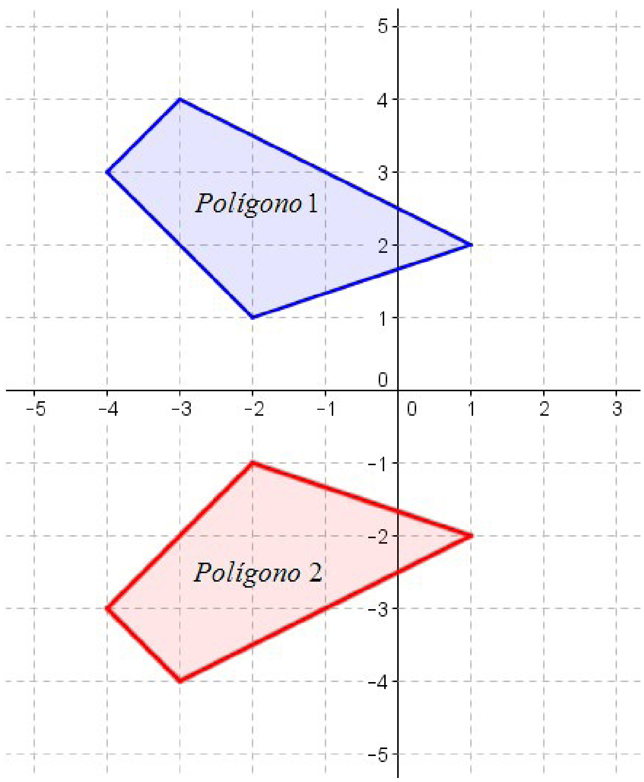
Ideas Básicas: La composición de reflexiones para una figura, no es necesariamente equivalente a una reflexión.

Un caso particular en las reflexiones es la composición de dos reflexiones consecutivas a un mismo polígono, el resultado será equivalente a aplicar una traslación a dicho polígono, y el módulo del vector se puede determinar a partir de la distancia entre los ejes de reflexión.

En la composición de reflexiones se da un caso interesante de estudio, cuando se realiza la composición sobre la misma recta. Mediante un ejemplo se puede observar la regularidad que la hace interesante de estudiar:

Habilidades de resolución de problemas

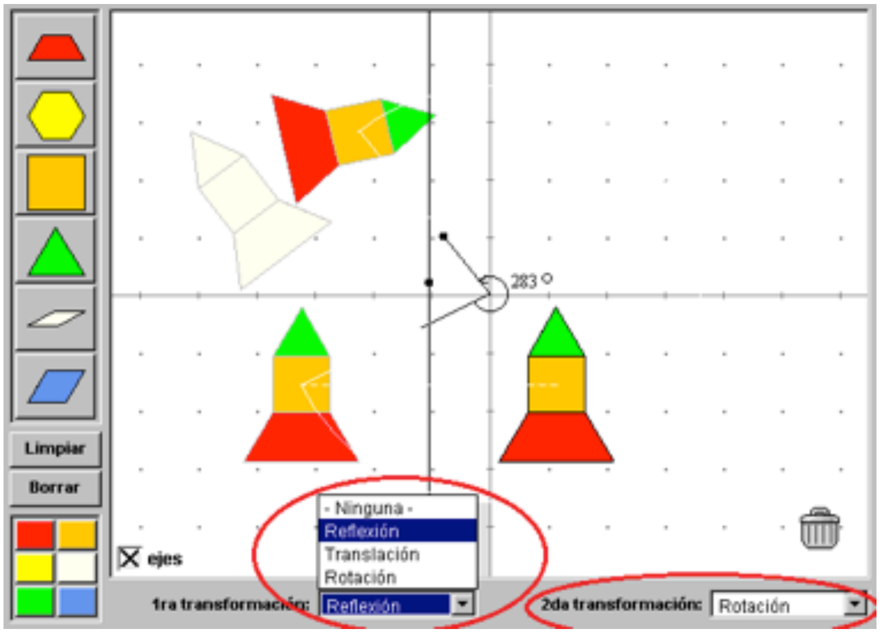
Por ejemplo, si el $Polígono\ 1$ de la figura se refleja respecto del eje X se obtiene el $Polígono\ 2$. Si el $Polígono\ 2$ se refleja respecto del eje X nuevamente se obtendrá como resultando el $Polígono\ 1$. Si se vuelve a reflejar el $Polígono\ 1$, se obtendrá el $Polígono\ 2$, así sucesivamente.



En términos generales se puede afirmar que el resultado de la composición de reflexiones del $Polígono\ 1$ es el $Polígono\ 2$ solo si la composición se realiza una cantidad impar de veces. En caso contrario, se obtendrá el $Polígono\ 1$.

Para visualizar las composiciones de las transformaciones isométricas es recomendable apoyarse de recursos digitales, los que permiten una pronta visualización de los resultados, pudiendo centrar la tarea en la interpretación y no en los cálculos. A continuación se listan algunos recursos digitales de simple manipulación, pertinentes al nivel de los/las estudiantes:

