Matemática

Programa de Estudio | Actualización 2009

Tercer año medio

Ministerio de Educación

3

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

Matemática

Programa de Estudio | Actualización 2009

Tercer año medio

Ministerio de Educación

3

MATEMÁTICA
Programa de Estudio
Tercero medio
Primera edición: octubre de 2015

Decreto Exento de Educación n° 1147/2015

Unidad de Currículum y Evaluación
Ministerio de Educación de Chile
Avenida Bernardo O'Higgins 1371
Santiago de Chile

ISBN 978-956-292-531-0

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

Estimada Comunidad Educativa:

El Ministerio de Educación, en su propósito por favorecer los procesos de gestión curricular, ha elaborado una propuesta para programas educativos que se imparten en 3° y 4° año de enseñanza media. Esta propuesta está enfocada en los sectores de Inglés, Lenguaje y Comunicación, Biología, Física, Química, Matemática e Historia, Geografía y Ciencias Sociales.

Estos instrumentos curriculares buscan ser una propuesta pedagógica y didáctica que apoye el proceso de gestión curricular de los establecimientos educacionales y sus docentes en la articulación y generación de experiencias de aprendizajes pertinentes, relevantes y útiles para sus estudiantes.

Adicionalmente, estas nuevas herramientas brindan espacio para que los y las docentes los vinculen con las necesidades y potencialidades propias de su contexto, y trabajen a partir de los intereses y características de sus estudiantes y de los énfasis formativos declarados en su Proyecto Educativo Institucional.

Los programas son una invitación a las comunidades educativas de nuestros liceos a enfrentar un desafío de preparación y estudio, de compromiso con la vocación formadora y de altas expectativas de los aprendizajes que pueden lograr todos nuestros y nuestras estudiantes.

Entendiendo que la Formación General tiene como principio ofrecer espacios de aprendizaje integral a las y los estudiantes, es de suma importancia promover el diálogo entre estos instrumentos y la Formación Diferenciada. De esta manera, complejizando, diversificando y profundizando estas áreas de aprendizaje estaremos contribuyendo en el desarrollo de herramientas que nuestros y nuestras jóvenes requieren para desenvolverse de manera participativa, reflexiva, crítica y responsable, tanto en su vida personal como en su vida en sociedad.

Los presentes Programas de Estudio han sido elaborados por la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación, de acuerdo a las definiciones establecidas en la actualización al Marco Curricular realizada el año 2009 (Decreto Supremo de Educación N° 254/2009) y han sido aprobados por el Consejo Nacional de Educación para entrar en vigencia a partir de 2016.

Los invito a analizar activamente y trabajar de forma colaborativa y contextualizada con estos programas en la formación integral de nuestros y nuestras estudiantes.

ADRIANA DELPIANO PUELMA
MINISTRA DE EDUCACIÓN

Índice

Presentación

El Programa es una propuesta para lograr los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios.

El Programa de Estudio ofrece una propuesta para organizar y orientar el trabajo pedagógico del año escolar. Esta propuesta pretende promover el logro de los Objetivos Fundamentales (OF) y el desarrollo de los Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) que define el Marco Curricular[1].

La ley dispone que cada establecimiento puede elaborar e implementar sus propios Programas de Estudio, una vez que estos hayan sido aprobados por parte del Mineduc. El presente Programa constituye una propuesta para aquellos establecimientos que no cuentan con uno propio.

Los principales componentes que conforman esta propuesta son:

› Una especificación de los aprendizajes que se deben lograr para alcanzar los OF y los CMO del Marco Curricular, lo que se expresa mediante los Aprendizajes Esperados[2].

› Una organización temporal de estos aprendizajes en semestres y unidades.

› Una propuesta de actividades de aprendizaje y de evaluación, a modo de sugerencia.

Además, se presenta un conjunto de elementos para orientar el trabajo pedagógico que se lleva a cabo a partir del Programa y para promover el logro de los objetivos que este propone.

Este Programa de Estudio incluye:

NOCIONES BÁSICAS

Esta sección presenta conceptos fundamentales que están en la base del Marco Curricular y, a la vez, ofrece una visión general acerca de la función de los Mapas de Progreso.

1 Decreto Supremo N° 254 de 2009.

2 En algunos casos, estos aprendizajes están formulados en los mismos términos que algunos de los OF del Marco Curricular. Esto ocurre cuando esos OF se pueden desarrollar íntegramente en una misma unidad de tiempo, sin que sea necesario su desglose en definiciones más específicas.

CONSIDERACIONES GENERALES PARA IMPLEMENTAR EL PROGRAMA

Consisten en orientaciones relevantes para trabajar con el Programa y organizar el trabajo en torno a él.

PROPÓSITOS, HABILIDADES Y ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Esta sección presenta sintéticamente los propósitos y sentidos sobre los que se articulan los aprendizajes del sector y las habilidades a desarrollar. También entrega algunas orientaciones pedagógicas importantes para implementar el Programa en el sector.

VISIÓN GLOBAL DEL AÑO

Presenta todos los Aprendizajes Esperados que se deben desarrollar durante el año, organizados de acuerdo a unidades.

UNIDADES

Junto con explicitar los Aprendizajes Esperados propios de la unidad, incluyen indicadores de evaluación y ejemplos de actividades que apoyan y orientan el trabajo destinado a promover estos aprendizajes[3].

INSTRUMENTOS Y EJEMPLOS DE EVALUACIÓN

Ilustran formas de apreciar el logro de los Aprendizajes Esperados y presentan diversas estrategias que pueden usarse para este fin.

MATERIAL DE APOYO SUGERIDO

Se trata de recursos bibliográficos y electrónicos que pueden emplearse para promover los aprendizajes del sector; se distingue entre los que sirven a los y las docentes y los destinados a las y los estudiantes.

3 En algunos casos, las actividades contienen relaciones interdisciplinarias debido a que vinculan dos o más sectores y se simbolizan con ®.

Nociones básicas

APRENDIZAJES COMO INTEGRACIÓN DE CONOCIMIENTOS, HABILIDADES Y ACTITUDES

Habilidades, conocimientos y actitudes…

Los aprendizajes que promueven el Marco Curricular y los Programas de Estudio apuntan a un desarrollo integral de los y las estudiantes. Para tales efectos, esos aprendizajes involucran tanto los conocimientos propios de la disciplina como las habilidades y las actitudes.

… movilizados para enfrentar diversas situaciones y desafíos…

Se busca que las y los estudiantes pongan en juego estos conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar diversos desafíos, tanto en el contexto del sector de aprendizaje como al desenvolverse en su entorno. Esto supone orientarlos hacia el logro de competencias, entendidas como la movilización de dichos elementos para realizar de manera efectiva una acción determinada.

… y que se desarrollan de manera integrada.

Se trata de una noción de aprendizaje de acuerdo con la cual los conocimientos, las habilidades y las actitudes se desarrollan de manera integrada y, a la vez, se enriquecen y potencian de forma recíproca.

Deben promoverse de manera sistemática.

Los conocimientos, las habilidades y las actitudes no se adquieren espontáneamente al estudiar las disciplinas. Requieren promoverse de manera metódica y estar explícitos en los propósitos que articulan el trabajo de los y las docentes.

CONOCIMIENTOS

Son importantes, porque…

Enriquecen la comprensión y la relación con el entorno.

… los conceptos de las disciplinas o sectores de aprendizaje enriquecen la comprensión de los y las estudiantes sobre los fenómenos que les toca enfrentar. Les permiten relacionarse con el entorno, utilizando nociones complejas y profundas que complementan, de manera crucial, el saber que han generado por medio del sentido común y la experiencia cotidiana. Además, estos conceptos son fundamentales para que construyan nuevos aprendizajes.

Se deben desarrollar de manera integrada, porque…

Son una base para el desarrollo de habilidades.

… son una condición para el progreso de las habilidades. Ellas no se desarrollan en un vacío, sino sobre la base de ciertos conceptos o conocimientos.

HABILIDADES

Son importantes, porque…

… el aprendizaje involucra no solo el saber, sino también el saber hacer. Por otra parte, la continua expansión y la creciente complejidad del conocimiento demandan cada vez más capacidades de pensamiento que permitan, entre otros aspectos, usar la información de manera apropiada y rigurosa, examinar críticamente las diversas fuentes de información disponibles, adquirir y generar nuevos conocimientos y aplicarlos de manera pertinente.

Son fundamentales en el actual contexto social.

Esta situación hace relevante la promoción de diferentes habilidades; entre ellas, desarrollar una investigación, comparar y evaluar la confiabilidad de las fuentes de información y realizar interpretaciones a la luz de la evidencia.

Se deben desarrollar de manera integrada, porque…

… sin esas habilidades, los conocimientos y los conceptos que puedan elaborar las y los estudiantes resultan elementos inertes; es decir, elementos que no pueden poner en juego para comprender y enfrentar las diversas situaciones a las que se ven expuestos y expuestas.

Permiten poner en juego los conocimientos.

ACTITUDES

Son importantes, porque…

… los aprendizajes siempre están asociados con las actitudes y disposiciones de los y las estudiantes. Entre los propósitos establecidos para la educación se contempla el desarrollo en los ámbitos personal, social, ético y ciudadano. Ellos incluyen aspectos de carácter afectivo y, a la vez, ciertas disposiciones. A modo de ejemplo, los aprendizajes involucran actitudes como el respeto y la valoración hacia personas e ideas distintas, la solidaridad, el interés por el conocimiento, la valoración del trabajo, la responsabilidad, el emprendimiento, la perseverancia, el rigor, el cuidado y la valoración del ambiente.

Están involucradas en los propósitos formativos de la educación.

Se deben enseñar de manera integrada, porque…

… requieren de los conocimientos y las habilidades para su desarrollo. Esos conocimientos y habilidades entregan herramientas para elaborar juicios

Son enriquecidas por los conocimientos y las habilidades.

informados, analizar críticamente diversas circunstancias y contrastar criterios y decisiones, entre otros aspectos involucrados en este proceso.

Orientan la forma de usar los conocimientos y las habilidades.

A la vez, las actitudes orientan el sentido y el uso que cada estudiante otorgue a los conocimientos y las habilidades desarrollados. Son, por lo tanto, un antecedente necesario para usar constructivamente estos elementos.

OBJETIVOS FUNDAMENTALES TRANSVERSALES (OFT)

Son propósitos generales definidos en el currículum…

Son aprendizajes que tienen un carácter comprensivo y general, y apuntan al desarrollo personal, ético, social e intelectual de las y los estudiantes. Forman parte constitutiva del currículum nacional y, por lo tanto, los establecimientos deben asumir la tarea de promover su logro.

… que deben promoverse en toda la experiencia escolar.

Los OFT no se logran por medio de un sector de aprendizaje en particular: conseguirlos depende del conjunto del currículum. Deben promoverse mediante las diversas disciplinas y en las distintas dimensiones del quehacer educativo dentro y fuera del aula (por ejemplo, por medio del proyecto educativo institucional, de los planes de mejoramiento educativo, de la práctica docente, del clima organizacional, de las normas de convivencia escolar o de las ceremonias y actividades escolares).

Integran conocimientos, habilidades y actitudes.

No se trata de objetivos que incluyan únicamente actitudes y valores. Supone integrar esos aspectos con el desarrollo de conocimientos y habilidades.

Dentro de los aspectos más relevantes se encuentran los relacionados con una educación inclusiva. Por un lado, los OFT promueven la formación ciudadana de cada estudiante. Por otro, incluyen una perspectiva de género orientada a eliminar las desigualdades entre hombres y mujeres, ampliando la mirada hacia la diversidad en el aula, formando niños, niñas y adolescentes responsables de su propio bienestar y del bien común.

Se organizan en una matriz común para educación básica y media.

A partir de la actualización al Marco Curricular realizada el año 2009, estos objetivos se organizaron bajo un esquema común para la educación básica y la educación media. De acuerdo con este esquema, los Objetivos Fundamentales Transversales se agrupan en cinco ámbitos: crecimiento y autoafirmación personal; desarrollo del pensamiento; formación ética; la persona y su entorno; y tecnologías de la información y la comunicación.

MAPAS DE PROGRESO

Son descripciones generales que señalan cómo progresan habitualmente los aprendizajes en las áreas clave de un sector determinado. Se trata de formulaciones sintéticas que se centran en los aspectos esenciales de cada sector. De esta manera, ofrecen una visión panorámica sobre la progresión del aprendizaje en los doce años de escolaridad[4].

Describen sintéticamente cómo progresa el aprendizaje…

Los Mapas de Progreso no establecen aprendizajes adicionales a los definidos en el Marco Curricular y los Programas de Estudio. Su particularidad consiste en que entregan una visión de conjunto sobre la progresión esperada en todo el sector de aprendizaje.

… de manera congruente con el Marco Curricular y los Programas de Estudio.

En este marco, los Mapas de Progreso son una herramienta que está al servicio del trabajo formativo que realiza el y la docente, entregándoles orientaciones en relación con la trayectoria de los Aprendizajes Esperados de sus estudiantes. Este dispositivo debe ser asumido como complementario al Marco Curricular y, por consiguiente, su utilización es totalmente opcional y voluntaria por parte de las escuelas, las que deberán decidir su uso como referencia de la progresión de aprendizajes, de acuerdo a los análisis de pertinencia que cada comunidad realice.

En definitiva, los Mapas de Progreso constituyen un recurso de apoyo para la labor cotidiana del profesor y la profesora, y resguardan la coherencia de los Aprendizajes Esperados con la estructura curricular vigente que, para el caso de este curso en particular, corresponde a Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media, Actualización 2009.

¿QUÉ UTILIDAD TIENEN LOS MAPAS DE PROGRESO PARA EL TRABAJO DE LOS Y LAS DOCENTES?

Pueden ser un apoyo importante para definir objetivos adecuados, para desarrollar los procesos de enseñanza y para evaluar los respectivos aprendizajes (ver las Orientaciones para planificar y las Orientaciones para evaluar que se presentan en el Programa).

Sirven de apoyo para planificar y evaluar…

4 Los Mapas de Progreso describen en siete niveles el crecimiento habitual del aprendizaje de los y las estudiantes en un ámbito o eje del sector a lo largo de los 12 años de escolaridad obligatoria. Cada uno de estos niveles presenta una expectativa de aprendizaje correspondiente a dos años de escolaridad. Por ejemplo, el Nivel 1 corresponde al logro que se espera para la mayoría de los niños y las niñas al término de 2° básico; el Nivel 2 corresponde al término de 4° básico, y así sucesivamente. El Nivel 7 describe el aprendizaje de un o una estudiante que al egresar de la educación media es "sobresaliente"; es decir, va más allá de la expectativa para 4° medio que describe el Nivel 6 en cada Mapa.

… y para atender la diversidad al interior del curso.

Además, son un referente útil para atender a la diversidad de estudiantes dentro del aula:

› Permiten no solamente constatar que existen distintos niveles de aprendizaje dentro de un mismo curso, sino que, además, si se usan para analizar los desempeños de las y los estudiantes, ayudan a caracterizar e identificar con mayor precisión en qué consisten esas diferencias.

› La progresión que describen permite reconocer cómo orientar los aprendizajes de los distintos grupos del mismo curso; es decir, de aquellos que no han conseguido el nivel esperado y de aquellos que ya lo alcanzaron o lo superaron.

› Expresan el progreso del aprendizaje en un área clave del sector, de manera sintética y alineada con el Marco Curricular.

RELACIÓN ENTRE MAPA DE PROGRESO, PROGRAMA DE ESTUDIO Y MARCO CURRICULAR

MARCO CURRICULAR

Prescribe los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios que cada estudiante debe lograr.

Ejemplo

Objetivo Fundamental para 3° medio:
Comprender que toda ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene raíces en el conjunto de los números complejos.

Contenido Mínimo Obligatorio
Identificación de situaciones que muestran la necesidad de ampliar los números reales a los números complejos, caracterización de estos últimos y de los problemas que permiten resolver.

PROGRAMA DE ESTUDIO

Orienta la labor pedagógica, estableciendo Aprendizajes Esperados que dan cuenta de los OF y CMO, y los organiza temporalmente por medio de unidades.

MAPA DE PROGRESO

Entrega una visión sintética del progreso del aprendizaje en un área clave del sector y se ajusta a las expectativas del Marco Curricular.

Ejemplo

Aprendizaje Esperado 3° medio
Reconocer los números complejos como una extensión del campo numérico de los números reales.

Ejemplo

Mapa de Progreso "Números y operaciones"

Nivel 7	Comprende los diferentes conjuntos numéricos, las relaciones entre ellos…
Nivel 6	Reconoce a los números complejos como una extensión del campo numérico y los utiliza para resolver problemas que no admiten solución en los números reales…
Nivel 5	Reconoce a los números racionales como un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no admiten solución en los naturales…
Nivel 4	Reconoce a los números enteros como un conjunto en donde se pueden resolver problemas que no admiten solución en los naturales...
Nivel 3	Utiliza números decimales positivos y fracciones positivas para ordenar, comparar, estimar…
Nivel 2	Comprende que las fracciones simples y los números decimales permiten cuantificar…
Nivel 1	Reconoce que los números naturales se pueden expresar como adiciones o sustracciones…

Consideraciones generales para implementar el Programa

Las orientaciones que se presentan a continuación destacan elementos relevantes al momento de implementar el Programa. Estas orientaciones se vinculan estrechamente con algunos de los OFT contemplados en el currículum.

USO DEL LENGUAJE

La lectura, la escritura y la comunicación oral deben promoverse en los distintos sectores de aprendizaje.

Los y las docentes deben promover el ejercicio de la comunicación oral, la lectura y la escritura como parte constitutiva del trabajo pedagógico correspondiente a cada sector de aprendizaje.

Su importancia se basa en que las habilidades de comunicación son herramientas fundamentales que las y los estudiantes deben emplear para alcanzar los aprendizajes propios de cada sector. Se trata de habilidades que no se desarrollan únicamente en el contexto del sector Lenguaje y Comunicación, sino que se consolidan mediante el ejercicio en diversos espacios y en torno a distintos temas y, por lo tanto, involucran a los otros sectores de aprendizaje del currículum.

Cabe mencionar la presencia en los establecimientos de bibliotecas escolares CRA[5], una herramienta que los y las docentes podrían aprovechar al máximo, pues dispone de una variada oferta de recursos de aprendizaje para todas las edades y, además, es de fácil acceso.

Al momento de recurrir a la lectura, la escritura y la comunicación oral, las y los docentes deben procurar en los y las estudiantes:

LECTURA

Estas habilidades se pueden promover de diversas formas.

- La lectura de distintos tipos de textos relevantes para el sector (textos informativos propios del sector, textos periodísticos y narrativos, tablas y gráficos).
- La lectura de textos de creciente complejidad en los que se utilicen conceptos especializados del sector.

5 Centro de Recursos para el Aprendizaje.

- La lectura de textos que promuevan el análisis crítico del entorno.
- La identificación de las ideas principales y la localización de información relevante.
- La realización de resúmenes y síntesis de las ideas y argumentos presentados en los textos.
- El desarrollo de competencias de información, como la búsqueda de información en fuentes escritas, discriminándola y seleccionándola de acuerdo a su pertinencia.
- La comprensión y el dominio de nuevos conceptos y palabras.
- La construcción de sus propias ideas y opiniones a partir del contenido o argumentos presentados en el texto.
- El uso de su biblioteca escolar CRA para fomentar el disfrute de la lectura y el trabajo de investigación.

ESCRITURA

- La escritura de textos de diversa extensión y complejidad (por ejemplo, reportes, ensayos, descripciones y respuestas breves).
- La organización y presentación de información por medio de esquemas o tablas.
- La presentación de las ideas de una manera coherente y clara.
- El uso apropiado del vocabulario en los textos escritos.
- El uso correcto de la gramática y de la ortografía.
- El conocimiento y uso del lenguaje inclusivo.

COMUNICACIÓN ORAL

- La capacidad de exponer ante otras personas.
- La expresión de ideas y conocimientos de manera organizada.
- El desarrollo de la argumentación al formular ideas y opiniones.
- El uso del lenguaje con niveles crecientes de precisión, incorporando los conceptos propios del sector.

- El planteamiento de preguntas para expresar dudas e inquietudes y para superar dificultades de comprensión.
- La disposición para escuchar información de manera oral, manteniendo la atención durante el tiempo requerido.
- La interacción con otras personas para intercambiar ideas, analizar información y elaborar conexiones en relación con un tema en particular, compartir puntos de vista y lograr acuerdos.

USO DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN (TIC)

Debe impulsarse el uso de las TIC en todos los sectores de aprendizaje.

El desarrollo de las capacidades para utilizar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) está contemplado de manera explícita como uno de los Objetivos Fundamentales Transversales del Marco Curricular. Esto demanda que el dominio y uso de estas tecnologías se promueva de manera integrada al trabajo que se lleva a cabo al interior de los sectores de aprendizaje. Para esto, se debe procurar que la labor de las y los estudiantes incluya el uso de las TIC para:

- Buscar, acceder y recolectar información en páginas web u otras fuentes, y seleccionar esta información, examinando críticamente su relevancia y calidad.

Se puede recurrir a diversas formas de uso de estas tecnologías.

- Procesar y organizar datos utilizando plantillas de cálculo, y manipular la información sistematizada en ellas para identificar tendencias, regularidades y patrones relativos a los fenómenos estudiados en el sector.
- Desarrollar y presentar información mediante el uso de procesadores de texto, plantillas de presentación y herramientas y aplicaciones de imagen, audio y video.
- Intercambiar información por medio de las herramientas que ofrece internet, como correo electrónico, chat, espacios interactivos en sitios web y/o comunidades virtuales.
- Identificar y resguardarse de los riesgos potenciales del uso de las TIC, mediante el cuidado personal y el respeto por el otro.
- Respetar y asumir consideraciones éticas en el uso de las TIC, como señalar las fuentes de donde se obtiene la información y seguir las normas de uso y de seguridad de los espacios virtuales.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

En el trabajo pedagógico, los y las docentes deben tomar en cuenta la diversidad entre estudiantes en términos culturales, sociales, de sexo, de género, religiosos, étnicos y respecto de estilos y ritmos de aprendizaje y niveles de conocimiento.

La diversidad entre estudiantes establece desafíos que deben considerarse.

Esa diversidad conlleva desafíos que las y los docentes tienen que contemplar. Entre ellos, cabe señalar:

› Promover el respeto a cada estudiante, en un contexto de valoración y apertura, considerando las diferencias de género y evitando toda forma de discriminación arbitraria.

› Procurar que los aprendizajes se desarrollen de una manera significativa en relación con el contexto y la realidad de las y los estudiantes.

› Intentar que cada estudiante logre los objetivos de aprendizaje señalados en el currículum, integrando la diversidad que se manifiesta entre ellos.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD Y PROMOCIÓN DE APRENDIZAJES

Se debe tener en cuenta que atender a la diversidad de estilos y ritmos de aprendizaje no implica "expectativas más bajas" para algunos estudiantes. Por el contrario, la necesidad de educar en forma diferenciada aparece al constatar que hay que reconocer los requerimientos didácticos personales de las y los estudiantes, para que todas y todos alcancen altos logros. Con esto, se aspira a que cada estudiante alcance los aprendizajes dispuestos para su nivel o grado.

En atención a lo anterior, es conveniente que, al momento de diseñar el trabajo en una unidad, el o la docente considere que precisará más tiempo o métodos pertinentes para que todas y todos sus estudiantes logren los aprendizajes propuestos. Para esto, debe desarrollar una planificación intencionada que genere las condiciones que le permitan:

Es necesario atender a la diversidad para que todos y todas logren los aprendizajes.

› Conocer los diferentes niveles de aprendizaje y conocimientos previos de sus estudiantes.

› Incluir ejemplos y analogías que apelen de manera respetuosa a la diversidad y que incluyan a hombres y mujeres.

Esto demanda conocer qué saben y, sobre esa base, definir con flexibilidad las diversas medidas pertinentes.

› Conocer el contexto y entorno en el cual se desenvuelven sus estudiantes para desarrollar experiencias de aprendizaje significativas.

› Conocer las motivaciones e intereses de sus estudiantes.

› Conocer las fortalezas y habilidades de sus estudiantes para potenciar sus aprendizajes.

- Evaluar y diagnosticar en forma permanente para reconocer las necesidades de aprendizaje.
- Definir la excelencia, considerando el progreso individual como punto de partida.
- Incluir combinaciones didácticas (agrupamientos, trabajo grupal, rincones, entre otras) y materiales diversos (visuales, objetos manipulables, entre otros).
- Evaluar de distintas maneras a sus estudiantes y dar tareas con múltiples opciones.
- Promover la confianza de sus estudiantes en sí mismos y el valor de aprender.
- Promover un trabajo sistemático por parte de sus estudiantes y ejercitación abundante.

ENSEÑAR A CONSTRUIR LA IGUALDAD DE GÉNERO DESDE LA PRÁCTICA

Tal como hombres y mujeres tienden a cumplir roles diferentes en la sociedad, debido entre otras cosas a la socialización, también niños y niñas tienden a cumplir roles diferentes en la sala de clases. El espacio escolar debe proporcionar experiencias de colaboración entre niñas y niños, hombres y mujeres, que les permitan lograr objetivos compartidos desde una posición de igualdad. Se recomienda a las y los docentes que:

- **Propicien la reflexión y discusión sobre temas de género,** realizando actividades que incentiven el reconocimiento de los roles, lenguajes y estereotipos con los que se identifican sus estudiantes, y así reflexionen y compartan opiniones sobre ello.
- **Eviten reforzar estereotipos,** enseñando que no existen actividades laborales propias solo de las mujeres o de los hombres, como por ejemplo las profesiones científicas o las de cuidado de otros.
- **Pongan atención a la forma en que se refieren a los y las estudiantes,** visibilizando tanto a hombres como a mujeres, niñas y niños, profesoras y profesores, y evitando sesgos en el trato.
- **Erradiquen toda forma de discriminación en sus estudiantes,** no pasando por alto las bromas, apodos, acciones de discriminación o actos humillantes basados en las supuestas diferencias entre hombres y mujeres. Por ejemplo, denostar a un estudiante al que le gusta bailar, atribuyéndole características femeninas con el fin de humillarlo.

- **Eviten la rivalidad entre los géneros,** aplicando metodologías que favorezcan el desarrollo de competencias de forma igualitaria, donde la relación entre los géneros sea de cooperación y autonomía. Por ejemplo, mediante la conformación de equipos mixtos que permitan que las y los estudiantes se reconozcan en función de sus capacidades, talentos e intereses individuales.
- **Promuevan la actividad física y el deporte de manera equitativa entre hombres y mujeres,** ya que son necesarios para llevar una vida saludable, independientemente del sexo.
- **Promuevan espacios o instancias de expresión de emociones y sentimientos,** por ejemplo, conversando con sus estudiantes acerca de la necesidad de expresar sentimientos, y sin coartar la expresión de sus afectos y emociones.
- **Eviten presentar como naturales diferencias entre hombres y mujeres que son culturalmente adquiridas,** por ejemplo, considerar que las mujeres son más aptas para estudiar carreras del ámbito de la salud, debido a la supuesta condición natural que poseen para cuidar u ocuparse de otros, como si fuera la extensión de su maternidad.

