Matemática

Algebra y Modelos Analíticos

Programa de Estudio
Tercer Año Medio

Formación Diferenciada

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

Presentación

El programa de estudio para la Formación Diferenciada en Matemática para Tercer Año Medio, se orienta a la profundización en algunos temas y a la apertura a nuevos conceptos, siempre en el marco ya definido para la Formación General como un proceso de construcción y adquisición de habilidades intelectuales, en especial las relativas a procesos de abstracción y generalización, formulación de conjeturas, proposición de encadenamientos argumentativos y la utilización y análisis de modelos que permitan describir y predecir el comportamiento de algunos fenómenos en diversos contextos.

Con el propósito de profundizar los aprendizajes sobre lenguaje algebraico, estudiado en 1º y 2º Medio, se propone, como primera unidad de este programa, un desarrollo sobre este tema, en un ámbito de mayor complejidad y orientado hacia las demostraciones de algunas propiedades numéricas. Interesa que los alumnos y alumnas tengan claras distinciones sobre los casos particulares y la generalización; que adquieran habilidades para llegar a la expresión general a partir del análisis de casos particulares y que dispongan de herramientas básicas para desarrollar estas demostraciones.

La segunda unidad se centra en Geometría Analítica, en la síntesis entre la geometría clásica y el álgebra, teniendo como eje el estudio de algunos lugares geométricos, en especial un inicio al conocimiento de las cónicas. En este ámbito es importante el uso de un graficador o de un programa computacional que permita una interesante interacción para el descubrimiento y análisis de propiedades de algunas figuras geométricas.

La tercera unidad se refiere a programación lineal; este tema, relativamente nuevo en el desarrollo de matemática, cobra gran relevancia como aporte significativo a los procesos de optimización. Para el mejor desarrollo de esta unidad, es conveniente la utilización de un programa computacional como el Graphmatica que se puede bajar gratuitamente desde internet en la dirección: http://download.cnet.com/

Organización del programa

Este programa se organiza en torno a tres unidades de estudio:

Unidad 1: Profundización en lenguaje algebraico
Unidad 2: Lugares geométricos
Unidad 3: Programación lineal

Las coordinaciones con el programa de Formación General son importantes y necesarias para que los estudiantes puedan tener, durante el año, una secuencia coherente de los temas en estudio.

La primera unidad se sostiene fundamentalmente sobre el estudio realizado en 1º y 2º Medio acerca del lenguaje algebraico; en el desarrollo de esta unidad se presentan nexos evidentes con la primera unidad de la Formación General de este mismo curso, relativa al estudio de las funciones cuadrática y raíz cuadrada.

La segunda unidad se apoya en la anterior y en la geometría que se ha desarrollado durante los últimos años de Educación Básica y durante los dos primeros de Educación Media.

El desarrollo de la segunda unidad de la Formación General, Inecuaciones lineales, es previa para el estudio de la tercera unidad de este programa, relativa a programación lineal; también lo es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, tema ya estudiado en Segundo Año Medio y que se profundiza en la primera unidad de este programa.

Organización interna de cada unidad

Cada unidad, en forma similar a los programas de 1º, 2º y 3º Medio de la Formación General, se estructura considerando los siguientes puntos:

- Contenidos
- Aprendizajes esperados
- Orientaciones didácticas
- Actividades para el aprendizaje complementada con ejemplos
- Actividades para la evaluación y ejemplos

A continuación se plantea una breve descripción de cada uno de estos elementos.

Contenidos:
Los contenidos corresponden a los señalados en el marco curricular. Con el propósito de enfatizar y/o clarificar algunos de ellos se han desglosado en contenidos más específicos.

Es necesario dejar establecido que la palabra contenidos, en este enfoque curricular, incorpor tanto los conceptos como los procedimientos, como también el desarrollo de habilidades, disposiciones y actitudes.

Aprendizajes esperados:
Expresan las capacidades y competencias que se busca que los alumnos y alumnas logren, considerando los contenidos de cada unidad y los objetivos fundamentales para el año escolar. Su número es variable por unidad.

Los aprendizajes esperados orientan el proceso pedagógico y dan una dirección al proceso de aprendizaje. En consecuencia son determinantes para definir los criterios de evaluación.

Orientaciones didácticas:
En este punto se precisan los focos de la unidad; se incorporan comentarios pedagógicos relativos al aprendizaje del tema y sus relaciones intramatemáticas.

Actividades para el aprendizaje y ejemplos:
Las actividades explicitan acciones y procesos que importa e interesa que vivan los alumnos y las alumnas para el logro de los aprendizajes esperados. No existe una correspondencia biunívoca entre los aprendizajes esperados y las actividades; una actividad puede estar al servicio de varios aprendizajes esperados; además, la dinámica que se dé en el desarrollo de la clase puede favorecer más a unos que a otros.

Para la realización de cada actividad se sugieren ejemplos que pueden ser implementados tal cual se propone en el programa, adaptados a la realidad escolar o sustituidos por otros que se consideren más pertinentes. Al hacer estas adecuaciones locales hay que procurar el desarrollo de las habilidades de pensamiento que el programa promueve.

Para numerosas actividades, los ejemplos seleccionados se ordenan según nivel de dificultad; todos los ejemplos se complementan con comentarios y sugerencias pedagógicas.

Actividades para la evaluación y ejemplos:
La evaluación se considera parte del proceso de aprendizaje. Debe proveer al joven y al docente de la retroalimentación necesaria como referente para continuar, corregir y orientar las actividades futuras.

Es recomendable que se evalúen diversos aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje, y no sólo los resultados de los diversos ejercicios. Cobra relevancia en esta propuesta observar y evaluar el tipo de razonamiento utilizado, el método empleado, la originalidad de la o las ideas planteadas.

Al término de cada unidad se incluye un conjunto de preguntas, propuestas de trabajo y problemas, utilizables como parte de una evaluación de término de la unidad. La evaluación, en consonancia con el proceso de aprendizaje, aporta a un proceso de integración y relación entre los conceptos.

Los siguientes criterios orientan el proceso de evaluación:

- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas
  Reconocer la o las incógnitas e interpretar las preguntas; diseñar una estrategia o plan de trabajo con los datos; establecer relaciones matemáticas entre datos, variables, incógnitas; traducirlas, representar y/o expresar en un lenguaje y simbología comprensible y adecuada; seleccionar y aplicar procedimientos; explicitar la respuesta al problema y analizar su pertinencia.
- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático
  Conjeturar, relacionar, establecer conclusiones; organizar y encadenar argumentos matemáticos; demostrar propiedades; reconocer regularidades numéricas, algebraicas, geométricas.
- Organización y estructuración de conceptos matemáticos
  Reconocer la noción o el concepto involucrado; reconocer equivalentes y establecer relaciones con otras nociones o conceptos; generalizar, particularizar.
- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios
  Seleccionar y utilizar reglas, algoritmos, fórmulas y/o formas para realizar cálculos o transformar relaciones matemáticas en otras más sencillas o más convenientes de acuerdo al contexto.

Interesa además considerar que el aprendizaje de matemática contribuye al desarrollo de habilidades en el ámbito de la comunicación: analizar e interpretar cuadros, gráficos y fórmulas, traducir de un registro a otro, registrar, describir, explicar ideas, argumentos, relaciones o procedimientos.

Finalmente, no está ajeno al aprendizaje de matemática el desarrollo de actitudes y disposiciones para el estudio y el trabajo: abordar problemas y desafíos; analizar errores; escuchar otros argumentos, analizarlos; expresar criticas fundamentadas.

Objetivos Fundamentales Transversales y su presencia en el programa

El programa de Formación Diferenciada de Matemática de Tercer Año Medio refuerza algunos OFT que tuvieron presencia y oportunidad de desarrollo en la Formación General de Primero, Segundo y Tercer Año Medio y adicionan otros propios de las nuevas unidades.

a. los OFT de ámbito *crecimiento y autoafirmación personal* referidos al interés y capacidad de conocer la realidad y utilizar el conocimiento y la información.
b. los OFT del ámbito *desarrollo del pensamiento*, en especial los relativos a habilidades de investigación, a través de las actividades que suponen selección y organización de información y datos; también las de resolución de problemas y de pensamiento lógico, a través del conjunto de contenidos y actividades orientados al aprendizaje de procesos de abstracción y generalización, formulación de conjeturas, proposición de encadenamientos argumentativos y la utilización y análisis de modelos que permitan describir y predecir el comportamiento de algunos fenómenos en diversos contextos. Desarrollo de habilidades en el ámbito de la comunicación: analizar e interpretar cuadros, gráficos y fórmulas, traducir de un registro a otro, registrar, describir, explicar ideas, argumentos, relaciones o procedimientos.
c. los OFT del ámbito *persona y su entorno* referidos al estudio y al trabajo, y que plantean el desarrollo de actitudes de rigor y perseverancia, así como abordar problemas y desafíos; analizar errores; escuchar otros argumentos, analizarlos; expresar críticas fundamentadas.
d. además, el programa se hace cargo de los OFT de *informática* incorporando en diversas actividades y tareas la búsqueda de información a través de redes de comunicación y el empleo de software.

Objetivos Fundamentales

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Analizar, confrontar y construir estrategias personales para la resolución de problemas o desafíos que involucren ecuaciones de segundo grado, lugares geométricos expresados analíticamente y programación lineal.
2. Conocer y utilizar conceptos y lenguaje matemático asociados a expresiones analíticas y gráficas.
3. Percibir la matemática como una construcción enraizada en la cultura, en evolución constante y con estrecha vinculación con otras áreas del conocimiento.

Unidades, contenidos y distribución temporal

Cuadro sinóptico

Unidades		
1	**2**	**3**
Profundización en lenguaje algebraico	Lugares geométricos	Programación lineal
Contenidos		
a. Expresiones racionales. Operatoria algebraica. Factorización, simplificación, racionalización. Ecuaciones sencillas con expresiones racionales. b. Raíces n-ésimas de números positivos. Potencias con exponente fraccionario. Operatoria. Relación entre potencias de exponente fraccionario y raíces. c. Ecuación de segundo grado. Deducción de la fórmula para encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática. Análisis de las soluciones y su relación con el gráfico de la correspondiente función. Estudio del gráfico de la función cuadrática considerando el signo del discriminante.	a. Distancia entre dos puntos del plano. b. La circunferencia como lugar geométrico. Deducción de la ecuación de la circunferencia con centro en el origen. Gráfico. Ecuación de la circunferencia trasladada. c. Relación de la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ con la semicircunferencia. Análisis de los posibles valores de x. d. Resolución gráfica y analítica de problemas sencillos que involucren rectas, circunferencia y parábola.	a. Inecuaciones lineales con dos incógnitas. Descripción de un semiplano por medio de una inecuación lineal con dos incógnitas. Gráfico de semiplanos e intersección de ellos. Relación entre ecuaciones e inecuaciones lineales. b. Resolución gráfica de sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas. c. Programación lineal en dos variables. Función objetivo. Planteo y resolución gráfica de problemas sencillos de programación lineal. d. Uso de programas computacionales de manipulación algebraica y gráfica.
Tiempo estimado		
40 a 45 horas.	30 a 35 horas.	30 a 40 horas.

Unidad 1

Profundización del lenguaje algebraico

Contenidos mínimos

a. Expresiones racionales. Operatoria algebraica. Factorización, simplificación, racionalización. Ecuaciones sencillas con expresiones racionales.
b. Raíces n-ésimas de números positivos. Potencias con exponente fraccionario. Operatoria. Relación entre potencias de exponente fraccionario y raíces.
c. Ecuación de segundo grado. Deducción de la fórmula para encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática. Análisis de las soluciones y su relación con el gráfico de la correspondiente función. Estudio del gráfico de la función cuadrática considerando el signo del discriminante.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y las alumnas:

1. Transforman expresiones algebraicas racionales, operan con ellas y resuelven ecuaciones que las involucran, aplicando recursos como factorización, simplificación y racionalización.
2. Conocen el significado, sentido y notación de potencias con exponente fraccionario, incluyendo raíces n-ésimas, establecen las equivalencias de notación y utilizan aquélla que sea más conveniente de acuerdo al contexto.
3. Conocen y relacionan distintos métodos para resolver ecuaciones de segundo grado y analizan las propiedades de las soluciones de una ecuación.
4. Relacionan el valor del discriminante de una ecuación de segundo grado con la posición relativa del gráfico de la función y con las soluciones de la ecuación.
5. Resuelven problemas que implican la traducción de un enunciado a una ecuación o a un sistema de ecuaciones. Analizan la pertinencia de las soluciones obtenidas.

Orientaciones didácticas

La matemática se distingue por un lenguaje preciso, sometido a reglas de sintaxis con símbolos de significado único; una de las dificultades para su aprendizaje deriva de las diferencias entre el lenguaje aritmético y el lenguaje del álgebra y entre éstos y el lenguaje común.

Numerosas palabras del lenguaje común tienen un significado diferente para el uso habitual y el matemático, tales como racional, irracional, raíz, potencia, producto, primo y otras.

Es cierto que el lenguaje algebraico se construye a partir de las propiedades del sistema numérico; sin embargo, sus lenguajes tienen diferencias.

En el ámbito de los números el signo igual se utiliza, generalmente, para indicar el resultado de una operación. En álgebra tiene al menos, dos sentidos:

i) como acción de transformación de expresiones que siguen siendo equivalentes, por ejemplo, $2(a + b + c) = 2a + 2b + 2c$

ii) para relacionar los dos miembros de una ecuación. En este caso las afirmaciones no son universalmente verdaderas ya que están condicionadas a ciertos valores que las hacen verdaderas.

En esta unidad interesa que los estudiantes profundicen sus conocimientos sobre el lenguaje algebraico, continuando el trabajo ya desarrollado en 1º y 2º Medio, en un diálogo permanente entre la aritmética y el álgebra, entre los casos particulares y la generalización; y, además, que amplíen la gama de conceptos relativos a función cuadrática, ecuación de segundo grado y raíces, tema que se estudia también en la Formación General durante este mismo año.

Además, es importante que los alumnos y alumnas logren percibir el álgebra como una herramienta que generaliza y, en consecuencia, está directamente relacionada con las demostraciones; se sugiere invitar constantemente a los estudiantes a la reflexión y a diferenciar los casos particulares del general.

Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Resuelven problemas: traducen el enunciado a ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales; analizan las relaciones matemáticas y sus diferentes formas considerando la asignación de incógnitas; distinguen las soluciones específicas de aquellas más generales; analizan las soluciones de las ecuaciones o sistemas de ecuaciones y la pertinencia de ellas de acuerdo al problema propuesto; demuestran algunas propiedades de los números.

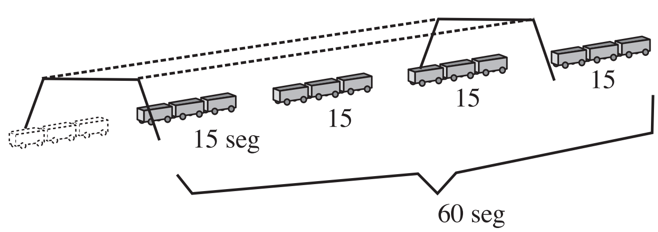
Ejemplo A

- Un tren se demora exactamente un minuto en pasar completamente un túnel, desde el momento que entra la máquina hasta que sale el último vagón. A la misma velocidad, tarda 15 segundos en pasar completamente por delante de un poste de teléfono. ¿Qué largo tiene el tren si el túnel mide 420 metros?

INDICACIONES AL DOCENTE

En el planteamiento del problema, el error más habitual es considerar que la velocidad con que el tren de largo l metros atraviesa el túnel sería igual a $\frac{420}{60}$ m/s; este cálculo no traduce la frase del enunciado: 'desde el momento que entra la máquina hasta que sale el último vagón'. Interpretando correctamente el enunciado, la velocidad del tren en el túnel es $\frac{420 + l}{60}$ m/s. Como esta velocidad es también la que tiene el tren al pasar frente al poste del teléfono, esto es $\frac{l}{15}$ m/s, se puede plantear una ecuación que resulta de la igualdad de la velocidad en ambos momentos.

Un dibujo como el de la ilustración puede ayudar a la comprensión de la situación que se describe en el problema:



De esta manera es posible visualizar que el largo del tren es la tercera parte de la longitud del túnel.

Ejemplo B

- De un número de tres cifras se sabe que la suma de éstas es 13. Si se intercambian las cifras de las unidades y las centenas, el número disminuye en 198; si se intercambian las de las unidades y decenas, el número aumenta en 36. Encontrar el número.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es recomendable proponer previamente un problema de este tipo, en el que intervengan sólo dos cifras.

Un error habitual de los estudiantes es considerar que xyz representa un número de tres cifras sin atender que éste es el producto de tres números y que $100\,x + 10\,y + z$ representa un número cualquiera de tres cifras, siempre que x, y, z sean dígitos, con $x \neq 0$

Al plantear un problema con un número de tres cifras se abre espacio para el trabajo con sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas.

Ejemplo C

- Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que cuando uno pierda una partida entregará a cada uno de los otros dos una cantidad de fichas igual a la que cada uno de ellos tenga en ese momento.