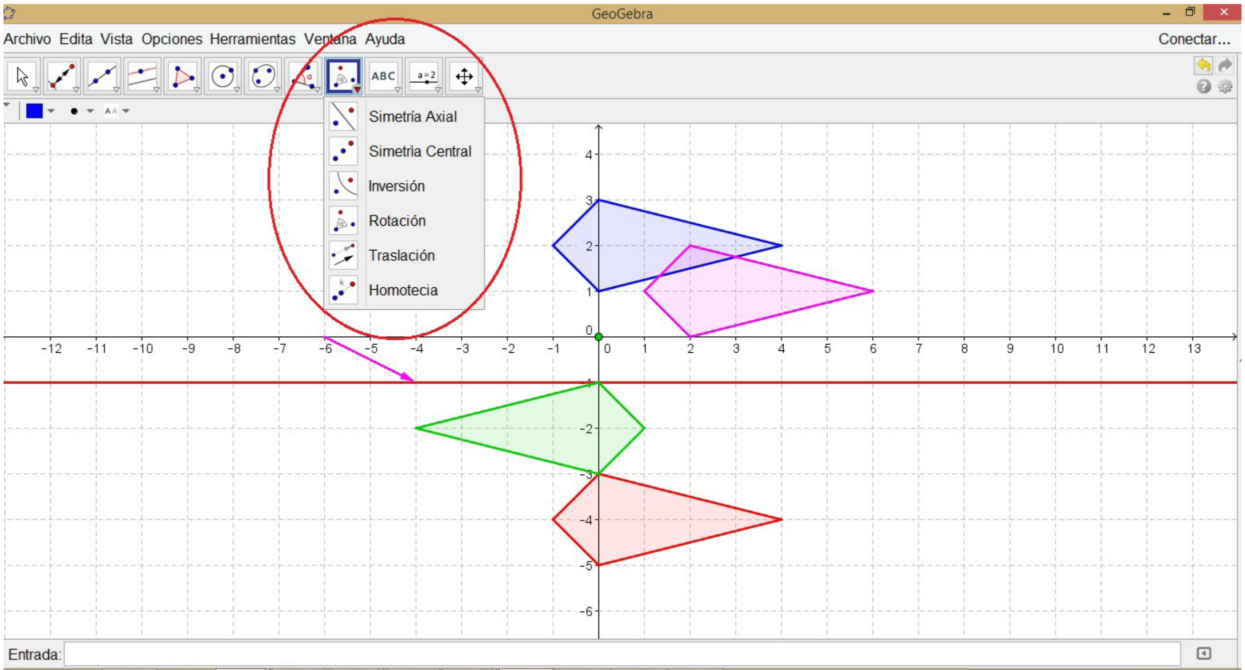
- Transformaciones – Composición:



http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_294_g_2_t_3.html

Este recurso permite combinar dos transformaciones isométricas, componiendo tales transformaciones de forma libre. Esto aporta a que los/las estudiantes puedan comprender que en algunos casos la composición de dos transformaciones isométricas da como resultado otra transformación isométrica conocida.

- GeoGebra:



Descarga: http://www.geogebra.org/

Este programa matemático permite trabajar todos los aspectos geométricos relacionados con las transformaciones isométricas. En particular, usando la opción remarcada en la figura, se pueden realizar de forma automática las transformaciones requeridas, de modo de visualizar rápidamente composiciones deseadas.

Se destaca que un buen aprendizaje será alcanzado cuando los/las estudiantes puedan hacer uso de las distintas representaciones que caracterizan a las composiciones de las transformaciones isométricas, de forma libre y según les parezca dependiendo de las condiciones del problema.

Parte 3: Profundización

Habilidades de análisis, interpretación y síntesis

En estos momentos, se hace necesario definir formalmente los conceptos estudiados a partir de las distintas representaciones utilizadas. Es por ello que se propone una definición pertinente al nivel escolar de los/las estudiantes[49]:

Conexiones: La composición de una misma transformación isométrica aplicada a ciertos polígonos, puede permitir teselar un plano.

*Una **Composición de isometrías** o transformaciones isométricas es un proceso que implica aplicar dos o más isometrías sucesivas a una figura.*

Composición de traslaciones: *Cuando una figura es sometida a más de una traslación según distintos vectores, esto se denomina composición de traslaciones. El resultado de esta composición es una nueva traslación, cuyo vector corresponde a la suma de los vectores previos.*

Composición de rotaciones: *Suponga que se tiene dos rotaciones de centro O y ángulos α y β. Al componer ambas rotaciones, el resultado es otra rotación con el mismo centro y ángulo $\alpha+\beta$.*

Composición de reflexiones: *Para el caso de la composición de dos reflexiones es posible distinguir tres casos, respecto de los ejes de simetría:*

a. Cuando los ejes son paralelos: El resultado de la composición es una traslación cuyo vector de traslación es perpendicular a los ejes y longitud igual al doble de la distancia entre los ejes.
b. En el caso de que los ejes sean perpendiculares, el resultado de la composición es una simetría central respecto del punto de intersección de los ejes, o bien, es una rotación en $180°$ con respecto al punto de intersección de los ejes.
c. Si los ejes son concurrentes y forman entre ellos un ángulo α y se intersectan en O, el resultado de la composición es una rotación de centro O y ángulo de rotación 2α.

Se recomienda que se planteen los casos de la composición de reflexiones para más de dos ejes, y se lleguen desde casos particulares a generalizaciones. Lo relevante es notar que no hay una regla general, como en el caso de las composiciones de traslaciones o rotaciones.

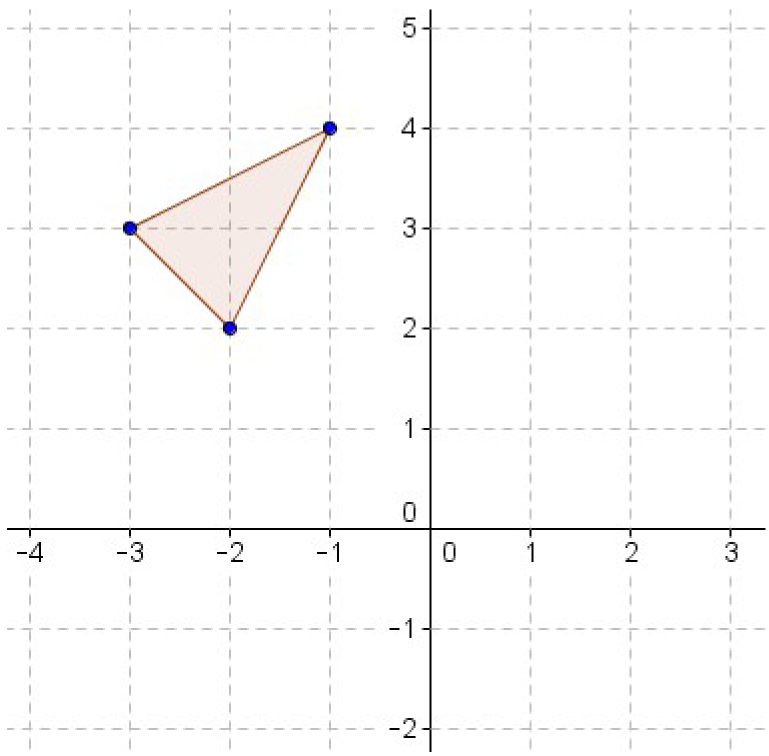
49. Geometría.cl. 2008. Material del Profesor. Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.