Orientaciones para planificar

La planificación favorece el logro de los aprendizajes.

La planificación es un elemento central en el esfuerzo por promover, dirigir y garantizar los aprendizajes de los y las estudiantes. Permite maximizar el uso del tiempo y definir los procesos y recursos necesarios para lograr los aprendizajes que se deben alcanzar.

El Programa sirve de apoyo a la planificación mediante un conjunto de elementos elaborados para este fin.

Los Programas de Estudio del Ministerio de Educación constituyen una herramienta de apoyo al proceso de planificación. Para estos efectos han sido elaborados como un material flexible que las y los docentes pueden adaptar a su realidad en los distintos contextos educativos del país.

El principal referente que entrega el Programa de Estudio para planificar son los Aprendizajes Esperados. De manera adicional, el Programa apoya la planificación por medio de la propuesta de unidades, de la estimación del tiempo cronológico requerido en cada una y de la sugerencia de actividades para desarrollar los aprendizajes.

CONSIDERACIONES GENERALES PARA REALIZAR LA PLANIFICACIÓN

La planificación es un proceso que se recomienda llevar a cabo considerando los siguientes aspectos:

Se debe planificar tomando en cuenta la diversidad, el tiempo real, las prácticas anteriores y los recursos disponibles.

- La diversidad de ritmos y estilos de aprendizaje de los y las estudiantes del curso, lo que implica planificar considerando desafíos para los distintos grupos de estudiantes.
- El tiempo real con que se cuenta, de manera de optimizar el tiempo disponible.
- Las prácticas pedagógicas que han dado resultados satisfactorios.
- Los recursos para el aprendizaje con que cuenta: textos escolares, materiales didácticos, recursos elaborados por la escuela, laboratorio y materiales disponibles en la biblioteca escolar CRA, entre otros.
- En el caso de una actividad que contemple el uso de la biblioteca escolar CRA, sobre todo en aquellas de investigación, se recomienda coordinarse anticipadamente con el encargado o coordinador pedagógico de la biblioteca escolar.

SUGERENCIAS PARA EL PROCESO DE PLANIFICACIÓN

Para que la planificación efectivamente ayude al logro de los aprendizajes, debe estar centrada en ellos y desarrollarse a partir de una visión clara de lo que las y los estudiantes deben y pueden aprender. Para alcanzar este objetivo, se recomienda elaborar la planificación en los siguientes términos:

› Comenzar por una especificación de los Aprendizajes Esperados que no se limite a listarlos. Una vez identificados, es necesario desarrollar una idea lo más clara posible de las expresiones concretas que puedan tener. Esto implica reconocer qué desempeños de los y las estudiantes demuestran el logro de los aprendizajes. Se deben poder responder preguntas como: "¿Qué deberían ser capaces de demostrar las y los estudiantes que han logrado un determinado Aprendizaje Esperado?" o "¿Qué habría que observar para saber que un aprendizaje ha sido logrado?".

Lograr una visión lo más clara y concreta posible sobre los desempeños que dan cuenta de los aprendizajes…

› A partir de las respuestas a esas preguntas, decidir las evaluaciones que se llevarán a cabo y las estrategias de enseñanza. Específicamente, se requiere identificar qué tarea de evaluación es más pertinente para observar el desempeño esperado y qué modalidades de enseñanza facilitarán alcanzar este desempeño. De acuerdo con este proceso, se deben definir las evaluaciones formativas y sumativas, las actividades de enseñanza y las instancias de retroalimentación.

… y, sobre esa base, decidir las evaluaciones, las estrategias de enseñanza y la distribución temporal.

Las y los docentes pueden complementar los Programas con los Mapas de Progreso, que entregan elementos útiles para reconocer el tipo de desempeño asociado a los aprendizajes.

Se sugiere seleccionar alguno(s) de los periodos de planificación presentados, de acuerdo al contexto de cada institución escolar.

LA PLANIFICACIÓN ANUAL

En este proceso, los y las docentes deben distribuir los Aprendizajes Esperados a lo largo del año escolar considerando su organización por unidades, estimar el tiempo que se requerirá para cada unidad y priorizar las acciones que conducirán a logros académicos significativos.

La planificación anual se debe llevar a cabo con una visión realista de los tiempos disponibles durante el año.

Para esto las y los docentes tienen que:

› Alcanzar una visión sintética del conjunto de aprendizajes a lograr durante el año, dimensionando el tipo de cambio que se debe observar en los y las estudiantes. Esto debe desarrollarse según los Aprendizajes Esperados especificados en los Programas. Los Mapas de Progreso pueden resultar un apoyo importante.

› Identificar, en términos generales, el tipo de evaluación que se requerirá para verificar el logro de los aprendizajes. Esto permitirá desarrollar una idea de las demandas y los requerimientos a considerar para cada unidad.

› Sobre la base de esta visión, asignar los tiempos a destinar a cada unidad. Para que esta distribución resulte lo más realista posible, se recomienda:

  - Listar días del año y horas de clase por semana para estimar el tiempo disponible.
  - Elaborar una calendarización tentativa de los Aprendizajes Esperados para el año completo, considerando los feriados, los días de prueba y de repaso, la realización de evaluaciones formativas y la entrega de retroalimentación.
  - Hacer una planificación gruesa de las actividades de acuerdo con la calendarización.
  - Ajustar permanentemente la calendarización o las actividades planificadas.

LA PLANIFICACIÓN DE LA UNIDAD

Es preciso realizar este proceso sin perder de vista la meta de aprendizaje de la unidad.

Implica tomar decisiones más precisas sobre qué enseñar y cómo enseñar, considerando la necesidad de ajustarlas a los tiempos asignados a la unidad. La planificación de la unidad debiera seguir los siguientes pasos:

› Especificar la meta de la unidad. Al igual que la planificación anual, esta visión debe sustentarse en los Aprendizajes Esperados de la unidad y se recomienda complementarla con los Mapas de Progreso.

› Idear una herramienta de diagnóstico de inicio de la unidad.

› Crear una evaluación sumativa para la unidad.

› Calendarizar los Aprendizajes Esperados por semana.

› Establecer las actividades de enseñanza que se desarrollarán.

› Generar un sistema de seguimiento de los Aprendizajes Esperados, especificando los tiempos y las herramientas para realizar evaluaciones formativas y entregar retroalimentación.

› Ajustar el plan continuamente ante los requerimientos de las y los estudiantes.

LA PLANIFICACIÓN DE CLASE

Es imprescindible que cada clase sea diseñada considerando que todas sus partes estén alineadas con los Aprendizajes Esperados que se busca promover y con la evaluación que se utilizará. Recuerde que el clima escolar influye directamente en la calidad de los aprendizajes, por lo que es importante crear todas las condiciones propicias para el aprendizaje, con especial énfasis en las relaciones de convivencia entre los y las estudiantes, y de estos con las y los docentes.

Es fundamental procurar que los estudiantes sepan qué y por qué van a aprender, qué aprendieron y de qué manera.

Adicionalmente, se recomienda que cada clase sea diseñada distinguiendo su inicio, desarrollo y cierre, y especificando claramente qué elementos se considerarán en cada una de estas partes. Se requiere tomar en cuenta aspectos como los siguientes:

Inicio
En esta fase se debe procurar que los y las estudiantes conozcan el propósito de la clase; es decir, qué se espera que aprendan. A la vez, se debe buscar captar su interés y que visualicen cómo se relaciona lo que aprenderán con lo que ya saben y con las clases anteriores.

Desarrollo
En esta etapa las y los docentes llevan a cabo la actividad contemplada para la clase.

Cierre
Este momento puede ser breve (5 a 10 minutos), pero es central. En él se debe procurar que los y las estudiantes se formen una visión acerca de qué aprendieron y cuál es la utilidad y relación de las estrategias y experiencias desarrolladas con su entorno y realidad cotidiana para promover un aprendizaje significativo.

Orientaciones para evaluar

Apoya el proceso de aprendizaje al permitir su monitoreo, retroalimentar a los estudiantes y sustentar la planificación.

La evaluación forma parte constitutiva del proceso de enseñanza. No se debe usar solo como un medio para controlar qué saben las y los estudiantes, sino que, además, desempeña un rol central en la promoción y el desarrollo del aprendizaje. Para que cumpla efectivamente con esta función, debe tener como objetivos:

› Ser un recurso para medir el progreso en el logro de los aprendizajes.

› Proporcionar información que permita conocer las fortalezas y debilidades de los y las estudiantes y, sobre esta base, retroalimentar la enseñanza y potenciar los logros esperados dentro del sector.

› Ser una herramienta útil para la planificación.

› Ser una herramienta que permita la autorregulación de las y los estudiantes.

¿CÓMO PROMOVER EL APRENDIZAJE POR MEDIO DE LA EVALUACIÓN?

Las evaluaciones adquieren su mayor potencial para promover el aprendizaje si se llevan a cabo considerando lo siguiente:

Explicitar qué se evaluará.

› Informar a los y las estudiantes sobre los aprendizajes que se evaluarán. Esto facilita que puedan orientar su actividad hacia el logro de los aprendizajes que deben alcanzar.

Identificar logros y debilidades.

› Elaborar juicios sobre el grado en que se logran los aprendizajes que se busca alcanzar, fundados en el análisis de los desempeños de las y los estudiantes. Las evaluaciones entregan información para conocer sus fortalezas y debilidades. El análisis de esta información permite tomar decisiones para mejorar los resultados alcanzados.

› Promover la autoevaluación entre los y las estudiantes.

Ofrecer retroalimentación.

› Retroalimentar a las y los estudiantes sobre sus fortalezas y debilidades. Compartir esta información con ellas y ellos permite orientarlos acerca de los pasos que deben seguir para avanzar. También les da la posibilidad de desarrollar procesos metacognitivos y reflexivos destinados a favorecer sus propios aprendizajes, lo que, a su vez, facilita que se involucren y se comprometan con estos.

¿CÓMO SE PUEDEN ARTICULAR LOS MAPAS DE PROGRESO DEL APRENDIZAJE CON LA EVALUACIÓN?

Los Mapas apoyan diversos aspectos del proceso de evaluación.

Los Mapas de Progreso ponen a disposición de las escuelas y liceos de todo el país un mismo referente para observar el desarrollo del aprendizaje de los y las estudiantes y los ubican en un continuo de progreso. Los Mapas de Progreso apoyan el seguimiento de los aprendizajes, pues permiten:

› Reconocer aquellos aspectos y dimensiones esenciales de evaluar.

› Aclarar la expectativa de aprendizaje nacional al conocer la descripción de cada nivel, sus ejemplos de desempeño y el trabajo concreto de estudiantes que ilustran esta expectativa.

› Observar el desarrollo, la progresión o el crecimiento de las competencias de una o un estudiante al constatar cómo sus desempeños se van desplazando en el Mapa.

› Contar con modelos de tareas y preguntas que permiten a cada estudiante evidenciar sus aprendizajes.

¿CÓMO DISEÑAR LA EVALUACIÓN?

Es necesario partir estableciendo los Aprendizajes Esperados a evaluar…

La evaluación debe diseñarse a partir de los Aprendizajes Esperados, con el objeto de observar en qué grado se alcanzan. Para lograrlo, se recomienda diseñar la evaluación junto con la planificación y considerar las siguientes preguntas:

› ¿Cuáles son los Aprendizajes Esperados del Programa que abarcará la evaluación?

Si debe priorizar, considere aquellos aprendizajes que serán duraderos y prerrequisitos para desarrollar otros aprendizajes. Para esto, los Mapas de Progreso pueden ser de especial utilidad.

› ¿Qué evidencia necesitarían exhibir sus estudiantes para demostrar que dominan los Aprendizajes Esperados?

Se recomienda utilizar como apoyo los Indicadores de Evaluación que presenta el Programa.

… y luego decidir qué se requiere para su evaluación en términos de evidencias, métodos, preguntas y criterios.

› ¿Qué método empleará para evaluar?

Es recomendable utilizar instrumentos y estrategias de diverso tipo (pruebas escritas, guías de trabajo, informes, ensayos, entrevistas, debates, mapas conceptuales, informes de laboratorio e investigaciones, entre otros).

En lo posible, se deben presentar situaciones que puedan resolverse de distintas maneras y con diferentes grados de complejidad, para que los diversos estudiantes puedan solucionarlas y así mostrar sus distintos niveles y estilos de aprendizaje.

› ¿Qué preguntas incluirá en la evaluación?

Se deben formular preguntas rigurosas y alineadas con los Aprendizajes Esperados, que permitan demostrar la real comprensión del contenido evaluado.

› ¿Cuáles son los criterios de éxito? ¿Cuáles son las características de una respuesta de alta calidad?

Esto se puede responder con distintas estrategias. Por ejemplo:

- Comparar las respuestas de sus estudiantes con las mejores respuestas de otros estudiantes de edad similar. Se pueden usar los ejemplos presentados en los Mapas de Progreso.
- Identificar respuestas de evaluaciones previamente realizadas que expresen el nivel de desempeño esperado y utilizarlas como modelo para otras evaluaciones aplicadas en torno al mismo aprendizaje.
- Desarrollar rúbricas que indiquen los resultados explícitos para un desempeño específico y que muestren los diferentes niveles de calidad para dicho desempeño.

Matemática

Matemática

PROPÓSITOS

El aprendizaje de la matemática ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas para desenvolverse en la vida cotidiana. Entre ellas se encuentran el cálculo, el análisis de la información proveniente de diversas fuentes y la capacidad de generalizar situaciones, formular conjeturas, evaluar la validez de resultados y seleccionar estrategias para resolver problemas. Todo esto contribuye a desarrollar un pensamiento lógico, ordenado, crítico y autónomo, y a generar actitudes como precisión, rigurosidad, perseverancia y confianza en sí mismo, que se valoran no solo en la ciencia y la tecnología, sino también en la vida cotidiana.

Aprender matemática acrecienta también las habilidades relativas a la comunicación; por una parte, enseña a presentar información con precisión y rigurosidad y, por otra, a demandar exactitud y rigor en las informaciones y argumentos que se reciben.

El conocimiento matemático y la capacidad para usarlo provocan importantes consecuencias en el desarrollo, el desempeño y la vida de las personas. Aprender matemática permite, a las y los estudiantes, dar respuesta a interrogantes y problemas de diferentes campos de conocimiento o a distintos fenómenos de la vida cotidiana. Por lo tanto, contribuye a que se desarrollen como personas autónomas que se valoran a sí mismas.

La matemática ofrece también la posibilidad de trabajar con entes abstractos y sus relaciones, y prepara a los y las estudiantes para que entiendan el medio y las múltiples relaciones que se dan en un espacio simbólico y físico de complejidad creciente. En este espacio, la cultura, la tecnología y las ciencias se redefinen en forma permanente y se hacen más difíciles, y las finanzas, los sistemas de comunicación entre naciones y culturas se relacionan y globalizan.

HABILIDADES

Al estudiar matemática, la y el estudiante desarrolla el razonamiento lógico, la visualización espacial, el pensamiento analítico, el cálculo, el modelamiento y las destrezas para resolver problemas.

A continuación, se presenta una tabla que permite:

› Observar transversalmente las habilidades que se desarrollan en el sector.

› Focalizarse en un nivel y diseñar actividades y evaluaciones que enfaticen dichas habilidades.

› Situarse en el nivel, observar las habilidades que se trabajaron en años anteriores y las que se trabajarán más adelante.

› Advertir diferencias y similitudes en los énfasis por ciclos de enseñanza.

HABILIDADES DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO				
7° básico	8° básico	1° medio	2° medio	3° medio
Resolver problemas en contextos diversos y significativos, utilizando los contenidos del nivel.	Resolver problemas en contextos diversos y significativos.	Analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos.	Aproximar números mediante variados métodos.	Resolver problemas con un campo numérico más amplio.
Analizar la validez de los procedimientos utilizados y de los resultados obtenidos.	Evaluar la validez de los resultados obtenidos y el empleo de dichos resultados para fundamentar opiniones y tomar decisiones.		Argumentar respecto de las variaciones que se producen en la representación gráfica de funciones.	Argumentar la validez de conjeturas y proposiciones.
				Formular conjeturas generalizando en forma algebraica.
Ordenar números y ubicarlos en la recta numérica.			Ubicar raíces en la recta numérica.	Ubicar números complejos en el plano complejo.
Realizar cálculos en forma mental y escrita.	Realizar cálculos en forma mental y escrita.			Realizar cálculos en forma mental, escrita y con calculadora.
Emplear formas simples de modelamiento matemático.	Emplear formas simples de modelamiento matemático.	Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables.	Modelar situaciones diversas mediante funciones.	Modelar situaciones diversas mediante funciones.
	Verificar proposiciones simples, para casos particulares.	Diferenciar entre verificación y demostración de propiedades.	Demostrar propiedades y teoremas.	Demostrar propiedades y proposiciones.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Se ha concebido este sector como una oportunidad para que los y las estudiantes construyan aprendizajes de vida. La matemática es un área poderosa de la cultura, pues permite comprender, explicar y predecir situaciones y fenómenos del entorno. Por eso, es importante que las y los docentes se esfuercen para que cada estudiante del país aprenda los conocimientos y desarrolle las capacidades propias de esta disciplina. Estos Programas entregan algunas orientaciones que ayudarán a los y las docentes a cumplir con este objetivo por medio de la planificación, en el transcurso de las clases.

LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS: PROFUNDIDAD E INTEGRACIÓN

Los y las estudiantes deben explorar en las ideas matemáticas y entender que ellas constituyen un todo y no fragmentos aislados del saber. Es necesario que vivan variadas experiencias para que comprendan en profundidad los conceptos matemáticos, sus conexiones y sus aplicaciones; de esta manera, podrán participar activamente y adquirir mayor confianza para investigar y aplicar la matemática. Por ello, se recomienda que las y los estudiantes usen materiales concretos, lleven a cabo trabajos prácticos y se apoyen en la aplicación de tecnología, de tal manera de potenciar la formulación y verificación de conjeturas y, así, desarrollar progresivamente el razonamiento matemático.

EL USO DEL CONTEXTO

Es importante que el y la docente aclare que esta disciplina está enraizada en la cultura y en la historia, que impacta en otras áreas del conocimiento científico, que crea consecuencias y que permite desarrollar aplicaciones. Preguntarse cómo y en qué periodos de la historia se originaron los conceptos y modelos matemáticos y cómo se enlazaron con la evolución del pensamiento permite enriquecer el aprendizaje. En este sentido, se recomienda usar analogías y representaciones cercanas a las y los estudiantes, en especial, en las etapas de exploración, así como también aplicar la matemática en otras áreas del saber y en la vida diaria como un modo de apoyar la construcción del conocimiento matemático.

PENSAMIENTO MATEMÁTICO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Esta disciplina se construye sobre la base de regularidades que subyacen a situaciones aparentemente diversas, y ayuda a razonar en vez de actuar de modo mecánico. Por eso, es importante invitar a los y las estudiantes a buscar regularidades. También es fundamental que desarrollen y expliquen la noción de "estrategia", que comparen diversas formas de abordar problemas y que justifiquen y demuestren las proposiciones matemáticas. Asimismo, la y el docente debe procurar que los y las estudiantes formulen y verifiquen conjeturas y que analicen los procedimientos para resolver un problema y justificar los resultados.
Aun cuando las y los estudiantes deben ser competentes en diversas habilidades matemáticas, la o el docente debe evitar que se enfoquen en los procedimientos si no comprenden los principios matemáticos correspondientes.

USO DEL ERROR

Usar adecuadamente el error ayuda a crear un ambiente de búsqueda y creación. Un educador o una educadora puede aprovechar la equivocación para inducir aprendizajes especialmente significativos, si lo hace de manera constructiva. Se debe considerar el error como un elemento concreto para trabajar la diversidad en clases y permitir que cada estudiante alcance los aprendizajes propuestos.

APRENDIZAJE MATEMÁTICO Y DESARROLLO PERSONAL

La clase de Matemática ofrece abundantes ocasiones para el autoconocimiento y las interacciones sociales. Es una oportunidad para la metacognición[6], para formularse preguntas como "¿Cómo lo hice?" o "¿De qué otra manera es posible?". Además, la percepción que cada cual tiene de su propia capacidad para aprender y hacer matemática surge de la retroalimentación que le ha dado la propia experiencia. En ese sentido, el o la docente tiene en sus manos un poderoso instrumento: reconocer los esfuerzos y los logros de los y las estudiantes. Para promover la confianza y la autoestima en cada estudiante, la o el docente puede intencionar una comunicación reflexiva que permita explicar las relaciones entre los conceptos matemáticos, centrándose en las estrategias y procedimientos aplicados tanto por el grupo curso como por cada estudiante, valorando la diversidad de soluciones y estimulando el análisis de los errores realizados al resolver el problema.

Es importante incentivar a las y los estudiantes a ser parte activa de las distintas instancias de clases e interacciones docente-estudiantes. Las y los docentes deben dar estímulos igualitarios para que las y los jóvenes se involucren de la misma manera tanto en los ejercicios prácticos como en las respuestas y preguntas en clases. Se espera también que los y las docentes incentiven la confianza y la empatía de cada estudiante hacia el aprendizaje de la matemática, por medio de experiencias y situaciones cercanas a sus intereses.

TECNOLOGÍAS DIGITALES Y APRENDIZAJE MATEMÁTICO

El presente Programa propone usar *software* y ambientes digitales para ampliar las oportunidades de aprendizaje de los y las estudiantes. Estas tecnologías permiten representar nociones abstractas por medio de modelos en los que se puede experimentar con ideas matemáticas, y posibilitan crear situaciones para que las y los estudiantes exploren las características, los límites y las posibilidades de conceptos, relaciones o procedimientos matemáticos. Los procesadores geométricos, simbólicos y de estadística son laboratorios para investigar relaciones y ponerlas a prueba. Con un procesador simbólico se puede analizar y entender números grandes o muy pequeños, y también estudiar el comportamiento de funciones, incluso las de alta complejidad. Internet ofrece múltiples ambientes con representaciones dinámicas de una gran cantidad de objetos matemáticos. Los procesadores geométricos permiten experimentar con nociones y relaciones de la geometría euclidiana, cartesiana o vectorial. En conclusión, el uso de dichos *software* configura un espacio atractivo para los y las estudiantes que los ayudará a formarse para una vida cada vez más influida por las tecnologías digitales.

CLIMA Y MOTIVACIÓN

Es fundamental propiciar un ambiente creativo para que los y las estudiantes formulen, verifiquen o refuten conjeturas respecto de los problemas que abordan. Ese ambiente debe admitir que el error, la duda y la pregunta son importantes y valiosos para construir conocimientos y emplear los aportes de todos para crear una búsqueda y construcción colectiva. En ese espacio será posible analizar acciones y procedimientos y buscar caminos alternativos.

6 Metacognición: conocimiento de la propia actividad cognitiva y la habilidad para comprender y controlar los procesos cognitivos propios.

USO DE LA BIBLIOTECA ESCOLAR CRA

Se espera que las y los estudiantes visiten la biblioteca escolar CRA y exploren distintos recursos de aprendizaje para satisfacer sus necesidades e intereses mediante el acceso a lecturas de interés y numerosas fuentes, así como para desarrollar competencias de información e investigación. Para ello, es necesario coordinar el trabajo entre docentes y encargados de biblioteca para implementar actividades que efectivamente respondan a los Objetivos Fundamentales que se buscan lograr. La biblioteca escolar CRA puede ser un importante lugar de encuentro para la cooperación y participación de la comunidad educativa. Esta puede cumplir la función de acopio de la información generada por docentes y estudiantes en el proceso de aprendizaje, de manera de ponerla a disposición de todos. Tanto los documentos de trabajo como los materiales concretos producidos pueden conformar una colección especializada dentro del establecimiento.

Visión global del año

APRENDIZAJES ESPERADOS POR SEMESTRE Y UNIDAD | CUADRO SINÓPTICO

SEMESTRE 1		SEMESTRE 2	
UNIDAD 1	**UNIDAD 2**	**UNIDAD 3**	**UNIDAD 4**
Números	Álgebra	Geometría	Datos y azar
AE 01 Reconocer los números complejos como una extensión del campo numérico de los números reales.	**AE 07** Reconocer el tipo de situaciones que modelan las funciones cuadráticas.	**AE 11** Relacionar la geometría elemental con la geometría cartesiana.	**AE 15** Utilizar el concepto de probabilidad condicional en problemas cotidianos o científicos.
AE 02 Utilizar los números complejos para resolver problemas que no admiten solución en los números reales.	**AE 08** Representar la función cuadrática mediante tablas y gráficos, y algebraicamente.	**AE 12** Describir la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar.	**AE 16** Aplicar el concepto de variable aleatoria discreta para analizar distribuciones de probabilidades en contextos diversos.
AE 03 Resolver problemas aplicando las cuatro operaciones con números complejos.	**AE 09** Modelar situaciones reales por medio de la función cuadrática para resolver problemas relativos a situaciones de cambio cuadrático.	**AE 13** Relacionar sistemas 2x2 de ecuaciones lineales con pares de rectas en el plano cartesiano para representar soluciones gráficas.	**AE 17** Representar funciones de probabilidad y distribuciones de una variable aleatoria discreta.
AE 04 Formular y justificar conjeturas que suponen generalizaciones o predicciones de números complejos y sus propiedades.	**AE 10** Reconocer que todas las ecuaciones de segundo grado con una incógnita tienen soluciones en el conjunto de los números complejos.	**AE 14** Resolver problemas de sistemas 2x2 de ecuaciones lineales e interpretar la solución en función del contexto cotidiano.	**AE 18** Comparar el comportamiento de una variable aleatoria en forma teórica y experimental, considerando diversas situaciones o fenómenos.
AE 05 Argumentar la validez de los procedimientos o conjeturas referentes a números complejos y sus propiedades.			**AE 19** Desarrollar la distribución binomial para experimentos tales como cara o sello y situaciones de éxito o fracaso.