  Cada uno perdió una partida y al final cada uno tenía 24 fichas. ¿Cuántas fichas tenía cada jugador al comenzar el juego?

INDICACIONES AL DOCENTE

Es muy interesante analizar tanto el procedimiento que se genera suponiendo cantidades iniciales x, y, z para cada jugador, modificándolas de acuerdo a los resultados de las tres jugadas, igualándolas a 24 y resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, o bien, haciendo el proceso inverso: al término de la tercera jugada los tres tenían 24 fichas, en consecuencia, al término de la segunda jugada dos tenían la mitad de 24 y el que perdió el doble de 24. La tabla que sigue resume este análisis.

Jugador	Nº de fichas Final	Nº de fichas Perdió A	Nº de fichas Perdió B	Nº de fichas Perdió C
A	24	48	24	12
B	24	12	42	21
C	24	12	6	39
Total	72	72	72	72

La resolución de este problema por el primer método es un buen ejercicio para uso de paréntesis, adición y sustracción de bi o trinomios.

Es necesario el análisis de la pertinencia de los resultados que se obtienen como solución del sistema de ecuaciones.

Ejemplo D

- ¿Cuántos litros de leche con 30% de grasa se deben mezclar con leche de 5% de grasa para obtener 50 litros con 20% de grasa.

INDICACIONES AL DOCENTE

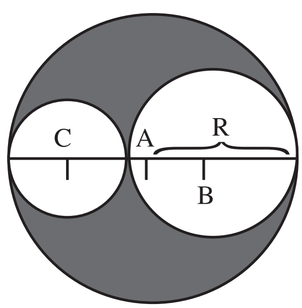
La mayoría de los alumnos y alumnas no tienen dificultades mayores en plantear la ecuación $x + y = 50$ en que x son los litros de leche con 30% de grasa e y son los litros de leche con 5% de grasa. La dificultad en este problema se centra en determinar la otra ecuación que se genera en la interpretación del significado de los porcentajes de grasa de cada tipo de leche.

El análisis de una tabla como la que sigue puede ayudar a los estudiantes a escribir una ecuación que corresponda a la relación que se solicita en el problema.

Litros 30%	Litros 5%	Total de litros	% de grasa por litro
2	2	4	(60+10) : 4 = 17,5
40	10	50	(1200+50) : 50=25
x	y	x+y	$\frac{30x + 5y}{x + y} = 20$

Ejemplo E

- En un tubo de centro A y radio R se colocan dos tubos más pequeños con centros en B y C, como lo indica la figura que sigue



Determinar el área ennegrecida.

INDICACIONES AL DOCENTE

La solución de este problema se expresa en función de R, el radio del tubo de mayor radio, y del radio de uno de los otros dos tubos e involucra cálculo algebraico.

En forma similar a ejemplos anteriores, es recomendable establecer la relación entre algunos ejemplos numéricos y su forma general.

Ejemplo F

- Resignificar los procedimientos de cálculo de multiplicación de naturales y construir algunas reglas de cálculo rápido que involucren el producto de la suma por diferencia o el cálculo de algunos cuadrados de binomio:

i) calcular mentalmente 19 x 21 = 88 x 92 =

ii) descubrir y fundamentar alguna regla que permita calcular mentalmente el cuadrado de un número de dos cifras terminado en 5.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es necesario que los estudiantes relacionen el cálculo numérico de productos, cuocientes con la operatoria algebraica, reconociendo en ésta una generalización de los casos numéricos particulares.

Observar que 19 x 21 = (20 - 1) (20 + 1), transformación que facilita y simplifica el cálculo

Para obtener una regla que facilite el cálculo mental del cuadrado de un número de dos cifras que termina en 5, considerar la generalización

$(10a + 5)$ en que a representa la cifra de la decena.

Al elevarlo al cuadrado se obtiene:

$(10a + 5)^2 = 100\,a^2 + 100\,a + 25$, de donde factorizando

$= 100\,a\,(a + 1) + 25$, así se visualiza la regla

"75 al cuadrado es igual a 7 por 8 por 100 + 25"

En forma análoga, para el cálculo del cuadrado de algunos números próximos a 100, como 98 por ejemplo, se puede considerar la secuencia siguiente:

$a^2 = a^2 - b^2 + b^2$, en que a es el número cuyo cuadrado se quiere calcular.

Se puede transformar en $a^2 = (a + b)\,(a - b) + b^2$, en que b es el complemento a 100

Al aplicar esta relación al cálculo del cuadrado de 98 en que $b = 2$, se tiene:

$98^2 = (98 + 2)\,(98 - 2) + 2^2$

$100 \times 96 + 4 = 9\,604$.

Ejemplo G

- Demostrar algunas reglas de divisibilidad: por 3, por 4, por 5.

INDICACIONES AL DOCENTE

En los últimos años de Educación Básica los alumnos y alumnas estudiaron las reglas de divisibilidad. Se sugieren algunas demostraciones sencillas para este nivel.

Divisibilidad por 3:

Si a, b, c son las cifras de un número que satisfacen la condición $a + b + c = 3k$, k entero, entonces $100\,a + 10\,b + c$ es divisible por 3.

$$\begin{aligned} 100\,a + 10\,b + c &= 99\,a + a + 9\,b + b + c \\ &= 99\,a + 9\,b + a + b + c \\ &= 99\,a + 9\,b + 3\,k \\ &= 3\,(33\,a + 3\,b + k) \end{aligned}$$

Divisibilidad por 4:

Si a, b, c son las cifras ordenadas de un número que satisfacen la condición $(10\,b + c) = 4n$, n entero, entonces $100\,a + 10\,b + c$ es divisible por 4.

$$\begin{aligned} 100\,a + 10\,b + c &= 4 \cdot 25\,a + 4\,n \\ &= 4\,(25\,a + n) \end{aligned}$$

Ambas demostraciones se pueden generalizar para cualquier número con más de tres cifras.

Ejemplo H

- Constatar que las siguientes igualdades son verdaderas.

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 3^3 - 3$$
$$3 \cdot 4 \cdot 5 = 4^3 - 4$$
$$4 \cdot 5 \cdot 6 = 5^3 - 5$$
$$10 \cdot 11 \cdot 12 = 11^3 - 11$$

Proponer otras secuencias de ese mismo tipo con números de dos y tres cifras; verificar, utilizando calculadora, si son o no verdaderas.

Proponer la generalización de estos ejemplos y demostrarla.

INDICACIONES AL DOCENTE

Siempre es necesario mantener conversaciones sobre el tema de la particularización y la generalización.

Además, de la demostración que $n^3 - n$ es igual al producto de tres números enteros consecutivos $(n + 1,\ n,\ n - 1)$, se deduce como corolario, que el cubo de cualquier entero n mayor que 1 es igual a

$$n\,(n - 1)\,(n + 1) + n$$

Ejemplo I

- Calcular las diferencias entre dos cuadrados consecutivos.

$4 - 1 =$

$9 - 4 =$

$49 - 36 =$

$100 - 81 =$

Caracterizar el tipo de número que se obtiene como resultado, proponer una generalización y demostrarla.

Relacionar esta generalización con la suma de los n primeros impares y su representación geométrica.

INDICACIONES AL DOCENTE

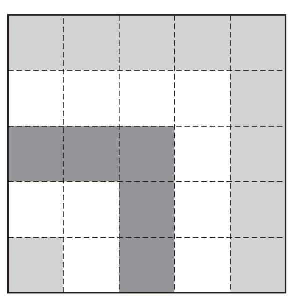
Es importante favorecer en los estudiantes el desarrollo de un proceso que a partir de la constatación de ciertas propiedades en casos particulares, continúa con la elaboración de conjeturas para llegar a demostrar una generalización. Lo que interesa es aprender a generalizar y demostrar esas generalizaciones, en contraposición con la sola manipulación algebraica que se requiere para desarrollar una demostración propuesta por otros.

Para demostrar que

$(n - 1)^2 - n^2 = 2n + 1,$

algunos alumnos optarán por el desarrollo del cuadrado del binomio del primer término y la reducción de términos semejantes; y, otros, por la factorización de la diferencia de dos cuadrados en el primer miembro.

La representación geométrica de la suma de los n primeros números impares es otra manera de visualizar esta demostración



Esta representación evidencia las características de la diferencia de dos cuadrados consecutivos.

Actividad 2

Operan con expresiones algebraicas fraccionarias

Ejemplo A

- Expresar en forma más sencilla las expresiones que siguen

i) $\dfrac{x^2 - 1}{x^4 - 1} =$

ii) $\dfrac{a}{b\,(a - b)} + \dfrac{b}{a\,(b - a)} =$

iii) $\left(\dfrac{x + y}{x - y} + \dfrac{x - y}{x + y}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$

iv) $\left(x + \dfrac{x}{x - 1}\right) : \left(x - \dfrac{x}{x - 1}\right)$

INDICACIONES AL DOCENTE

Es necesario que los alumnos y alumnas desarrollen la habilidad que les permita fluidez en el manejo algebraico de expresiones. Interesa que ellos puedan reconocer y expresar la operatoria que están desarrollando y justificar los pasos que realizan para llegar a las expresiones en su forma más simple. Es importante analizar las restricciones implícitas en cada una de estas expresiones.

Actividad 3

Amplían los conceptos de raíces cuadrada y cúbica a raíz n-ésima; conocen y aplican sus propiedades

Ejemplo A

- Resolver las siguientes ecuaciones para *x*; establecer las restricciones para que *x* tome un valor real.

i) $x^2 = a$

ii) $x^3 = a$

iii) $x^4 = a$

iv) $x^n = a$

INDICACIONES AL DOCENTE

Se sugiere igualar a cero las ecuaciones, factorizar y analizar cada uno de los casos que se obtienen.

En la primera ecuación:

$$x^2 = a$$

$$(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$$

$$x_1 = \sqrt{a} \; ; \; x_2 = -\sqrt{a}$$

Necesariamente, en este caso, $a \geq 0$, por las restricciones de la raíz cuadrada.

Al resolver la tercera ecuación, se obtiene:

$$x^4 - a = 0$$

$$(x^2 + \sqrt{a})(x + \sqrt{\sqrt{a}})(x - \sqrt{\sqrt{a}}) = 0$$

$$x_1 = \sqrt[4]{a} \; ; \; x_2 = -\sqrt[4]{a}$$

Es necesario plantear la igualdad a cero del tercer factor
$x^2 + \sqrt{a} = 0$ de donde $x^2 = -\sqrt{a}$, lo que no es coherente con la operatoria definida en los números reales, en que los cuadrados siempre son positivos.

Además es interesante que los alumnos y alumnas observen que en los casos i) y iii) el exponente de x es par, lo que obliga a que a sea mayor o igual que cero. Esto permite generalizar rápidamente el caso de índice par.

El análisis de la segunda ecuación lleva a la factorización:

$$x^3 - a = 0$$

$$(x - \sqrt[3]{a})(x^2 + x\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}) = 0$$

$$x_1 = \sqrt[3]{a}$$

Las soluciones de esa ecuación cuadrática no son números reales; los alumnos y alumnas podrán retomar esta ecuación para el análisis de las propiedades de las soluciones de una ecuación cuadrática.

Importa que para los alumnos y alumnas tenga sentido la igualdad
$x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$ con $a \geq 0$ si n es par.

Conviene tomar ejemplos numéricos antes de plantear la generalización y las restricciones correspondientes.

Puede ser un momento propicio para mostrar a los alumnos y alumnas cómo los matemáticos, ante la necesidad de resolver problemas, amplían consistentemente la teoría considerada, en este caso los sistemas numéricos, extendiendo los números reales a los complejos.

Ejemplo B

- Escribir en forma más simple las siguientes expresiones:

i) $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{5}} =$

ii) $(3\sqrt{2} - 4\sqrt{8})^2 =$

iii) $(\sqrt{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}} =$

INDICACIONES AL DOCENTE

Conviene que los alumnos y alumnas identifiquen que la operatoria que se realiza en la transformación de expresiones de este tipo se respalda en la igualdad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. Si se considera oportuno se puede demostrar este teorema y sistematizar los ejercicios del tipo multiplicación de raíces del mismo índice, raíz de un producto e introducción del coeficiente dentro de la raíz.

Ejemplo C

- Completar el siguiente cuadrado mágico con multiplicación: las líneas, columnas y diagonales deben dar el mismo producto, utilizando los tres números que se proponen. Analizar las relaciones entre los números y proponer otros cuadrados mágicos similares.

$16\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

INDICACIONES AL DOCENTE

Los alumnos y alumnas pueden inventar otros cuadrados mágicos en los que intervenga el producto de raíces.

Es interesante observar en este tipo de cuadrado, que el producto de los tres números tiene que ser igual al cubo del número que se ubica en el centro. Además, el producto de los números que se ubican en los extremos de la fila (o de la columna) central, es igual al cuadrado del número del centro.

Previo a la generalización, es conveniente que los estudiantes modifiquen este cuadrado mágico manteniendo el número $4\sqrt{2}$ en el centro, que generen otros cuadrados con $3\sqrt{3}$ en el cuadro del centro.

Generalizar proponiendo un cuadrado mágico tal que sea $a\sqrt{b}$ el número central.

Ejemplo D

- Expresar las sumas siguientes en una forma más sencilla:

$$\sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{300} =$$

$$\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{80} =$$

INDICACIONES AL DOCENTE

Estas sumas las pueden realizar descomponiendo los radicandos en factores de modo que uno sea un cuadrado perfecto, o bien, utilizando una calculadora u otro método alternativo.

Es interesante comparar ambos procedimientos, la exactitud de la notación con raíces y las aproximaciones en la calculadora.

Ejemplo E

- Expresar en forma más sencilla las expresiones siguientes:

i) $$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} =$$

ii) $$\left(\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x + y}} + \frac{\sqrt{x^2 - 2xy + y^2}}{\sqrt{x - y}} \right) : \sqrt{x - y}$$

iii) $$\frac{\sqrt{a + \dfrac{2ab}{b^2+1}} + \sqrt{a - \dfrac{2ab}{b^2+1}}}{\sqrt{a + \dfrac{2ab}{b^2+1}} \quad \sqrt{a - \dfrac{2ab}{b^2+1}}} =$$

INDICACIONES AL DOCENTE

Es necesario analizar las restricciones implícitas en cada una de estas expresiones.

Si se considera oportuno se puede demostrar que $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ y sistematizar ejercicios asociados a la división de raíces.

Ejemplo F

- Escribir en forma más sencilla las siguientes expresiones:

$$\sqrt[a]{c^{3a}} =$$

$$\sqrt[4]{y^5} \cdot \sqrt[4]{y^3} =$$

$$\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[6]{x^4} =$$

INDICACIONES AL DOCENTE

Interesa que los alumnos y alumnas comprendan que $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[ns]{b^{ps}}$, igualdad que se puede demostrar si se considera conveniente, y que sistematicen ejercicios de aplicación.

Ejemplo G

- Expresar bajo una sola raíz las siguientes expresiones:

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2}} =$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a}}} =$$

INDICACIONES AL DOCENTE

Utilizando la igualdad y eventualmente demostrándola, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\,m]{a}$, los alumnos y alumnas podrán anotar en forma más sencilla aquellas expresiones que contengan más de una raíz.

Ejemplo H

Racionalizar el denominador en los ejercicios siguientes:

i) $$\frac{11}{5 - \sqrt{3}}$$

ii) $$\frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$$

INDICACIONES AL DOCENTE

El proceso de racionalización de denominadores facilita la comparación de fracciones; será interesante comparar los resultados que se obtienen desde el cálculo algebraico de las raíces y desde el uso de la calculadora y analizar el sentido de la exactitud de acuerdo a las situaciones de uso.

Ejemplo I

- Verificar que $5 - 2\sqrt{6}$ es el inverso multiplicativo de $5 + 2\sqrt{6}$. Encontrar otros pares de números que no se anotan en forma de fracción y que son uno el inverso multiplicativo del otro. ¿Es posible esta situación en los números racionales?

INDICACIONES AL DOCENTE

Multiplicar ambos números y constatar que su producto es 1. Relacionar con los procedimientos de racionalización de denominadores:

$$5 + 2\sqrt{6} = \frac{1}{5 - 2\sqrt{6}}$$

Para inventar otros pares de estos números, los alumnos y alumnas podrían tomar este ejemplo como paradigmático y buscar sumas por diferencia tales que la diferencia de sus cuadrados sea igual a 1 y que el primer número sea un número entero.

Ampliar al caso general $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$
en que la diferencia $a - b = 1$ y a, b son cualquier número positivo.

Actividad 4

Interpretan potencias con exponente fraccionario y aplican la equivalencia entre notación con potencias y con raíces.

Ejemplo A

- Utilizar una calculadora y determinar los valores de:

  $2^{\frac{1}{2}}$; $2^{\frac{3}{2}}$; $3^{\frac{1}{2}}$; $4^{\frac{1}{2}}$; $25^{\frac{1}{2}}$; $8^{\frac{1}{3}}$;

  Analizar el siguiente desarrollo y proponer una conclusión:

$$x = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$x^2 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5$$

$$x_1 = \sqrt{5} \quad ; \quad x_2 = -\sqrt{5} \quad ;$$

INDICACIONES AL DOCENTE.