Habilidades comunicativas

Ahora, es esperable que los/las estudiantes puedan poner en práctica lo aprendido de modo de corregir posibles errores. Además, se recomienda que en todo momento puedan exponer al curso sus hallazgos, con el fin de desarrollar las habilidades comunicativas, producto del aprendizaje colaborativo.

Algunos ejemplos que pueden aportar a la práctica y la profundización son:

1. Aplica al polígono de la figura las siguientes composiciones de transformaciones isométricas:



a. $T(-2,3)\ o\ R(O,180°)$

b. $S_Y\ o\ T(-1,-2)\ o\ S_X$

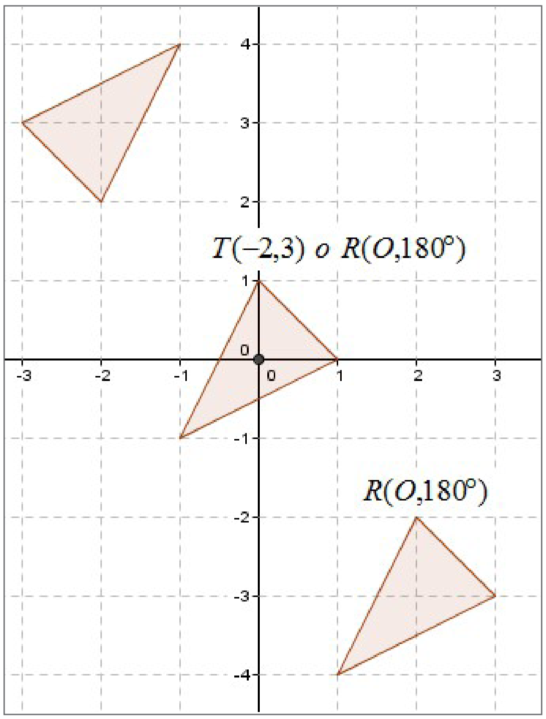
c. Aplica al polígono la composición de 2 o 3 transformaciones isométricas y obtén la misma imagen que en (a).

d. ¿En qué casos la composición es conmutativa?

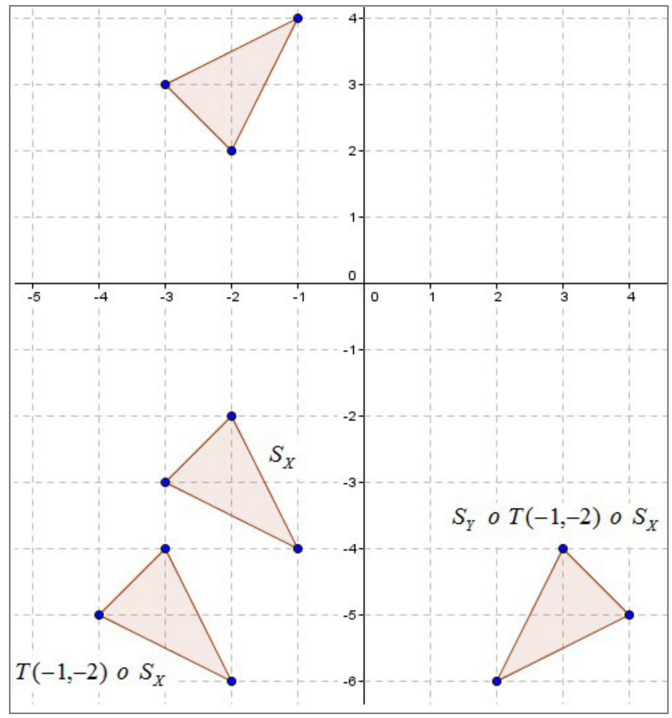
e. ¿Existe una transformación isométrica (no compuesta) que permita llegar de la figura original a la resultante luego de aplicarle la composición (a) o la composición (b)?

Las respuestas a las tareas anteriores son:

a.



b.



c. Se puede aplicar al polígono la composición

$$T(3,-2)\ o\ R(O,270°)\ o\ Sx$$

Se puede probar en cada caso, invirtiendo el orden de la composición aplicada.

d. En el caso de (a) de debería aplicar la composición $R(O,180°)\ o\ T(-2,3)$, la que es no equivalente a la composición $T(-2,3)\ o\ R(O,180°)$