SEMESTRE 1		SEMESTRE 2	
UNIDAD 1	**UNIDAD 2**	**UNIDAD 3**	**UNIDAD 4**
AE 06 Representar un número complejo de forma polar y calcular la potencia, con exponente racional, de un número complejo.			**AE 20** Modelar situaciones o fenómenos mediante la distribución binomial.
32 horas pedagógicas	32 horas pedagógicas	20 horas pedagógicas	30 horas pedagógicas

Semestre

1

UNIDAD 1
NÚMEROS

PROPÓSITO

En esta unidad se recogen los aprendizajes que los y las estudiantes ya han desarrollado sobre los números reales y ecuaciones para introducir los números complejos y su operatoria. Se espera que las y los estudiantes relacionen lo aprendido sobre el plano cartesiano y sobre vectores para extenderlo a los números complejos y que sean capaces de representarlos en el plano complejo.

En el ámbito de los números complejos y su operatoria, se busca que los y las estudiantes conjeturen sobre propiedades del conjugado de un número complejo, verificando con varios números complejos y, además, de forma algebraica. Se pretende también que utilicen conocimientos de expresiones algebraicas para validar sus conjeturas y los apliquen en el cálculo y en las argumentaciones.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Números irracionales y propiedades, números reales y propiedades, operaciones aritméticas con números reales, potencias de exponente racional, propiedades de las potencias de exponente racional, raíces enésimas, propiedades de las raíces enésimas.

CONCEPTOS CLAVE

Números complejos, operatoria con complejos, plano complejo, vectores.

CONTENIDOS

- Números complejos.
- Operaciones aritméticas con números complejos.
- Conjugado de un número complejo.

HABILIDADES

- Resolver problemas con un campo numérico más amplio.
- Argumentar la validez de conjeturas y proposiciones.
- Formular conjeturas generalizando en forma algebraica.
- Realizar cálculos en forma mental, escrita y con calculadora.
- Demostrar propiedades y proposiciones.

ACTITUDES

- Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva en la solución de problemas en contextos diversos.

APRENDIZAJES ESPERADOS E INDICADORES DE EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
Se espera que los y las estudiantes sean capaces de:	*Las y los estudiantes que han logrado este aprendizaje:*
AE 01 Reconocer los números complejos como una extensión del campo numérico de los números reales.	› Determinan a qué tipo de conjunto pertenece la solución de una ecuación cuadrática. › Escriben un número complejo de forma vectorial y viceversa. › Relacionan la unidad imaginaria i con la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.
AE 02 Utilizar los números complejos para resolver problemas que no admiten solución en los números reales.	› Resuelven ecuaciones cuadráticas cuyas soluciones no corresponden a números reales. › Conjeturan acerca de la solución de la ecuación $x^2 + c = 0$ si la constante c pertenece a $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}^-$.
AE 03 Resolver problemas aplicando las cuatro operaciones con números complejos.	› Suman y restan números complejos. › Ponderan o multiplican números complejos, según corresponda. › Dividen números complejos. › Identifican, en las operaciones con números complejos, las propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad. › Resuelven problemas utilizando números complejos.
AE 04 Formular y justificar conjeturas que suponen generalizaciones o predicciones de números complejos y sus propiedades.	› Calculan con varios números complejos para reconocer propiedades de estos. › Formulan y justifican conjeturas relativas a las propiedades de números complejos.
AE 05 Argumentar la validez de los procedimientos o conjeturas referentes a números complejos y sus propiedades.	› Validan sus conjeturas en ejemplos numéricos. › Formulan y verifican conjeturas respecto de un número complejo y su conjugado.
AE 06 Representar un número complejo de forma polar y calcular la potencia, con exponente racional, de un número complejo.	› Representan de forma polar un número complejo. › Calculan la potencia de un número complejo. › Representan, en el plano complejo, las raíces de un número complejo.

OFT	APRENDIZAJES ESPERADOS EN RELACIÓN CON LOS OFT

- Desarrollar el interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento.
- Comprender y valorar la perseverancia, el rigor, el cumplimiento, la flexibilidad y la originalidad.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS PARA LA UNIDAD

Al introducir los números complejos, se recomienda enfatizar que constituyen un nuevo conjunto numérico. Asimismo, conviene recordar el largo proceso de la ampliación del conjunto numérico, desde los números naturales hasta los números reales, y destacar las situaciones de las cuales surgió la necesidad de estudiar estos números para dar solución a ecuaciones del tipo $x^2 + b = 0$, con $b \in \mathbb{N}$.

Un abordaje metodológico para trabajar los números complejos es analizar distintas ecuaciones y evidenciar la necesidad de utilizar números reales y complejos en el proceso, destacando la pertenencia de las soluciones de las ecuaciones a los conjuntos numéricos respectivos. Debe notarse que, a diferencia de los números reales, un número complejo $z = (a,b)$, donde a es la parte real y b la parte imaginaria: $\mathbb{C} = \{(a,b): a,b \in \mathbb{R}\}$. Al mismo tiempo, se llama unidad imaginaria i al número complejo que es solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Por ende, los números complejos tienen una estructura nueva: se componen de una parte real y una parte imaginaria, es decir, todo número complejo se define como $z = (a,b) = a + bi$ / a y $b \in \mathbb{R}$. Esto implica que los números complejos no son representables en una dimensión como en la recta numérica. Por lo tanto, se requiere una representación en dos dimensiones, como la representación vectorial en el plano complejo.

En las actividades iniciales se recomienda que los y las estudiantes experimenten resolviendo ecuaciones que no tienen soluciones reales. Para destacar la naturaleza de los números complejos se sugiere la representación vectorial en el plano complejo, destacando la interpretación gráfica de la adición y sustracción de números complejos. Este conocimiento les será útil al resolver problemas en Física relativos a corriente alterna. Previo al estudio de la operatoria con números complejos, se pueden incluir preguntas sobre las diferentes formas de abordar este tema, por ejemplo: ¿Cómo puedo proceder con la suma de dos números complejos si estos representan pares ordenados en el plano complejo? ¿Cómo se representa la suma en el plano complejo? ¿Qué representa el resultado al sumar dos números complejos? ¿Se puede representar la resta de dos números complejos mediante vectores?

Por otra parte, sumar y restar números complejos también se puede realizar en forma pictórica con vectores en el plano complejo. Se sugiere utilizar un *software* para graficar los puntos, las restas y las sumas, pues facilita la visualización de las diagonales del paralelogramo como el resultado de las operatorias realizadas. En el caso de la operatoria con números complejos, se recomienda invitar a los y las estudiantes a hacer cálculos, graficar y luego conjeturar sobre el comportamiento de las representaciones de la suma, resta, ponderación y potencias de números complejos. Para lograr esto, es recomendable comenzar con números complejos cuyo valor de la parte real e imaginaria corresponda a números enteros, usando preferentemente el ámbito numérico del –10 al 10. En el caso de las potencias con números complejos, se sugiere considerar el tratamiento de los complejos unitarios y algunas nociones de la circunferencia unitaria.

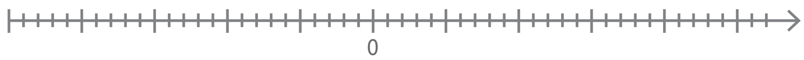
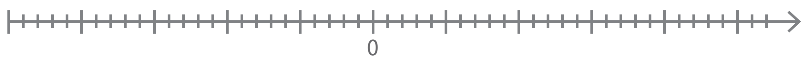
Es importante destacar que resolver problemas con números complejos requiere de una propuesta metodológica que implica relacionar la representación algebraica con la geométrica, conjeturar posibles soluciones, comprobar en el plano complejo y argumentar/demostrar las posibles generalizaciones. Mediante esta metodología, se propicia y fortalece el razonamiento matemático; por ejemplo, al ponderar un número complejo, las y los estudiantes deberían ser capaces de inferir y argumentar la siguiente generalización: sea $(a + bi)$ ponderado por c, y el valor del número real es $c > 1$, entonces la representación del número complejo se dilata en la misma dirección; si el valor del número real es $c < -1$, entonces la representación del número complejo se dilata en dirección contraria; si es valor del número real es $-1 < c < 1$, entonces la representación del número complejo se contrae en la misma dirección o en dirección contraria dependiendo del signo del número real c. En la resolución de problemas matemáticos de números complejos, se promueve la búsqueda creativa de soluciones y la argumentación matemática de propiedades y generalizaciones.

SUGERENCIAS DE ACTIVIDADES

Las sugerencias de actividades presentadas a continuación pueden ser seleccionadas, adaptadas y/o complementadas por la o el docente para su desarrollo, de acuerdo a su contexto escolar.

AE 01	Reconocer los números complejos como una extensión del campo numérico de los números reales.

1. Dadas las ecuaciones cuadráticas a continuación, realizan las siguientes actividades:
   a. Determinan las soluciones para cada una de las ecuaciones en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
   b. Justifican si corresponde representar las soluciones en la recta numérica.

Ecuación	Soluciones	¿Es posible representar las soluciones en la recta numérica?
$x^2 - 4 = 0$		
$x^2 - 2 = 0$		
$x^2 - 1 = 0$		
$x^2 - \frac{1}{25} = 0$		
$x^2 - \frac{1}{100} = 0$		
$x^2 + 0 = 0$		
$x^2 + 1 = 0$		

   c. Razonan y justifican la respuesta a la pregunta: ¿Qué diferencia hay entre la representación gráfica en la línea recta de las soluciones para $x^2 - 1 = 0$ y $x^2 + 1 = 0$?

d. Conjeturan acerca del valor del discriminante ($b^2 - 4ac$) en ecuaciones cuadráticas del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, para soluciones que corresponden a un número real y para ecuaciones cuadráticas cuyas soluciones son un número complejo.

e. Justifican que para toda ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se obtienen soluciones reales si $(b^2 - 4ac) \geq 0$, y soluciones complejas si $(b^2 - 4ac) < 0$.

2. Reconocen, en la tabla 1, cuáles de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas son reales y cuáles son complejas. A continuación, completan la tabla para responder la pregunta: ¿A qué conjunto numérico pertenecen las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas?

Ecuación	Solución	Conjunto numérico
$x^2 - 5 = 0$	$\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$	real (irracional)
$x^2 + 36 = 0$	$6i$, $-6i$	complejo (imaginario)
$x^2 - \frac{121}{64} = 0$		
$x^2 + 4x + 8 = 0$		
$x^2 + 3 = 0$		
$x^2 + 8x + 25 = 0$		
$x^2 - 3x - 10 = 0$		

3. Relacionan el número complejo $a + bi$ con el par ordenado (a,b) en el plano complejo:

a. Identifican el par ordenado (a,b) para cada uno de los siguientes números complejos: $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$, $1 - i$, $2 + 3i$, $-3 - 2i$, $0{,}5i$, $-0{,}5i$, $3{,}5 - 2{,}5i$

b. Conjeturan respecto del cuadrante del plano complejo en que se encuentran los siguientes números complejos, si $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^-$: (a,b), $(-a,-b)$, $(a,-b)$ y $(-a,b)$

c. Representan los números complejos anteriores en el plano complejo y justifican las conjeturas formuladas.

d. Justifican que el número complejo $w = (-a,-b)$ permite construir una simetría puntual respecto del origen del plano complejo, si $z = (a,b)$ con a y $b \in \mathbb{R}$. Conceptualizan que el número complejo $-z$ se denomina "opuesto".

4. Identifican pares ordenados con su respectivo número complejo (por ejemplo, al par (5,7) le asocian el número complejo $5 + 7i$). Luego, realizan las actividades a continuación:

$$(1,0),\ (0,1),\ (-1,0),\ (0,-1),\ (2,0),\ (-5,0),\ (0,4),\ (0,-6)$$

a. Formulan y justifican conjeturas respecto a los números complejos representados como un punto en el eje Y del plano complejo.

b. Formulan y justifican conjeturas respecto a los números complejos representados como un punto en el eje X del plano complejo.

c. Justifican la veracidad o falsedad de las siguientes conjeturas: "Todo número complejo de la forma $(0,b)$ corresponde a un número imaginario puro", "Todo número complejo de la forma $(a,0)$ corresponde a un número complejo solamente con parte real".

AE 02	Utilizar los números complejos para resolver problemas que no admiten solución en los números reales.

1. Sabiendo que la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ es $x = i$, $x = -i$, determinan la solución de las ecuaciones $x^2 + 4 = 0$ y $x^2 + 9 = 0$.

2. Sabiendo que la ecuación de segundo grado $x^2 + 1 = 0$ se factoriza por $(x + i)(x - i)$:

a. Resuelven las siguientes ecuaciones de segundo grado: $x^2 + 4 = 0$; $x^2 + 9 = 0$; $x^2 + 16 = 0$; $x^2 + 25 = 0$; $x^2 + 36 = 0$ y $x^2 + 49 = 0$.

b. Resuelven las siguientes ecuaciones de segundo grado: $x^2 + 8 = 0$; $x^2 + 12 = 0$; $x^2 + 18 = 0$; $x^2 + 27 = 0$; $x^2 + 37 = 0$ y $x^2 + 43 = 0$.

c. Formulan conjeturas respecto de la factorización al resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + c^2 = 0$, con c perteneciente a $\mathbb{N}$

d. Verifican las conjeturas anteriores factorizando las siguientes ecuaciones de segundo grado: $x^2 + 41 = 0$; $x^2 + 144 = 0$; $x^2 + 83 = 0$; $x^2 + 100 = 0$ y $x^2 + 225 = 0$.

e. Demuestran que el número complejo $\pm i\sqrt{b}$ (con b perteneciente a $\mathbb{N}$) es solución de la ecuación cuadrática $x^2 + b = 0$.

f. Justifican la veracidad o falsedad de la siguiente conjetura: "Toda ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$ (con c perteneciente a $\mathbb{N}$) tiene solución en $\mathbb{R}$, y toda ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + c^2 = 0$ (con c perteneciente a $\mathbb{N}$) tiene solución en los números complejos".

3. Encuentran y discuten el error en la siguiente expresión y justifican el porqué del error en el procedimiento realizado:

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{-1 \cdot -1} = \sqrt{1} = 1.$$

Observaciones a la o el docente

Se sugiere trabajar esta actividad en formato de discusión grupal: con la guía de la o el docente, cada equipo expone sus ideas y comentarios, y escucha con respeto las justificaciones del error en la expresión que entreguen los demás. El o la docente puede orientar a las y los estudiantes a inferir que el error en la expresión está en aplicar propiedades de raíces propias del conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$), las cuales no se cumplen en el conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$). Al mismo tiempo, es importante que explique a sus estudiantes la falta de definición de la raíz cuadrada de un número negativo en el conjunto de los números reales, con el propósito de no aplicar propiedades de operatoria en $\mathbb{R}$ al conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$); por ejemplo: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$ con $a > 0$ y $b > 0$ se cumple en $\mathbb{R}$, pero no en el conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$).

4. Encuentran la ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

a. $2 + 2i$ y $2 - 2i$

b. $-3 + i$ y $-3 - i$

c. Si x_1 y x_2 son las soluciones de toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, demuestran que $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ y $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Observaciones a la o el docente

En esta actividad, la o el docente puede orientar la demostración considerando dos etapas: en la primera, las y los estudiantes pueden verificar con casos particulares que $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ y $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$; y en la segunda, las y los estudiantes pueden demostrar dichas generalizaciones para promover el desarrollo del razonamiento matemático. Por ejemplo: dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, las soluciones de esta son:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{con } a \neq 0,\ b \neq 0 \text{ y } c \neq 0,$$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) = \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo tanto, $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

AE 03

Resolver problemas aplicando las cuatro operaciones con números complejos.

1. Suman dos números complejos de forma pictórica, por ejemplo, representan en el plano complejo los números $3 + 2i$ y $-3 + 2i$, y realizan la suma de vectores. Conjeturan que la suma de dos números complejos en el plano complejo corresponde a la diagonal del paralelogramo formado por la representación vectorial de los números.

2. Encuentran el número complejo Z que cumple con la condición dada:
   a. $Z + (1 + i) = 3 - 2i$
   b. $(-3 - i) + 5Z = 4i$
   c. Para qué valores de c se cumple: $(2 + i) + (5 + ci) = 7 - 7i$
   d. Si $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$, demuestran que $Z_1 = Z_2$, si y solo si $a = c$ y $b = d$.

3. Suman y restan números complejos en forma simbólica y pictórica en el plano complejo:
   a. Completan las siguientes tablas.

Forma binomial	Forma par ordenado	Resultado como par ordenado	Resultado de forma binomial
$(5 + 2i) + (4 - 2i)$	$(5,2) + (4,-2)$	$(9,0)$	$9 + 0i$
$(2 + 2i) + (2 + i)$			
	$(5,3) + (4,2)$		
$(-1 + 7i) + (8 + 3i)$			
	$(5,2) - (4,-2)$		

Resultado de forma binomial	Resultado como par ordenado	¿Qué números complejos permiten obtener el resultado planteado de forma binomial?	
$0 + 9i$			
$3 + 4i$			
$-5 + 3i$			
$10 + 7i$			
$4 + i$			

b. Representan las sumas o restas de números complejos en el plano complejo.

4. Si $z = (a + bi)$ y $w = (c + di)$, con w no nulo:

a. Demuestran que $\dfrac{z}{w} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i$.

b. Demuestran que $z - 1 = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$.

c. Demuestran que $z^{-1} = \dfrac{-i}{b}$.

Observaciones a la o el docente

En esta actividad, la o el docente puede promover en los y las estudiantes el desarrollo del razonamiento matemático por medio de la comprobación de casos particulares y, posteriormente, construir conjuntamente la demostración solicitada. Cabe destacar que el proceso de argumentar está presente en todos los momentos de la actividad matemática en los que se afirma algo o en los que se quiere garantizar la verdad o falsedad de generalizaciones. En este contexto, se sugiere explicar que el proceso de generar argumentos tiene un carácter social y cobra sentido cuando emerge la necesidad de garantizar la validez de un concepto o propiedad en matemática, ya que la demostración permite el cambio de estatus de una afirmación entendida como una conjetura a una generalización validada y aceptada.

» Si $z = (a + bi)$ y $w = (c + di)$ con w no nulo.

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di}$$ Representamos 1 por $\dfrac{c - di}{c - di}$

$$\frac{z}{w} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - cdi + cdi - d^2i^2}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 - cdi + cdi + d^2}$$ Recordar que $i^2 = -1$

$$\frac{z}{w} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}\, i$$

» Sea $z = a + bi = (a,b)$. Si $z \cdot z^{-1} = (1,0)$

$(a + bi) \cdot z^{-1} = 1$

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi}$$

$$z^{-1} = \frac{a - bi}{(a^2 - b^2 i^2)}$$

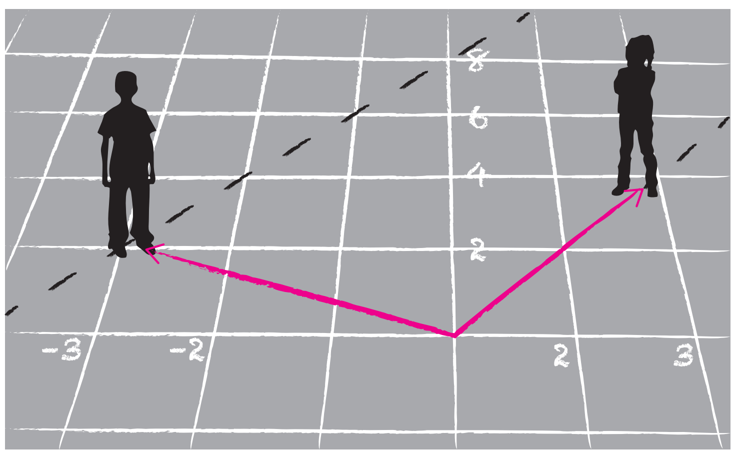
$$z^{-1} = \frac{a - bi}{(a^2 + b^2)}$$

$$z^{-1} = (a - bi) \cdot \frac{1}{a^2 + b^2}$$

Cabe destacar que la demostración en este ámbito es especialmente árida y formal para las y los estudiantes. Se recomienda acompañar los desarrollos formales con explicaciones y metáforas que muestren el sentido de lo hecho, por ejemplo, comparar el proceso de división de dos complejos con el cociente entre binomios y, en la comparación, mostrar el efecto de reemplazar i^2 por –1. Esto permitirá que los alumnos y las alumnas comprendan que una de las contribuciones más importantes de la demostración es la comunicación de la comprensión matemática.

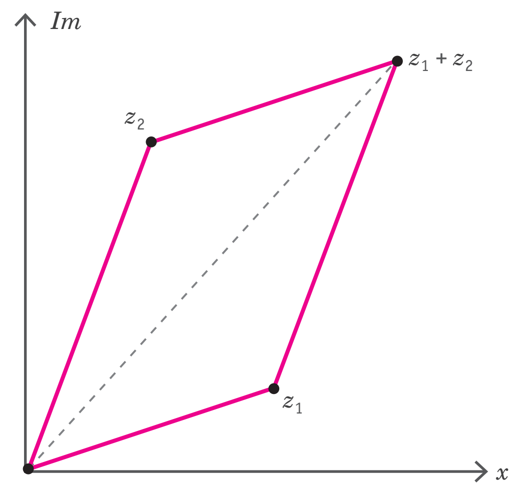
5. Suman y restan números complejos de forma concreta, por ejemplo, hacen el siguiente ejercicio:

Agustín ha recorrido de forma lineal desde el punto (0,0) hasta ubicarse en el punto (2,2). Camila ha comenzado en (0,0) y, recorriendo de forma lineal, se ha ubicado en el punto (–3,1). Si Camila debe caminar lo que ya ha caminado Agustín, y Agustín debe caminar lo que ha recorrido Camila, ¿cuál es el punto de encuentro?

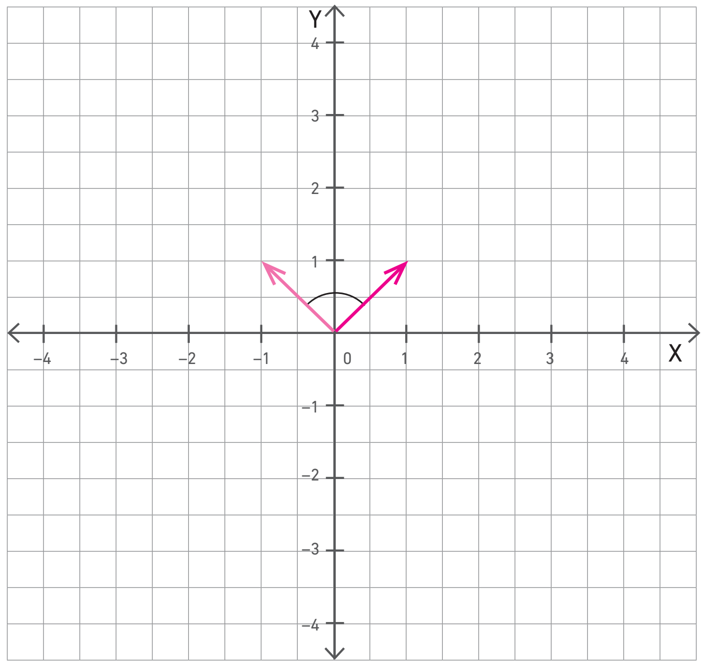


Observaciones a la o el docente

En comparación con los números reales, los números complejos tienen una estructura nueva: se componen de una parte real y una parte imaginaria. Esto implica que los números complejos no son representables en una dimensión como en la recta numérica, por lo tanto, se requiere la representación vectorial en el plano complejo. En consecuencia, la suma de números complejos se representa con la suma de vectores. Para destacar la estructura nueva de los números complejos, se puede llevar a cabo la siguiente actividad en forma concreta, fuera de la sala de clases. Además, esta actividad sirve para fortalecer un contenido conocido de Geometría de 1° medio: la suma y la resta de vectores, que ahora se aplica en el contexto de los números complejos. Se sugiere, si es posible, utilizar un *software* para graficar los puntos y las sumas, pues esto puede facilitar la visualización de las diagonales del paralelogramo como suma de números complejos.



6. Se les presenta la siguiente situación:
Un giro en 90º se puede representar por la expresión $(1 + i) \cdot i = i - 1 = -1 + i$, como muestra la figura.



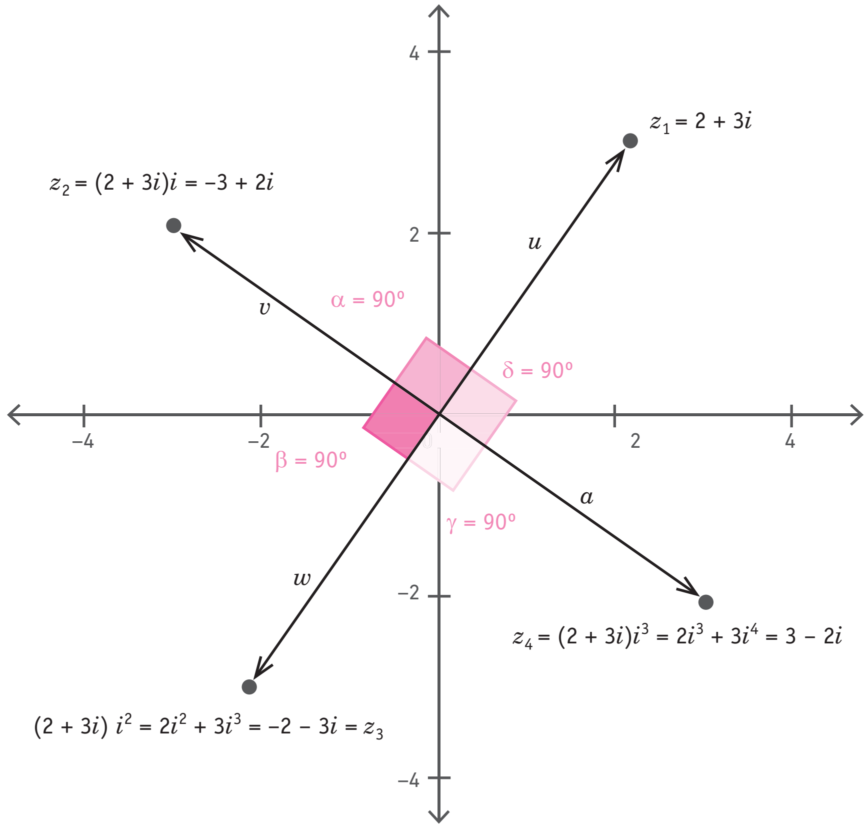
a. Conjeturan y verifican cuál es el ángulo de giro al ponderar un número complejo por i^2 e i^4.

b. Conjeturan y argumentan cuál es el ángulo de giro al ponderar un número complejo por i^{4n} e i^{4n+2} para n perteneciente a los números naturales.

c. Responden: ¿Qué sucede para i^{4n+1} e i^{4n+3}, con n perteneciente a los números naturales?