Invitar a los alumnos y alumnas a conjeturar sobre el valor de esas potencias antes de hacer el cálculo con la calculadora.

Es importante que los alumnos y alumnas le encuentren sentido a la igualdad $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ explicitando las restricciones para los valores de a si n es par. Será interesante analizar con los estudiantes un caso del tipo siguiente:

$x = (-2)^{\frac{1}{2}}$ elevando al cuadrado se obtiene $x^2 = \left((-2)^{\frac{1}{2}}\right)^2$ esto es equivalente a $x^2 = -2$, lo que no es coherente con lo planteado en los números reales; de ahí la exigencia de la restricción:

$$\sqrt[2n]{a} = a^{\frac{1}{2n}}, \quad a \geq 0$$

$$\sqrt[2n+1]{a} = a^{\frac{1}{2n+1}}$$

en que n es un número natural mayor o igual que 1.

Es indispensable destacar que la construcción del conocimiento matemático es consistente.

Ejemplo B

- Efectuar los cálculos que se indican:

$$\sqrt{\frac{16^{\frac{-1}{2}}}{2^{-2}}} =$$

$$\frac{\sqrt[x]{2^{x+1}}}{\sqrt[x]{2}} =$$

$$\frac{\left(b^{-3}\right)^{\frac{-1}{2}} \cdot \left(b^{\frac{-1}{3}}\right)^{-2}}{\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante que los alumnos y alumnas adquieran autonomía para utilizar la notación que les sea más cómoda.

Es necesario hacer una revisión de las propiedades de las potencias con exponente entero y constatar que éstas se extienden a las potencias con exponente fraccionario.

Ejemplo C

- Utilizar una calculadora científica para determinar el valor de algunas potencias con exponente fraccionario y/o el valor de algunas raíces.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es interesante que los alumnos y alumnas se familiaricen con las calculadoras científicas, se informen sobre la equivalencia y el significado de las teclas relacionadas con estos cálculos y descubran la sintaxis asociada a ellas.

Actividad 5

Resuelven ecuaciones cuadráticas de diferentes tipo, adecuando los procedimientos de solución a las características de la ecuación.

Ejemplo A

- Resolver las siguientes ecuaciones:

i) $x^2 + 5x + 6 = 0$

ii) $x^2 - 4x = 0$

iii) $x^2 - 4x + 2 = 0$

INDICACIONES AL DOCENTE

Se sugiere factorizar en los dos primeros casos y calcular las soluciones de la tercera ecuación por completación de cuadrados. A partir de ejemplos de este tipo, proponer la deducción de la fórmula para el caso general.

Ejemplo B

- Resolver las siguientes ecuaciones:

i) $x^2 + ax - x = a$

ii) $\dfrac{1}{2x + 5a} + \dfrac{5}{2x - 5a} = \dfrac{2}{a}$

INDICACIONES AL DOCENTE

La resolución de este tipo de ecuaciones requiere fluidez en las transformaciones algebraicas previas a la aplicación de la fórmula.

Ejemplo C

- Considerar la ecuación $x^2 - 3x + 1 = 0$. Determinar las soluciones y evaluar la expresión $x^2 - 3x + 1$ para $x = 1$, $x = 1 + \sqrt{2}$, y para las soluciones encontradas anteriormente. Explicar las diferencias observadas en estos cálculos.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante que los alumnos y alumnas entiendan que al evaluar el polimonio correspondiente a la ecuación de segundo grado en las soluciones, éste se anula y, de este modo, comprendan qué significa determinar las soluciones de una ecuación. Este ejemplo numérico y otros pueden ser previos para considerar las soluciones en su forma general.

Ejemplo D

- Resuelven ecuaciones como las siguientes:

$$\sqrt{x} = x - 2$$

$$\sqrt{x + \sqrt{1 + 2x}} = 1$$

$$\sqrt{4 - x} + \sqrt{x + 9} = 5$$

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante establecer, para la resolución de este tipo de ecuaciones, mecanismos para discriminar si las soluciones obtenidas son o no correctas. Como el proceso de resolución involucra una elevación de la ecuación al cuadrado, se pierden las diferencias de signo y pueden introducirse soluciones al problema original.

Uno de estos mecanismos es comprobar en la ecuación inicial, cada solución que se obtenga. Otro es determinar los rangos de validez de las soluciones.

Ejemplo E

- Resuelven ecuaciones como las siguientes:

i) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

ii) $x - 7\sqrt{x} + 12 = 0$

iii) $\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{(x+1)} + 6 = 0$

INDICACIONES AL DOCENTE

Es habitual que los alumnos y alumnas definan adecuadamente la incógnita auxiliar y hagan correctamente la sustitución, sin embargo, suelen dejar inconclusa la tarea sin retomar el camino de regreso, para pasar de la incógnita auxiliar a la incógnita de la ecuación inicial.

Ejemplo F

- Resolver la ecuación:

$$\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 + 1}} = x + 1$$

INDICACIONES AL DOCENTE

Entre los procedimientos de resolución es posible encontrarse ante la necesidad de factorizar o simplificar por x; es importante recalcar que $x = 0$ es una de las soluciones del problema.

Ejemplo G

- Resolver el sistema:

$$x + xy + y = 11$$
$$x^2y + xy^2 = 30$$

Sugerencia:

Sustituir en la segunda ecuación el valor de $(x + y)$.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es interesante que los alumnos y alumnas se sientan enfrentados a desafíos no habituales. En este caso, de acuerdo a la sugerencia, tienen que resolver una ecuación de segundo grado en x y

Actividad 6

Resuelven problemas que involucran ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo A

- Al despedirse al término de un encuentro, unos amigos se estrecharon la mano. Uno de los jóvenes constató que hubo un total de 45 apretones de mano. ¿Cuántos amigos asistieron a dicho encuentro si todos se despidieron de todos una sola vez?

INDICACIONES AL DOCENTE

Será interesante hacer una breve simulación de este problema y verificar que si hay x amigos, cada uno de ellos dará la mano a $(x - 1)$; en consecuencia el número de apretones de mano será igual a $x\ (x - 1)$. Pero, cuando José le da la mano a Matías, también es Matías el que estrecha la mano de José, por lo cual el número de apretones es igual a $\frac{x\ (x - 1)}{2}$

Al resolver la ecuación $x^2 - x - 90 = 0$, se obtienen dos soluciones; se constata que la raíz negativa no es pertinente como solución al problema.

Ejemplo B

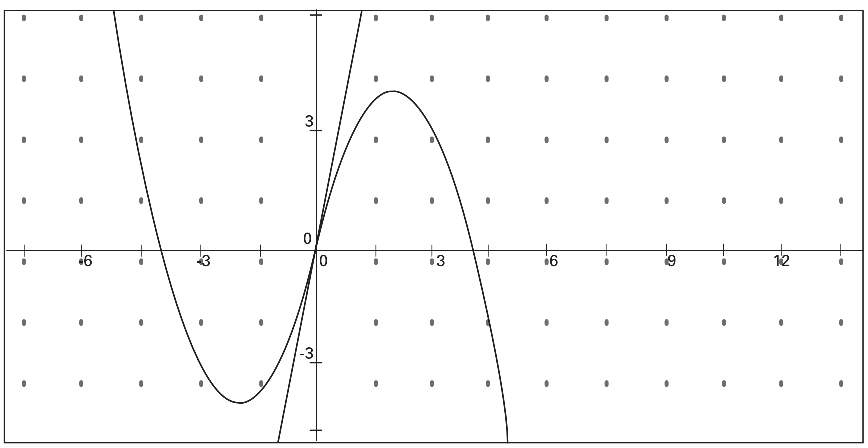
- Encontrar un par de números reales cuya diferencia sea igual a 4 y cuyo producto sea mínimo.

  Encontrar un par de números reales cuya suma sea 4 y su producto sea máximo.

  Comparar ambos problemas, graficar las dos funciones, generalizar para sumas o diferencias iguales a un número a cualquiera.

INDICACIONES AL DOCENTE

Los dos gráficos siguientes muestran dos de las funciones que describen el producto de ambos números: $y = x\ (x + 4)$ e $y = x\ (4 - x)$



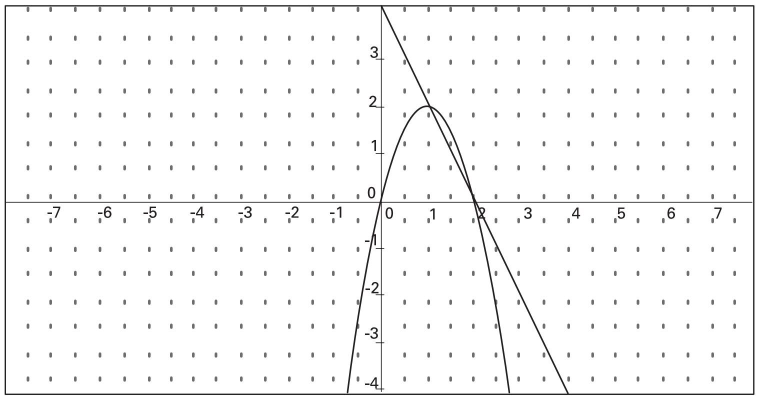
Es interesante observar que ambos gráficos tienen distinta orientación y además, tienen una simetría central respecto al origen.

Ejemplo C

- Determinar el punto de la recta $2x + y = 4$ en el primer cuadrante, que al unirlo con los ejes, determina el rectángulo de mayor área.

INDICACIONES AL DOCENTE

La determinación de ese punto pasa por definir un valor para $y = -2x + 4$ de la recta tal que el producto de ese valor por x define una función que admite un valor máximo.



Ejemplo D

- Encontrar cuántos y cuáles números reales difieren exactamente en una unidad de su inverso.

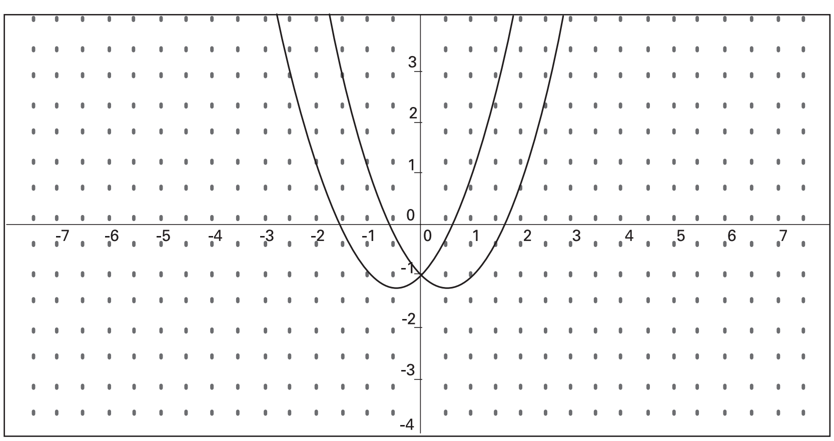
INDICACIONES AL DOCENTE

Interesa que los alumnos y alumnas planteen las ecuaciones correspondientes:

$$x + 1 = \frac{1}{x} \quad ; \quad x - 1 = \frac{1}{x}$$

Al resolverlas obtienen cuatro números que de dos en dos son inversos multiplicativos y también son opuestos aditivos.

El siguiente gráfico muestra ambas funciones y la ubicación simétrica de las soluciones en relación con el eje y.



Ejemplo E

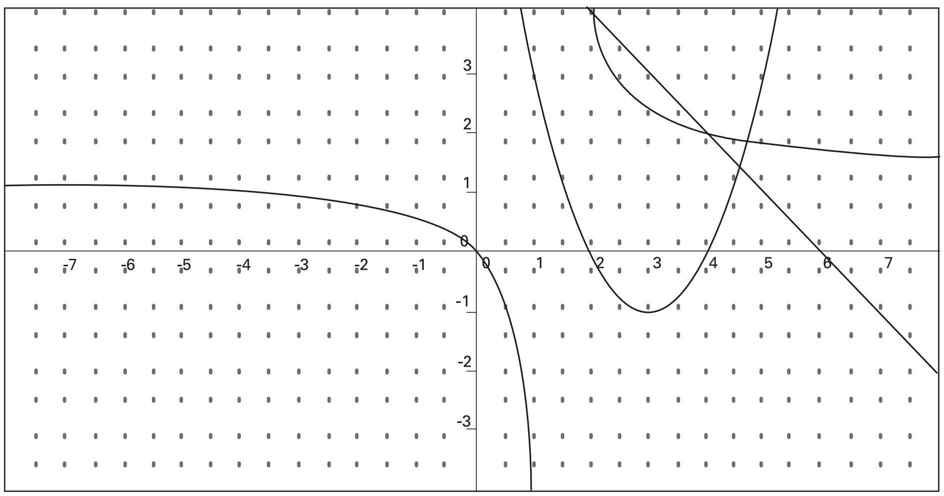
- Determinar, si existen, pares de números tales que su suma sea igual a 6 y la de sus recíprocos $\frac{3}{4}$.

INDICACIONES AL DOCENTE

El planteamiento del problema origina un sistema de ecuaciones que es cómodo de resolver por sustitución.

La ecuación cuadrática resultante admite dos valores; sin embargo, el problema tiene sólo una solución.

Con la ayuda de un programa para graficar se puede observar como las abscisas de los puntos de intersección de la hipérbola con la recta (representaciones de las dos ecuaciones del sistema) son los mismos de la intersección de la parábola con el eje x .

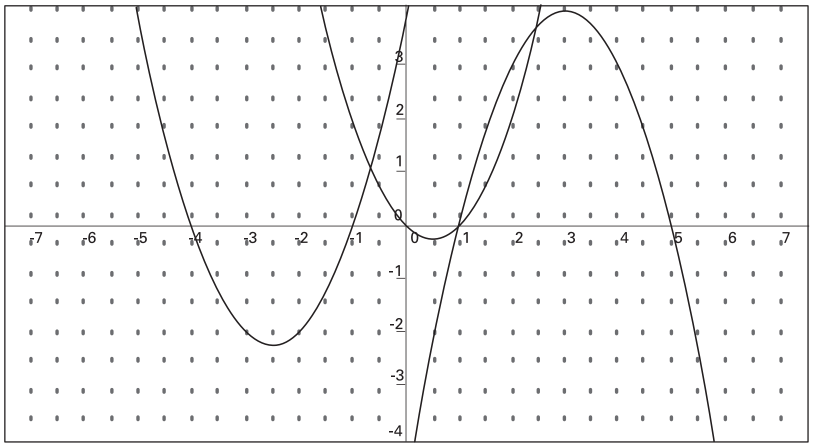


Actividad 7

Analizan las propiedades de las soluciones de una ecuación de segundo grado y su relación con la ecuación, el discriminante y el gráfico de la función correspondiente

Ejemplos A

- Analizar los gráficos de las funciones siguientes;
  - i) indicar las soluciones de la ecuación en cada caso.
  - ii) plantear la función cuadrática correspondiente considerando el coeficiente de x^2 es igual a 1.
  - iii) escribir las ecuaciones considerando el parámetro a igual a 1.



INDICACIONES AL DOCENTE

Es necesario que los estudiantes relacionen las soluciones de una ecuación cuadrática con los puntos de intersección de la función con el eje x; que puedan explicitar la ecuación y la función conociendo las soluciones de una ecuación. Se sugiere que consideren primero funciones con parámetro a igual a 1 para generalizar posteriormente.

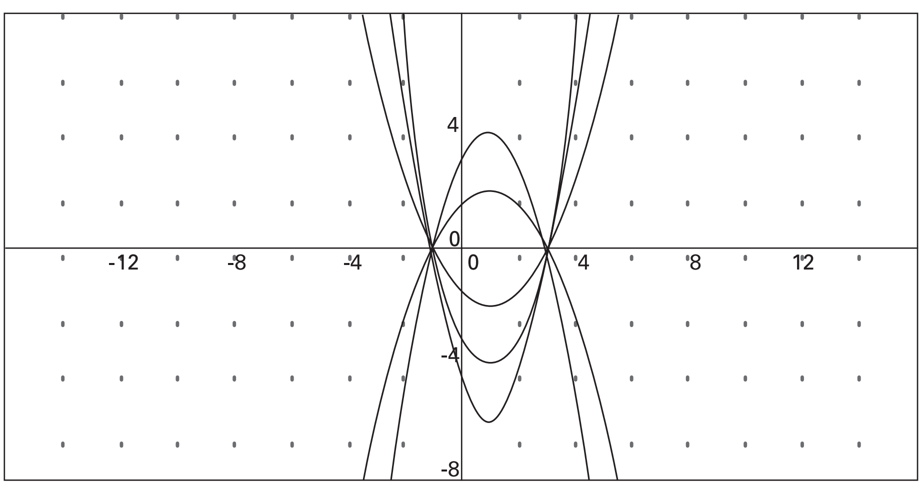
Ejemplo B

- Plantear algunas ecuaciones equivalentes y familia de funciones a partir de las soluciones de una ecuación cuadrática:

INDICACIONES AL DOCENTE

Interesa que los alumnos y alumnas constaten que a partir de las soluciones de una ecuación se pueden generar infinitas ecuaciones equivalentes. Además, que a cada una de estas ecuaciones se le puede asociar una función cuadrática.