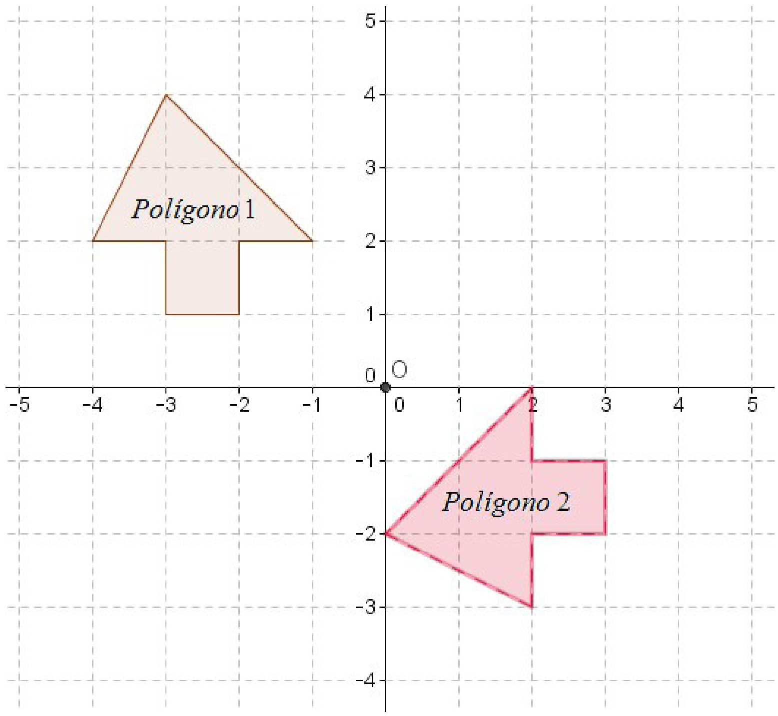
Para (b) tampoco se cumple la conmutatividad. Se destaca en este caso que también es posible analizar la asociatividad de la composición ya que son tres las transformaciones involucradas.

En el caso de (a) visualmente es posible determinar la transformación isométrica equivalente a la composición dada, en este caso es una rotación de centro $(-1;\ 1{,}5)$ y ángulo de $180°$.

e. En el caso de (b) también se puede notar que una rotación es equivalente a la composición dada, en este caso tiene centro $(0{,}5;\ -1)$ y ángulo de $180°$

2. Encuentra la traslación T, tal que al componerla con $R(0,90º)$ y aplicarla al *Polígono* 1 se obtiene como imagen el *Polígono* 2.

$$(T \text{ o } R)(\textit{Polígono } 1) = \textit{Polígono } 2$$



La respuesta a la situación recién planteada es la traslación de vector (4,1), en definitiva, $(T(4,1) \text{ o } R(0,90º))(\textit{Polígono } 1) = \textit{Polígono } 2$

En estas actividades propuestas, lo importante es poner en juego todo lo aprendido sobre la composición de transformaciones isométricas y que usen las representaciones estudiadas para corroborar los resultados.

Se recomienda que el/la profesor/a pueda concluir las actividades propuestas pidiendo a los/las estudiantes que realicen una actividad de síntesis que consista en explicar con sus propias palabras lo aprendido. Además de sintetizar los conceptos claves, se les puede incentivar a comunicar de forma libre cuánto han aprendido creando un cuadernillo en el que expongan su aprendizaje, tal que al leerlo, cualquier persona podría comprender lo mismo que él sobre la composición de transformaciones isométricas.

Esta actividad podría, sin dudas, convertirse en una poderosa síntesis que pone en acción estrategias de meta conocimiento y meta cognición. A la vez, puede servir como herramienta de evaluación.

GUÍA ESTUDIANTE

Composición de Transformaciones Isométricas

GUÍA 1

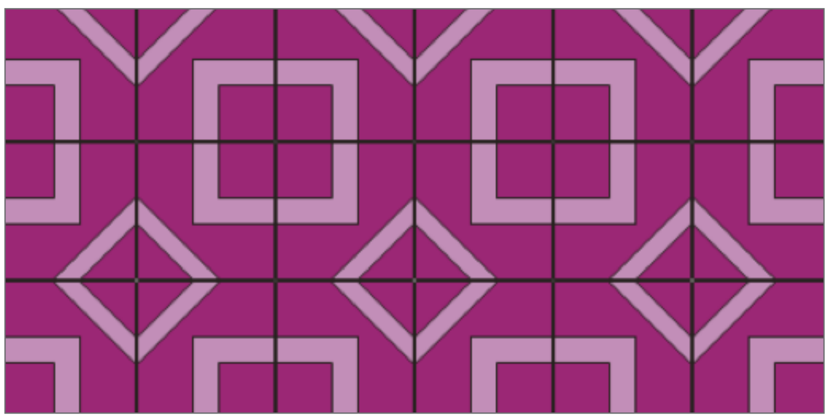
Objetivo:

Estudiar la composición de transformaciones isométricas en el plano y caracterizarlas según sus propiedades.

Ten presente que: Puedes desarrollar las actividades en el orden que más te ayude a aprender, pero no dejes de contestar las preguntas que tienen un ícono de un lápiz, con ellas podrás evaluarte y saber si estás logrando las metas de la clase.

Preguntas previas

- En una ventana se decidió pegar láminas adhesivas de un mismo diseño para evitar que se viera desde afuera. El diseño que resultó se muestra en la figura:



  - ¿Qué movimiento isométrico se hizo para lograr este diseño? Argumenta.

  - Si las láminas se numeran desde el 1 en forma ascendente y hacia la derecha ¿Puede obtenerse la lámina 3 a partir de la lámina 1, realizando un único movimiento isométrico? ¿Cuál sería ese movimiento?

GUÍA Nº 1 / ESTUDIANTE

- Usando el diseño de las láminas adhesivas, haz tu propio diseño aplicando movimientos sucesivos, de un solo tipo.

Antes responde ¿cuántos movimientos isométricos podrás aplicar? ¿Cuáles son sus nombres y sus características?.

- Diseño 1. Usando solo ....

- Diseño 2. Usando solo ....

- Diseño 3. Usando solo ....