Observaciones a la o el docente

Para esta actividad se sugiere utilizar algún *software* gratuito (Geogebra o Graphmática) para construir las representaciones gráficas al ponderar un número complejo cualquiera por i^{4n} y i^{4n+2} para $n \in \mathbb{N}$. La o el docente puede comenzar el análisis gráfico promoviendo, en una primera etapa, la visualización e identificación de regularidades de casos particulares en un *software* geométrico, y en una segunda etapa, orientando a las y los estudiantes a comunicar ya sea verbal, simbólica o gráficamente la regularidad identificada. Posteriormente, la o el docente puede motivar la formulación de conjeturas utilizando lenguaje matemático, como una etapa previa a la construcción de la demostración. Por ejemplo:



Si $z = a + bi$ con a, $b \in \mathbb{R}$.

$z \cdot i = (a + bi) \cdot i = a \cdot i + b \cdot i^2$

$z \cdot i = (a + bi) \cdot i = -b + a \cdot i$

$z \cdot i^2 = (a + bi) \cdot i^2 = a \cdot i^2 + b \cdot i^3$ Recordar que $i^2 = -1$

$z \cdot i^2 = (a + bi) \cdot i^2 = -a - b \cdot i = -(a + b \cdot i) = -z$

$z \cdot i^3 = (a + bi) \cdot i^3 = a \cdot i^3 + b \cdot i^4$

$z \cdot i^3 = (a + bi) \cdot i^3 = b - ai$

$z \cdot i^4 = (a + bi) \cdot i^4 = a \cdot i^4 + b \cdot i^5$

$z \cdot i^4 = (a + bi) \cdot i^4 = a \cdot 1 + b \cdot i^4 \cdot i = a + b \cdot i = a + bi = z$

Un segundo ejemplo es el siguiente: dado cualquier número complejo $z = a + bi$, las y los estudiantes deben demostrar que $z \cdot i^{4n+1}$ da como resultado $z \cdot i$, cuya interpretación geométrica significa que se ha realizado una rotación (en el sentido antihorario) en 90°.

Si $z = a + bi$ con a y $b \in \mathbb{R}$.

$z \cdot i^{4n+1} = z \cdot i^{4n} \cdot i$

$z \cdot i^{4n+1} = z \cdot i \cdot (i^4)^n$ Recordar que $i^4 = 1$

$z \cdot i^{4n+1} = z \cdot i \cdot (1)^n$

$z \cdot i^{4n+1} = z \cdot i \cdot 1$

$z \cdot i^{4n+1} = z \cdot i$

Por lo tanto,

$z \cdot i = (a + bi) \cdot i = ai + bi^2 = -b + ai$

Cabe destacar que la actividad puede ser abordada con diferentes niveles de complejidad disciplinar, es decir, las y los estudiantes pueden resolver el problema desde un punto de vista geométrico y, posteriormente, relacionar la interpretación geométrica con la demostración de la regularidad de los ciclos dados por i^{4n}, i^{4n+1}, i^{4n+2} e i^{4n+3}, con n perteneciente a $\mathbb{N}$.

7. Resuelven problemas aplicando $i^2 = -1$.

a. $(2 + 8i)\ (0{,}5 - i)$

b. $(\sqrt{3} + 2i)\left(2 - i\sqrt{3}\right)$

c. $(\sqrt{16} - 2i)\left(-1 + i\sqrt{2}\right)$

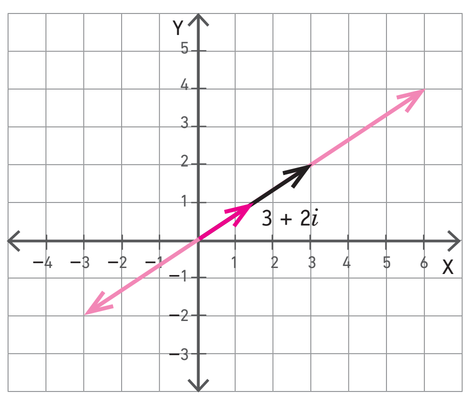
d. Para qué valores de k se obtiene un número imaginario puro $(1 + ki)^2$

e. Para qué valores de k se obtiene un número real $(25 - ki)(ki - 25)$

8. Ponderan un número complejo $a + bi$ por un escalar c, en los casos siguientes:

- $(3 + 2i) \cdot 2 =$
- $(3 + 2i) \cdot -1 =$
- $(3 + 2i) \cdot \frac{1}{2} =$

a. Representan y comparan los resultados en el plano cartesiano.



b. Responden: ¿Para qué valores de c el vector se dilata? ¿Para qué valores de c el vector se contrae? ¿Para qué valores de c el vector cambia de dirección?

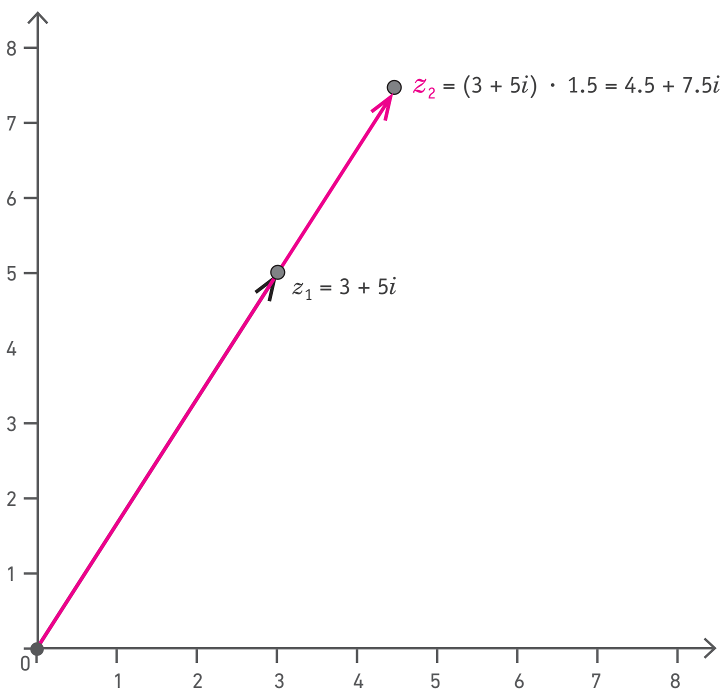
c. Conjeturan respecto de los cambios de dirección y tamaño del vector al realizar una ponderación de un número complejo y justifican las generalizaciones obtenidas en b. Finalmente, comprueban basándose en otros casos, como los siguientes:

- $(-5 + 3i) \cdot \frac{1}{4}$
- $(-5 + 3i) \cdot -2$
- $(-5 + 3i) \cdot 3$

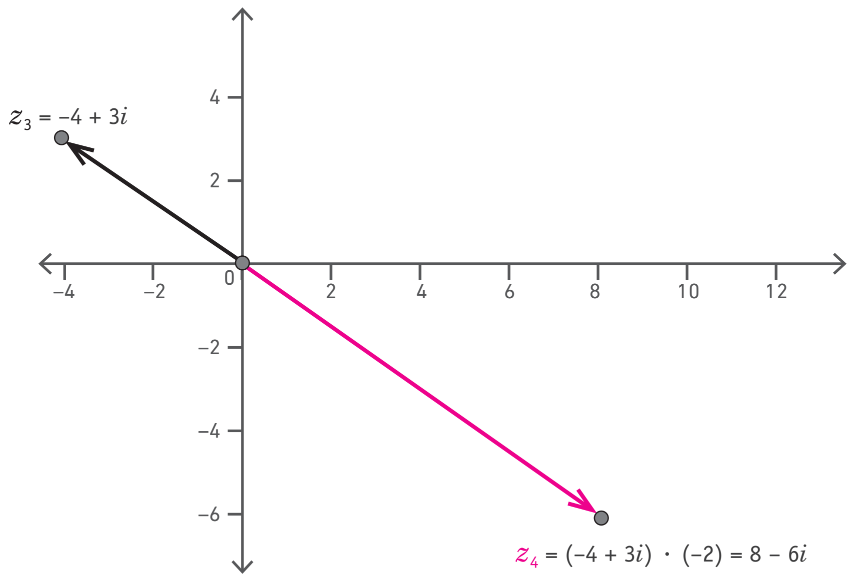
Observaciones a la o el docente

En esta actividad se espera que las alumnas y los alumnos varíen el valor de c al ponderar un número complejo. También se pretende que conjeturen y generalicen lo siguiente respecto de lo que le ocurre al representar en el plano complejo la ponderación de un número complejo: si el valor del número real (escalar) es $c > 1$, entonces la representación del número complejo se dilata en la misma dirección; si el valor del número real (escalar) es $c < -1$, entonces la representación del número complejo se dilata en dirección contraria; si el valor del número real c (escalar) cumple con la condición $-1 < c < 1$, entonces la representación del número complejo se contrae y la dirección del vector resultante depende del signo del valor c.

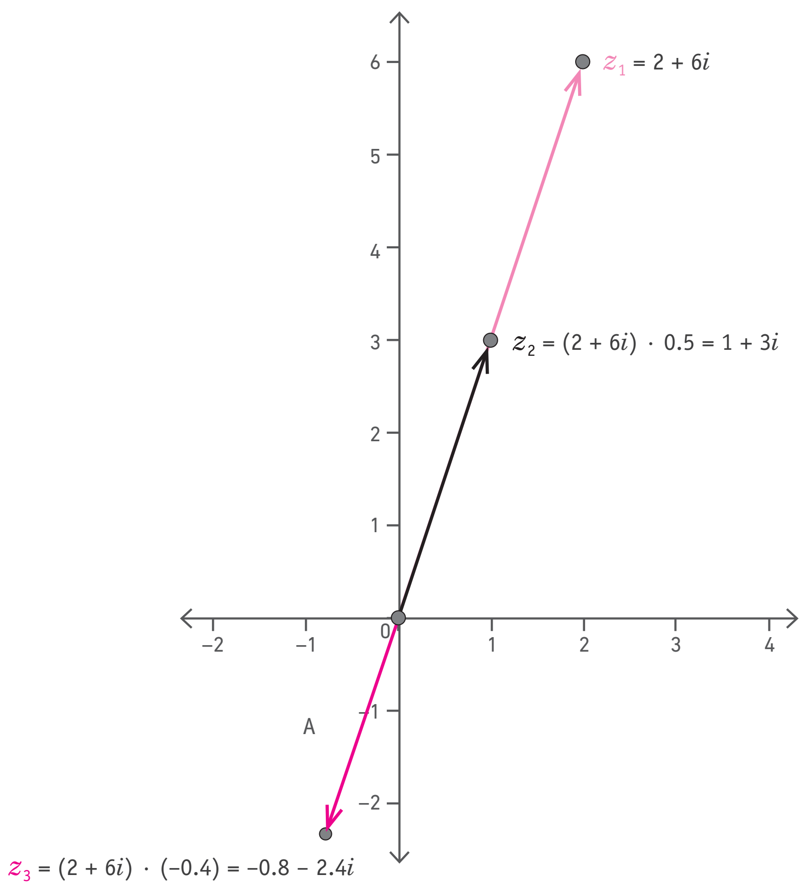
Ponderación de un número complejo con $c > 1$



Ponderación de un número complejo con $c < -1$

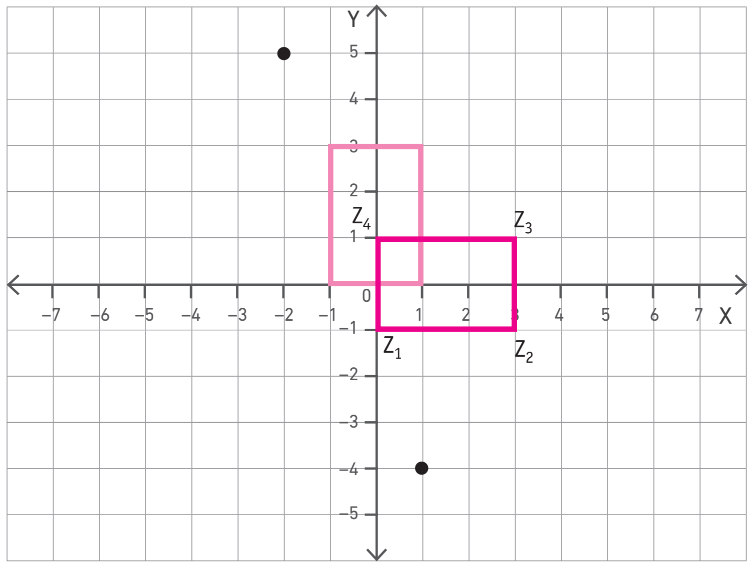


Ponderación de un número complejo con $-1 < c < 1$

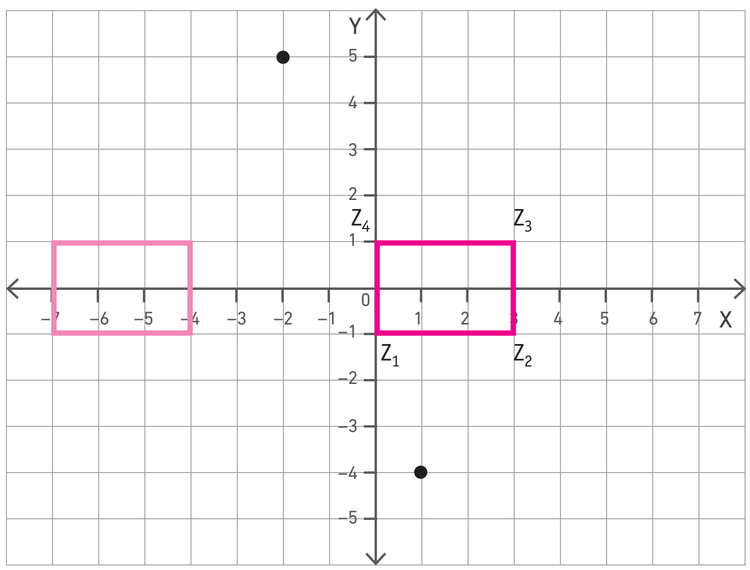


9. Realizan transformaciones de figuras utilizando operaciones con números complejos:

a. En la figura siguiente, identifican las coordenadas de los vértices (Z_1, Z_2, Z_3 y Z_4) del rectángulo, realizan una rotación de 90º y reconocen las coordenadas de los vértices del rectángulo rotado.



b. En la siguiente figura, identifican el número complejo que permite obtener el rectángulo trasladado a partir de las coordenadas Z_1, Z_2, Z_3 y Z_4.

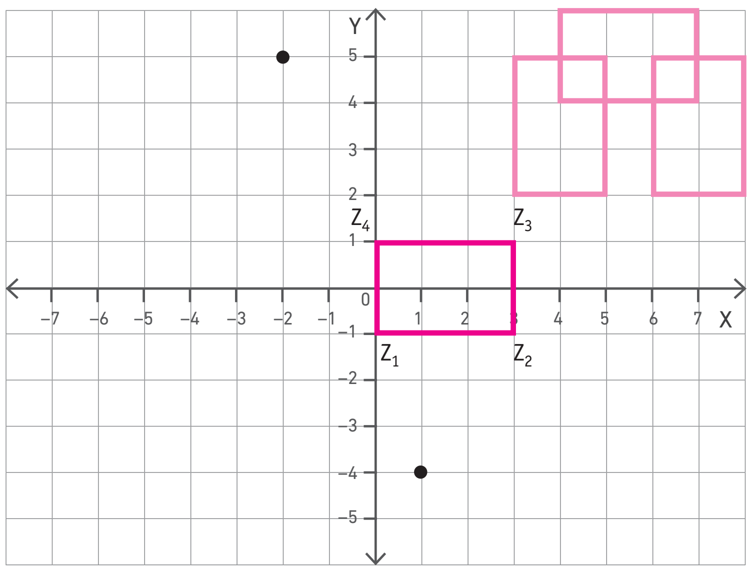


c. Conjeturan y verifican respecto de las coordenadas del número complejo que permite realizar una traslación de forma horizontal o vertical del rectángulo cuyos vértices son Z_1, Z_2, Z_3 y Z_4.

Observaciones a la o el docente

En la actividad c. es importante que las y los estudiantes verifiquen la veracidad o falsedad de la siguiente conjetura: el número complejo $(-a,0)$ permite realizar una traslación horizontal hacia la izquierda del plano complejo, y el número complejo $(a,0)$ permite realizar una traslación horizontal hacia la derecha del plano complejo $[(a,0)$ y $(-a,0)$ con $a > 0]$. Además deben formular y verificar que el número complejo que permite realizar una traslación vertical en el plano complejo corresponde a $(0,a)$ y $(0,-a)$ con $a > 0$. Se sugiere utilizar algún *software* gratuito para realizar esta actividad y para justificar las conjeturas planteadas previamente.

d. Determinan números complejos y las operaciones que se deben hacer al rectángulo con vértices Z_1, Z_2, Z_3 y Z_4, para obtener las figuras que se muestran en el siguiente plano complejo.



e. Crean figuras a partir de rectángulos o triángulos, considerando la operación con números complejos y los vértices de las figuras.

Observaciones a la o el docente

En la actividad 9, las y los estudiantes podrán relacionar la expresión $z \cdot i^n$ con rotaciones, y la suma de números complejos con traslaciones. Con esto, el o la docente tiene la oportunidad de relacionar la operatoria de números complejos con transformaciones isométricas.

Es importante señalar que en la actividad e. los y las estudiantes pueden considerar diferentes rotaciones e incluso diferentes figuras, teniendo en cuenta que solamente se ha trabajado rotaciones en 90º.

Si surgieran otras rotaciones, se puede trabajar la rotación en 60° dada por el número complejo $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, lo cual permite generar un rombo a partir de un triángulo equilátero como figura inicial. Asimismo, los alumnos y las alumnas pueden verificar que al multiplicar un número complejo por $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ se obtiene una rotación de 120º.

Finalmente, el o la docente puede orientar a las y los estudiantes a inferir que, al realizar una rotación en 60º y luego en 120º del triángulo equilátero inicial, se obtiene un trapecio isósceles, al considerar las tres figuras.

AE 04 Formular y justificar conjeturas que suponen generalizaciones o predicciones de números complejos y sus propiedades.

Observaciones a la o el docente

Se sugiere a la o el docente explicar las diferencias conceptuales entre definición, teorema y/o propiedades, con el propósito de que los y las estudiantes logren una comprensión profunda del lenguaje disciplinar utilizado en el conjunto de los números complejos. Una definición en el conjunto de los números complejos es: sea z_1 = (a,b) y z_2 = (c,d), entonces $z_1 \cdot z_2 = (a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$. En este contexto de análisis, una ejemplificación para diferenciar una definición y propiedades sería:

Definición: Sea $z = (a,b)$ un número complejo, el módulo de z es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propiedades de módulo de un número complejo:

Para todo $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 0$

Para todo $z \in \mathbb{C}$, $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$

Para todo $z \in \mathbb{C}$, $|z_1 + z_2| \leq |z_2| + |z_2|$

Para todo $z \in \mathbb{C}$, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

1. Calculan potencias de i, considerando que $i^0 = 1$ y que $i^2 = -1$, responden las preguntas y realizan la actividad.
   a. ¿Qué valores se obtienen cuando el exponente es un número par?
   b. ¿Qué valores se obtienen cuando el exponente es un número impar?
   c. ¿Qué valores se obtienen cuando el exponente es múltiplo de 4?
   d. Demuestran que $i^{4k} = 1$; $i^{4k+1} = i$; $i^{4k+2} = -1$; $i^{4k+3} = -i$, con $k \in \mathbb{N}$.

2. Trabajan con diferentes números complejos y sus potencias:
   a. Dado el número complejo $z = 2 + 3i$, interpretan la expresión $z \cdot i^k$ para k = 0, 2, 3, 4, 5, 6 y conjeturan acerca del patrón observado.
   b. Consideran el número complejo $1 + i$ como base y los exponentes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (por ejemplo: $(1 + i)^0$, $(1 + i)^2$) y dibujan las diferentes potencias del número en el plano complejo. Conjeturan acerca del patrón observado.

c. Consideran el número complejo $2 + 2i$ como base y los exponentes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y dibujan las diferentes potencias del número en el plano complejo. Conjeturan acerca del patrón observado.

3. Determinan el conjugado de los siguientes números complejos:

$$z = 2 + 3i \ ; \ w = -\frac{1}{2} + \frac{3i}{4} \ ; \ m = 4 - i.$$

Además, grafican en el plano complejo los números dados y sus respectivos conjugados. Finalmente, responden: ¿Para qué valores a y b, la representación en el plano complejo del número imaginario $z = a + bi$ y su conjugado representan una reflexión respecto del eje X?

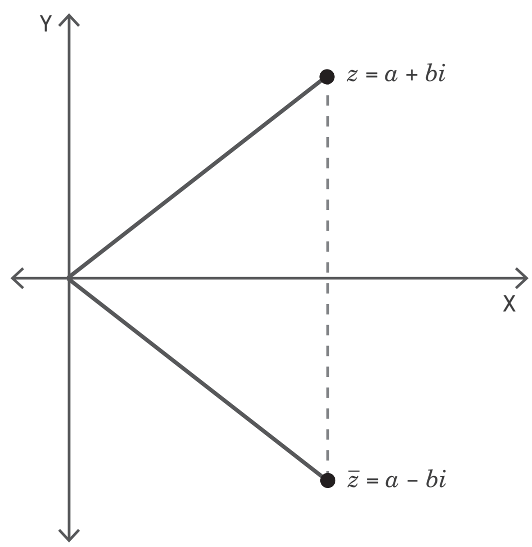
4. Dado el número complejo $z = a + bi$:

a. Representan en el plano complejo z y $\bar{z}$, y justifican que $\bar{z}$ es equivalente a una doble reflexión respecto del eje X.

b. Demuestran que $z = \bar{z}$

Observaciones a la o el docente

Para esta actividad, se sugiere que las y los estudiantes interpreten geométricamente la relación entre un número complejo y su conjugado. Además, se recomienda potenciar el razonamiento matemático por medio de demostraciones y su respectiva interpretación geométrica en el plano complejo.



Sea $z = a + bi \ / \ a, b \in \mathbb{R}$.

El conjugado de $z = (a + bi)$ es $\bar{z} = a - bi$.

Si $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$, entonces $\bar{\bar{z}} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z$.

AE 05

Argumentar la validez de los procedimientos o conjeturas referentes a números complejos y sus propiedades.

1. Dado el número complejo $z = a + bi$ y $w = c + di$ (a, b, c y $d \in \mathbb{R}$):

   a. Demuestran que $\bar{z} = -i^2\bar{z}$.

   b. Demuestran que $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

   c. Demuestran que $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

   d. Demuestran que $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

   e. Demuestran la siguiente propiedad:
   $\overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{a + bi} + \overline{c + di}$.

Observaciones a la o el docente

Para abordar los problemas de demostración, se sugiere comenzar comprobando con casos particulares la veracidad de las diferentes proposiciones planteadas en la actividad. Luego, las y los estudiantes deben construir la demostración con la orientación de la o el docente. Por ejemplo:

Sea $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

$$\overline{z + w} = \overline{(a + bi) + (c + di)}$$

$$\overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i}$$

$$\overline{(a + bi) + (c + di)} = (a + c) - (b + d)i$$

$$\overline{(a + bi) + (c + di)} = a + c - bi - di$$

$$\overline{(a + bi) + (c + di)} = (a - bi) + (c - di)$$

$$\overline{(a + bi) + (c + di)} = \quad \bar{z} \quad + \quad \bar{w}$$

Por lo tanto, $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

2. Si $z = a + bi$ y se define como módulo del número complejo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$:

   a. Hallan un número complejo cuyo módulo es igual a 5 y su parte real es igual a 3.

   b. Demuestran que $\sqrt{z\,\bar{z}}$.

   c. Demuestran que $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$.

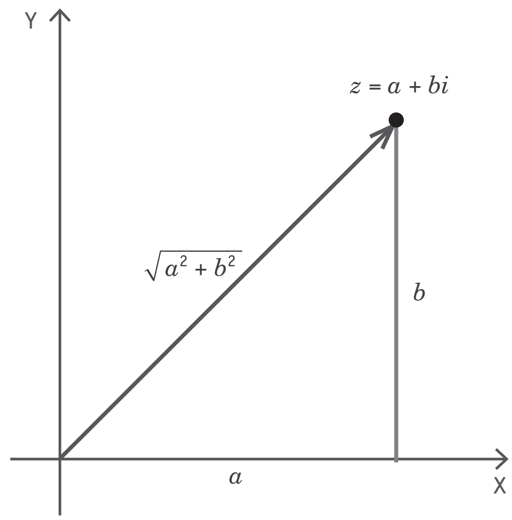
   d. Demuestran que $|z_1 z_2| = |z_1|\ |z_2|$.

   e. Demuestran que $|z^{-1}|= |z|^{-1}$.

Observaciones a la o el docente

Se sugiere analizar la representación gráfica del número complejo y la interpretación del módulo de un número en el plano complejo:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Para abordar los problemas de demostración, se recomienda comenzar comprobando con casos particulares la veracidad de las diferentes proposiciones. Luego, las y los estudiantes deben construir la demostración con la orientación de la o el docente. Por ejemplo:

Sea z = $a + bi$, $|z| = \sqrt{z\,\bar{z}}$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 - b^2 i^2} \qquad \text{Recordar que } i^2 = -1$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a + bi)(a - bi)} \qquad z = a + bi \text{ y } \bar{z} = a - bi$$

Por lo tanto, $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\,\bar{z}}$

3. Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ (a, b, c y $d \in \mathbb{R}$):

a. Demuestran que $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

b. Representan en el plano complejo $z_1 + z_2$ y $z_2 + z_1$. Verifican que la interpretación geométrica de la suma de números complejos corresponde a la Regla del paralelogramo.

c. Demuestran que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ y justifican la Regla del paralelogramo como la interpretación geométrica de la suma de números complejos en el plano complejo.

Observaciones a la o el docente

Se sugiere que la o el docente explique que el fin último del proceso de argumentación y demostración es promover una comprensión profunda de la matemática por medio de preguntas y problemas que se deben responder y resolver. En este proceso se formulan conjeturas y se justifican las conclusiones.

Para abordar los problemas de demostración, se recomienda comenzar comprobando con casos particulares la veracidad de las diferentes proposiciones. Luego, las y los estudiantes deben construir la demostración con la orientación de la o el docente. Por ejemplo:

Sea $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

$$|z_1 + z_2| = |(a + bi) + (c + di)|$$

$$|z_1 + z_2| = |(a + c) + (b + d)i|$$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(a^2 + 2ac + c^2) + (b^2 + 2bd + d^2)}$$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + 2(ac + db)}$$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + w\overline{z}}$$ Ahora elevamos al cuadrado

$$|z_1 + z_2|^2 = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + w\overline{z}$$ Pero $2(ac + bd) \leq 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = 2|z_1|\ |z_2|$

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1| + |z_2| + 2|z_1|\ |z_2|$$

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

Por lo tanto, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

4. Si $w = a + bi$ (a y $b \in \mathbb{R}$):

   a. Representan en el plano complejo $|w| < 4$ e interpretan la región delimitada.

   b. Representan en el plano complejo $|w| \leq 1$. Responden: ¿Es correcto que el conjunto de puntos que cumple la condición anterior representan un círculo?