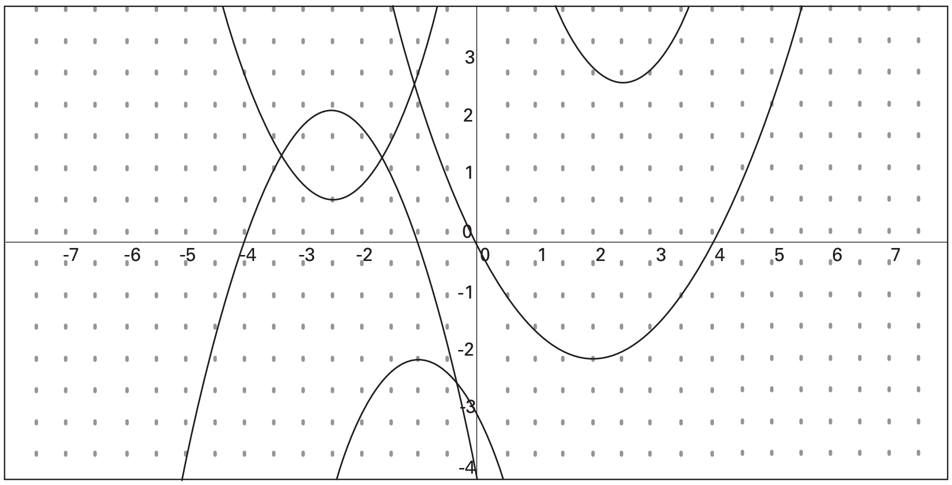
Utilizando el programa computacional Graphmatica se pueden graficar familias de parábolas. Con la instrucción $y = a(x - 3)(x + 1)$ $\{a : -1, 1.5, 0.5\}$ se obtiene el gráfico siguiente



Los valores que pueda tomar el parámetro a quedan definidos en la expresión entre paréntesis de llave: los dos primeros números indican los valores mínimo y máximo y el tercer número señala los incrementos sucesivos.

Ejemplo C

- En el gráfico que sigue, asociar el gráfico de una función con el tipo de solución de la ecuación cuadrática y el signo del discriminante en la fórmula de la solución.



Ejemplo D

- Asociar la posición relativa del gráfico de las siguientes funciones considerando el valor del discriminante:

$y = 3x^2 - 8x - 4$

$y = 0{,}5x^2 + x + 1$

$y = 4x^2 + 3x + 2$

$y = 4x^2 - 4x + 1$

INDICACIONES AL DOCENTE

El signo del discriminante y si el parámetro a es positivo o negativo son suficientes para determinar la ubicación relativa del gráfico de estas funciones.

Ejemplo E

- Determinar el rango del parámetro k de modo que las ecuaciones siguientes tengan raíces reales:

i) $k\,x^2 + 9\,x - 1 = 0$

ii) $2x^2 + \mathrm{k}x - k^2 = 0$

iii) $kx^2 + 4x + k = 0$

iv) ¿Para qué valores de k, la ecuación

$k^2x^2 + 2(k+1)x + 4 = 0$ tiene sólo una raíz real?

INDICACIONES AL DOCENTE

En este ejemplo se trata de encontrar todos los valores de k para los cuales se satisface la condición pedida. Excepto en el último problema, ello lleva a plantear y resolver inecuaciones.

Ejemplo F

- Considerar la ecuación $x^2 + mx + n = 0$. ¿Qué valores deben tomar m y n para que m y n sean las soluciones de la ecuación?

INDICACIONES AL DOCENTE

La igualdad $(x - m)(x - n) = x^2 + mx + n$ permite calcular los valores pedidos. Se sugiere abrir espacio para que los estudiantes busquen sus propios procedimientos, los comparen, reconozcan sus errores y hagan la opción por el que consideren más conveniente.

Ejemplo G

- ¿Para qué valores de a la ecuación siguiente tiene sólo una raíz? ¿cuál es esa raíz?

$$x^2 + 2ax\sqrt{a^2 - 3} + 4 = 0$$

INDICACIONES AL DOCENTE

La ecuación que se genera al igualar el discriminante a cero, es una ecuación bicuadrática; al resolverla se obtiene una solución negativa para a^2, que se debe desestimar.

Actividades para la evaluación y ejemplos

Las actividades que se proponen a continuación se complementan con algunos ejemplos. Para cada ejemplo se propone un conjunto de indicadores que importa tener en cuenta para evaluar el logro de los aprendizajes esperados por el alumno o alumna.

Estos indicadores son concordantes con los siguientes criterios de evaluación, ya descritos en la presentación de este programa:

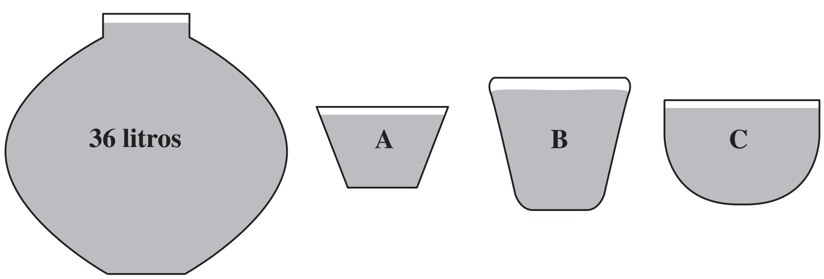
- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas.
- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático.
- Organización y estructuración de conceptos matemáticos.
- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios.

Actividad 1

Resuelven problemas, plantean la ecuación o el sistema correspondiente, analizan la pertinencia de las soluciones obtenidas.

Ejemplo A

- Se dispone de un recipiente de 36 litros de capacidad y de tres medidas: A, B y C, como lo indica el dibujo.



Se sabe que el volumen de A es el doble del de B, que las tres medidas llenan el depósito y que las dos primeras lo llenan hasta la mitad. ¿Qué capacidad tiene cada medida?

Observar si:

i) definen adecuadamente las incógnitas;

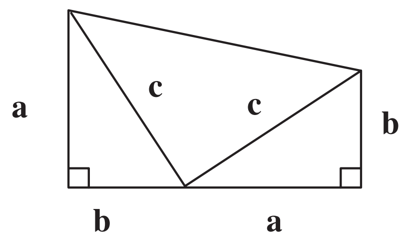
ii) plantean el sistema de ecuaciones y lo resuelven;

iii) resuelven mentalmente el problema;

iv) lo resuelven por ensayo y error.

Ejemplo B

- De acuerdo al dibujo siguiente demostrar el Teorema de Pitágoras, a partir del área del trapecio expresada de dos formas diferentes.



Observar si:

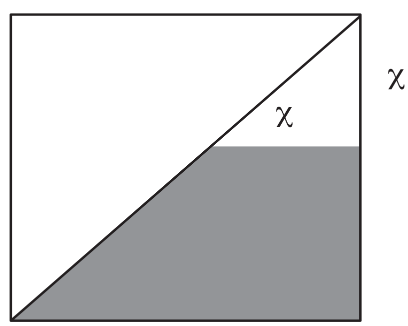
i) relacionan con el área de un trapecio;

ii) para calcular la suma del área de los tres triángulos, se dan cuenta que es necesario demostrar que el ángulo que forman los lados c es recto;

iii) resuelven sin dificultad los cálculos algebraicos.
Nota: Esta demostración la propuso Abraham Garfield (1831-1881) quien fue presidente de Estados Unidos.

Ejemplo C

- En el siguiente dibujo, determinar x para que el área ennegrecida sea igual a la cuarta parte del cuadrado.



Observar si:

i) suponen una medida general para el cuadrado;

ii) plantean correctamente la ecuación;

iii) relacionan con el triángulo formado por las medias diagonales;

iv) resuelven un caso particular.

Actividad 2

Tienen fluidez en la realización de rutinas básicas que involucran operatoria con expresiones algebraicas y las relacionan con situaciones numéricas.

Ejemplo A

- Completar la tabla siguiente, de acuerdo a los valores dados para x, sabiendo que una de las siguientes expresiones encabeza cada una de las tres columnas.
  $3x^2 - 9$; $3(x^2 - 9)$; $(3x)^2 - 9$

x			
-3			
-2			
-1	0		
0	-9	- 9	
1		- 6	- 24
2			

Observar si:

i) se dan cuenta que el valor 0 no les permite discriminar totalmente las columnas;

ii) reconocen el rol de los paréntesis.

Ejemplo B

- Completar la tabla siguiente, de acuerdo a los valores dados para x, sabiendo que una de las siguientes expresiones encabeza cada una de las cuatro columnas.

$$x + \frac{1}{x} - 1 \ ; \quad x + \frac{1}{x - 1} \ ; \quad \frac{x + 1}{x} - 1 \ ; \ \frac{x + 1}{x - 1}$$

Expresar oralmente o por escrito la diferencia que perciben entre el lenguaje matemático y el habitual.

x				
-1				
- 0,25				
- 0,50				
1,25	9			
2	3	1,5	0,5	3

Observar si:

i) interpreten bien el significado de expresiones fraccionarias;

ii) expresan la diferencia entre el lenguaje habitual 'x más uno partido por x menos uno' y la precisión matemática.

Ejemplo C

- Completar las igualdades siguientes:

i) $4x^2 + \ldots + \ldots = (\ldots + 5)^2$

ii) $\ldots - 12x + 4 = (\ldots - \ldots)^2$

Ejemplo D

- ¿Qué valores debiera tomar m en las siguientes expresiones para que sean factorizables como cuadrados de binomio?

i) $x^2 - 6x + m$

ii) $(3x)^2 + mx + 16$

Observar (ejemplos c y d):

i) el procedimiento seguido para determinar el valor del parámetro;

ii) si hay claridad sobre los cuadrados de binomio;

iii) en qué números se equivocan, si esto sucediera.

Ejemplo E

- Demostrar que para cualquier par de enteros positivos x e y, el triángulo de lados $2xy$; $x^2 - y^2$; $x^2 + y^2$ es un triángulo rectángulo (se supone, por supuesto, que $x^2 - y^2 > 0$).

  Observar si:

  i) hacen algún dibujo e intentan asignarle las expresiones algebraicas a los lados;

  ii) establecen relaciones entre las expresiones al cuadrado para determinar los catetos y la hipotenusa;

  iii) en qué se equivocan, si así fuera, al desarrollar los cuadrados de binomio.

Actividad 3

Resuelven problemas y ejercicios que involucran cálculo con raíces

Ejemplo A

- Determinar la altura de:

  i) un triángulo equilátero de lado a cm.

  ii) un tetraedro regular de arista a cm.

  Observar si:

  i) apoyan la visualización del problema en un dibujo;

  ii) recurren al Teorema de Pitágoras en su solución;

  iii) distinguen el triángulo rectángulo que se forma con la altura del tetraedro, una arista y una parte de la altura o transversal de gravedad del triángulo basal.

Ejemplo B

- Averigüe si la tabla que sigue responde a una función de la forma $y = m\ x$ ¿cuál sería el valor de m?

x	$\sqrt{36}$	$\sqrt{12}$	$2 + \sqrt{20}$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{14}$	1
y	$\sqrt{9}$	$\sqrt{3}$	$1 + \sqrt{5}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{7}{2}}$	$\sqrt{0{,}25}$

Observar si:

i) lo relacionan con la proporcionalidad;

ii) calculan cuocientes para determinar m.

Ejemplo C

- Determine el valor de la siguiente expresión:

$$\sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{11\ \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}}} =$$

Observar si descubren que para calcular el valor debe irse de adentro hacia afuera.

Ejemplo D

- Construir la expresión correspondiente a 5 y 6 siguiendo la secuencia que se indica a continuación:

$$2 = \frac{1+3}{\sqrt{1+2+1}}$$

$$3 = \frac{1+3+5}{\sqrt{1+2+3+2+1}}$$

$$4 = \frac{1+3+5+7}{\sqrt{1+2+3+4+3+2+1}}$$

Describir la regularidad, generalizar para cualquier número n y establecer la relación

$$\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}}$$

Observar:

i) qué número asocian con n y si son coherentes con esa elección;

ii) si descubren que el numerador es la suma de los primeros números impares consecutivos;

iii) si establecen la relación entre numerados y denominador.

Actividad 4

Resuelven ecuaciones cuadráticas; proponen ecuaciones a partir de la soluciones.

Ejemplo A

- Resuelven la ecuación:

$$\sqrt{x(3+x)} = 2$$

Observar si:

i) eleva al cuadrado ambos miembros o se olvida del segundo miembro;

ii) si comprueba las soluciones o determina un rango de validez para la incógnita.

Ejemplo B

- Escriben una ecuación cuyas soluciones son $(1 \pm \sqrt{2})$.

Observar si:

i) suman y multiplican las raíces para obtener los parámetros b y c, aceptando que $a = 1$.

ii) escriben la ecuación como producto de dos binomios;

iii) consideran valores distintos de 1 para el parámetro a.

Unidad 2

Lugares geométricos

Contenidos mínimos

a. Distancia entre dos puntos del plano.
b. La circunferencia como lugar geométrico. Deducción de la ecuación de la circunferencia con centro en el origen. Gráfico. Ecuación de la circunferencia trasladada.
c. Relación de la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ con la semicircunferencia. Análisis de los posibles valores de x.
d. Resolución gráfica y analítica de problemas sencillos que involucren rectas, circunferencia y parábola.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y las alumnas:

1. Reconocen que los lugares geométricos se pueden describir mediante ecuaciones cartesianas.
2. Reconocen la recta, circunferencia, elipse y parábola a partir de las ecuaciones cartesianas que las caracterizan.
3. Resuelven problemas que involucran intersecciones y/o posiciones relativas de lugares geométricos.

Orientaciones didácticas

En el año 1637, René Descartes publicó su famoso tratado "El discurso del método", y en uno de sus apéndices se sientan las bases de su entonces innovador acercamiento analítico a la geometría, lo cual significó un paso trascendente en la visión integrada que se tiene hoy de la matemática.

En la enseñanza escolar, el tema de los lugares geométricos, el conjunto de puntos que satisface ciertas condiciones determinadas, permite promover el pensamiento asociado a imágenes y relacionar claramente los registros gráfico, algebraico y numérico.

Puede ser interesante construir algunos lugares geométricos con compás y escuadra, o bien con un programa computacional y expresarlo analíticamente.

Con el propósito de no perder de vista que vivimos en un espacio tridimensional, en el desarrollo de esta unidad, para algunos lugares geométricos se extiende su descripción desde el plano al espacio tridimensional; así se establece una relación entre la circunferencia y la esfera; entre el cilindro y las rectas paralelas trazadas a ambos lados de una recta dada.

Además, en relación con la intersección de lugares geométricos, es interesante discutir la relación entre las posiciones relativas de los elementos iniciales y las características de dicha intersección.

Finalmente interesa el estudio inicial de las cónicas: circunferencia, elipse y parábola. La parábola como función cuadrática es tema de estudio en la Formación General; en este programa se avanza un poco en relación con la circunferencia y elipse. Es importante mencionar a los estudiantes que las secciones cónicas han jugado un rol central en la ciencia, especialmente en el siglo XVII cuando Kepler descubrió y Newton explicó que los cuerpos celestes se mueven en trayectorias que son secciones cónicas. En la actualidad las propiedades de reflexión tanto de la parábola como de la elipse tienen variadas explicaciones en los ámbitos de la transmisión de ondas.

Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Analizan y construyen algunos lugares geométricos, relacionando las formas geométricas que satisfacen una misma condición, en el plano y en el espacio; determinan la intersección de lugares geométricos y, con apoyo de modelos físicos o representaciones gráficas reales o virtuales, discuten las condiciones que deben cumplir los elementos iniciales para que esta intersección tenga uno, varios, infinitos o ningún elemento.

Ejemplo A

- Determinar la ubicación de los puntos que se ubican a una misma distancia de una recta dada. ¿Qué forma adquiere este conjunto de puntos en el plano? ¿Qué forma toma este conjunto de puntos en el espacio de tres dimensiones?

Ejemplo B

- Determinar el conjunto de puntos que tienen una distancia dada a un punto determinado. ¿Qué forma adquiere este conjunto de puntos en el plano? ¿Qué forma toma este conjunto de puntos en el espacio de tres dimensiones?

INDICACIONES AL DOCENTE (EJEMPLOS A Y B)

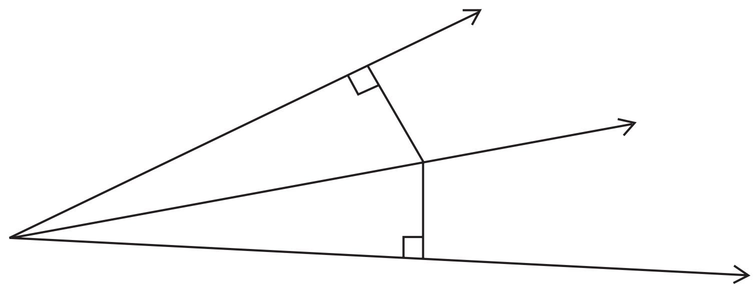
Al extender al espacio de tres dimensiones los clásicos lugares geométricos de la circunferencia y de las paralelas trazadas a ambos lados de una recta, se enriquece la imaginación geométrica de los estudiantes. Es interesante relacionar la circunferencia con la esfera y las rectas paralelas a ambos lados de una tercera, con un cilindro infinitamente alto cuyo manto equidista del eje central.