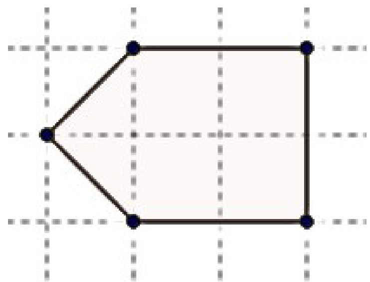
Ahora, haz un diseño en el que apliques dos movimientos distintos de forma sucesiva:

- ¿Pudiste teselar el plano con los movimientos hechos? Describe qué ocurrió.

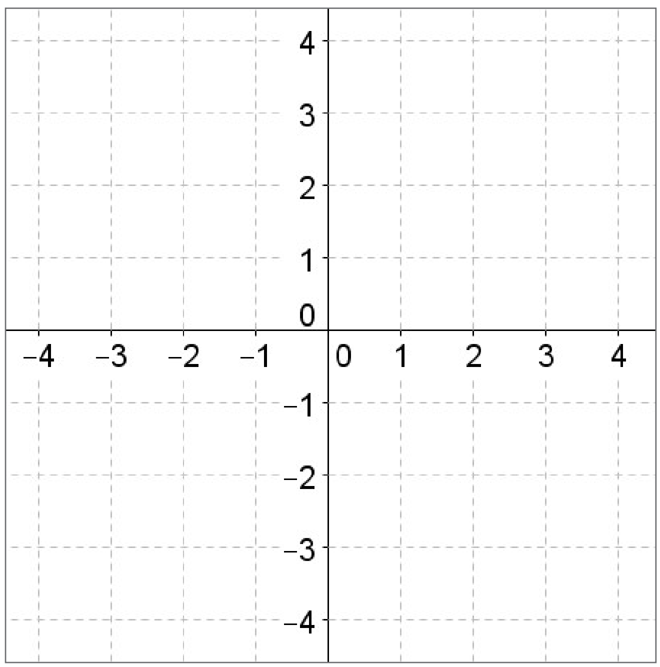
Nota: si no recuerdas la definición de teselar, consúltala a tu profesor o profesora.

Composición de traslaciones

- Observa el polígono:



- Ubícalo en el plano cartesiano y luego aplica dos traslaciones sucesivas T_1 y T_2 al polígono según los vectores $\vec{v_1}(2,-1)$ y $\vec{v_2}(-3,4)$. Procura que las figuras no queden fuera del plano.



- Encuentra un vector de traslación $\vec{v_3}$ que permita trasladar el polígono inicial y hacerlo coincidir con la última figura obtenida luego de hacer las dos traslaciones.

- En el plano cartesiano anterior marca ese vector con un color diferente.

Completa la tabla con los movimientos realizados:

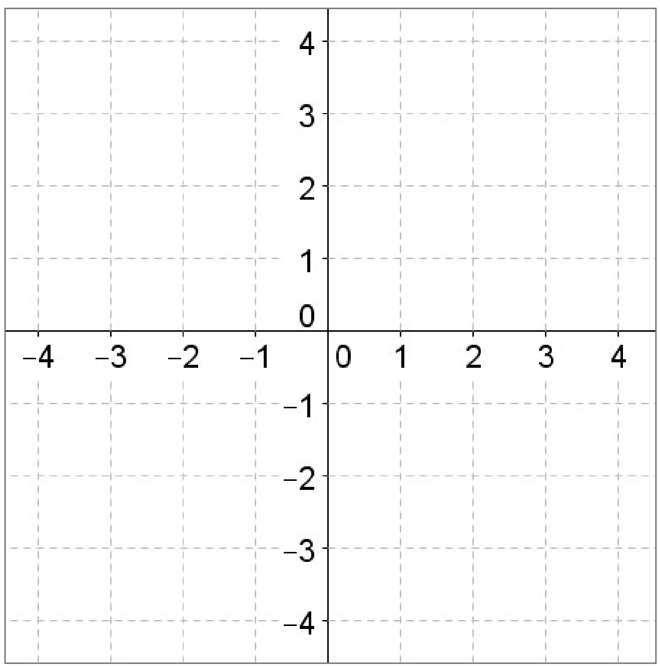
Vértices Polígono inicial	Ingreso per cápita Traslación 1 y Traslación 2	Vértices figura final

- ¿Qué relación hay en entre los vértices de la columna 2 y 3? Descríbela.

- Compara tu conclusión con la de otros/as compañeros/as ¿Qué relación hay?

Cuáles son las características de la traslación T_3 que compone las traslaciones T_1 y T_2?

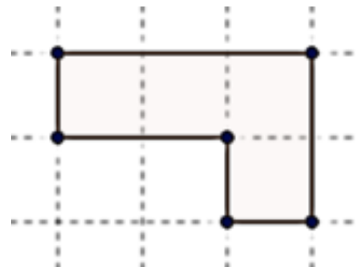
- Aplique ahora las mismas traslaciones pero intercambiando el orden de los vectores.



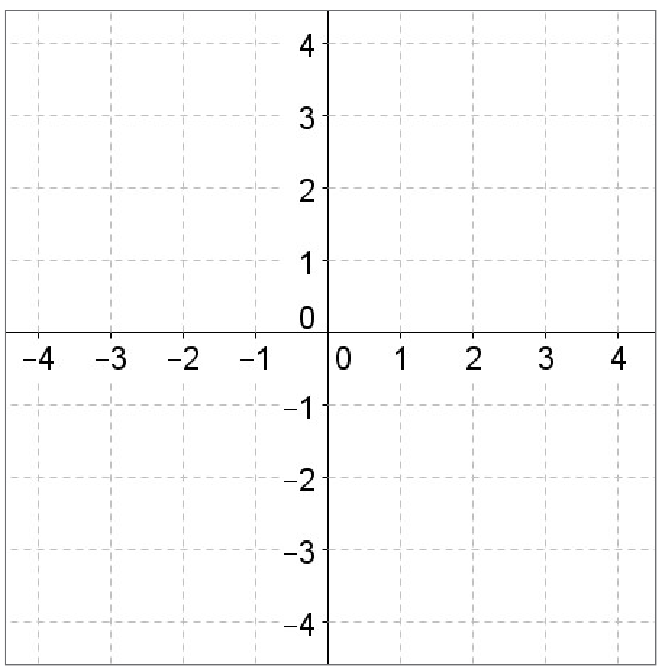
- ¿Qué puedes concluir?