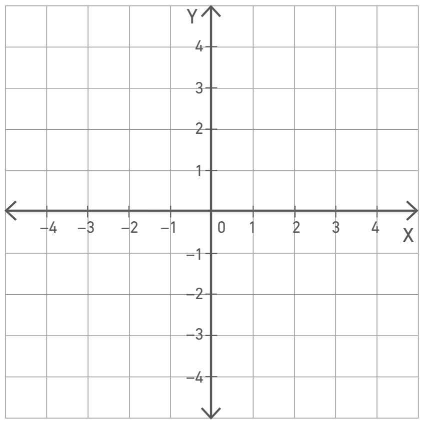
   c. Responden: ¿Es correcto afirmar que toda circunferencia puede ser representada como el conjunto de puntos que cumple la condición $|w| = k$, con $k \in \mathbb{N}$?

AE 06

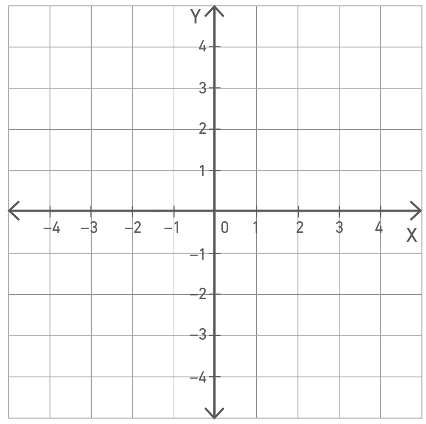
Representan un número complejo de forma polar y calculan la potencia, con exponente racional, de un número complejo.

1. Representan de forma polar los siguientes números complejos:
$z = 3 + 2i$, $w = -4 + 4i$, $u = -2 - 3i$ y $v = 2.5 - 3.5i$.

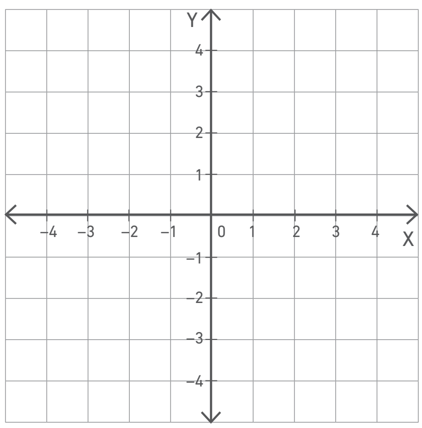
Representar z



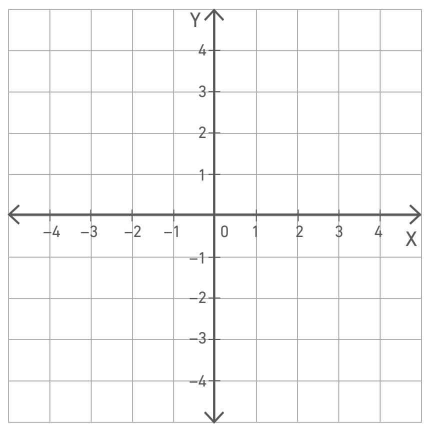
Representar w



Representar u



Representar v



a. Luego, calculan el módulo de los números complejos z, w, u y v.

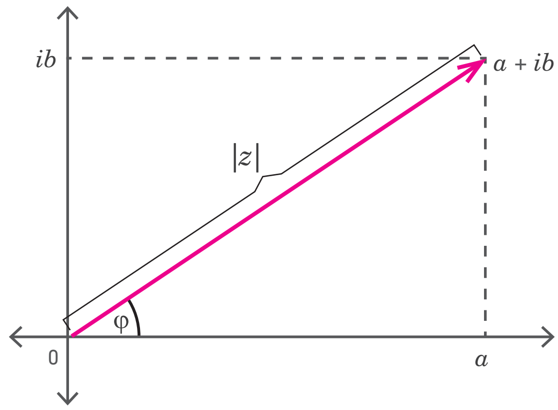
b. Miden, con transportador, el ángulo formado por el vector $\vec{z}$ y eje real positivo del plano complejo. Realizan el mismo procedimiento para calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{w}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y el eje real positivo del plano complejo. Definen que el ángulo obtenido corresponde al argumento de un número complejo.

c. Representan en forma polar (por ejemplo, $z = m_{\alpha}$, m es el módulo y α es el argumento) los números complejos z, w, u y v.

Observaciones a la o el docente

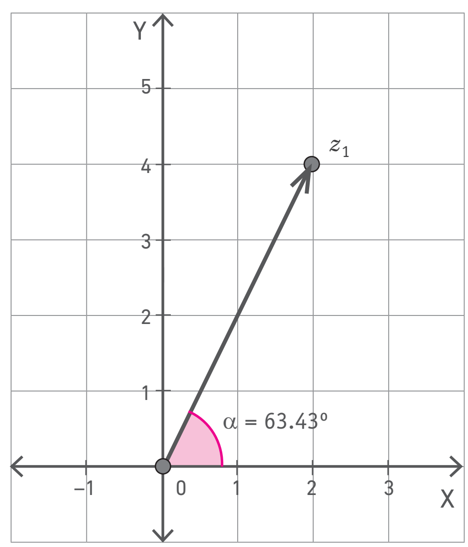
Para profundizar en el análisis disciplinar de la representación de un número complejo de forma polar, se sugiere, en una primera instancia, que los y las estudiantes "midan" el ángulo formado entre el vector (representación del número complejo en el plano complejo) y el eje real positivo del plano complejo, para obtener el argumento de la forma polar. Posteriormente, el o la docente puede promover la utilización de calculadora para obtener el valor del argumento de un número complejo sin tener que representar los datos en el plano complejo. Cabe destacar que las razones trigonométricas necesarias en el análisis propuesto a continuación no forman parte de los contenidos correspondientes a este nivel. Por esta razón, el siguiente estudio requiere mayor orientación y apoyo por parte de la o el docente para que los y las estudiantes puedan desarrollar las actividades planteadas.

Al representar un número complejo de forma polar, el o la docente debe considerar que no es posible realizar un estudio trigonométrico como el siguiente: Para todo número complejo $z = a + bi$.



Se cumple: $\tan \varphi = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \dfrac{b}{a} = \text{arctang}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, el o la docente puede orientar el siguiente análisis: Dado el número complejo $z_1 = 2 + 4i$

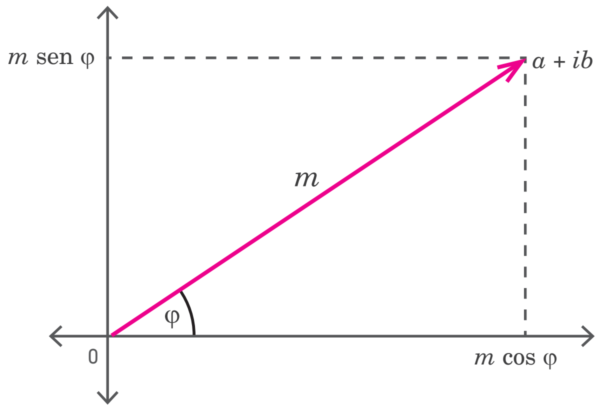


Utilizando una calculadora, las y los estudiantes pueden calcular el argumento del número complejo $z_1 = 2 + 4i$. Para realizar los cálculos correspondientes se puede visitar la página http://web2.0calc.es

$$\text{Arctang}\left(\frac{4}{2}\right) = \text{Arctang (2)} = 63{,}434948^\circ$$

El módulo del número complejo $z_1 = 2 + 4i$ es igual a $|z_1| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Por lo tanto, la representación polar del número complejo $z_1 = 2 + 4i$ es $2\sqrt{5}_{63{,}43^\circ}$. Se espera que las y los estudiantes puedan comprobar que el número complejo $1 + i = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$ y que el número complejo $2i = 2_{\frac{\pi}{2}}$.

Con respecto a esta actividad, el o la docente puede promover niveles de aprendizaje más complejos. Para ello, puede abordar la representación trigonométrica de un número complejo $a + bi$ y relacionarla con la forma polar. Aplicando los conceptos de funciones trigonométricas, se obtiene que:



Por lo tanto, $m_\varphi = m \cos \varphi + m (\sin \varphi)i = m (\cos \varphi + i \sin \varphi) = m (\cos \varphi, \sin \varphi)$.

Se sugiere motivar a las y los estudiantes a construir en conjunto la demostración de algunas propiedades relacionadas con la forma polar de un número complejo.

El producto de dos números complejos $z_1 = m_\alpha$ y $z_2 = m'_\beta$ en su forma polar es otro número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos $(m \cdot m')$ y cuyo argumento es la suma de los argumentos $(\alpha + \beta)$, es decir, $m_\alpha \cdot m'_\beta = mm'_{\alpha+\beta}$. Cabe señalar que, para realizar la demostración, el o la docente debe abordar el tema de funciones trigonométricas y sus propiedades.

Sabemos que $m_\alpha = m \cos \alpha + m (\sin \alpha)i$ y $m'_\beta = m' \cos \beta + m' (\sin \beta)i$.

$$m_\alpha \cdot m'_\beta = [m \cos \alpha + m (\sin \alpha)i] \cdot [m' \cos \beta + m' (\sin \beta)i]$$
$$m_\alpha \cdot m'_\beta = m \cos \alpha \cdot m' \cos \beta + m \cos \alpha \cdot m' (\sin \beta)i + m (\sin \alpha)i \cdot m' \cos \beta + m (\sin \alpha)i \cdot m' (\sin \beta)i$$
$$m_\alpha \cdot m'_\beta = mm' \cos \alpha \cos \beta + mm' \cos \alpha (\sin \beta)i + mm' (\sin \alpha)i \cos \beta + mm' (\sin \alpha)(\sin \beta)i^2$$
$$m_\alpha \cdot m'_\beta = mm' \cos \alpha \cos \beta + mm' \cos \alpha (\sin \beta)i + mm' (\sin \alpha)i \cos \beta - mm' \sin \alpha \sin \beta$$
$$m_\alpha \cdot m'_\beta = mm' [\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta] + mm' [\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta]i$$

Para finalizar la demostración, el o la docente debe señalar que $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ y $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$. Dado lo anterior, se concluye que $m_\alpha \cdot m'_\beta = mm'\cos(\alpha+\beta) + mm'\sin(\alpha+\beta)i$. Por lo tanto, $m_\alpha \cdot m'_\beta = mm'_{\alpha+\beta}$

Finalmente, la o el docente puede demostrar con las y los estudiantes que $\left(\frac{m_\alpha}{m'_\beta}\right) = \left(\frac{m}{m'}\right)_{\alpha-\beta}$

2. Se les entrega la siguiente información y responden la pregunta:
En el conjunto de los números reales $\sqrt[3]{1} = 1$. ¿Es correcto afirmar, en el conjunto de los números complejos, que $\sqrt[3]{1}$ tiene tres soluciones? Argumente su respuesta.

Observaciones a la o el docente

Se sugiere orientar a las y los estudiantes en el procedimiento que permite hallar la potencia de un número complejo con exponente racional. Para calcular las raíces de un número complejo, las y los estudiantes pueden aplicar la expresión $m_\alpha \cdot m'_\beta = mm'_{\alpha+\beta}$ y $r_\alpha = \sqrt[n]{m_\varphi}$, considerando que $r = \sqrt[n]{m}$ y $\alpha = \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} = \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}$ con $k = 0, 1, 2, 3\ldots(n-1)$.

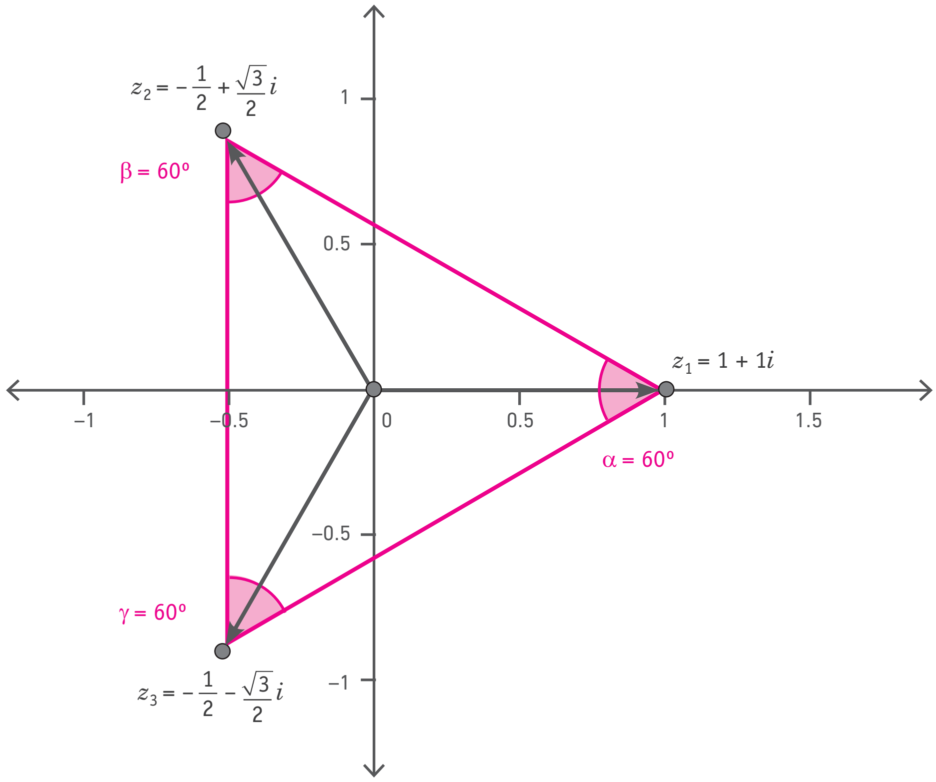
Considerando que las y los estudiantes han comprendido que todo número complejo $z = a + bi$ puede ser escrito como m $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, m es el módulo y $\varphi = \text{arctang}\left(\frac{b}{a}\right)$, se procede a encontrar las raíces de $\sqrt[3]{1}$. Entonces, $r_\alpha = 1\left[\cos\left(\frac{0^\circ + k \cdot 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0^\circ + k \cdot 2\pi}{3}\right)\right]$, ya que el módulo de $\sqrt[3]{1}$ es igual a 1 y $\varphi = \text{arctang}\left(\frac{0}{1}\right) = 0$.

Para $k = 0 \rightarrow 1\left[\cos\left(\frac{0^\circ + 0 \cdot 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0^\circ + 0 \cdot 2\pi}{3}\right)\right] = [\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ] = 1 + 0i = 1$

Para $k = 1 \rightarrow 1\left[\cos\left(\frac{0^\circ + 1 \cdot 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0^\circ + 1 \cdot 2\pi}{3}\right)\right] = [\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ] = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt[2]{3}}{2}i$

Para $k = 2 \rightarrow 1\left[\cos\left(\frac{0^\circ + 2 \cdot 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0^\circ + 2 \cdot 2\pi}{3}\right)\right] = [\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ] = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt[2]{3}}{2}i$

Por ende, al graficar las raíces del número complejo $\sqrt[3]{1}$, se obtiene como solución la representación de un triángulo equilátero al unir los tres puntos en el plano complejo.



Por último, se sugiere trabajar con tablas para determinar los diferentes valores de funciones trigonométricas.

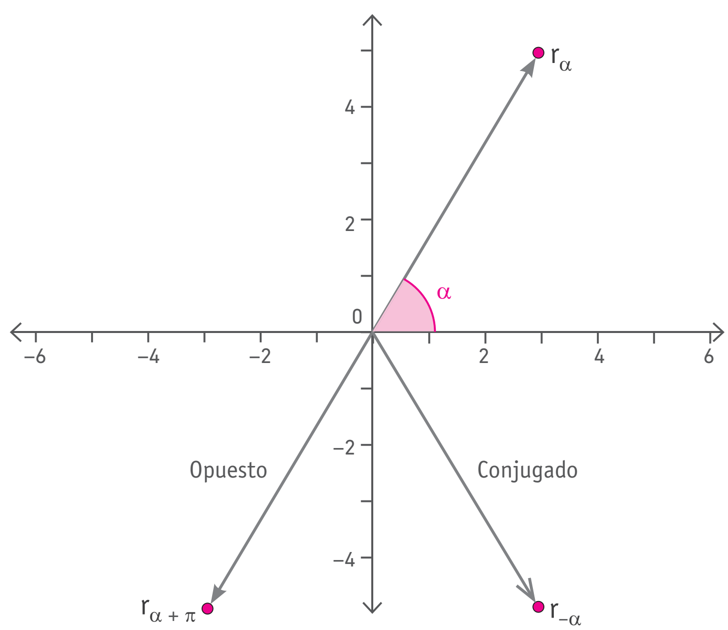
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan θ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ind	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
csc θ	ind	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	ind
sec θ	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	ind	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1
cot θ	ind	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	ind

	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
θ	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	0
sin θ	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos θ	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan θ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ind	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
csc θ	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	ind
sec θ	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	ind	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
cot θ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	ind

3. Dado un complejo $z = a + bi$ cuyo conjugado es $\bar{z} = a - bi$ y su opuesto es $-z = -a - bi$:

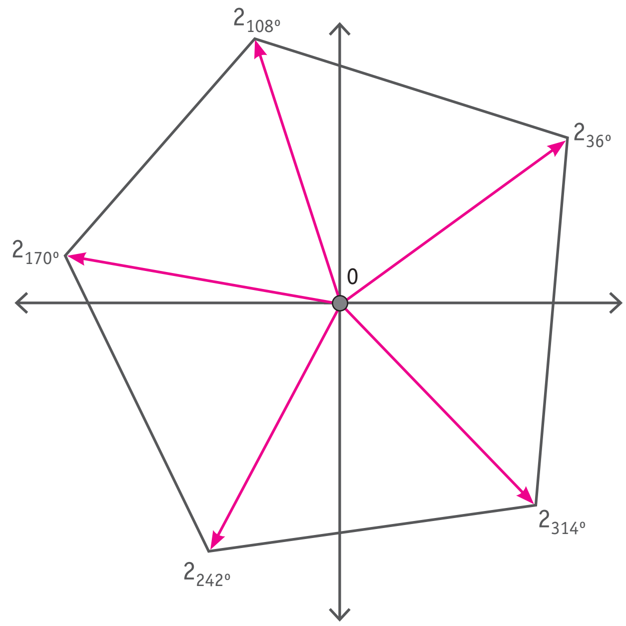
a. Representan en forma polar z, $\bar{z}$ y $-z$.

b. Analizan y justifican si las representaciones en el siguiente plano complejo corresponden a z, $\bar{z}$ y $-z$.



4. Hallan dos complejos z_1 y z_2, sabiendo que su cociente es 4, sus argumentos suman 40º y la suma de sus módulos es 15.

5. Se les presenta el siguiente problema:
Florencia encontró las raíces de $\sqrt[5]{-32}$ y construyó la representación gráfica a continuación:



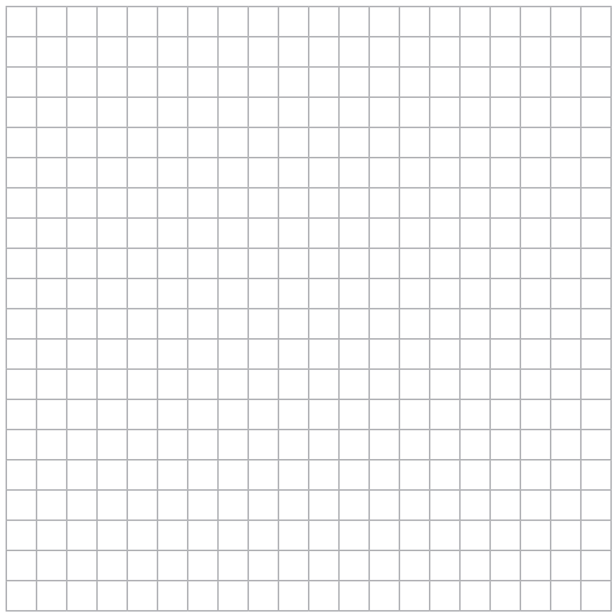
Responden: ¿Cuáles son los números complejos que son solución de $\sqrt[5]{-32}$ en el conjunto de los números complejos?

EJEMPLO DE EVALUACIÓN

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
AE 03 Resolver problemas aplicando las cuatro operaciones con números complejos.	› Suman y restan números complejos. › Ponderan o multiplican números complejos, según corresponda.

ACTIVIDAD PROPUESTA

A continuación se presentan los números complejos $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 3 - 4i$ y la siguiente cuadrícula:



Realice las siguientes actividades:

a. Ubique los ejes de coordenadas.

b. Represente los números complejos.

c. Marque con color rojo la representación de la suma de los números complejos.

d. Marque con color verde la representación de la resta de los números complejos.

e. Pondere ambos números complejos por el número complejo i^2.

f. Explique con sus palabras lo que ocurre al ponderar un número complejo por i_4.

g. Represente $z_1 \cdot z_2$ en el plano complejo.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Al evaluar, se sugiere considerar los siguientes aspectos:

› Considera las representaciones vectoriales de los números complejos.

› Suma números complejos y relaciona el resultado con la diagonal del paralelogramo formado por la representación vectorial de los números complejos.

› Multiplica números complejos utilizando la distribución como posible estrategia.

› Relaciona la expresión $z \cdot i^n$ con rotación.

UNIDAD 2
ÁLGEBRA

PROPÓSITO

Las y los estudiantes han estudiado en años anteriores el concepto de funciones, en particular, la función exponencial y logarítmica. Esta unidad tiene por objetivo retomar los conceptos y aplicarlos en el estudio de la función cuadrática y de los números complejos.

El énfasis de esta unidad está en modelar situaciones de cambio cuadrático y resolver ecuaciones de segundo grado, tanto en el conjunto de los números reales como en el de los números complejos.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Función exponencial y representación gráfica, función logarítmica y representación gráfica, función raíz cuadrada y representación gráfica, sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica de un sistema de ecuaciones, expresiones algebraicas fraccionarias, operaciones de expresiones algebraicas fraccionarias.

CONCEPTOS CLAVE

Función cuadrática, cambio cuadrático, solución real, solución compleja.

CONTENIDOS

- Función cuadrática.
- Ecuación de segundo grado.

HABILIDADES

- Identificar situaciones de cambio cuadrático.
- Modelar situaciones de cambio cuadrático por medio de funciones cuadráticas.

ACTITUDES

- Búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general o propios de otras asignaturas, de manera flexible y creativa.

APRENDIZAJES ESPERADOS E INDICADORES DE EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
Se espera que los y las estudiantes sean capaces de:	*Las y los estudiantes que han logrado este aprendizaje:*
AE 07 Reconocer el tipo de situaciones que modelan las funciones cuadráticas.	› Determinan qué situaciones pueden ser modeladas con la función cuadrática. › Dan ejemplos cotidianos de cambios no lineales. › Dan ejemplos cotidianos de cambios cuadráticos.
AE 08 Representar la función cuadrática mediante tablas y gráficos, y algebraicamente.	› Representan valores (x,y) de la función cuadrática en tablas y en el plano cartesiano. › Varían los valores de a, b y c, conjeturando sobre los efectos que tiene en la representación gráfica de la función. › Determinan las intersecciones de la gráfica de la función con el eje X (ceros de la función).
AE 09 Modelar situaciones reales por medio de la función cuadrática para resolver problemas relativos a situaciones de cambio cuadrático.	› Utilizan modelos dados de función cuadrática para resolver problemas relativos a situaciones de cambio cuadrático. › Elaboran modelos para resolver problemas relativos a situaciones de cambio cuadrático.
AE 10 Reconocer que todas las ecuaciones de segundo grado con una incógnita tienen soluciones en el conjunto de los números complejos.	› Utilizan diferentes técnicas para resolver ecuaciones de segundo grado, por ejemplo, la factorización, la completación de cuadrados o fórmula general. › Verifican si las soluciones de una ecuación de segundo grado son reales o complejas. › Resuelven problemas matemáticos o científicos que involucran en su solución ecuaciones de segundo grado.

OFT — APRENDIZAJES ESPERADOS EN RELACIÓN CON LOS OFT

› Interesarse por conocer la realidad y utilizar el conocimiento.
› Comprender y valorar la perseverancia, el rigor, el cumplimiento, la flexibilidad y la originalidad.
› Buscar y acceder a información de diversas fuentes virtuales.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS PARA LA UNIDAD

En esta unidad se trabaja la función cuadrática en situaciones reales que representan un cambio cuadrático, por ejemplo, movimientos rectilíneos constantemente acelerados, lanzamientos en algún deporte, construcciones que tienen una forma parabólica, entre otras. En este sentido se hace relevante destacar que la función cuadrática permite modelar situaciones dinámicas, tales como el lanzamiento de una pelota, la trayectoria de agua en fuentes, entre otros.

En las actividades, la función cuadrática se puede apreciar de forma dinámica en dos situaciones: la primera corresponde a una trayectoria parabólica, y la segunda, a situaciones de tiempo versus desplazamiento. Se recomienda trabajar esta función con algún programa matemático que permita usar gráficas, como Graphmatica o funciones para Windows. El programa gratis GeoGebra permite modificar las funciones de forma dinámica.

Resolver problemas en diferentes contextos por medio de la función cuadrática y modelarlos permitirá a las y los estudiantes comprender los algoritmos relacionados a todos los cálculos numéricos. Para trabajar esta habilidad, es importante que tengan la posibilidad de graficar esta función de forma manual o utilizando medios tecnológicos. Además, se recomienda generar conexiones con otros sectores, como Física, Artes Visuales, Educación Física, entre otros.

En cuanto a la solución de ecuaciones de segundo grado, se sugiere trabajar paralelamente en forma gráfica y simbólica, para identificar y representar las situaciones en las cuales hay dos o una solución real o una solución compleja. También se recomienda analizar y visualizar cómo un error de cálculo se traduce en la gráfica o en la respuesta a un problema modelado por una función cuadrática. Esto puede llevarse a cabo al final de la resolución de los problemas, compartiendo los resultados y organizando discusiones matemáticas sobre el resultado correcto. Es importante que el o la docente explique que toda ecuación cuadrática siempre tiene dos soluciones y que dichos pares de soluciones pueden ser reales diferentes, soluciones reales iguales, o soluciones complejas y conjugadas, lo cual se justifica a partir del Teorema Fundamental del Álgebra, que garantiza la existencia de dos raíces complejas de la ecuación de segundo grado.