Ejemplo C

- Determinar la ubicación de los puntos tales que para cada punto, la distancia entre dicho punto y ambas rectas es la misma.

INDICACIONES AL DOCENTE

Para los alumnos y alumnas la bisectriz de un ángulo es un lugar geométrico conocido; sin embargo, muchos no logran visualizar con claridad el significado de la equidistancia a los lados del ángulo. Es importante representar esta propiedad en dibujos en los que se evidencie la identificación entre distancia de un punto a una recta y la perpendicular correspondiente.



Si el problema se visualiza como dos rectas que se intersectan, será interesante demostrar que además, las bisectrices a los ángulos que se forman, son perpendiculares entre sí.

Ejemplo D

- Dados tres puntos cualesquiera, determinar el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma distancia a cada uno de ellos. Analizar las soluciones en relación con la posición relativa de los tres puntos dados.

Ejemplo E

- Dados una recta y dos puntos, determinar el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia q de la recta y que la distancia en relación con los dos puntos es la misma. Analizar las soluciones en relación con la posición relativa de la recta y los puntos.

INDICACIONES AL DOCENTE (EJEMPLOS D Y E)

En ambos ejemplos, la solución corresponde a la intersección de dos lugares geométricos.

En el ejemplo D, interesa que los alumnos y alumnas determinen el centro de la circunferencia circunscrita y visualicen que si los tres puntos son colineales, no hay un punto privilegiado que equidiste de los tres puntos dados.

En el ejemplo E, este análisis sobre la existencia de las soluciones es un poco más complejo que el anterior: existe un máximo de dos soluciones si la simetral intersecta a las paralelas y no hay puntos privilegiados si la simetral es paralela a la recta dada.

Ejemplo F

- Dado un punto R y un plano P, determinar el lugar geométrico de los puntos que están a una misma distancia de R y están a una distancia q del plano P. Discutir las soluciones.

Ejemplo G

- En el espacio, determinar los puntos que están a una distancia p de una recta y están a una misma distancia de un punto dado R. Discutir la existencia de las soluciones

INDICACIONES AL DOCENTE (EJEMPLOS F Y G)

Es posible que algunos alumnos y alumnas necesiten la experiencia concreta para tener una imagen de la intersección de los lugares geométricos que son la solución en ejemplos de este tipo.

Es interesante, para el ejemplo F, que los estudiantes se den cuenta que la intersección de un plano con una esfera, en cualquier posición, es siempre una circunferencia.

Además, en relación con estos ejemplos, el plano o cilindro pueden ser tangentes o simplemente no intersectarse con la esfera. Es interesante especificar las posiciones relativas del centro de la esfera y el plano o el cilindro para que estas soluciones se produzcan.

Actividad 2

Establecen la expresión analítica de algunos lugares geométricos; relacionan las representaciones gráficas de algunos lugares geométricos que son rectas con la expresión analítica de ellas.

Ejemplo A

- Dados dos puntos A y B en un sistema de coordenadas cartesianas; determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que la distancia entre cada uno de esos puntos a A y a B sea la misma.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es recomendable considerar, inicialmente, dos puntos A y B con coordenadas numéricas para posteriormente plantear el problema en su forma general.

Al resolverlo, es posible que algunos alumnos consideren las coordenadas del punto medio entre A y B; con este dato determinen la ecuación de la recta que pasa por ese punto y es perpendicular a la recta que pasa por A y B.

Otros podrán buscar al ecuación considerando el problema resuelto: si un punto P de coordenadas (x,y) pertenece a la simetral, entonces equidista de los puntos A y B; escribiendo analíticamente esta propiedad se determina la ecuación de la simetral.

Es interesante comentar con los estudiantes sobre la lógica de ambos procedimientos; en el primero subyace el conocimiento geométrico de algunas propiedades de la simetral: perpendicular en el punto medio. En el segundo se trabaja directamente con las condiciones pedidas en el problema.

Ejemplo B

- En un sistema de coordenadas cartesianas, conocida la ecuación de dos rectas paralelas, determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que tienen la misma distancia a ambas rectas.

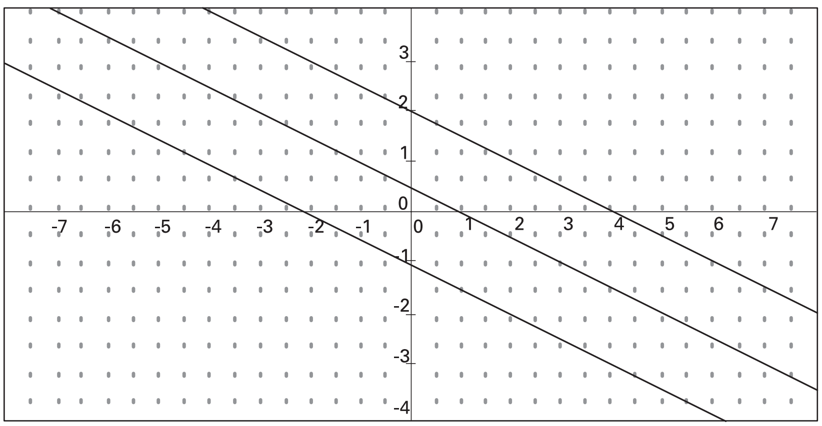
INDICACIONES AL DOCENTE

Será interesante constatar que la paralela media entre dos rectas de la forma

$$y = m_1 x + n_1$$

$$y = m_1 x + n_2$$

es la recta $y = m_1 x + \frac{n_1 + n_2}{2}$



Complementar este ejemplo pidiendo a los alumnos y alumnas que anticipen y después constaten analíticamente si el punto medio entre dos puntos cualesquiera, uno de cada recta paralela, es también punto de la paralela media. Relacionar con el Teorema de Thales ya estudiado con anterioridad.

Si se estima conveniente se puede proponer, en esta misma línea de trabajo, que los alumnos y alumnas establezcan las ecuaciones de las dos rectas paralelas a una distancia determinada, a una recta dada.

Actividad 3

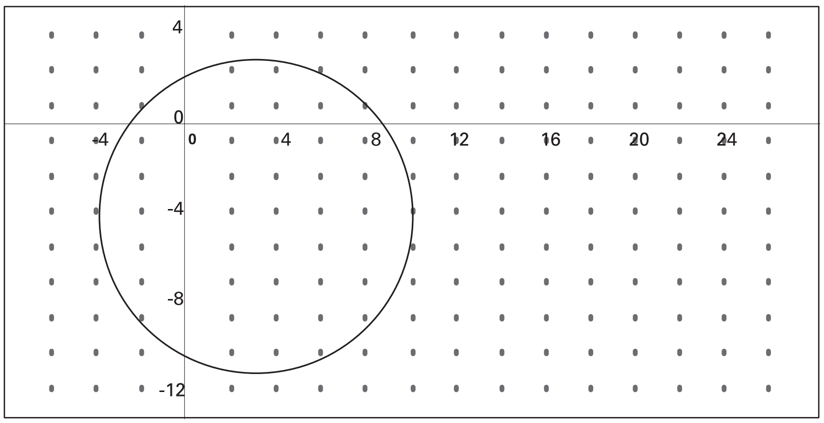
Caracterizan la circunferencia, elipse y parábola como un lugar geométrico y establecen sus correspondientes ecuaciones analíticas.

Ejemplo A

- Escribir la ecuación de la circunferencia de centro P (3, -4) y radio 7 cm.

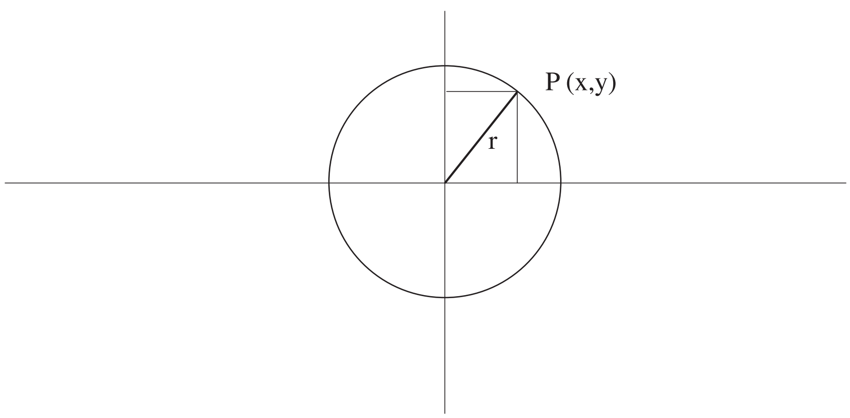
INDICACIONES AL DOCENTE

Es conveniente que los alumnos y alumnas dibujen aproximadamente lo que se solicita para darle sentido a las relaciones que anoten.



La ecuación con los cuadrados de binomio explícitos se relaciona directamente con el dibujo. Es necesario poner atención a los signos de las coordenadas del punto centro: $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 49$.

Con anterioridad a este ejemplo es necesario establecer la ecuación de una circunferencia centrada en el origen y de radio r, utilizando la noción de distancia entre dos puntos en el plano.



Es necesario hacer notar que la escritura $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ que deriva de la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, representa sólo la semicircunferencia ubicada en la parte positiva del eje y, dado que está definida como una raíz cuadrada. También se puede anotar la semicircunferencia que se ubica en la parte negativa del eje y.

Puede ser oportuno, sentar las bases para la formalización de estudio del concepto de función, que será estudiado en Cuarto Año Medio, valorándolo como una precisión en la interpretación del valor único para y dado un determinado valor de x.

Ejemplo B

- Ubicar en un plano cartesiano los puntos $(3,2)$; $(5,4)$; $(3,6)$; $(1,4)$; $(1{,}5 ; 4 - \sqrt{1{,}75})$; $(4{,}5 ; 4 + \sqrt{1{,}75})$;

  Establecer a qué lugar geométrico podrían pertenecer.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante que los alumnos y alumnas reconozcan la utilidad de un buen dibujo, que les permita conjeturar que los puntos podrían pertenecer a una circunferencia.

Tras la determinación de las coordenadas del centro y del radio, es necesario que verifiquen que la distancia de cada punto al centro de la circunferencia es efectivamente el radio deducido.

Finalmente, es conveniente que escriban la ecuación del lugar geométrico deducido.

Ejemplo C

- Determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P tal que la distancia de (1,2) a P sea el doble de la distancia de (4,-1) a P.

INDICACIONES AL DOCENTE

La resolución de este problema requiere plantear la ecuación

$d\,((x,y)\,,(1,2)) = 2d\,((x,y)\,,(4,-1))$ con $P = (x,y)$

Un adecuado manejo de esta ecuación lleva a $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 8$, es decir, el lugar geométrico pedido es una circunferencia centrada en (5,-2) y de radio $2\sqrt{2}$.

Ejemplo D

i) ¿Para qué valores de x tiene sentido la expresión $y = \sqrt{4 - x^2}$?

ii) Hacer el gráfico de $y = \sqrt{4 - x^2}$ ¿Qué figura representa?

iii) Escribir la ecuación de la circunferencia que contiene a la figura anterior.

iv) Escribir la ecuación de la semicircunferencia inferior.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es recomendable generalizar al caso $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y observar que los valores permitidos para r se encuentran en el intervalo [-r, r]

Para hacer el gráfico pedido puede hacerse una tabla de valores que considere las restricciones para x (puede ser un buen momento para introducir la notación $f\,(x) = \sqrt{4 - x^2}$, en donde x es la variable independiente).

También puede usarse una calculadora gráfica o un programa computacional y, también, es posible utilizar el recurso algebraico de elevar al cuadrado obteniendo así la ecuación de la circunferencia y notando que y es mayor o igual que cero.

Ejemplo E

i) ¿Qué lugar geométrico en el plano representan las siguientes ecuaciones?

a) $$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$$

b) $$\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$$

ii) ¿Qué lugar geométrico en el plano representa la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Grafíquela ¿Qué sentido tienen los números 9 y 4 en su gráfica?

INDICACIONES AL DOCENTE

Será interesante que los alumnos y alumnas utilicen un graficador; su uso les permitirá establecer rápidamente las relaciones entre el gráfico, la expresión analítica del mismo y el rol de los números.

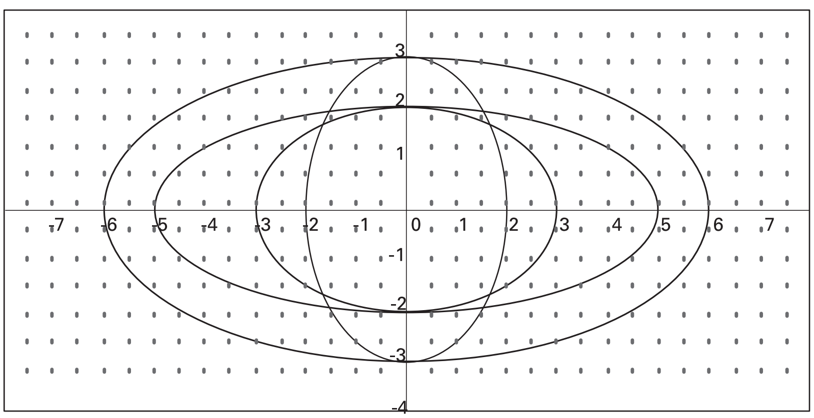
Es posible que algunos alumnos y alumnas tiendan a resolver los binomios al cuadrado que están en la segunda ecuación; importa que se den cuenta que no es necesario, que es más evidente la información en su forma de binomio.

Si se considera pertinente se puede obtener la ecuación general de la elipse centrada, como un lugar geométrico.

Se sugiere establecer la relación entre la circunferencia y la elipse y hacer referencia a las cónicas; se puede pedir que los alumnos y alumnas investiguen sobre estos lugares geométricos, que los construyan, que establezcan las relaciones con los diferentes cortes en el cono, entre otras acciones posibles.

Ejemplo F

- ¿Cuáles son las ecuaciones de las elipses del siguiente dibujo?



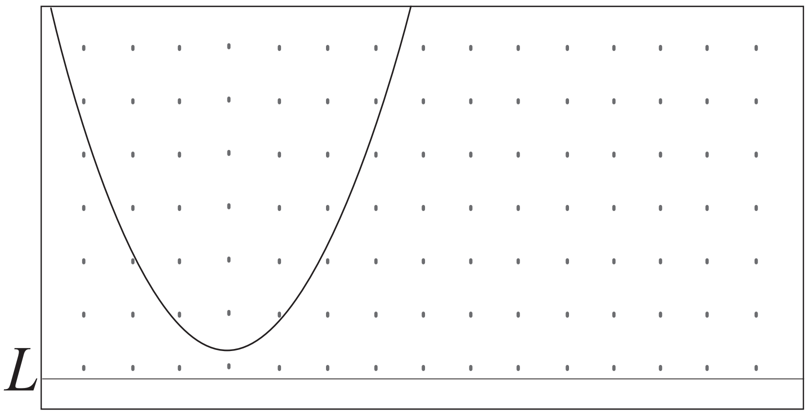
INDICACIONES AL DOCENTE

Es aconsejable que los alumnos y alumnas asocien los interceptos con los ejes del sistema de coordenadas con los parámetros a y b de la ecuación de la elipse.

Es conveniente dibujar una elipse artesanalmente para que la frase 'la suma de las distancias a los focos es constante' tenga sentido y sea comprendida por los alumnos y alumnas.

Ejemplo G

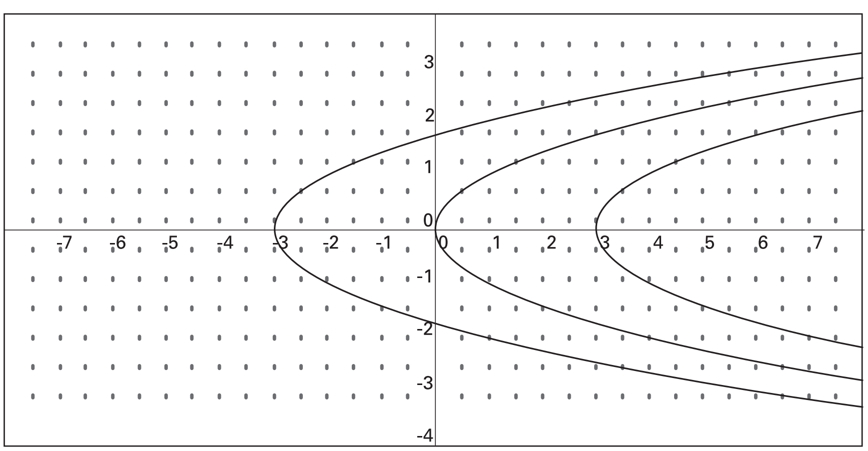
- Establecen nexos entre la parábola como lugar geométrico y la función considerando una parábola con vértice en el origen, como lo indica el dibujo.



INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante que los alumnos y alumnas identifiquen la parábola en su expresión analítica con el lugar geométrico correspondiente. Si (x , y) es un punto de la parábola, éste satisface las condiciones del lugar geométrico, de donde: $d\ ((x , y) , (0, p)) = d\ ((x , y), L\ )$ en que $(0 , p)$ son las coordenadas del foco y L la recta directriz. Se obtiene la ecuación $y = \frac{x^2}{4p}$

Se sugiere que los estudiantes reconozcan que gráficos como los siguientes corresponden a parábolas cuyas ecuaciones no son funciones.