Composición de rotaciones[50]

- Observa la siguiente figura.



- Ubica esta figura sobre el plano cartesiano y rótala en torno al centro $O(0,0)$ con un ángulo de $\alpha= 90º$, luego realiza una rotación a la figura rotada, con un ángulo $\beta= 180º$, sobre el mismo centro .



50. Actividad adaptada de: Matemática Interactiva. Aprender + Creando Soluciones. Centro Comenius. Universidad de Santiago.

- ¿Puedes encontrar un único movimiento isométrico que permita mover la figura original a la figura resultante final? ¿Cuál es y qué características tiene?

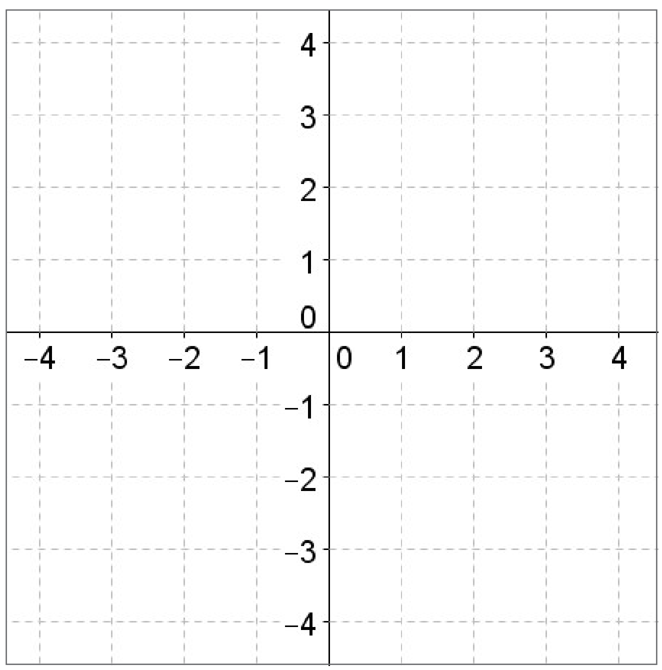
¿Cómo se relacionan los ángulos originales con el ángulo de la rotación resultante?

- Compara tu conclusión con la de otros/as compañeros/as ¿Qué relación hay?

¿Cuáles son las características de la rotación R_3 que compone las rotaciones R_1 y R_2?

- Si compones tres rotaciones en un mismo sentido y la suma de los ángulos correspondientes es 360°, ¿qué movimiento resulta ser el movimiento resultante?

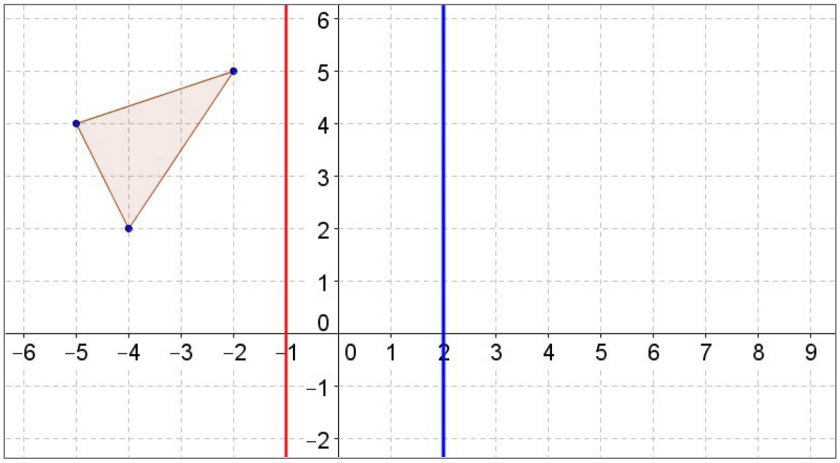
- Aplica ahora las mismas rotaciones del inicio pero intercambiando el orden.



- ¿Qué puedes concluir?

Composición de reflexiones

Observa la figura y las dos rectas paralelas. Refleja la figura según las dos rectas.



- ¿Puedes encontrar un único movimiento isométrico que permita mover la figura original a la figura resultante final? ¿Cuál es y qué características tiene?

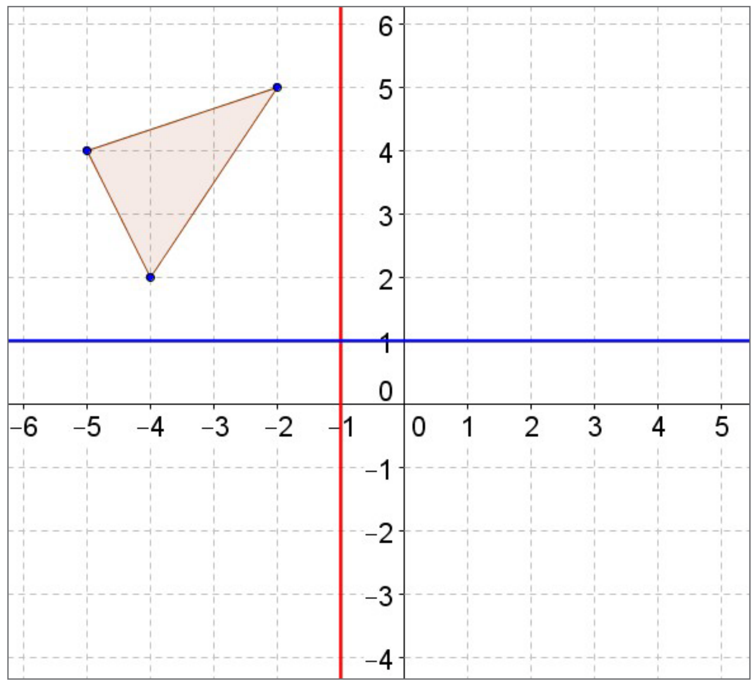
- ¿Qué relación hay entre la magnitud del vector de traslación y la distancia entre los ejes?