SUGERENCIAS DE ACTIVIDADES

Las sugerencias de actividades presentadas a continuación pueden ser seleccionadas, adaptadas y/o complementadas por la o el docente para su desarrollo, de acuerdo a su contexto escolar.

AE 07 Reconocer el tipo de situaciones que modelan las funciones cuadráticas.

Observaciones a la o el docente

Se sugiere trabajar el siguiente problema con las y los estudiantes y, así, orientar la resolución de la próxima actividad:

En el Norte Chico se descubrió una vertiente de agua subterránea que debe ser extraída con bombas. Se sabe que, por cada nueva bomba que se conecte, la cantidad de m^3 diarios que es posible extraer decrece en 5 m^3, como puede apreciarse en la tabla siguiente:

Número de bombas	m^3 de agua extraída
1	60 (= 1 · 60)
2	110 (= 2 · 55)
3	150 (= 3 · 50)
4	180 (= 4 · 45)
...	...
...	...

Con esta información, realice las actividades y responda las preguntas:

- Complete la tabla hasta incorporar 8 bombas.
- Grafique los datos de la tabla.
- ¿Cuál es la máxima cantidad de agua que se puede extraer diariamente de la vertiente?, ¿con cuántas bombas se logra?
- ¿Con qué cantidad de bombas comienza a disminuir la cantidad de agua extraída?
- ¿Cuánta agua se extraerá diariamente si se colocan trece bombas?

Este problema puede resolverse reconociendo el patrón que describe el contenido del agua que se puede extraer diariamente.

Para lograr una diferenciación del nivel de exigencia, se puede desafiar a los y las estudiantes a elaborar la ecuación cuadrática que modela la situación. Según los datos de la tabla, se denomina el número de bombas con la variable n y el contenido del agua extraída con $C(n)$.

Con los datos de la tabla se obtiene $C(n) = n \cdot [60 - (n - 1) \cdot 5]$.

La expresión algebraica se desarrolla al término cuadrático $C(n) = -5n^2 + 65n$.

Mediante la ecuación cuadrática elaborada se pueden comprobar los resultados obtenidos por la aplicación del patrón.

El o la docente puede complementar la resolución del problema anterior explicando que en un movimiento en el cual la velocidad aumenta o disminuye en cada intervalo de tiempo de manera constante, el recorrido desde la partida también aumenta o disminuye en forma cuadrática. Por ejemplo, el rendimiento diario de una napa subterránea representa la "velocidad" con la cual decrece el volumen del agua en la napa, representando un "cambio de segundo orden constante". Por lo tanto, el volumen K de la napa decrece mediante una función cuadrática del tipo $K(t) = K_0 - \frac{a}{2} t^2$ en la cual K_0 representa el volumen al inicio de la observación y la constante a representa la disminución diaria del rendimiento de la napa.

1. Se les presenta el siguiente problema:

   En un fundo campestre hay una napa de agua que en el verano suele secarse. Debido a observaciones realizadas por largos años, se sabe que al inicio de la disminución del rendimiento quedan aproximadamente 300 m^3 en la napa. En este año, por días consecutivos se registró una disminución del rendimiento diario de $a = 0{,}4 \frac{\text{m}^3}{\text{d}}$. El volumen momentáneo restante $K(t)$ en la napa se representa en forma cuadrática mediante la siguiente ecuación $K(t) = K_0 - \frac{a}{2} t^2$.

   a. Con los datos anteriores, determinan la ecuación que representa el volumen momentáneo restante $K(t)$ en la napa.
   b. Completan la tabla de valores de la función.

t tiempo después del inicio de la disminución del rendimiento en [d].	0	5	10	15	20	25	30
$K(t)$ volumen restante en la napa en [m^3].							

1 U2

c. Elaboran el gráfico de la función K con $K(t) = K_0 - \frac{a}{2}t^2$ en un sistema cartesiano de coordenadas.

d. Justifican mediante la ecuación cuadrática, determinada en la actividad inicial, el día en el cual se secará la napa.

Observaciones a la o el docente

El lanzamiento de objetos en dirección horizontal implica el análisis de una trayectoria parabólica. Esta trayectoria es el resultado de la composición de dos movimientos: la superposición simultánea del movimiento rectilíneo uniforme (MRU) en dirección horizontal (x) con la caída libre en dirección vertical (y), que es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA).

En la representación gráfica de la trayectoria, el punto de partida del lanzamiento corresponde al origen del sistema cartesiano de coordenadas. Además, no se considera la influencia de la resistencia del aire en el lanzamiento. Así, en dirección horizontal (x), el objeto avanza en cada segundo por distancias iguales, mientras que, en dirección vertical hacia abajo, se mueve según un desplazamiento que depende cuadráticamente del tiempo. Se pueden representar ambos movimientos mediante el siguiente sistema 2x2 de ecuaciones, en el que una ecuación es lineal y la otra es cuadrática. La constante v_0 representa la velocidad inicial en dirección horizontal y la constante g representa la aceleración generada por la gravedad. Mediante la eliminación de la variable t, este sistema se puede transformar en una sola ecuación en las variables x, y.

[1] $x(t) = v_0 t \longrightarrow t = \frac{x}{v_0}$

[2] $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$

Por este término se remplaza la variable t en la ecuación [2], resultando la ecuación [3].

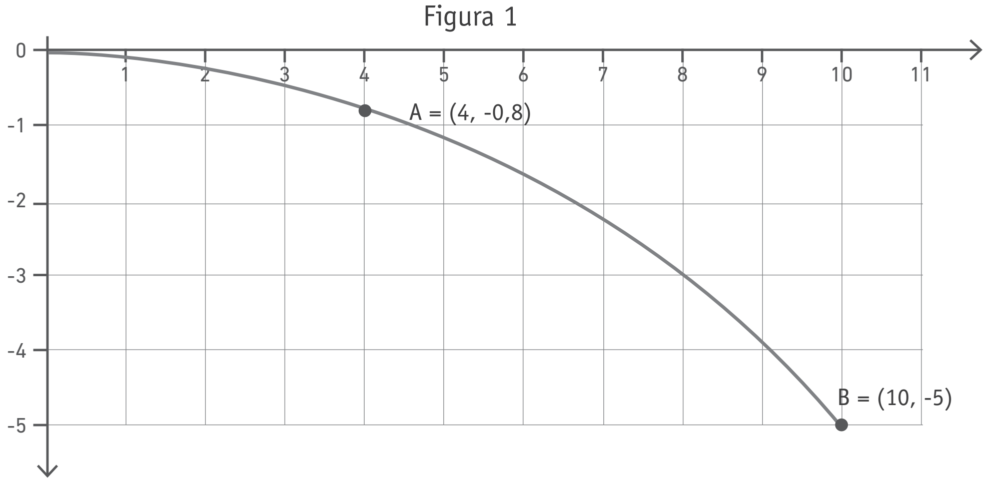
[3] $y = -\frac{1}{2}g\left[\frac{x}{v_0}\right]^2$

$y = -\frac{g}{2{v_0}^2} \cdot x^2$

[4] $y = -\frac{1}{20}x^2$

Con el valor numérico aproximado de $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y con una velocidad inicial de $v_0 = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ resulta la ecuación [4] de la trayectoria en las variables x, y.

Figura 1



La trayectoria del lanzamiento de una pelota al arco también se genera por la superposición simultánea de dos movimientos. El primer movimiento es un lanzamiento vertical cuya velocidad inicial es la componente vertical $\vec{v}_{y0}$ del vector inicial $\vec{v}_0$ de velocidad del lanzamiento. El segundo movimiento es un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) en dirección horizontal cuya velocidad constante es la componente horizontal $\vec{v}_{x0}$ del vector inicial del lanzamiento. No se considera la influencia de la resistencia del aire en el lanzamiento (figura 2 y figura 3).

Figura 2

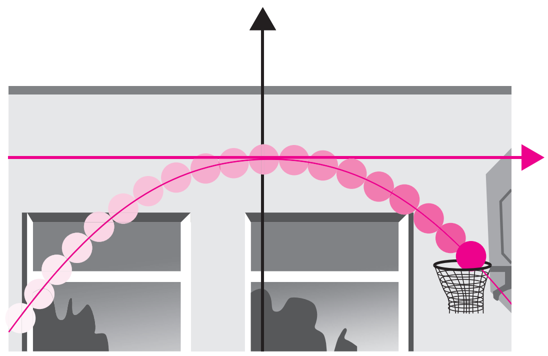
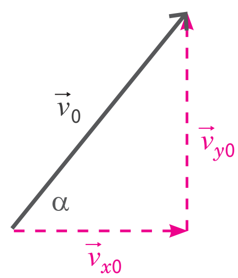


Figura 3



Se puede representar ambos movimientos mediante el siguiente sistema 2x2 de ecuaciones, en el que una ecuación es lineal y la otra es cuadrática. La constante v_0 representa la velocidad inicial en dirección horizontal y la constante g representa la aceleración generada por la gravedad. Mediante la eliminación de la variable t, este sistema se puede transformar en una sola ecuación en las variables x, y.

[1] $x(t) = v_{x0}\, t \longrightarrow t = \dfrac{x}{v_{x0}}$

[2] $y(t) = v_{y0}\, t - \dfrac{1}{2} g t^2$

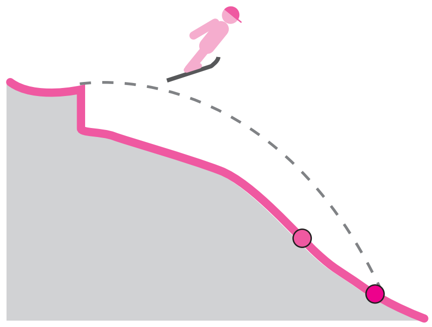
Por este término se remplaza la variable t en la ecuación [2], resultando la ecuación [3].

[3] $y = \dfrac{v_{y0}}{v_{x0}} \cdot x - \dfrac{1}{2} g \left[\dfrac{x}{v_{x0}}\right]^2$

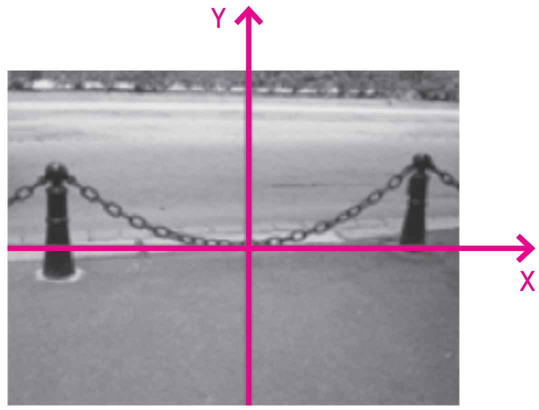
$$y = \frac{v_{y0}}{v_{x0}} \cdot x - \frac{g}{2{v_{x0}}^2} \cdot x^2$$

Como ecuación de la trayectoria resulta una ecuación cuadrática del tipo $y = ax + bx^2$, en la cual las constantes a, b dependen de la velocidad inicial v_0 y del ángulo α del lanzamiento inclinado.

2. Reconocen situaciones reales que se pueden modelar con funciones cuadráticas, como las presentadas a continuación y realizan las actividades planteadas para cada una.

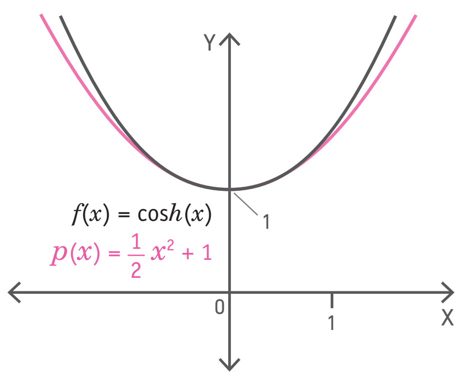
	En la imagen, el saltador con esquí deja el trampolín de esquí en forma horizontal. En el aire se superpone el movimiento rectilíneo uniforme con la caída libre, que es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Dibuje los ejes de un sistema cartesiano de coordenadas en el cual la trayectoria del esquí se puede representar con una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2$. Después de la elección de los ejes, conjeture acerca del signo de la constante a.
	El movimiento de un balón al ser lanzado en dirección al arco. Dibuje los ejes de un sistema cartesiano de coordenadas en el cual la trayectoria de la pelota se puede representar con una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2$. Después de la elección de los ejes, conjeture acerca del signo de la constante a.
	La trayectoria del agua en fuentes, llaves y grifos que están dirigidos hacia arriba. Dibuje los ejes de un sistema cartesiano de coordenadas en el cual la trayectoria de las gotas del agua se puede representar con una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2$. Después de la elección de los ejes, conjeture acerca del signo de la constante a.
	En ciertas construcciones. Dibuje los ejes de un sistema cartesiano de coordenadas en el cual la trayectoria del frontis del edificio se puede representar con una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2$. Después de la elección de los ejes, conjeture acerca del signo de la constante a.

3. Reconocen diferencias o similitudes con ciertas curvas, por ejemplo, con la catenaria presente en la siguiente imagen. Verifican, en el gráfico, si la función que representa la cadena es cuadrática o no y argumentan su respuesta.



Observaciones a la o el docente

Se sugiere orientar a que las y los estudiantes desarrollen estrategias para mostrar que la catenaria no corresponde a una función cuadrática. Para esto, se puede tomar puntos de la gráfica de la catenaria y probar que no se puede tener una expresión de la forma $y = ax^2 + bx + c$, o también tratar de aproximar con dos curvas cuadráticas, una que esté por encima y otra que esté por debajo, como se muestra en la figura. Cabe destacar que no es necesario tratar la función coseno hiperbólico. Se recomienda, para tal efecto, analizar la catenaria para mostrar que hay curvas que son muy similares a la cuadrática, pero que no necesariamente representa a una de estas funciones.



Observaciones a la o el docente

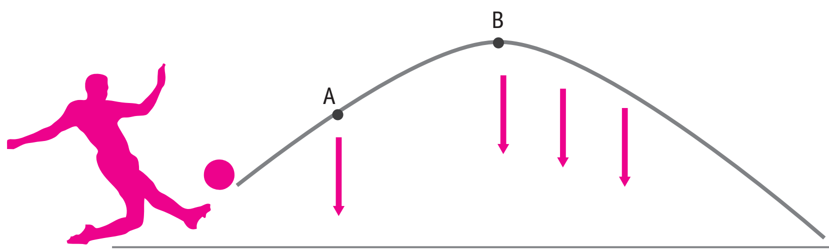
En los siguientes problemas (4 y 5), las ecuaciones de segundo grado modelan situaciones del deporte que están elaboradas de acuerdo con datos reales. El origen del sistema cartesiano de coordenadas se ubica en el punto de partida del lanzamiento.

4. Se les presenta el siguiente problema y responden las preguntas:

Un jugador de fútbol patea un tiro libre cuya trayectoria de la pelota, mientras se encuentra en el aire, corresponde a la función $f(x) = -0{,}02x^2 + 0{,}4x$. Además, $f(x)$ es la altura en metros de la pelota cuando esta se encuentra a x metros de distancia horizontal del punto que fue lanzada por el jugador. Al caer, la pelota toca el suelo justo en la línea del arco.

a. Con la información anterior, ¿a qué distancia del arco se encontraba el jugador al momento de lanzar la pelota?

b. Según las reglas internacionales del fútbol, el “muro” que forman los jugadores defensores debe tener una distancia mínima de la pelota en reposo de 9,15 m. Si la estatura de los jugadores que forman el “muro” es de 1,90 m, entonces, ¿la pelota lanzada puede sobrepasar el “muro” en su parte más alta (B)?



Observaciones a la o el docente

Se sugiere orientar a las y los estudiantes a resolver la ecuación cuadrática mediante factorización.

Es esperable que los y las estudiantes resuelvan el problema según el siguiente esquema:

› Elaboran, en un sistema de coordenadas, un bosquejo de la trayectoria de la pelota.

› Representan el punto inicial y el punto final de la trayectoria con la intersección de la parábola con el eje X ($y = 0$).

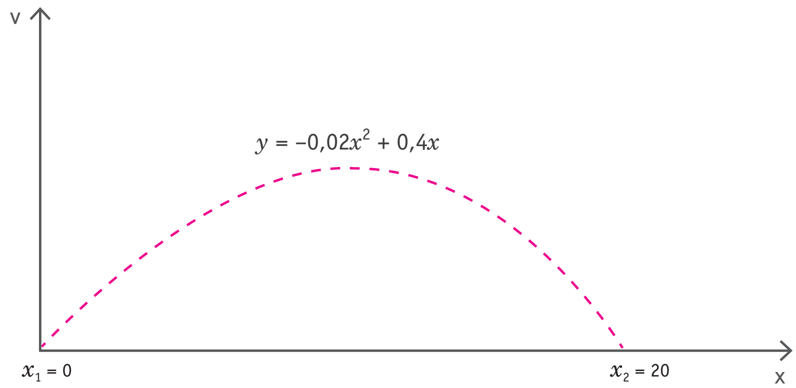
› Elaboran la ecuación cuadrática $-0{,}02x^2 + 0{,}4x = 0$

› Factorizan la expresión cuadrática $x \cdot (-0{,}02x + 0{,}4) = 0$

› Determinan las soluciones $x = 0$ y $-0{,}02x + 0{,}4 = 0$

› $x_1 = 0$; $x_2 = 20$

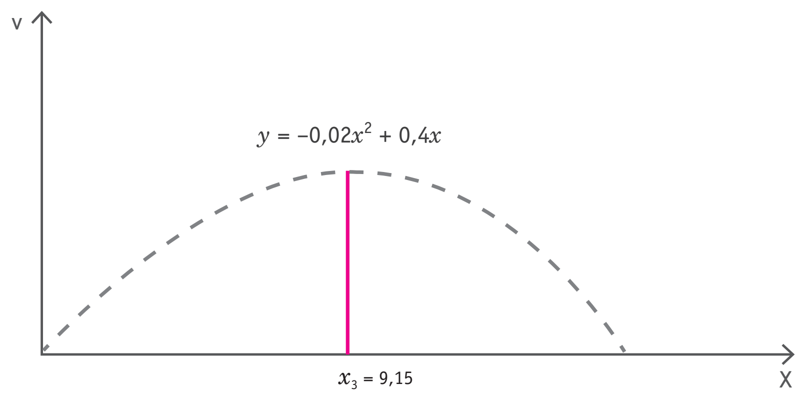
› Formulan el resultado en una frase, por ejemplo: "La distancia entre el jugador y la línea del arco es 20 m".



› Agregan en el dibujo la distancia necesaria entre la pelota en reposo y la barrera: $x_3 = 9{,}15$ m.

› Determinan la altura de la pelota en el lugar del "muro" de los defensores.

› Formulan el resultado en una frase, por ejemplo: "En la distancia de 9,15 m del punto de lanzamiento, la pelota tiene una altura de aproximadamente 1,99 m y puede sobrepasar la parte más alta del "muro" de los defensores (1,90 m)".

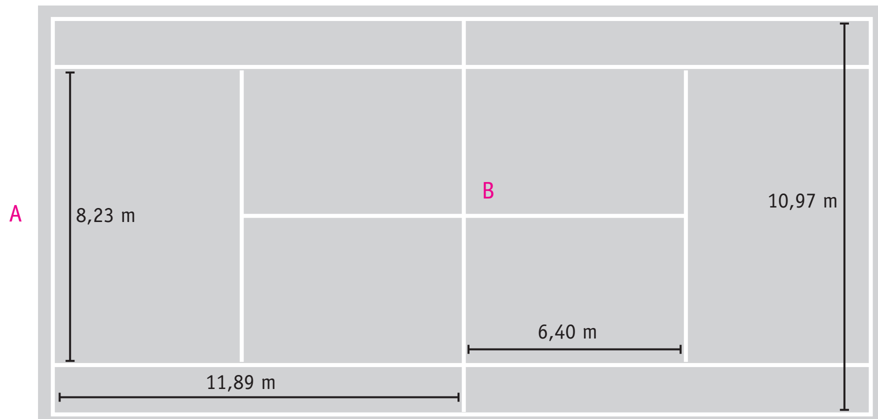


5. Se les presenta el siguiente problema y responden las preguntas:

En un ejercicio de entrenamiento, una máquina de pelotas de tenis lanza pelotas describiendo una trayectoria parabólica según $f(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}2x + 0{,}2$.

a. Si el jugador golpea la pelota justo cuando esta se encuentra a 1,11 m de altura mientras desciende, ¿a qué distancia se encuentra el jugador de la máquina?

b. Si la altura de la malla en su punto más bajo es de 0,92 m, ¿es correcto afirmar que posiblemente la máquina se encuentra en la línea de saque (en el punto A) y el jugador en el punto B a una distancia de la malla de aproximadamente 1 m?



Observaciones a la o el docente

Para realizar un análisis del problema integrando conceptos claves de Física, la o el docente puede modelar el problema considerando que el jugador golpea el balón con un ángulo de inclinación de 22º y que le da una velocidad inicial de 18 $\frac{m}{s}$, a partir de lo cual se obtienen las ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = 16{,}74 \cdot t$$
$$y(t) = 6{,}66 \cdot t - 5 \cdot t^2$$

Considerando los siguientes datos: $g \approx 10 \frac{m}{s^2}$, sen (22°) ≈ 0,37 y cos (22°) ≈ 0,93.

AE 08	Representar la función cuadrática mediante tablas y gráficos, y algebraicamente.

1. Dada la función $f(x) = x^2 + 2x + 1$, encuentran pares (x,y) que cumplen con la igualdad y los anotan en una tabla, por ejemplo:

x	0	1	−1	−2	−3	2	−5
y	1	4	0				

A continuación, llevan a cabo las siguientes actividades:

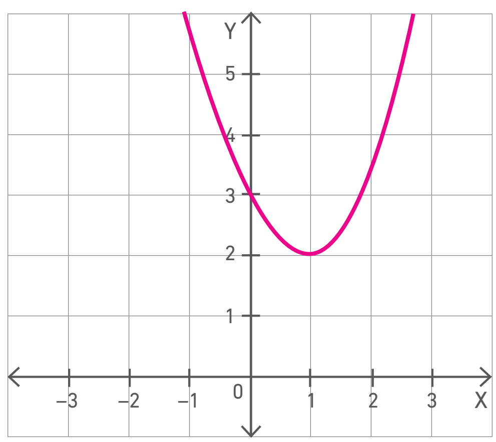
a. Representan los pares ordenados en el plano cartesiano, buscan otros puntos y verifican si pertenecen o no a la gráfica de la función.

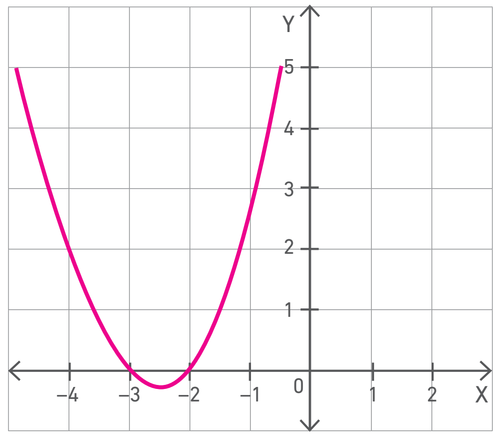
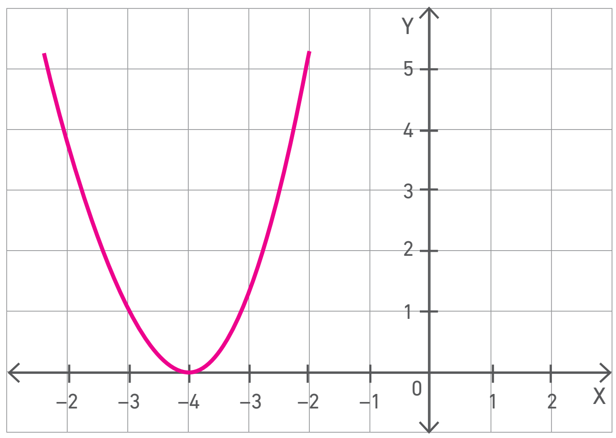
b. Grafican la función en el plano cartesiano.

c. Analizan el significado del par ordenado (−1,0) y su relación con el valor del discriminante igual a cero, en este caso particular.

2. Dadas las siguientes funciones cuadráticas y sus gráficos, realizan lo siguiente:

a. Analizan las siguientes funciones cuadráticas y justifican si la representación de cada función es correcta.

$f(x) = x^2 - 2x + 3$	

<table>
<tr>
<td>$f(x) = x^2 + 5x + 6$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$f(x) = x^2 + 8x + 16$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

b. Determinan $f(x) = 0$ para cada función planteada en a.

c. Determinan el valor de $b^2 - 4ac$ para cada función planteada en a.

d. Considerando los análisis realizados en a, b y c, formulan y verifican conjeturas sobre las siguientes interrogantes:

› ¿Qué relación hay entre el valor del discriminante y la obtención de soluciones reales y diferentes en una ecuación cuadrática?

› ¿Qué relación hay entre el valor del discriminante y la obtención de soluciones complejas en una ecuación cuadrática?

› ¿Qué soluciones se obtienen cuando el discriminante es igual a cero?

Observaciones a la o el docente

Al finalizar la actividad, se espera que las y los estudiantes justifiquen las conjeturas planteadas anteriormente y concluyan que:

- $b^2 - 4ac > 0$ implica obtener soluciones reales y diferentes. La gráfica de la función intersecta al eje X en dos puntos.
- $b^2 - 4ac = 0$ implica obtener ecuaciones reales e iguales. La gráfica de la función intersecta al eje X en un punto.
- $b^2 - 4ac < 0$ implica obtener soluciones complejas. La gráfica de la función no intersecta al eje X.

Se sugiere que los y las estudiantes verifiquen con otras funciones, las grafiquen y calculen el valor del discriminante. Es importante destacar la relación entre la solución de una ecuación cuadrática y los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje X. Se recomienda, además, promover la justificación de las conjeturas en función del análisis del discriminante u orientar a los y las estudiantes a realizar otros análisis como el siguiente:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) = \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Frente a lo anterior, toda solución de $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ es de la forma $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Entonces:

- Si $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ implica que la función $f(x) = 0$ tiene dos valores reales y diferentes, es decir, la representación gráfica de la función $f(x)$ en el plano cartesiano intersecta al eje X en dos puntos $\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$ y $\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ implica que la función $f(x) = 0$ tiene una única solución, es decir, la representación gráfica de la función $f(x)$ en el plano cartesiano intersecta al eje X en un único punto $(x,y) = \left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$.

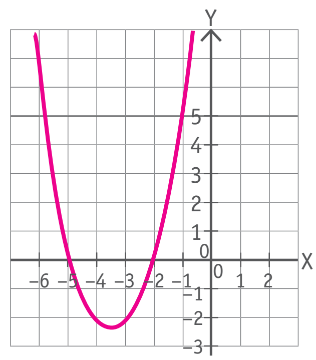
$$x_1 = x_2 = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$ implica que la función $f(x) = 0$ tiene solución en el conjunto de los números complejos, es decir, la representación gráfica en el plano cartesiano no intersecta al eje X.