Actividad 4

Resuelven problemas relativos a circunferencia, elipse, parábola y rectas.

Ejemplo A

- Determinar el centro y radio de una circunferencia cuya ecuación es

  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

INDICACIONES AL DOCENTE

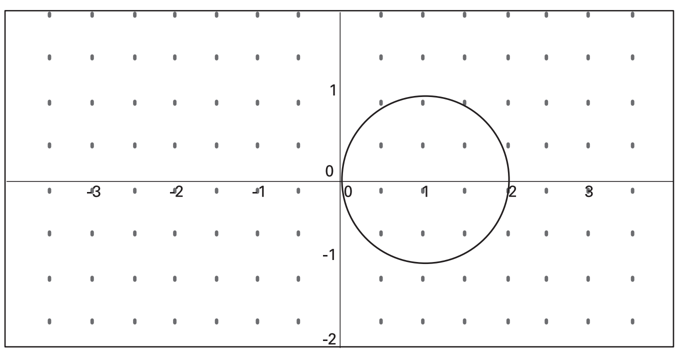
Es importante que los alumnos y alumnas desarrollen destrezas para completar cuadrados y utilizando dicho procedimiento puedan determinar los parámetros pedidos.

Ejemplo B

- Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos de coordenadas (0,0); (2,0) y (1,1).

INDICACIONES AL DOCENTE

Se sugiere que los alumnos y alumnas dibujen la circunferencia que satisface las condiciones que se piden.



Un buen dibujo es siempre un buen apoyo para la reflexión.

En este caso, a partir del dibujo se puede anotar, a partir de la forma general, si h y k son las coordenadas del centro,

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, luego

$(x - 1)^2 + y^2 = 1$

También se podría resolver sustituyendo en la forma general los valores de las coordenadas de los puntos y calculando a partir de las ecuaciones resultantes las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia.

i) (0, 0) pertenece a la circunferencia: $h^2 + k^2 = r^2$

ii) (2, 0) pertenece a la circunferencia: $(2 - h)^2 + k^2 = r^2$

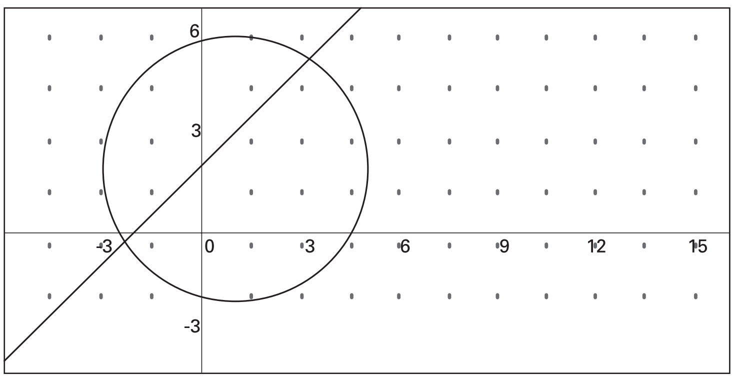
iii) (1, 1) pertenece a la circunferencia: $(1 - h)^2 + (1 - k)^2 = r^2$
ecuaciones que permiten calcular h, k y r.

Ejemplo C

- Determinar los puntos de intersección de la recta $y = x + 2$ con la circunferencia de centro el punto de coordenadas (1, 2) y de radio igual 2.

INDICACIONES AL DOCENTE

Después de dibujar la recta y la circunferencia definidas en el problema, será necesario resolver el sistema de ecuaciones que, tal como puede verse en la figura, tiene dos soluciones.

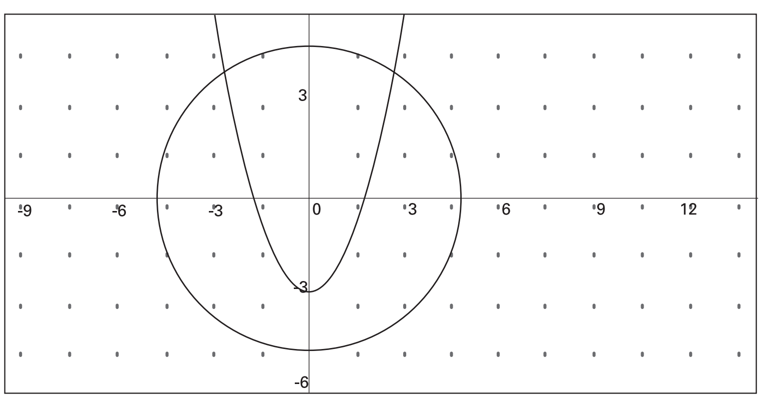


Si se estima pertinente puede extenderse el problema a la búsqueda de la ecuación de una recta paralela a la recta dada tal que su intersección con la circunferencia sea sólo un punto.

Ejemplo D

- ¿Cuáles son los puntos de intersección de la parábola $y = x^2 - 3$ con la circunferencia de centro en el origen y radio $\sqrt{23}$? Graficar ambas curvas y determinar las condiciones para que existan 3, 4 o no existan puntos de intersección entre la parábola y la circunferencia.

INDICACIONES AL DOCENTE



En este caso, al resolver el sistema de ecuaciones es recomendable el uso de incógnita auxiliar.

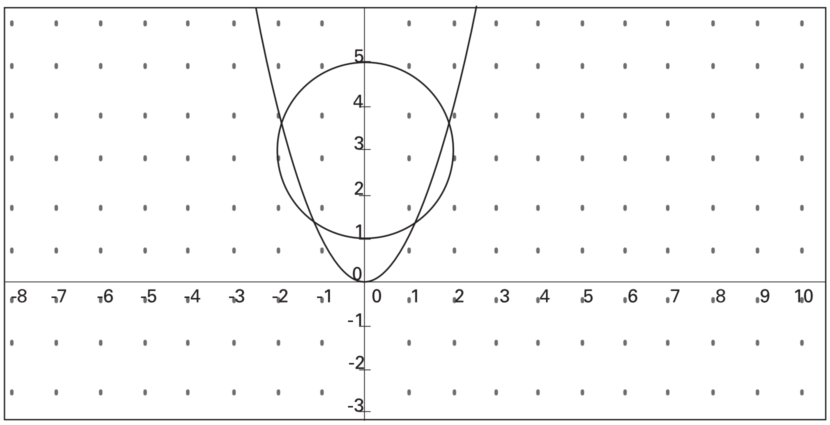
Ejemplo E

- Suponga que una circunferencia con centro en el eje y intersecta a una parábola $y = x^2$, en cuatro puntos de coordenadas (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_3, y_3) ; (x_4, y_4).

  Demostrar que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante hacer una figura que represente la situación para notar que las coordenadas del centro de la circunferencia deben ser de la forma $(0, k)$ con $k > 0$ y el radio arbitrario. La resolución requiere de un ordenado manejo algebraico.



Ejemplo F

- Encontrar las ecuaciones de las dos tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ que pasan por el punto (3, 0)

INDICACIONES AL DOCENTE

La resolución de este problema permite conjugar variados conocimientos: que las tangentes son perpendiculares a los radios en el punto de tangencia, que el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es igual a -1, la resolución de sistemas de ecuaciones, la ecuación de la recta que pasa por dos puntos y otros.

Considerando la perpendicularidad de una de las tangentes con el radio se puede escribir ;

$$\frac{y}{x-3} \cdot \frac{y^2}{x} = -1 \ ;$$

la resolución del sistema de ecuaciones

$x^2 + y^2 = 3x$

$x^2 + y^2 = 4$

permite determinar las coordenadas de uno de los dos puntos de tangencia.

Actividades para la evaluación y ejemplos

Las actividades que se proponen a continuación se complementan con algunos ejemplos. Para cada ejemplo se propone un conjunto de indicadores que importa tener en cuenta para evaluar el logro de los aprendizajes esperados por el alumno o alumna.

Estos indicadores son concordantes con los siguientes criterios de evaluación, ya descritos en la presentación de este programa:

- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas.
- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático.
- Organización y estructuración de conceptos matemáticos.
- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios.

Actividad 1

Determinan algunos lugares geométricos en el plano y en el espacio.

Ejemplo A

- Determinar el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia de tres rectas que se intersectan.

Observar si:

i) consideran que las tres rectas pueden formar un triángulo; en ese caso, trazan las bisectrices;

ii) consideran tres rectas paralelas que intersectan a una tercera; si trazan las bisectrices de los ángulos;

iii) consideran las tres rectas concurrentes a un solo punto y la distancia la igualan a cero.

Ejemplo B

- Determinar el punto que equidista de los vértices de:

i) un triángulo cualquiera;

ii) un rectángulo;

iii) un rombo.

Observar si:

i) dibujan las situaciones;

ii) generalizan considerando el punto de intersección de las simetrales, sin hacer mayor análisis;

iii) desarrollan alguna estrategia para ubicar el punto central;

iv) se dan cuenta que no hay tal punto para el rombo.

Actividad 2

Determinan la ecuación de una circunferencia si conocen algunos elementos básicos que la definan.

Ejemplo A

- Determinan la ecuación de la circunferencia tangente a los ejes en los puntos (3,0) y (0,-3).

Observar si:

i) hacen un dibujo;

ii) determinan desde el gráfico las coordenadas del centro y la medida del radio;

iii) escriben la ecuación recurriendo a los binomios o los desarrollan.

Ejemplo B

- Determinar el lugar geométrico de los puntos que son centros de las circunferencias tangentes a los ejes de un sistema de coordenadas cartesiano.

Observar si:

i) dibujan varias circunferencias que cumplan la condición de tangencia a los ejes;

ii) consideran sólo el cuadrante positivo;

iii) consideran la recta $y = x$ como el lugar geométrico pedido;

iv) incorporan la recta $x = -y$ como perteneciente a dicho lugar geométrico.

Actividad 3

Resuelven problemas que involucran la resolución de sistemas de ecuaciones que incluyen parábola y circunferencia.

Ejemplo A

- Determinar los puntos de intersección de la circunferencia con centro en el origen y radio igual a $\sqrt{2}$ y la recta $y + x = 0$.

  Observar si:

  i) hacen un dibujo y determinan las soluciones sin necesidad de hacer cálculos;

  ii) plantean ambas ecuaciones,

  iii) resuelven el sistema,

  iv) determinan las dos soluciones.

Ejemplo B

- Determinar los puntos de intersección de la elipse de ecuación

  $$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$$

  y la circunferencia de centro en el origen y radio igual a $\sqrt{5}$. ¿Para qué valores del radio de la circunferencia ambas curvas se intersectan?

  Observar si:

  i) hacen un dibujo de ambas curvas;

  ii) plantean y resuelven el sistema de ecuaciones;

  iii) determinan el rango para el radio de la circunferencia.

Unidad 3

Programación lineal

Contenidos Mínimos

a. Inecuaciones lineales con dos incógnitas. Descripción de un semiplano por medio de una inecuación lineal con dos incógnitas. Gráfico de semiplanos e intersección de ellos. Relación entre ecuaciones e inecuaciones lineales.
b. Resolución gráfica de sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.
c. Programación lineal en dos variables. Función objetivo. Planteo y resolución gráfica de problemas sencillos de programación lineal.
d. Uso de programas computacionales de manipulación algebraica y gráfica.

Aprendizajes esperados

1. Interpretan gráficamente la solución de un sistema de inecuaciones lineales.
2. Traducen las restricciones de un problema de programación lineal en un sistema de inecuaciones.
3. Reconocen y plantean la función objetivo en problemas de programación lineal.
4. Resuelven problemas sencillos que involucren procesos de optimización.

Orientaciones didácticas

Muchas de las aplicaciones de la matemática se relacionan con el problema de maximizar o minimizar una función dada. En el ámbito de los negocios, el problema es maximizar las ganancias, mientras que para los economistas debiera minimizarse los costos; en la medicina, se requiere encontrar la dosis óptima de un determinado medicamento que debe suministrarse a un paciente específico, y un deportista de alto rendimiento debiera tener una ingesta balanceada de carbohidratos y proteínas. Generalmente, los problemas de optimización están sujetos a restricciones en las variables involucradas. Por ejemplo, un empresario tiene como limitación una cantidad (finita) de capital, o el encargado de bodega de un supermercado dispone de un espacio limitado para almacenar la mercadería. También deben resolverse problemas de optimización en los ámbitos del transporte, planificación agropecuaria y muchos otros.

La programación lineal típicamente trata del problema de optimizar funciones lineales de varias variables sujetas a restricciones lineales, vale decir, asignar recursos limitados entre actividades competidoras en la mejor forma posible (óptima). En el presente programa se estudiarán sólo problemas que involucren dos variables.

La función lineal que se optimizará en un problema determinado recibe el nombre de función objetivo, mientras que la región del plano determinada por las restricciones recibe el nombre de región factible.

El teorema fundamental de la programación lineal señala que en un problema lineal con dos variables, si existe una solución única que optimice la función objetivo, ésta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible acotada, y nunca al interior de dicha región. Basándose en este teorema se podrá reconocer que un procedimiento para optimizar la función objetivo es:

i) hallar las coordenadas de los vértices de la región factible(ya sea gráfica o analíticamente);
ii) evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices. La solución óptima corresponderá al vértice en el cual esta función toma el valor máximo (o mínimo, según corresponda).

Otro procedimiento gráfico es el llamado método de las rectas de nivel. Las rectas de nivel corresponden a los puntos del plano en los que la función objetivo toma el mismo valor.

Si la función objetivo es $C(x,y) = ax + by$, las rectas de nivel tendrán ecuaciones de la forma $ax + by = k$ (k constante). Variando el valor de k se obtienen distintos niveles o puntos de corte de las rectas con la región factible. Notar que sobre cada recta de nivel, la función objetivo toma el mismo valor constante.

En el presente programa se propone en primer lugar intentar resolver algunos problemas típicos de programación lineal utilizando el método de ensayo y error, para enfrentarse a las dificultades de los problemas de optimización y para posteriormente comprender cabalmente la potencia de la programación lineal. Ello requiere, sin duda, de una adecuada capacidad de visualizar y/o dibujar las correspondientes regiones factibles, y por ende, comprensión de los sistemas de inecuaciones lineales en el plano.

Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Estudian problemas sencillos de optimización para percibir su sentido y características. Los resuelven recurriendo a sus conocimientos previos. Discuten las posibles soluciones, distinguiendo la solución óptima.

Ejemplo A

- Un colegio va a realizar un paseo. En total participarán 400 personas entre alumnos y profesores. Al llamar a una empresa de transportes, obtienen la siguiente información:

  La empresa dispone de 8 buses con 40 asientos y 10 buses con 50 asientos.

  Para el día del paseo habrá 9 choferes disponibles. El costo de arriendo es de $ 30 000 por cada bus de 40 asientos y de $40 000 por cada bus de 50 asientos.

  Antes de contratar los buses, el Director del colegio decide analizar cuántos buses de cada tipo les conviene arrendar para que el arriendo resulte lo más económico posible.

INDICACIONES AL DOCENTE.

Pedir a los alumnos que anticipen respuestas apelando a su intuición. Es probable que algunos indiquen que la solución óptima es 8 buses de 50 asientos, lo cual da un total de 400 asientos, con un costo de $320 000. Sin embargo existe otra solución más barata: 5 buses de 40 asientos y 4 buses de 50 asientos a un costo de $310 000. Hacer notar que esta solución contempla 9 buses en total, en vez de 8.

Es conveniente invitar a los alumnos y alumnas a llenar una tabla de valores como la siguiente:

Tabla de capacidad de asientos totales entre los dos buses:

Buses 40 asientos / Buses 50 asientos.	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	320	280							
1	370	330							
2	O	380	340						
3	O	O	390	350					
4	O	O	O	400					
5	O	O	O	O	410				
6	O	O	O	O	O	420			
7	O	O	O	O	O	O	430	390	
8	O	O	O	O	O	O	O	440	400
9	o	O	o	O	o	O	o	O	450

En la tabla se leen las combinaciones de buses que tienen capacidad de pasajeros igual o superior a 400, y es posible calcular que la combinación más económica es: 5 buses de 40 asientos y 4 buses de 50 asientos.

Ejemplo B

- Dos mataderos P y Q, se encargan de suministrar la carne consumida semanalmente en tres ciudades, R, S y T; en cada ciudad entregan 20, 22 y 14 toneladas respectivamente.

  El matadero P produce cada semana 26 toneladas de carne, mientras que el Q, 30. Se sabe que los costos de transporte, por tonelada de carne, desde cada matadero a cada ciudad, expresados en la misma unidad, están resumidos en la siguiente tabla:

	R	S	T
P	1	3	1
Q	2	1	1

Determinar cuál es la distribución de transporte que implica un costo mínimo.

INDICACIONES AL DOCENTE.

En los problemas sencillos de transporte se suele trabajar con la restricción que no se acumulará stock de productos, tanto en los mataderos como en las ciudades, es decir, todo lo que se produce es enviado y todo lo que se recibe en las ciudades es consumido.