- ¿Cuál es la dirección y sentido del vector que traslada la figura original a la posición de la última figura reflejada? Escribe el vector como par ordenado.

¿Cuáles son las características de la traslación T que compone las reflexiones de ejes paralelos S_1 y S_2?

GUÍA Nº 1 / ESTUDIANTE

- Observa ahora la figura y las dos rectas perpendiculares. Refleja la figura según las dos rectas.

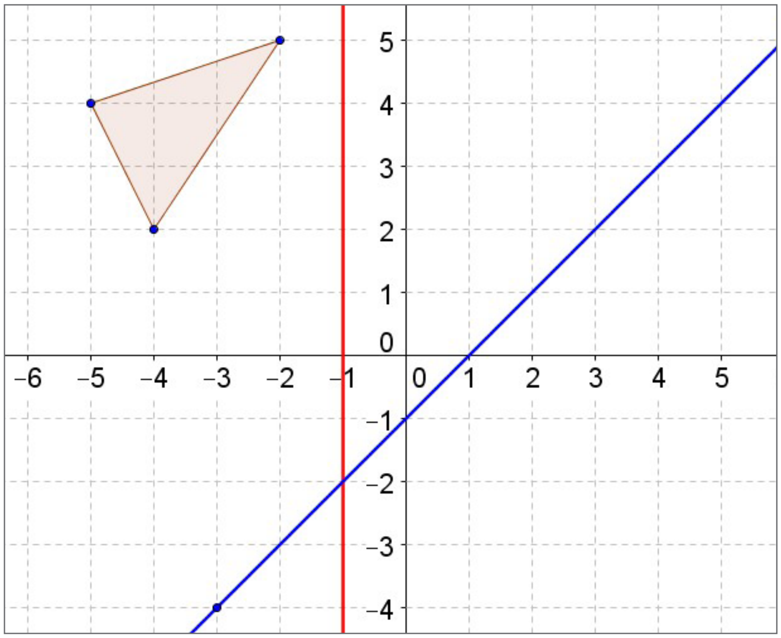


▪ ¿Puedes encontrar un único movimiento isométrico que permita mover la figura original a la figura resultante final? ¿Cuál es y qué características tiene?

- ¿Qué relación hay entre el punto de intersección de los ejes y el movimiento rígido encontrado anteriormente?

¿Cuáles son las características de la rotación R que compone las reflexiones de ejes perpendiculares S_1 y S_2?

Observa la figura y las dos rectas que se intersectan (sin ser perpendiculares). Refleja la figura según las dos rectas.



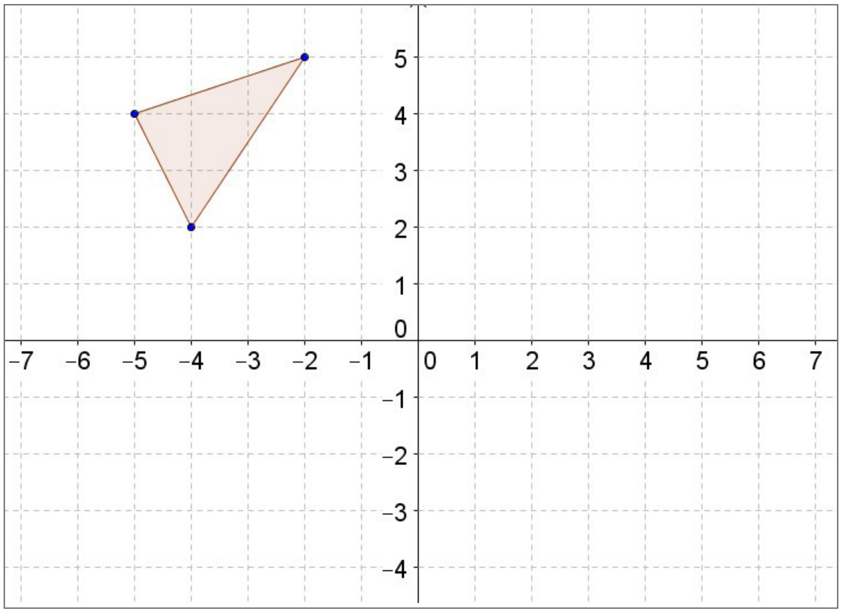
- ¿Puedes encontrar un único movimiento isométrico que permita mover la figura original a la figura resultante final? ¿Cuál es y qué características tiene?

- ¿Qué relación hay entre el punto de intersección de los ejes de simetría y el movimiento rígido encontrado anteriormente?

- ¿Qué relación hay entre la medida del ángulo de intersección de los ejes de simetría y una de las características del movimiento rígido encontrado anteriormente?

¿Cuáles son las características de la rotación R que compone las reflexiones de ejes convergentes S_1 y S_2?

Usando la misma figura, dibuja los pares de rectas paralelas, perpendiculares o convergentes usadas anteriormente. Luego aplica las reflexiones en el orden contrario a cómo lo habías hecho.



- ¿Qué puedes concluir?

Síntesis

Conversa con tu clase y responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué significa componer dos transformaciones isométricas?

- ¿En qué composiciones se cumple la propiedad conmutativa?