3. Relacionan tablas, gráficos y funciones y unen lo que corresponde con una línea, utilizando los datos de la tabla y completándolas.

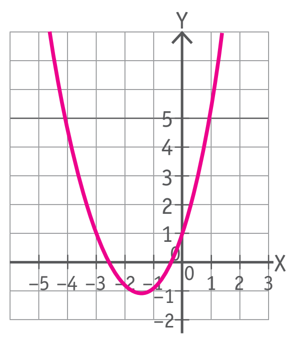
Tabla | Gráfico | Función

x	−1	0	−3
y			
(x,y)			



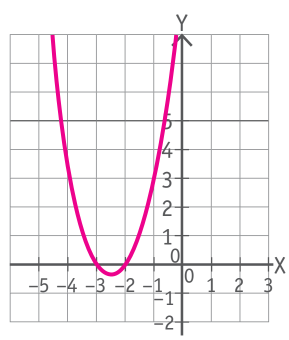
$x^2 + 7x + 10$

x	−1	0	−3
y			
(x,y)			



$x^2 + 3x + 1$

x	−1	0	−3
y			
(x,y)			



$x^2 + 5x + 6$

Observaciones a la o el docente

Para los ejercicios 3, 4, 5 y 6 se puede recurrir a *software* gratuito como Graphmática o Geogebra, o a algunas de las siguientes páginas web para graficar funciones:

- http://www.disfrutalasmatematicas.com/graficos/grafico-funciones.php
- http://fooplot.com/?lang=es#W3sidHlwZSI6MCwiZXEiOiJ4XjIiLCJjb2xvci I6IiMwMDAwMDAifSx7InR5cGUiOjEwMDB9XQ

Es necesario que las y los estudiantes lleven un registro de las funciones que van graficando de forma ordenada y precisa, pues solo de esta manera se pueden hacer conjeturas adecuadas. Se sugiere utilizar tablas, en las cuales se puede dejar expresado el valor que se ha considerado, la función y la gráfica.

4. Varían los valores de a en la función $f(x) = ax^2 + 5x + 6$ y grafican considerando valores positivos y negativos. Además, realizan lo siguiente:

   a. Formulan y verifican conjeturas respecto de la relación entre los valores de a y el tipo de concavidad de la función.

   b. Demuestran que, para toda función $f(x) = ax^2 + bx + c$, el eje de simetría de la función cuadrática está dado por $x = \frac{-b}{2a}$.

   c. Demuestran que el punto $\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{2a}\right)$ es el máximo cuando $a < 0$, y es el mínimo cuando $a > 0$.

Observaciones a la o el docente

El o la docente puede modificar la actividad solicitando a las y los estudiantes desarrollar el siguiente ejercicio:

Dada la función $x = f(y) = ay^2 + 5y + 6$, grafique considerando valores positivos y negativos de a. Luego, responda las preguntas y realice lo solicitado:

- ¿Qué tipo de concavidad se genera para $a < 0$?
- ¿Qué tipo de concavidad se genera para $a > 0$?
- ¿Qué representa el punto $\left(-\frac{b^2 - 4ac}{2a}, \frac{-b}{2a}\right)$ en la gráfica de la función $f(y)$ en el plano cartesiano?
- Demuestre que, para toda función $f(y) = ay^2 + by + c$, el eje de simetría de la función cuadrática está dado por $y = \frac{-b}{2a}$.

Con la actividad anterior, el o la docente puede promover aprendizajes de mayor complejidad disciplinar y, así, tomar decisiones pedagógicas fundamentadas en evidencia de aprendizaje de sus estudiantes.

5. Varían los valores de b en la función $f(x) = x^2 + bx + 6$, observando las variaciones del vértice de la función y si hay cambios con el corte en el eje Y. Además, realizan lo siguiente:

   a. Para la función $f(x) = x^2 + bx + 6$, analizan la gráfica $x = \frac{-b}{2a}$ e identifican el vértice.

   b. Representan gráficamente las funciones $f(x) = x^2 + x - 1$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $f(x) = x^2 - x + 1$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

   c. Justifican la relación que existe entre la representación de la función cuadrática en el plano cartesiano y el valor del discriminante $b^2 - 4ac$.

   d. Verifican la generalización anterior graficando otras funciones de la forma $f(x) = x^2 + bx + 3$ y $f(x) = -x^2 + bx + 3$.

6. Varían los valores de c en la función $f(x) = x^2 + 5x + c$, observando las variaciones de la gráfica de las diferentes funciones que se van obteniendo:

   a. Para $c > 0$, ¿qué ocurre con la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 5x + c$?

   b. Para $c < 0$, ¿qué ocurre con la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 5x + c$?

   c. Conjeturan respecto de la intersección entre la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 5x + c$ (con c perteneciente a $\mathbb{R}$) y el eje Y.

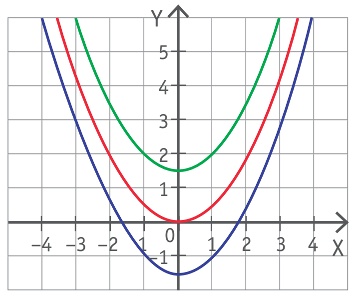
7. Dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, realizan las siguientes actividades:

   a. Utilizando *software*, analizan la gráfica de dicha función y conjeturan respecto de los puntos de intersección de esta con el eje X cuando $(b^2 - 4ac) > 0$ y $(b^2 - 4ac) = 0$.

   b. Justifican que la gráfica de la función intersecta al eje X cuando $(b^2 - 4ac) \geq 0$.

8. Se les presenta el siguiente problema:

   En el sistema cartesiano de coordenadas se representan las gráficas de tres funciones cuadráticas del tipo f: $y = ax^2 + c$ con k perteneciente a los números enteros.



a. Elaboran, para las tres funciones graficadas en azul, rojo y verde, las ecuaciones cuadráticas con las cuales se determinan las intersecciones de los gráficos con el eje X.

b. Conjeturan y justifican en cuáles de los casos las soluciones pertenecen a los números reales y en cuáles a los números complejos.

c. Determinan algebraicamente las soluciones complejas, cuando corresponda.

d. Justifican, mediante ejemplos, que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ no intersecta al eje X cuando $(b^2 - 4ac) < 0$.

Observaciones a la o el docente

Es importante orientar a la o el estudiante a vincular esta unidad de contenido con la unidad de números complejos. En esta actividad se representan gráficos de funciones cuadráticas que tienen dos, uno o ningún punto de intersección con el eje X. Transfiriendo esta representación gráfica al nivel simbólico, se resuelven ecuaciones cuadráticas que pueden tener dos soluciones reales, una solución real o ninguna solución real. En el último caso se pueden determinar las soluciones complejas y, de esta manera, se aplica y profundiza el concepto de números complejos aprendido en la unidad 1.

AE 09	Modelar situaciones reales por medio de la función cuadrática para resolver problemas relativos a situaciones de cambio cuadrático.

1. Se les plantea el siguiente problema:

   Entre el precio de venta de un artículo P y la cantidad de productos vendidos x hay una relación lineal:

   $$P = 3600 - \frac{3}{2}x$$

   Como ganancia se tiene la función $G = P \cdot x = 3600x - \frac{3}{2}x^2$.

   a. Grafican la función ganancia G y calculan cuándo la ganancia es nula.
   b. Determinan cuántos productos habría que vender para ganar \$345 000.

2. Se les presenta la siguiente situación:

   Una empresa fabricante de zapatos tiene los siguientes costos de producción: si se producen 100 pares, el costo es de \$900 000, y si se producen 200 pares, el costo es de \$1 500 000. El costo fijo de producción es de \$600 000.

   a. Determinan la función $C(x)$, asumiendo que el costo de una cantidad x de zapatos se puede modelar con una función cuadrática.
   b. Si se producen 300 pares de zapatos, determinan a cuánto se tiene que vender cada par de zapato en promedio, para tener una ganancia de \$3 000 000.
   c. Determinan cuántos pares de zapatos se pueden fabricar si el costo total de producción máximo debe ser de \$2 000 000.

Observaciones a la o el docente

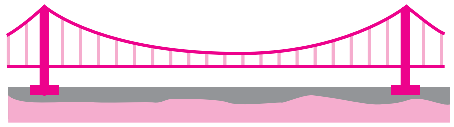
Se recomienda considerar la función cuadrática en su forma $C(x) = ax^2 + bx + c$, donde $c = 600000$ es el costo fijo de producción y los dos datos entregados se representan como pares ordenados. Posteriormente, se resuelve el sistema de ecuaciones lineales 2x2 para encontrar los valores de a y b de la función cuadrática.

Una vez que se tiene esta función, se sugiere utilizar algún tipo de *software* para graficarla y observar el significado de los diferentes valores que la componen.

También se puede discutir sobre la producción de otros objetos y la forma en que afecta fabricar más o menos productos al tener costo fijo o no.

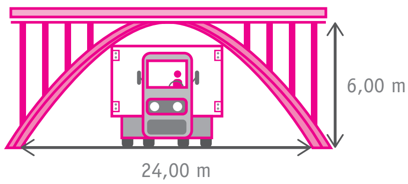
3. Se les plantea el siguiente problema:

Un grupo de ingenieros está planeando la construcción de un puente. Este puente tendrá dos columnas metálicas, y la curva del puente puede ser modelada de forma aproximada por la curva $y = \frac{1}{200}x^2 + 120$.



Con esta información, determinan el punto más bajo de la curva del puente, para saber cuántos metros tendrán las columnas metálicas más pequeñas.

4. Modelan el ancho que puede tener el bloque que transporta un camión, para que pueda pasar por un túnel que tiene 24 metros de ancho y 6 metros de altura.



Observaciones a la o el docente

Se espera que los y las estudiantes modelen la curva del túnel utilizando la ecuación parabólica $y = ax^2 + c$, considerando $x = 12$, $y = 0$ y $c = 6$, para encontrar el valor de a.

Con la ayuda de la ecuación que describe la curva del túnel, $y = -\frac{1}{24}x^2 + 6$, se pueden ir considerando distintos valores para el ancho del camión con la carga. De esta forma se encuentran varias soluciones posibles y se determina a partir de qué ancho no es posible que el camión pueda pasar, debido a la altura.

AE 10 Reconocer que todas las ecuaciones de segundo grado con una incógnita tienen soluciones en el conjunto de los números complejos.

1. Resuelven ecuaciones de segundo grado utilizando la completación de cuadrados en representaciones pictóricas:

   a. $x^2 + 6x = 13$

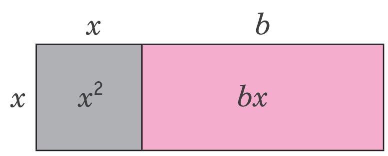
   b. $3x^2 - 10x = -1$

   c. $2x^2 - 18x = 0$

   Luego, demuestran que, para toda función cuadrática $f(x) = (x - h)^2 + k$, el vértice de la parábola es el par ordenado (h,k).

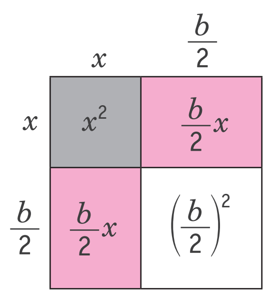
Observaciones a la o el docente

Si se tiene un binomio $x^2 + bx$, su representación pictórica es el área de un rectángulo:



$$x(x + b) = x^2 + bx$$

Con la completación de cuadrados, lo que se espera es construir una representación de un cuadrado.



$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Por ende, $x^2 + bx = x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Por ejemplo: $x^2 + 8x + 25 = 0$

$$x^2 + 2(4x) + 25 = 0$$
$$x^2 + 2(4x) + 16 - 16 + 25 = 0$$
$$(x + 4)^2 + 9 = 0$$
$$(x + 4)^2 = -9$$
$$(x + 4) = \pm 3i$$
$$x = -4 \pm 3i \Rightarrow x_1 = -4 + 3i \text{ y } x_2 = -4 - 3i$$

Para esto, se considera el rectángulo de área $\left(\frac{b}{2}\right)x$ y se yuxtapone bajo del cuadrado que representa el área x^2, agregando entonces solo el último sumando, el cual se debe restar para reducir la expresión inicial $x^2 + bx$.

2. Resuelven ecuaciones de segundo grado utilizando factorización, grafican la función correspondiente en el plano cartesiano y analizan si las soluciones encontradas intersectan al eje X o no.

   a. Encuentran las soluciones $f(x) = 0$ para $f(x) = x^2 + 4$, $f(x) = -x^2 - 9$, $f(x) = 2x^2 + 32$, $f(x) = -4x^2 - 48$, $f(x) = x^2 + 4x$, $f(x) = x^2 + x$, $f(x) = 3x^2 + 6x$. Grafican cada una de las funciones e identifican si intersectan o no al eje X.
   b. Conjeturan respecto de la naturaleza de las soluciones de una ecuación de segundo grado cuando la representación gráfica de esta no intersecta al eje X.
   c. Verifican las conjeturas anteriores graficando en un *software* las funciones.

3. Determinan los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje X, de forma pictórica y simbólica.

   a. Utilizando *software*, analizan la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ y conjeturan respecto de los puntos de intersección de la función con el eje X cuando $(b^2 - 4ac) < 0$.
   b. Verifican que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ no intersecta al eje X cuando $(b^2 - 4ac) < 0$ y argumentan que las soluciones obtenidas corresponden a números complejos.

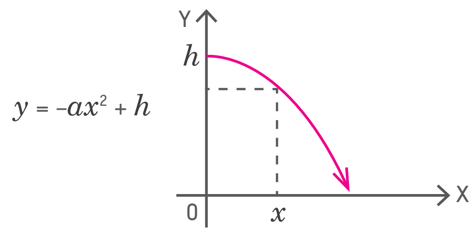
EJEMPLO DE EVALUACIÓN

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
AE 09 Modelar situaciones reales por medio de la función cuadrática para resolver problemas relativos a situaciones de cambio cuadrático.	› Utilizan modelos dados de función cuadrática para resolver problemas relativos a situaciones de cambio cuadrático.

ACTIVIDAD PROPUESTA

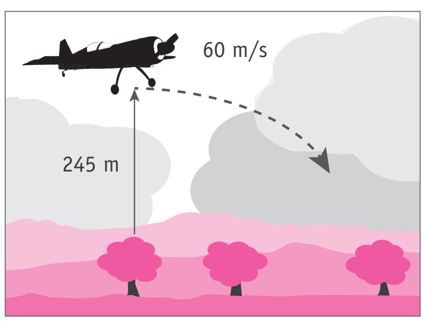
Lea la siguiente información:

Si se lanza un objeto desde el aire, la trayectoria es una función cuadrática (solo la mitad de la parábola). La ecuación de la parábola es $y = -ax^2 + h$, donde h es la altura desde la cual se lanza el objeto, $a = \frac{5\frac{m}{s^2}}{v^2}$ y v es la velocidad con la que es lanzada.



Considerando esta información, resuelva el siguiente problema:

Si un paquete de ayuda cae desde una avioneta Cessna que va a una velocidad de 216 $\frac{km}{h}$ = 60 $\frac{m}{s}$ y que se encuentra a 245 metros de altura (0,245 km), como ilustra la imagen, ¿qué tan lejos del primer árbol (izquierda) cae el paquete?



La línea punteada indica una trayectoria posible del parque.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Al evaluar, se sugiere considerar los siguientes aspectos:

- Remplaza variables por los valores dados.
- Relaciona la caída del paquete al suelo con el valor 0 para la altura.
- Relaciona el valor de x con la distancia entre el momento en que tiran el paquete y el lugar en que este cae.
- Trabaja solo con valores positivos, reconociendo que los negativos no pueden ser una respuesta posible al problema.

Semestre

2

UNIDAD 3
GEOMETRÍA

PROPÓSITO

En esta unidad, se espera que las y los estudiantes describan algunos objetos elementales de la geometría, como puntos, rectas y figuras 2D, en el plano cartesiano, para determinar distancias entre puntos y para profundizar en el trabajo con vectores.

Además, se busca que ahonden en el concepto de "homotecia", describiéndola a partir del producto de un vector por un escalar. Asimismo, se pretende que describan rectas y sus intersecciones en el plano cartesiano y que incluyan, cuando sea necesario, la notación vectorial y el significado de las soluciones de un sistema 2x2 de ecuaciones lineales en la representación gráfica.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Semejanza de figuras planas, criterios de semejanza de figuras planas, trazos proporcionales, propiedades invariantes en modelos a escala, teorema de Pitágoras, teorema de Thales, teorema de Euclides.

CONCEPTOS CLAVE

Plano cartesiano, distancia, vectores, homotecia, producto por un escalar, sistema 2x2 de ecuaciones lineales.

CONTENIDOS

- Geometría cartesiana.
- Homotecia.
- Vector.
- Producto por un escalar.
- Sistemas 2x2 de ecuaciones lineales.

HABILIDADES

- Deducir la distancia entre dos puntos aplicando el teorema de Pitágoras.
- Interpretar la homotecia de forma vectorial.
- Resolver sistemas de ecuaciones usando métodos algebraicos.
- Interpretar gráficos de pares de rectas en el plano cartesiano relacionándolo con el sistema 2x2 de ecuaciones.
- Resolver problemas por medio de la geometría cartesiana.

ACTITUDES

- Comprender y valorar la perseverancia, el rigor, el cumplimiento, la flexibilidad y la originalidad.

APRENDIZAJES ESPERADOS E INDICADORES DE EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
Se espera que los y las estudiantes sean capaces de:	*Cuando los y las estudiantes han logrado este aprendizaje:*
AE 11 Relacionar la geometría elemental con la geometría cartesiana.	› Aplican el teorema de Pitágoras para determinar la distancia entre dos puntos representados por pares de coordenadas. › Utilizan la ecuación vectorial de una recta que pasa por dos puntos. › Transforman la ecuación vectorial de una recta del plano en la forma cartesiana y viceversa.
AE 12 Describir la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar.	› Determinan el producto entre un vector y un escalar. › Determinan la imagen homotética de una figura, dada sus coordenadas y el factor. › Identifican las propiedades de las homotecias en el plano cartesiano utilizando coordenadas vectoriales.
AE 13 Relacionar sistemas 2x2 de ecuaciones lineales con pares de rectas en el plano cartesiano para representar gráficamente las soluciones.	› Transforman ecuaciones lineales de las formas $ax + by = c$ $(b \neq 0)$ a la forma $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, y las representan en el plano cartesiano. › Resuelven gráficamente sistemas 2x2 de ecuaciones lineales. › Relacionan las posibles soluciones del sistema 2x2 de ecuaciones lineales con las posiciones relativas entre las rectas, sean paralelas o coincidan en un punto o en infinitos puntos. › Resuelven algebraicamente sistemas 2x2 de ecuaciones lineales utilizando algunos métodos, por ejemplo, por sustitución, por igualación o reducción.
AE 14 Resolver problemas de sistemas 2x2 de ecuaciones lineales e interpretar la solución en función del contexto cotidiano.	› Resuelven problemas contextualizados de sistemas 2x2 de ecuaciones. › Interpretan la solución del sistema 2x2 de ecuaciones en función del contexto del problema.

OFT	APRENDIZAJES ESPERADOS EN RELACIÓN CON LOS OFT
› Desarrollar el interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento.	

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS PARA LA UNIDAD

Para empezar la unidad, es recomendable que los y las estudiantes verifiquen en varios ejemplos que el cálculo de distancias entre pares ordenados en el plano cartesiano permite calcular mediciones de distancias en un contexto real. Es importante que las alumnas y los alumnos resuelvan problemas geométricos mediante la representación vectorial y la representación cartesiana de una recta en el plano cartesiano y que, posteriormente, interpreten los resultados obtenidos en función del contexto del problema. Cabe destacar que la habilidad de resolver problemas debe ser desarrollada y aplicada frecuentemente tanto en problemas rutinarios como no rutinarios, comparando diferentes vías de solución y evaluando las respuestas obtenidas y su pertinencia. De este modo, se fomenta el pensamiento reflexivo, crítico y creativo. Al mismo tiempo, se recomienda a la o el docente orientar a las y los estudiantes a resolver y comprobar las soluciones de los problemas utilizando *software*, y promover el estudio de propiedades de figuras geométricas, tales como comprobar que al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero siempre se obtiene un paralelogramo.

Es fundamental considerar que la forma vectorial de la homotecia implica que las y los estudiantes analicen casos particulares y puedan anticipar soluciones respecto del tipo de transformación realizada a un vector o figura geométrica, para relacionar progresivamente la geometría elemental con la geometría cartesiana y resolver problemas que promuevan la habilidad de argumentar usando el lenguaje matemático correspondiente. Se sugiere a la o el docente orientar a las y los estudiantes a inferir regularidades respecto de las propiedades de homotecias, promoviendo de esta manera la formulación y verificación de conjeturas. Además, se recomienda fomentar el trabajo en equipo y la búsqueda de soluciones de manera colaborativa, para estimular la capacidad de expresar ideas y escuchar las de otros.

Respecto a los sistemas 2x2 de ecuaciones lineales, se sugiere representar (utilizando *software*) las rectas del sistema de ecuación y establecer la relación entre el número de soluciones del sistema y la representación gráfica del sistema en el plano cartesiano y, así, las y los estudiantes podrán construir generalizaciones como las siguientes: un sistema de ecuación con solución única se representa por dos rectas que se intersectan en un punto, un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones se representa por dos rectas coincidentes, un sistema de ecuación sin solución se representa por dos rectas paralelas. Además, se recomienda la modelación de situaciones de la vida diaria o de ciencias mediante sistemas 2x2 de ecuaciones lineales. Asimismo, es importante que la o el docente promueva la formulación de problemas que se puedan resolver por sistemas 2x2 de ecuaciones lineales.

SUGERENCIAS DE ACTIVIDADES

Las sugerencias de actividades presentadas a continuación pueden ser seleccionadas, adaptadas y/o complementadas por la o el docente para su desarrollo, de acuerdo a su contexto escolar.

AE 11	Relacionar la geometría elemental con la geometría cartesiana.

1. Se les plantea el siguiente problema:

   Sofía es ingeniera forestal y quiere medir la distancia entre los árboles que hay en un jardín botánico. Para ello eligió dos ejes de coordenadas perpendiculares entre sí (X e Y) y midió la distancia de cada árbol respecto a esos ejes. De este modo, dispone de las coordenadas de cada árbol. La unidad de medida utilizada es el metro.

   Con esta información, calculan:

   a. La distancia entre el eucalipto, con coordenadas (3,8), y el ciprés, con coordenadas (13,7).
   b. La distancia entre la araucaria, con coordenadas (–5,4), y la palma chilena, con coordenadas (40,80).
   c. La distancia entre el álamo, con coordenadas (38,–6), y el eucalipto, con coordenadas (–20,–8).

2. Se les plantea el siguiente problema:

   Un auto sigue su camino en línea recta. El GPS muestra en el plano algunos pares de coordenadas donde se encuentra: primero, el auto aparece en el punto (0,0) y, luego, aparece en el punto (4,6).

   a. Considerando que el auto sigue su trayecto, indican otro posible par de coordenadas donde este podría ser ubicado.
   b. Responden: Si ahora el auto retrocede siguiendo la misma línea recta, ¿en qué punto podría ser ubicado? ¿Puede el auto estar ubicado en (–2,–3)?
   c. Responden: ¿Qué relación algebraica existe entra la primera y la segunda coordenada de todos los puntos que representan un lugar en el cual se puede ubicar el auto siguiendo la línea recta?

3. Se les plantea el siguiente problema y responden las preguntas:

Diego y Mariana juegan en el patio de su colegio. Construyen con tiza un eje de coordenadas. Ambos caminan de manera lineal y paralela y registran algunos puntos. Si Mariana comienza en el punto (2,4) y se detiene en el punto (6,6), y Diego, en cambio, parte desde el origen:

a. ¿En qué punto se encuentra Diego para haber recorrido el mismo trayecto que Mariana?
b. ¿Cuáles son las coordenadas de Diego cuando ha recorrido la mitad del camino?, ¿y las de Mariana?

4. Se les entrega la siguiente información:

Una recta pasa por los puntos P(1,2) y Q(5,4).

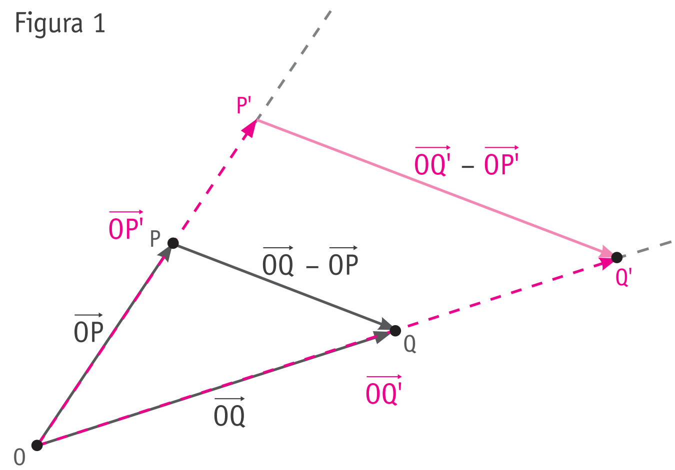
a. Determinan la ecuación vectorial de la recta en la forma $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{n}$; $t \in \mathbb{R}$ (con $\vec{n} = \vec{q} - \vec{p}$).
b. Determinan la ecuación principal de la misma recta $y = mx + b$ y la transforman en la forma cartesiana.
c. Elaboran el gráfico de la recta en un sistema cartesiano de coordenadas y verifican las soluciones en las ecuaciones.
d. Identifican el vector dirección y su relación con la pendiente.

Observaciones a la o el docente

Para la actividad 4, es necesario considerar que la homotecia en forma vectorial está determinada por una sola propiedad expresada en la ecuación vectorial $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$, en la cual el factor k es el factor de la homotecia, el punto O es el centro de la homotecia y los puntos P y P' son un par de puntos preimagen e imagen de la homotecia. Esa propiedad expresada mediante vectores incluye las propiedades de la conservación del tamaño de los ángulos y el paralelismo entre preimagen de un segmento y la imagen del segmento. Si se aplica una homotecia a una figura plana, la imagen de la figura es semejante a su preimagen.

En la figura 1 se representa una homotecia en forma vectorial para deducir el paralelismo entre la imagen de un segmento y su preimagen.

Figura 1



El segmento **PQ** se representa por el vector $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$. El segmento P'Q' se representa por el vector $\overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP'}$. El factor de la homotecia es k. La homotecia en forma vectorial muestra las igualdades vectoriales [1] y [2].