Con el fin de que los estudiantes comprendan las dificultades involucradas en el planteo de un problema de este tipo es importante que anticipen respuestas apelando a su intuición.

Se podría sugerir a los alumnos y alumnas que inicien un análisis basándose en una tabla de costos como la siguiente:

	R (20)	S(22)	T(14)
P (26)	1	3	1
Q(30)	2	1	1

Es evidente que lo más caro es enviar desde P a S, y desde Q a R, por lo cual es posible intentar una solución asignando 0 toneladas a esas alternativas.

	R (20)	S(22)	T(14)
P (26)		0	
Q(30)	0		

Los demás valores quedan así determinados ya que, la ciudad R requiere 20 ton, S necesita 22 y T, sólo 14.

	R (20)	S(22)	T(14)
P (26)	20	0	6
Q(30)	0	22	8

Finalmente el costo de estas alternativa es:

$C = 20 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 22 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 20 + 6 + 22 + 8 = 56$ unidades de costo.

Si la unidad de costo fuese $40 000, lo anterior significa que el costo de la alternativa es $56 \cdot 40.000 =$ $2.240.000.

Actividad 2

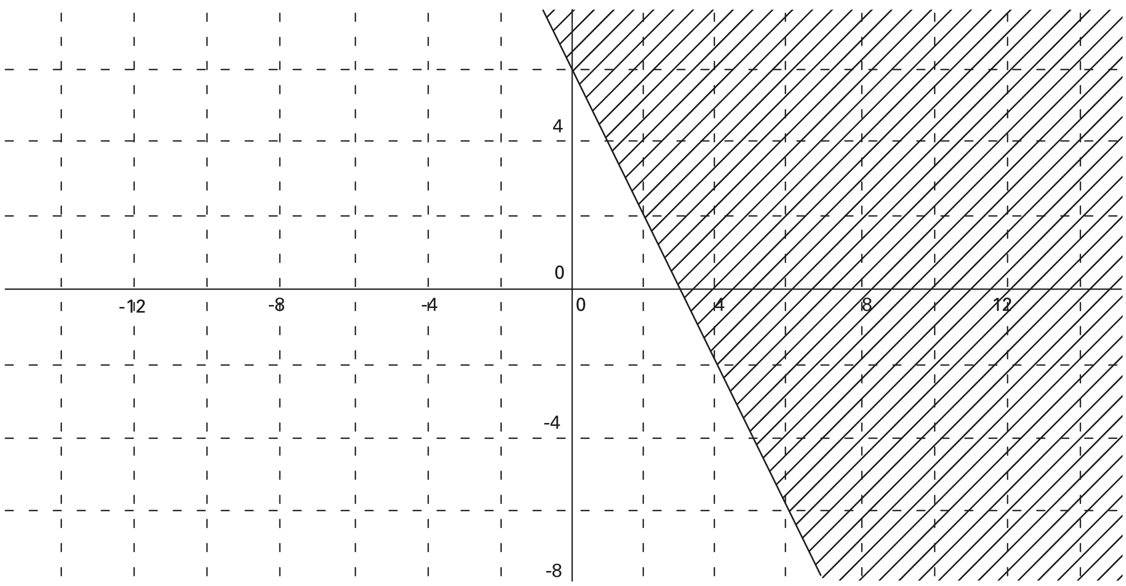
Resuelven sistemas de inecuaciones identificando el semiplano asociado a cada inecuación y la región intersección de todas las inecuaciones. Distinguen los diferentes tipos de regiones resultantes.

Ejemplo A

- Encontrar los puntos del plano cartesiano que cumplen con la inecuación $2x + y \geq 6$.

INDICACIONES AL DOCENTE.

Para resolver una inecuación con dos variables es útil recurrir a un gráfico y representar la correspondiente ecuación asociada: $2x+y = 6$, la cual separa al plano cartesiano en dos semiplanos. Reemplazando las coordenadas de varios puntos del plano que satisfacen la inecuación, los alumnos podrán constatar que sólo los puntos de un semiplano cumplen con la inecuación planteada. Es importante que los estudiantes descubran que, en realidad, basta con evaluar en un punto de prueba.



Luego de realizar variadas representaciones gráficas del conjunto solución de una ecuación con dos variables será propicio establecer la relación general:

La recta $ax + by + c = 0$ separa al plano en dos semiplanos; uno de ellos satisface la inecuación $ax + by + c > 0$. El otro, la inecuación $ax + by + c < 0$. En ambos casos se trata de semiplanos abiertos; un semiplano cerrado incluye la recta que lo define; un semiplano cerrado se asocia con el signo $\geq$ ó $\leq$.

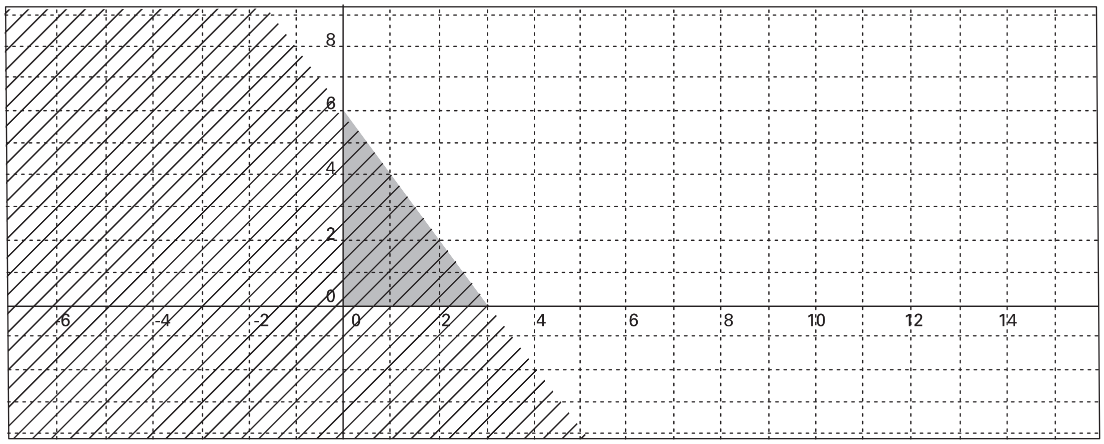
Ejemplo B

- Representar en el plano cartesiano la región que cumple simultáneamente con las inecuaciones:

$$2x + y \leq 6$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

INDICACIONES AL DOCENTE.

En este caso los alumnos y alumnas podrán trazar, con diferentes colores o achurados, en un mismo plano cartesiano las soluciones de cada una de las inecuaciones, encontrando la región común o intersección de los tres semiplanos.



Ejemplo C

- Resuelven gráficamente sistemas de inecuaciones que dan origen a diferentes tipos de regiones comunes:

i)	ii)	iii)	iv)
$x \leq 1$	$x \leq 2$	$x + y < 1$	$-x + y \leq 1$
$y \leq 1$	$x \geq -2$	$2x + 2y > 4$	$x + 2y \leq 8$
$x + y \geq 0$	$y \leq 1$		$2x + 3y \geq 3$
			$-3x + 8y \geq 4$

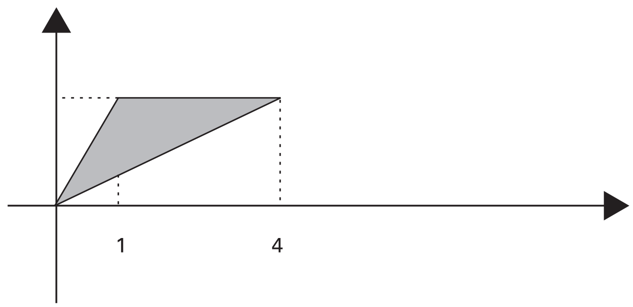
INDICACIONES AL DOCENTE

Es oportuno señalar a los alumnos y alumnas la distinción entre: regiones acotadas, como la que resulta en i), las no acotadas, como la que resulta en ii), y las vacías, como la iii).

Ejemplo D

- En los siguientes casos:
  - dada una región del plano encontrar las inecuaciones que la definen.
  - describir mediante un sistema de desigualdades la región interior del polígono convexo con vértices en los puntos A(0,0), B(0,4), C(4,0), D(3,3).

- escribir un sistema de inecuaciones que tengan como solución el interior de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y 2 respectivamente y se apoyan en los ejes coordenados x e y (discutir cuántas soluciones diferentes existen).
- describir mediante un sistema de desigualdades una recta en el plano.
- describir mediante un sistema de desigualdades una semi-recta en el plano.
- describir mediante un sistema de desigualdades la región exterior a un triángulo en el plano.
- encontrar las inecuaciones que determinan la región dibujada en la figura que sigue, que incluye los tres lados del triángulo.



INDICACIONES AL DOCENTE

Es necesario ejercitar este tipo de problemas, de tal modo que los estudiantes logren un buen nivel de fluidez en los cambios de registro, del gráfico al analítico y vice-versa.

Este tipo de sistemas de inecuaciones son los que encontrará al graficar la región factible de un problema de programación lineal.

Actividad 3

Plantean y resuelven problemas de programación lineal: traducen enunciados identificando las variables de decisión, las correspondientes restricciones y la función objetivo.

Ejemplo A

- Resolver el siguiente problema (visto en la Actividad 1) definiendo la función objetivo y utilizando las técnicas de la programación lineal: Un colegio va a realizar un paseo. En total participarán 400 personas entre alumnos y profesores. Al llamar a una empresa de transportes, obtienen la siguiente información: La empresa disponen de 8 buses con 40 asientos y 10 buses con 50 asientos.

Para el día del paseo habrá 9 choferes disponibles. El costo de arriendo es de $ 30 000 por cada bus de 40 asientos y de $40 000 por cada bus de 50 asientos.

Antes de contratar los buses, el Director del colegio decide analizar cuántos buses de cada tipo les conviene arrendar para que el arriendo resulte lo más económico posible.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Es conveniente aprovechar el trabajo desarrollado para este mismo problema con anterioridad. Ello permite delimitar con poco esfuerzo para los estudiantes lo siguiente:

Variables de decisión:

x : N° de buses de 40 asientos

y : N° de buses de 50 asientos

Función Objetivo: $C(x, y) = 30\,000x + 40\,000y$

Restricciones:

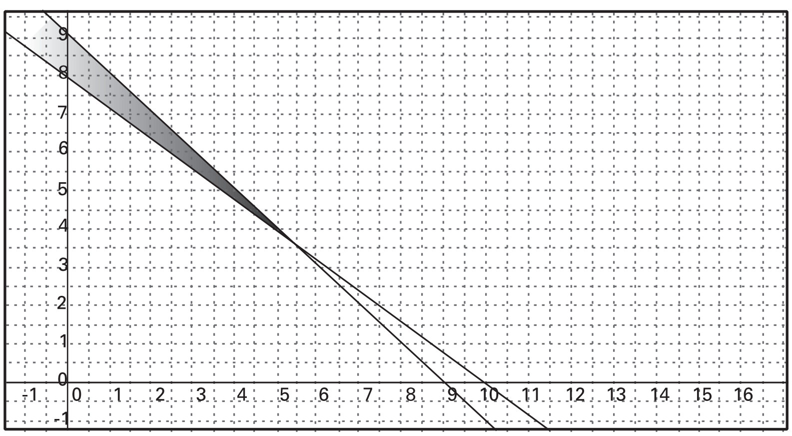
$x + y \leq 9$

$40x + 50y \geq 400$

$x \leq 8$

$y \leq 10$

Región factible:



Los vértices de este polígono y la función objetivo evaluada en cada uno de ellos se puede representar en una tabla como la siguiente, de donde puede obtenerse el óptimo buscado:

	X	Y	F. O. (COSTO)
A	5	4	310 000
B	0	9	360 000
C	0	8	320 000

También es posible trazar las curvas de nivel de la función objetivo

$30\,000x + 40\,000y = k$. Se observa que para el punto A (5,4), el valor es mínimo, pero muy cercano al punto C.

Será oportuno retomar con los estudiantes el tema del paralelismo entre dos o más rectas, ya que si variamos el valor de k en las ecuaciones de las rectas anteriores, éstas resultan todas paralelas.

Dado que lo que se pretende es resolver un problema de programación lineal, los únicos puntos que interesan son los de la región factible, en particular sus puntos extremos. Por esta razón las únicas rectas de nivel que interesan son aquellas que intersectan a los vértices.

Se puede aprovechar para plantear a los estudiantes:

i) ¿qué pasa si la región es no acotada? ¿Hay solución?

ii) que den ejemplos de una región factible no acotada, con solución óptima.

iii) que den ejemplos de una región factible donde no hay solución optima.

iv) que analicen si puede haber más de una solución óptima.

Ejemplo B

- Un atleta debe tomar por lo menos 4 unidades de vitamina A, 6 unidades de vitamina B y 12 unidades de vitamina C cada día. Hay dos productos en polvo, P1 y P2 que, por cada frasco, contienen las siguientes unidades de esas vitaminas:

	A	B	C
P1	4	1	4
P2	1	6	6

Si el precio de un frasco de P1 es de $5000 y el de un frasco de P2 es de $8000, averiguar cómo deben mezclarse ambos productos para obtener las vitaminas deseadas con el mínimo precio.

INDICACIONES AL DOCENTE.

Antes de resolver el problema utilizando programación lineal, es conveniente invitar a las alumnas y alumnos a que busquen la solución por algún método, por ejemplo por tanteo; un camino razonable es buscar aproximarse a una posible solución utilizando sólo un tipo de frasco:

6 frascos de P1:

	A	B	C
6 P1	24	6	24

Costo: 6 · 5000 = $ 30 000

4 frascos de P2

	A	B	C
4 P2	4	24	24

Costo: 4 · 8000 = $32 000

En ambos casos, para obtener la cantidad pedida de alguna de las vitaminas, se requiere una cantidad de frascos que implica sobrepasar los requerimientos de las otras.

Al intentar combinaciones de frascos es posible encontrar la solución óptima.

Combinación 1 :

	A	B	C
P1	4	1	4
2 P2	2	12	12
total	6	13	16

Costo: 1 · 5000 + 2 · 8000 = $21 000

Combinación 2 :

	A	B	C
2 P1	8	2	8
P2	1	6	6
total	9	8	14

Costo: 2 · 5000 + 8000 = $18 000

Para plantear la función objetivo y las restricciones del problema, será conveniente volver sobre la tabla de requerimientos diarios de vitaminas y la tabla de contenido de cada frasco:

	A	B	C
P1	4	1	4
P2	1	6	6

Será necesario distinguir las variables del problema, generalmente se les llama variables de decisión. En el caso del presente problema, éstas pueden ser:

x: N° de frascos del producto P1

y: N° de frascos del producto P2

Como interesa encontrar el precio mínimo de la mezcla de productos, será necesario definir una función que corresponda al costo de los insumos; esta será la Función Objetivo C(x,y). Claramente,

$$C(x,y) = 5000x + 8000y$$

Para plantear un conjunto de inecuaciones que constituyan las restricciones del problema, resultará útil mirar la tabla anterior y escribir los requerimientos por vitamina, vale decir, por columna:

$4x + y \geq 4$ cantidad mínima de vitamina A

$x + 6y \geq 6$ cantidad mínima de vitamina B

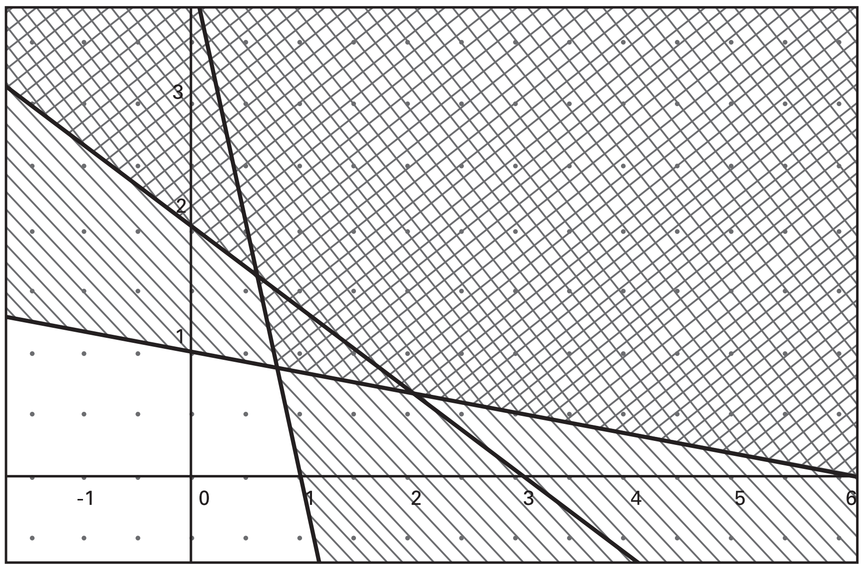
$4x + 6y \geq 12$ cantidad mínima de vitamina C

Además, obviamente:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

La solución óptima (es una región no acotada) es $x = 2$, $y = \frac{2}{3}$. Como no es posible comprar $\frac{2}{3}$ de frasco del producto P2, la solución óptima resulta ser $x = 2$, $y = 1$.