Completa la tabla:

Composición	Movimiento resultante	Simbólicamente
$T_1 \; o \; T_2$ Donde: $\vec{v}_1\,(x_1, y_1)$ y $\vec{v}_2\,(x_2, y_2)$		
$R_1 \; o \; R_2$ Donde: $R_1\,(O,\alpha)$ y $R_2\,(O,\beta)$		
$S_1 \; o \; S_2$ Donde: $L_1 \; // \; L_2$		
$S_1 \; o \; S_2$ Donde: $L_1 \perp L_2$		
$S_1 \; o \; S_2$ Donde: $L_1 \cap L_2 = \{P\}$		

GUÍA Nº 1 / ESTUDIANTE

Evaluando mi proceso de aprendizaje:

- Revisa tu desempeño en la siguiente evaluación: primero marca en los espacios que corresponda en la tabla y luego responde a las preguntas.

  - Instrucción: En una escala de 1 a 5, califica de acuerdo al nivel de logro.

    1: No necesité hacer esta actividad

    2: No entendí esta actividad

    3: Aprendizaje nivel bajo

    4: Aprendizaje nivel medio

    5: Aprendizaje nivel avanzado

Aspecto a evaluar	1	2	3	4	5
Realizar transformaciones isométricas de polígonos usando el plano cartesiano.					
Realizar transformaciones isométricas de polígonos usando notación simbólica.					
Identificar las relaciones entre la composición de dos movimientos isométricos del mismo tipo.					
Analizar la propiedad conmutativa en las composiciones de transformaciones isométricas.					

- ¿Cuál es la mejor forma o material que te ayudó a comprender los conceptos trabajados?

- Otros aspectos de tu aprendizaje que quisieras resaltar. Descríbelos.

Bibliografía

Alsina, A. y Planas N. (2008). *Matemática Inclusiva: Propuestas para una educación matemática accesible*. Narcea Ediciones. España.

Araya, R. y Dartnell, P. (2008). *Saber Pedagógico y Conocimiento de la Disciplina Matemática en Profesores de Educación General Básica*. Proyecto FONIDE Nº 212 2006.

Ball, D. L., Hill, H.C, y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? American Educator, 29(3), 14-46.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

CAST (2011). Universal Design for Learning Guidelines version 2.0. Wakefield, MA: Author. Traducción al español version 2.0. (2013)

Chandra, B. (2012). Mathematics as an im/pure knowledge system: symbiosis, (w)holism and synergy in mathematics education. *International Journal of Science and Mathematics Education* (2013) 11: 65Y87

Espinoza, A., y Taut, S. (2014). El rol del género en las interacciones pedagógicas de aulas de matemática chilenas: Un análisis de evidencia audiovisual. Actas Tercer Congreso Interdisciplinario de Investigación en Educación. Santiago de Chile. Recuperado el 01/09/14 de: www.ciie2014.cl/download.php?file=sesiones/141.pdf

Frome, P., Lasater, B., y Cooney, S. (2005). *Well-qualified teachers and high quality teaching: Are they the same?* Atlanta, GA: Southern Regional Educational Board.

Griffin, C., Liga, M. , Griffin, V. y Bae, J. (2013). Discourse Practices in Inclusive Elementary Mathematics Classrooms. *Learning Disability Quarterly*

Hely, L. y do Santos, H. (2014). Changing perspectives on inclusive mathematics education: Relationships between research and teacher education. *Education as Change, 18:sup1, S121-S136, DOI:10.1080/16823206.2013.877847*

Lipschutz, S. y Schiller, J. (2000). *Introducción a la probabilidad y estadística*. Mac Graw Hill.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. NJ: Lawrence Erlbaum.

Manzi, J., González, R., y Sun, Y. (2011) *La Evaluación Docente en Chile*. Centro de Medición Mide UC. Pontificia Universidad Católica de Chile.

Ministerio de Educación de Chile (2012). Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Media. Recuperado el 09/06/2014 de http://www.cpeip.cl/usuarios/cpeip/File/librosestandaresvale/libromediafinal.pdf

Ministerio de Educación de Chile (2012). Orientaciones e Instrumentos de Evaluación Diagnóstica, Intermedia y final en Resolución de Problemas. 1er año de Educación Media.

Ministerio de Educación de Chile (2013). Diferencias actitudinales entre hombres y mujeres en matemática resultados Prueba PISA 2012: APUNTES SOBRE LA CALIDAD DE LA EDUCACIÓN.

Ministerio de Educación de Chile (2013). Resultados transversales en resolución de problemas PISA 2012: APUNTES SOBRE LA CALIDAD DE LA EDUCACIÓN.

Ministerio de Educación de Chile (2003). Marco para la Buena Enseñanza.

Ministerio de Educación de Chile (2009). Actualización Curricular.

Monk, D. H. (1994). Subject area preparation of secondary mathematics and science teachers and students achievements. *Economics of Education Review*, 13(2), 125-145.

Radovic, D., y Preiss, D. (2010). Patrones de discurso observados en el aula de matemática de 2° ciclo básico. PSYKHE, 19(2), 65-79.

Rodríguez, M. (2013). *¿Cuánto saben de matemática los docentes que la enseñan y cómo se relaciona ese saber con sus prácticas de enseñanza?*. Proyecto FONIDE N° F611150.

Saavedra, E. (2005). *Contenidos Básicos de Estadística y Probabilidad*. Santiago: Editorial Universidad de Santiago.

Saavedra, E. (2009). Material de Referencia curso datosyazar.cl. Santiago: Centro Comenius USACH.

Shulman L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Varas, L., Cubillos, L., y Jiménez, D. (2008). *Análisis de la calidad de clases de matemática. Teorema de Pitágoras y razonamiento matemático*. Proyecto FONIDE Nº: 209-2006.

Ministerio de
Educación

Gobierno de Chile