Ejemplo C

- Resolver el siguiente problema (visto en la Actividad 1) definiendo la función objetivo y utilizando las técnicas de la programación lineal:

  dos mataderos, P y Q, se encargan de suministrar la carne consumida semanalmente en tres ciudades, R, S y T: 20, 22 y 14 toneladas, respectivamente. El matadero P produce cada semana 26 toneladas de carne, mientras que Q 30. Sabiendo que los costos de transporte, por tonelada de carne, desde cada matadero a cada ciudad están expresado en la siguiente tabla:

	R	S	T
P	1	3	1
Q	2	1	1

  Determinar cuál es la distribución de transporte que implica un costo mínimo.

INDICACIONES AL DOCENTE.

Este tipo de problema es un poco más complejo en su planteamiento que el anterior.

Variables de decisión:

x : número de toneladas de carne que salen de P y llegan a la ciudad R

y : número de toneladas de carne que salen de P y llegan a la ciudad S

	Llegan a R(20)	Llegan a S(22)	Llegan a T(14)
Salen de P (26)	x	y	26 - x - y
Salen de Q (30)	20 - x	22 - y	-12 + x + y

Restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ 20 - x \geq 0 \end{array}\right\} \quad 0 \leq x \leq 20$$

$$\left.\begin{array}{l} y \geq 0 \\ 22 - y \geq 0 \end{array}\right\} \quad 0 \leq y \leq 22$$

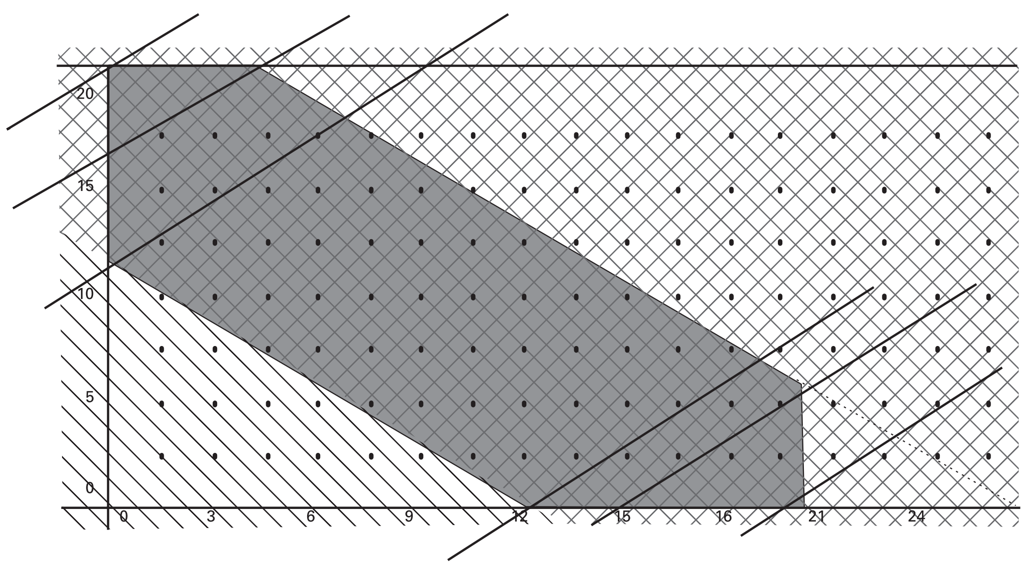
$$\left.\begin{array}{l} 26 - x - y \geq 0 \\ -12 + x + y \geq 0 \end{array}\right\} \quad 12 \leq x + y \leq 26$$

La función objetivo se obtiene multiplicando los valores correspondientes de la tabla de costos con los de la tabla de toneladas transportadas, es decir:

$C(x,y) = x + 2(20 - x) + 3y + 22 - y + 26 - x - y - 12 + x + y$

$C(x,y) = - x + 2y + 76$

Región factible con curvas de nivel:



Evaluación de los vértices de la región factible:

	x	y	costo
A	12	0	64
B	20	0	56
C	20	6	68
D	4	22	116
E	0	22	120
F	0	12	100

La tabla y la curva de nivel indican que el costo de transporte es mínimo en el punto B, es decir para x =20 e y = 0.

Por lo anterior, la solución óptima de asignación de carga desde los mataderos P y Q hacia las ciudades R, S y T quedan expresadas por la siguiente tabla:

	R	S	T
P	20	0	6
Q	0	22	8

Ejemplo D

- Un pastelero dispone de 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 27.5 kg de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles Pop y Sup. Para fabricar una docena de pasteles de tipo Pop necesita 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla y para hacer una docena de pasteles de tipo Sup necesita 6 kg de harina, medio kilo de azúcar y 1 kg de mantequilla. El beneficio que obtiene por una docena de pasteles de tipo Pop es $2000 y por una docena de tipo Sup es $3000. Hallar el número de docenas que tiene que fabricar de cada clase para que la ganancia sea máxima.

INDICACIONES AL DOCENTE:

La siguiente tabla resume la información y puede ser útil para la formulación del problema:

	harina	azúcar	mantequilla
Pastel Pop	3	1,0	1
Pastel Sup	6	0,5	1

Puede ser útil, con algunos alumnos y alumnas, considerar previamente las siguientes situaciones:

Situación A:

Sólo se fabrican pasteles del tipo Pop

disponibilidad		Pop	N° de docenas
Harina	150	3	50
Azúcar	22	1	22
Mantequilla	27.5	1	27

Se constata que la cantidad de azúcar determina que se puede fabricar 22 docenas de pasteles tipo Pop, como máximo. La ganancia obtenida es de 2.000 · 22 = $44.000

Situación B:

Sólo se fabrican pasteles del tipo Sup

disponibilidad		Sup	N° de docenas
Harina	150	6	25
Azúcar	22	0.5	44
Mantequilla	27.5	1	27.5

Se constata que la cantidad de harina determina que se puede fabricar 25 docenas de pasteles tipo Sup, como máximo. La ganancia obtenida es de 3.000 · 25 = $75.000.

Para determinar la solución óptima.

Variables de decisión:

x:N° de docenas de pasteles del tipo Pop que se hornean

y:N° de docenas de pasteles del tipo Sup que se hornean

Restricciones :

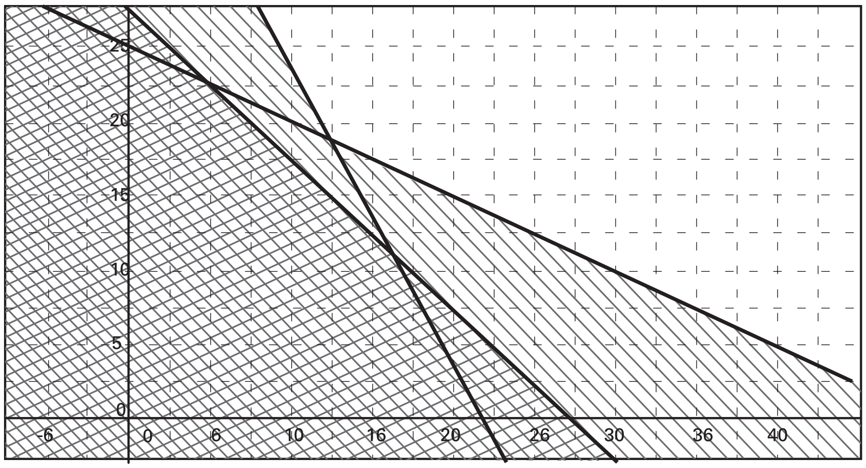
$3x + 6y \leq 150$

$x + 0.5y \leq 22$

$x + y \leq 27.5$

Función Objetivo: $G(x,y) = 2.000x + 3.000y$

Región factible:



Las coordenadas de los puntos extremos y las respectivas ganancias quedan expresadas por la tabla siguiente:

	x	y	2.000x + 3.000y
A	22.0	0	44.000
B	16.5	11.0	66.000
C	5.0	22.5	77.500
D	0	25	75.000

La ganancia máxima se obtiene para 5 docenas de pasteles tipo Pop y 22.5 docenas del tipo Sup.

Es interesante discutir la solución e invitarlos a construir una tabla con lo gastado para esta solución y lo que sobra:

	Pop	Sup	Total	kilos	excedente
Harina	3x	6y	3x + 6y	150	0
Azúcar	x	0.5y	x+ 0.5y	16.5	5.5
mantequilla	x	y	x+ y	27.5	0

Ejemplo E

- El abuelo de Juan ha recibido 12 millones de pesos como jubilación. Le ofrecen, por una parte, adquirir al menos un 30% de un departamento que vale 10 millones y renta el 0.5% de arriendo mensual y, por otra parte, ser socio de hasta un 50% de un restaurante cuyo valor es de 5 veces la utilidad del año pasado. Si la utilidad generada por el restaurante en el año pasado fue de 4 millones, y este año se estima una utilidad similar, entonces, ¿Cuál es el problema de programación lineal que Juan debe resolver para asesorar a su abuelo?

INDICACIONES AL DOCENTE

Es posible que sea necesario conversar con los alumnos y alumnas lo que significa una renta de 0.5% mensual: si se invierte una cantidad de \$ x, a fin de mes se reciben \$ $0.005 \cdot x$ de ganancia, y en un año: $12 \cdot 0.005 \cdot x$.

Si \$$y$ es la inversión en el restaurante, se obtendrán \$ $\frac{y}{5}$ de ganancia a fin de año.

La función objetivo será la ganancia: $G(x,y) = 0{,}06x + \frac{y}{5}$, sujeta a las restricciones:

$x \geq 0$ e $y \geq 0$

$x \geq \left(\frac{30}{100}\right) \cdot 10$ millones

$y \leq \left(\frac{50}{100}\right) \cdot 20$ millones

Actividades para la evaluación y ejemplos

Las actividades que se proponen a continuación se complementan con algunos ejemplos. Para cada ejemplo se propone un conjunto de indicadores que importa tener en cuenta para evaluar el logro de los aprendizajes esperados por el alumno o alumna.

Estos indicadores son concordantes con los siguientes criterios de evaluación, ya descritos en la presentación de este programa:

- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas.
- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático.
- Organización y estructuración de conceptos matemáticos.
- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios.

Actividad 1

Resuelven problemas sencillos de programación lineal. Optimizan funciones lineales de dos variables.

Ejemplo A

- Un joven financia parte de sus estudios repartiendo cartas a domicilio. Le pagan $ 5 por cada sobre tamaño normal repartido y $ 7 por cada sobre tamaño grande. El estudiante dispone de dos bolsas: una para las cartas normales en la que cabe 120, y otra para las grandes, en la que caben 100. Ha estimado que cada día alcanza a repartir 150 cartas como máximo. Dado que todos los días la empresa de correos tiene un número grande de cartas para ser repartidas, este joven necesita tomar la decisión en términos del número de cartas de cada tipo que repartirá.

  ¿Cuántas cartas de cada tipo deberá repartir este joven para que su ganancia diaria sea máxima?

Observar si:

i) construyen una tabla como la siguiente para recoger posibles combinaciones;

Normales (N)	Grandes(G)	5N	7G	Ganancia: 5N + 7 G
120	30	600	210	810
110	40	550	280	830
100	50	500	350	850
90	60	450	420	870
80	70	400	490	890
70	80	350	560	910
60	90	300	630	930
50	100	250	700	950

N + G ≤ 150 y además, N ≤120 y G ≤100

ii) plantean el problema de programación lineal;

Variables de decisión:

x : N° de sobre tamaño normal

y : N° de sobre tamaño grande

Restricciones:

$x + y \leq 150$

$x \leq 120$

$y \leq 100$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Función Objetivo:

$G(x,y) = 5x + 7y$

Ejemplo B

- Supongamos que las necesidades semanales mínimas de una persona en cuanto a las sustancias P, Q y R son 8, 12 y 9 unidades respectivamente. Se debe obtener una preparación con esa composición mínima mezclando los productos A y B cuyos contenidos por kilogramo son los que se indican en la siguiente tabla:

	Sustancia P	Sustancia Q	Sustancia R	Costo por kg
Producto A	2	6	1	600
Producto B	1	1	3	400

¿Cuántos kilogramos de cada producto deberán emplearse semanalmente para que el costo de la preparación sea mínimo?

Observar si:

i) recurren a estrategias de ensayo y error;

ii) lo plantan y resuelven como un problema de programación lineal:

- establecen la función objetivo
- indican las correspondientes restricciones
- trazan el gráfico correspondiente
- buscan y señalan la solución óptima

Ejemplo C

- Para cierto régimen alimenticio se necesita prepara una cierta cantidad de harina que reúna los siguientes requisitos: tener al menos 500 gramos de fibra cruda y 2500 gramos de hidratos de carbono. Para este propósito se dispone, para ser mezclados, de harina integral y de salvado de trigo, cuyos costos por kilogramo son: $1200 y $1600 respectivamente.

La siguiente tabla es entregada por el fabricante de estos productos:

	Contenidos por kilogramo de cada producto:					
Producto	Fibra cruda	Carbohidratos	Calorías	Proteínas	Grasa	Vitaminas y minerales
Harina integral	70	780	3480	99	21	28
Salvado de trigo	130	560	3590	163	79	75

Observar si:

i) recurren a estrategias de ensayo y error;

ii) lo plantean y resuelven como un problema de programación lineal:

- establecen la función objetivo;
- indican las correspondientes restricciones;
- trazan el gráfico correspondiente;
- buscan y señalan la solución óptima.

Ejemplo c

- En un lago se realiza el cultivo de dos especies de peces A y B. El peso promedio de cada tipo de pez es de 2 kilos y 1 kilo respectivamente.

La especie P1 necesita, en promedio, 1 unidad de A1 y 3 unidades de A2.

La especie P2 necesita, en promedio, 2 unidad de A1 y 1 unidades de A2.

Si se dispone de 500 unidades de A1 y 900 unidades de A2 por día, ¿cuál debe ser la cantidad de peces de cada especie para maximizar la producción?

Sugerencias

Se puede complementar el problema anterior con otras preguntas como por ejemplo:

Determinar el número de peces de cada especie con un peso total de 600 kilos que podrían coexistir en esa estación de cultivo del lago.

Observar si:

i) recurren a estrategias de ensayo y error;

ii) lo plantean y resuelven como un problema de programación lineal:

- establecen la función objetivo;
- indican las correspondientes restricciones;
- trazan el gráfico correspondiente;
- buscan y señalan la solución óptima.

Actividad 2

Buscan en situaciones reales el planteamiento de problemas de optimización.

Los tratan de formular y con el docente discuten y deciden si son de programación lineal o no, y eventualmente los resuelven.

Sugerencias

Es importante motivar a los alumnos y alumnas para que intenten encontrar situaciones reales de optimización y vean la factibilidad de resolverlas por medio de programación lineal. Esto se puede traducir en trabajos de investigación que involucren a otros sectores del aprendizaje o, también, que requieran la consulta a profesionales de áreas específicas.

Observar qué tipo de problemas les interesa, cómo lo abordan, si logran discriminar los que son de programación lineal, si intentan el método de ensayo y error, si plantean la función objetivo, sus restricciones, si trazan el gráfico correspondiente y si establecen la solución óptima.

Bibliografía

Camous Henri, Problemas y juegos con la matemática, Editorial Gedisa, España, 1995

Freund G y Simon G, Estadística elemental, Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1997

Guzmán Miguel de, Para pensar mejor, Ediciones Pirámide, España, 1995

J. Díaz Godino y otros, Azar y probabilidad, Editorial Síntesis, España, 1996

John Allen Paulos, Más allá de los números, Turquets Editores, Barcelona, 1991.

Lehman, Geometría Analítica, Editorial Itesa, México, 1987

Olimpíada matemática argentina, Red Olímpica, Edipubli. S. A. Argentina, 1995

Perero Mariano, Historia e historias de matemáticas, Grupo Editorial Iberoamérica, México 1994

Rey J. y Babini J, Historia de la matemática, Editorial Gedisa, España, 1997

Rodríguez José y otros, Razonamiento matemático, International Thompson Editores, México 1995

Smullyan Raymond, Satan, Cantor y el infinito, Editorial Gedisa, España, 1995

Software graficador
shareware bajado de Internet EQUATION GRAPHER: http://www.mfsoft.com/equationgrapher/
'Graphmatica' bajado de Internet:
http://download.cnet.com/

Direcciones en Internet.

Enlaces : (http://www.enlaces.cl),

Mensa España. Colección de juegos de ingenio de Ciudad Futura
http://www.ciudadfutura.com/juegosmensa

Departamento de Ingeniería Matemática de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.
http://www.dim.uchile.cl/

Problemas de matemáticas.
http://www.nalejandria.com/forms/matemas.htm

Sociedad de Matemática de Chile:
http://www.mat.puc.cl/~socmat

Real Sociedad Matemática Española:
http://rsme.uned.es

ICMI-Chile. Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, USACH
http://fermat.usach.cl/~somachi/index.html

Problemas relativos a superficie:
http://roble.pntic.mec.es/~jcamara/websup1.htm

Matemáticas: Historia, documentación, actividades y problemas, proyectos
http://nti.educa.rcanaria.es/usr/matematicas

El Paraíso de las Matemáticas:
http://members.xoom.com/pmatematicas

Instituto Nacional de Estadística:
http://www.ine.cl/

Historia de la matemática y biografías
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/