[1] $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$

[2] $\overrightarrow{OQ'} = k \cdot \overrightarrow{OQ}$

Con [1] y [2] se puede representar el vector $\overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP'}$ mediante la expresión [3].

[3] $\overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OQ} - k \cdot \overrightarrow{OP}$

Aplicando la propiedad distributiva del "producto punto" de vectores resulta [4].

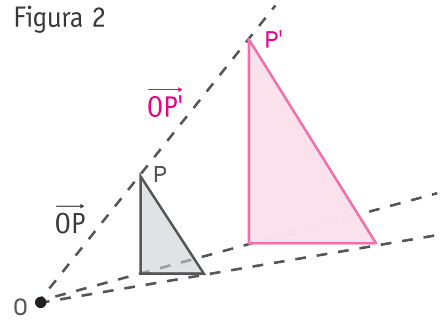
[4] $k \cdot \overrightarrow{OQ} - k \cdot \overrightarrow{OP} = k \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})$

Con [3] y [4] resulta [5].

[5] $\overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP'} = k \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})$

Esto significa que los vectores $\overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OP'}$ y $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ son paralelos, lo que también implica que los segmentos **P'Q'** (imagen) y **PQ** (preimagen) son paralelos. Si todos los segmentos de una figura 2D se transforman en segmentos paralelos a su preimagen, se puede concluir que la magnitud de todos los ángulos de la figura 2D se mantiene en una homotecia. Además, el largo del segmento **P'Q'** es k veces el largo de la preimagen **PQ**. Si se aplica una homotecia a una figura 2D, la imagen de la figura 2D es semejante a su preimagen. Por lo tanto, ambos triángulos son semejantes.

Figura 2



Con el propósito de aplicar contenidos ya aprendidos por las y los estudiantes, se recomienda a la o el docente recordar los criterios de semejanza. En este caso, se puede aplicar el criterio (AAA), ya que los ángulos son respectivamente congruentes debido al paralelismo en la figura, o el criterio (LLL), ya que los lados son proporcionales, aplicando la relación de Thales. En otros casos, dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual a su semejante (LAL).

5. Consideran un cuadrilátero cualquiera, lo representan en el plano cartesiano y llevan a cabo lo siguiente:

   a. Calculan los puntos medios de cada lado y forman un nuevo cuadrilátero a partir de dichos puntos.
   b. Identifican las ecuaciones de la recta de los lados del nuevo cuadrilátero.
   c. Comparan las pendientes y conjeturan sobre el tipo de cuadrilátero al cual corresponden.

   Posteriormente, consideran cuadriláteros diferentes al seleccionado anteriormente (cuadrado, rombo, paralelogramo, trapecio, rectángulo, deltoide), conjeturan con respecto al tipo de cuadrilátero que se forma con los puntos medios y lo verifican mediante el valor de las pendientes de las rectas que determinan sus lados.

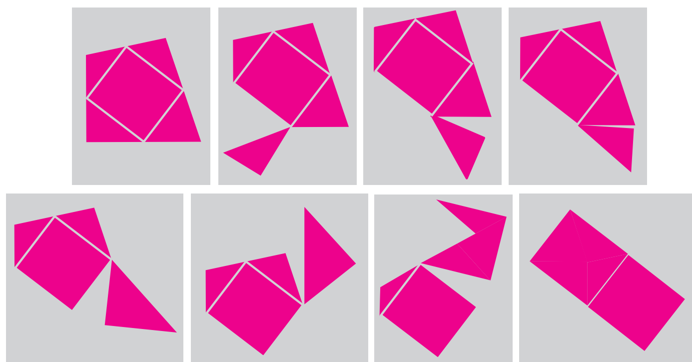
   d. Demuestran que el área del cuadrilátero es el doble del área del paralelogramo formado a partir de los puntos medios de dicho cuadrilátero.
   e. Demuestran que el perímetro del paralelogramo formado a partir de los puntos medios de un cuadrilátero convexo es igual a la suma de las medidas de las diagonales del cuadrilátero.

Observaciones a la o el docente

Para esta actividad se sugiere orientar a los y las estudiantes a justificar que el área del cuadrilátero es el doble del área del paralelogramo formado a partir de los puntos medios del cuadrilátero. En una primera etapa, las y los estudiantes pueden realizar el ejercicio siguiente:

› Cortar un cuadrilátero convexo cualquiera y luego dibujar el paralelogramo que se obtiene a partir de los puntos medios de dicho cuadrilátero.

› Posteriormente, realizar los pasos que muestran las imágenes:



Para fomentar el razonamiento matemático, se puede elaborar con el curso una demostración de un teorema geométrico, como el teorema de Varignon: "Si en un cuadrilátero cualquiera se unen los puntos medios de los lados, resulta siempre un paralelogramo" (figura 1). Además, se puede demostrar que el perímetro de este paralelogramo es la suma de los largos de las diagonales del cuadrilátero.

Para empezar, se recomienda que las y los estudiantes verifiquen el teorema mediante algunos ejemplos de cuadriláteros.

Figura 1

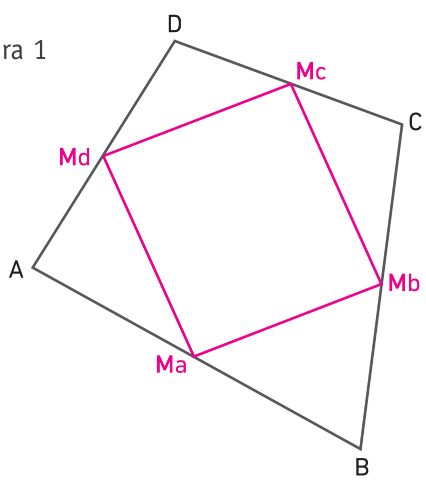
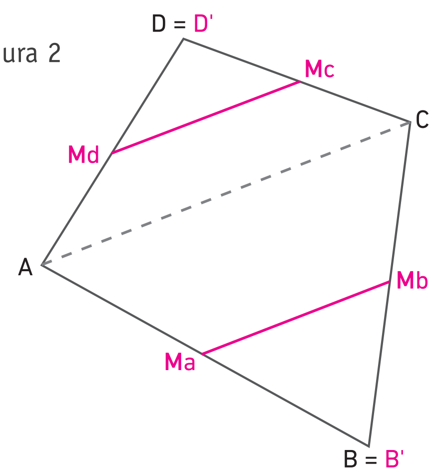


Figura 2



Primero: En la figura 2 se divide el cuadrilátero **ABCD** mediante la diagonal **AC** en dos triángulos **ABC** y **ACD**.

[1] Con el triángulo **ABC** se realiza una homotecia con el centro **B** = **B'** y el factor $k = \frac{1}{2}$. Resulta **A'** = Ma y **C'** = Mb con $\overrightarrow{MaMb} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

[2] Con el triángulo **ACD** se realiza una homotecia con el centro **D** = **D'** y el factor $k = \frac{1}{2}$.
Resulta **A'** = Md y **C'** = Mc con $\overrightarrow{MdMc} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

[3] Con [1] y [2] resulta $\overrightarrow{MaMb}$, paralelo a $\overrightarrow{MdMc}$, que significa también que los segmentos MaMb y MdMc son paralelos.

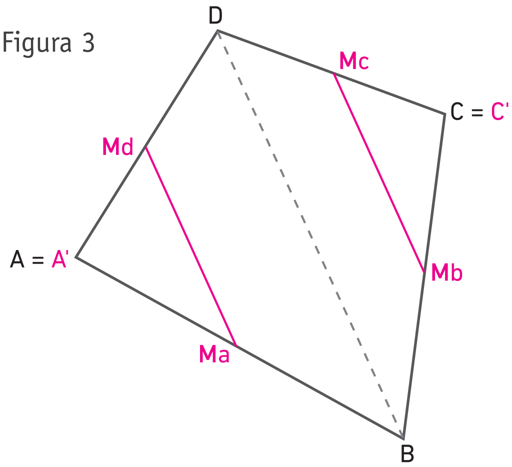
Segundo: En la figura 3 se divide el cuadrilátero **ABCD** mediante la diagonal **BD** en dos triángulos **ABD** y **BCD**.

[4] Con el triángulo **ABD** se realiza una homotecia con el centro **A** = **A'** y el factor $k = \frac{1}{2}$.
Resulta **B'** = Ma y **D'** = Md con $\overrightarrow{MaMd} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

[5] Con el triángulo **BCD** se realiza una homotecia con el centro **C** = **C'** y el factor $k = \frac{1}{2}$.
Resulta **B'** = Mb y **D'** = Mc con $\overrightarrow{MbMc} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

[6] Con [4] y [5] resulta $\overrightarrow{MaMd}$, paralelo a $\overrightarrow{MbMc}$, que significa también que los segmentos MaMd y MbMc son paralelos.

Figura 3



Con [3] y [6] se demuestra que el cuadrilátero MaMbMcMd, determinado por los puntos medios del cuadrilátero **ABCD**, es un paralelogramo.

Con las igualdades vectoriales $\overrightarrow{MaMb} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MdMc} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MaMd} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{MbMc} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ se puede concluir que el perímetro del paralelogramo es la suma de los largos de las diagonales del cuadrilátero **ABCD**.

$$\overline{MaMb} + \overline{McMd} + \overline{MaMd} + \overline{MbMc} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{BD} + \frac{1}{2}\overline{BD} = \overline{AC} + \overline{BD}$$

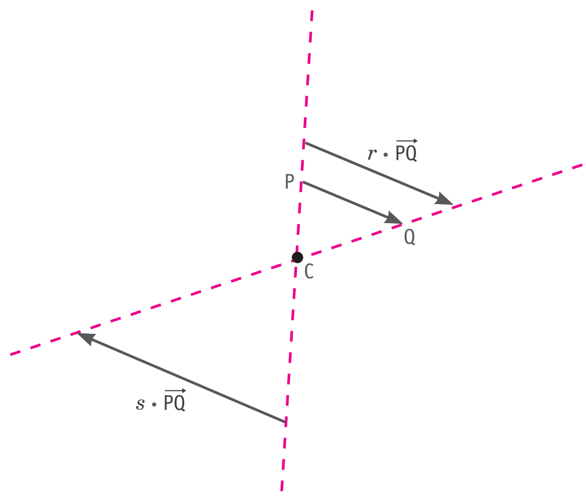
AE 12

Describir la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar.

1. Representan gráficamente la multiplicación de vectores por un escalar dado; por ejemplo, se les da el escalar $k = 2$ y los vectores (3,1), (3,3), (1,4) y representan la multiplicación de los vectores por k en el plano cartesiano. Luego, unen los puntos A(3,1), B(3,3) y C(1,4) para formar un triángulo.

2. Se les entrega la siguiente información:

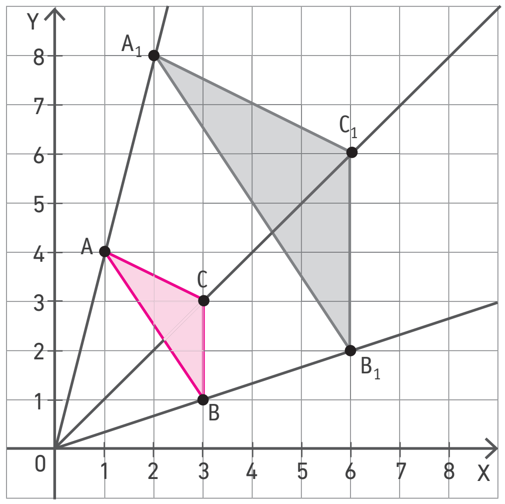
   En el plano que se muestra a continuación, se marcó el vector $\overrightarrow{PQ}$ y un punto C que es centro de una homotecia.



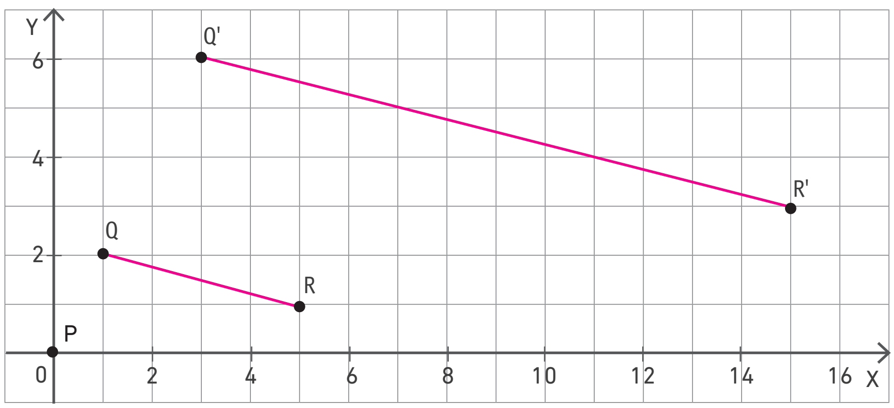
   a. Determinan con regla y compás el vector $2\,\overrightarrow{PQ}$.
   b. Determinan con regla y compás el vector $2{,}5\,\overrightarrow{PQ}$.
   c. Determinan con regla y compás el vector $-0{,}5\,\overrightarrow{PQ}$, y comentan la ubicación y la orientación de este.
   d. Determinan con regla y compás el vector $-1{,}5\,\overrightarrow{PQ}$, y comentan la ubicación y la orientación de este.
   e. El vector $r \cdot \overrightarrow{PQ}$ también es imagen del vector $\overrightarrow{PQ}$. Determinan el factor r.
   f. El vector $s \cdot \overrightarrow{PQ}$ también es imagen del vector $\overrightarrow{PQ}$. Determinan el factor s.

3. Determinan el escalar k…

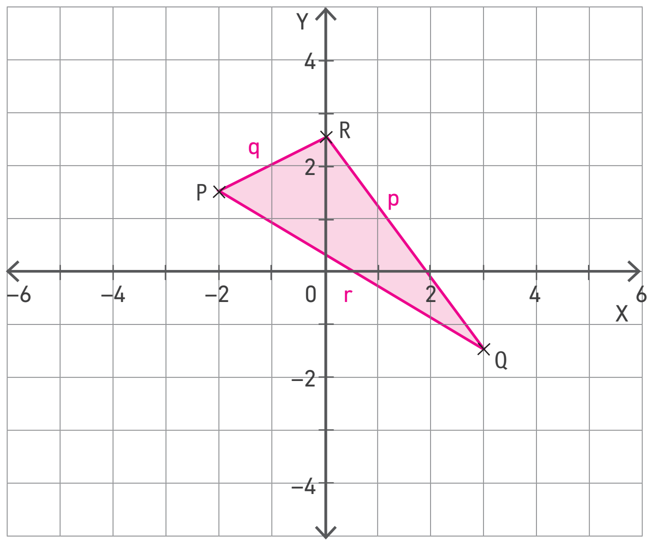
a. por el cual se han ponderado los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ para obtener A_1, B_1, C_1, mostrados en el siguiente dibujo.



b. por el cual se ha ponderado Q y R para obtener R' y Q'.



4. Dibujan la figura homotética del triángulo PQR con factor k = 1,5 y k = 3, y con centro (0,0). Consideran factores negativos para determinar la homotecia de otras figuras, como triángulos o rectángulos.



AE 13

Relacionar sistemas 2x2 de ecuaciones lineales con pares de rectas en el plano cartesiano para representar gráficamente las soluciones.

1. Resuelven sistemas 2x2 de ecuaciones mediante el método de sustitución:

a. $x + y = 1$
$x - y = 1$

b. $4x - 2y = -10$
$2x + y = -7$

c. $2x + 6y = -1$
$4x - 3y = 3$

2. Resuelven sistemas 2x2 de ecuaciones mediante el método de reducción:

a. $3x - 4y = -6$
$x + 2y = 8$

b. $2y + 3x = 7$
$4x - 3y = -2$

c. $2x + 6y = 6$
$3x + 2y = 24$

3. Resuelven sistemas 2x2 de ecuaciones mediante el método de igualación:

a. $x + 2y = 8$
$x + y = 3$

b. $2x + 3y = 6$
$3x - 2y = 1$

c. $5x + 2y = 0$
$10x - 2y = 3$

4. Eligen un método algebraico favorable para resolver el siguiente sistema:

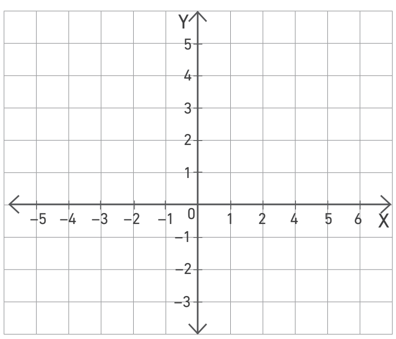
$x - 2y = -6$
$5x + 2y = 18$

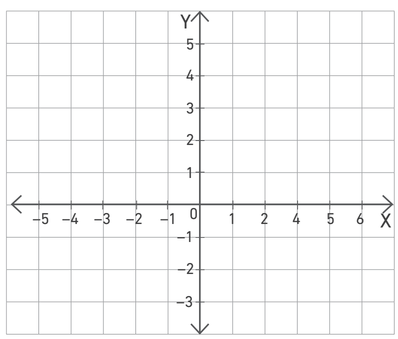
5. Resuelven los sistemas de ecuaciones presentados y realizan las actividades:

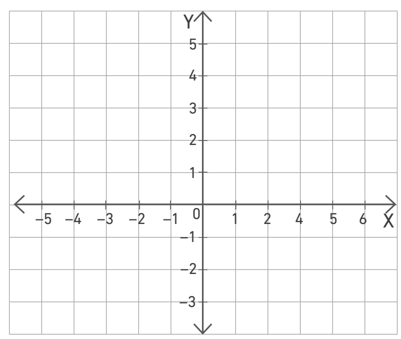
$x - 2y = 5$	$5x - 4y = 17$	$2x - 2y = -16$
$3x - 2y = 19$	$6x - y = 9$	$2y - 3x = 16$

a. Transforman las ecuaciones de cada sistema dado de la forma cartesiana $ax + by = c$ a la forma principal de una recta $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, que permite identificar la pendiente y el punto de intersección con el eje y.

b. Dibujan ambas rectas en un sistema cartesiano de coordenadas y comprueban gráficamente la resolución determinada algebraicamente para cada sistema de ecuación:







c. Responden: ¿Qué relación hay entre las soluciones de cada sistema de ecuación y su respectiva representación gráfica en el plano cartesiano?

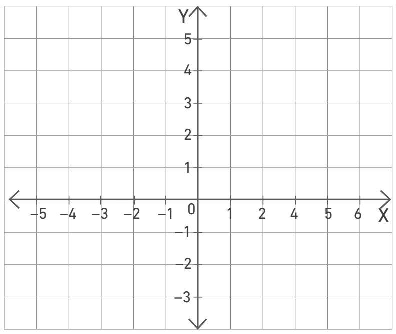
d. Responden: ¿Es correcto afirmar que la representación, en el plano cartesiano, del sistema de ecuaciones 2x2 con una solución corresponde a dos rectas con diferente pendiente?

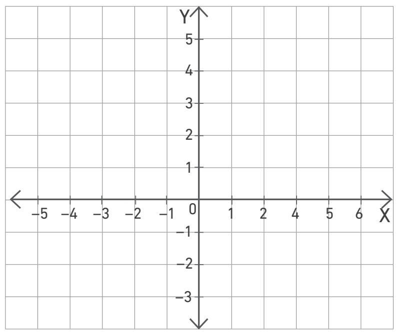
6. Resuelven los sistemas de ecuaciones presentados y llevan a cabo las actividades:

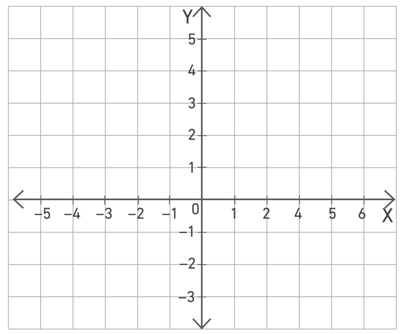
$x - 2y = 7$	$5x - 4y = 2$	$2x - 16 = y$
$3x - 6y = 21$	$-8y + 10x = 4$	$7y - 14x = -112$

a. Transforman las ecuaciones de cada sistema dado de la forma cartesiana $ax + by = c$ a la forma principal de una recta $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, que permite identificar la pendiente y el punto de intersección con el eje y.

b. Dibujan ambas rectas en un sistema cartesiano de coordenadas y comprueban gráficamente la resolución determinada algebraicamente para cada sistema de ecuación:







c. Responden: ¿Qué relación hay entre las soluciones de cada sistema de ecuación y su respectiva representación gráfica en el plano cartesiano?

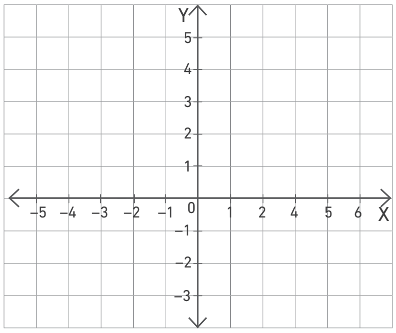
d. Responden: ¿Es correcto afirmar que la representación, en el plano cartesiano, del sistema de ecuaciones 2x2 con infinitas soluciones corresponde a dos rectas coincidentes?

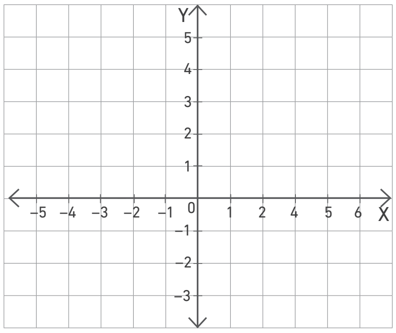
7. Resuelven los sistemas de ecuaciones presentados y realizan las actividades:

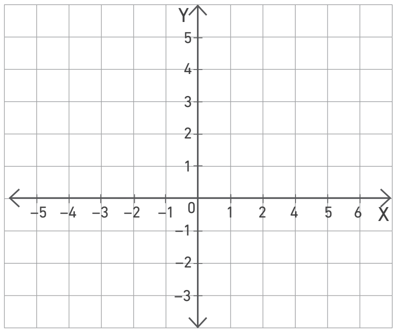
$-x + 2y = 7$	$x - y = 5$	$2x - 16 = y$
$-3x + 6y = 14$	$-y + x = 8$	$y - 2x = -12$

a. Transforman las ecuaciones de cada sistema dado de la forma cartesiana $ax + by = c$ a la forma principal de una recta $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, que permite identificar la pendiente y el punto de intersección con el eje y.

b. Dibujan ambas rectas en un sistema cartesiano de coordenadas y comprueban gráficamente la resolución determinada algebraicamente para cada sistema de ecuación:







c. Responden: ¿Qué relación hay entre las soluciones de cada sistema de ecuación y su respectiva representación gráfica en el plano cartesiano?

d. Responden: ¿Es correcto afirmar que la representación, en el plano cartesiano, del sistema de ecuaciones 2x2 sin solución corresponde a dos rectas con igual pendiente y diferente coeficiente de posición, es decir, dos rectas paralelas?

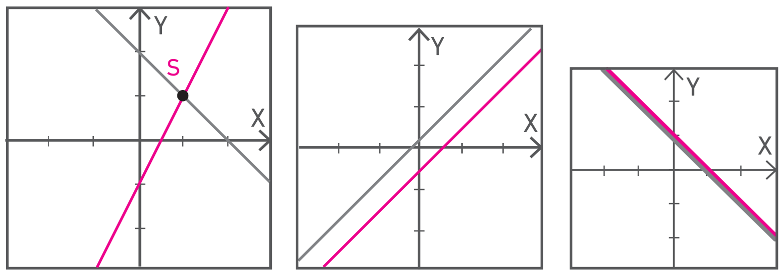
Observaciones a la o el docente

Para la actividad 5, 6 y 7, se recomienda relacionar las soluciones del sistema de ecuaciones con las nociones de paralelismo entre dos rectas en el plano (pendientes iguales y diferente coeficiente de posición), intersección de rectas en el plano (pendientes diferentes) e identidad (rectas coincidentes en el plano). Es importante considerar que, si un sistema 2x2 de ecuaciones tiene una única solución, implica que la representación gráfica en el plano cartesiano conlleva la intersección de dos rectas. Se sugiere explicitar que la solución del sistema de ecuación escrita como par ordenado y representada en el plano cartesiano corresponde a la intersección de ambas rectas (figura 1). Por otra parte, si el sistema de ecuaciones no tiene solución, implica que la representación gráfica del sistema en el plano cartesiano corresponde a dos rectas paralelas (figura 2). Además, si el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones, implica que la representación gráfica del sistema en el plano cartesiano corresponde a dos rectas coincidentes (figura 3).

Para promover una reflexión respecto del número de soluciones de un sistema de ecuaciones 2x2 y la correspondiente representación gráfica en el plano cartesiano, se sugiere profundizar a partir de las siguiente interrogantes:

- › ¿Cuál gráfico representa un sistema de ecuaciones lineales sin solución? ¿Es correcto afirmar que las pendientes de ambas rectas son iguales y el coeficiente de posición diferente?
- › ¿Cuál gráfico representa un sistema de ecuaciones lineales con una solución? ¿Es correcto afirmar que las pendientes de ambas rectas son diferentes?
- › ¿Cuál gráfico representa un sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones? ¿Es correcto afirmar que ambas rectas en el plano cartesiano son coincidentes?

Figura 1 Figura 2 Figura 3



AE 14 Resolver problemas de sistemas 2x2 de ecuaciones lineales e interpretar la solución en función del contexto cotidiano.

1. Resuelven el siguiente problema:
   Si el perímetro de un rectángulo es 88 metros y el largo mide 20 metros más que la medida del ancho, ¿cuáles son las medidas del rectángulo?

2. Resuelven el siguiente problema:
   Fernando invierte en un producto una cantidad de dinero y obtiene un 50 % de utilidades. Por la inversión de un segundo producto obtiene utilidades del 35 %. Sabiendo que en total invirtió $ 400 000 y que las utilidades de la primera inversión fueron mayores en $ 30 000 a las obtenidas por el segundo producto, ¿cuánto dinero invirtió en cada producto?

3. Resuelven el siguiente problema:

   Un fabricante de ampolletas gana $600 por cada ampolleta que es bien construida, pero pierde $800 por cada ampolleta que sale defectuosa. Un determinado día en el que fabricó 2 100 ampolletas obtuvo un beneficio de $966 000. ¿Cuántas ampolletas se fabricaron correctamente ese día?

4. Resuelven el siguiente problema:

   Si una fábrica de agua mineral envasa en promedio 30 000 litros diarios en 12 000 botellas de 2 litros y 5 litros, ¿cuántas botellas de 2 litros y 5 litros envasa diariamente?

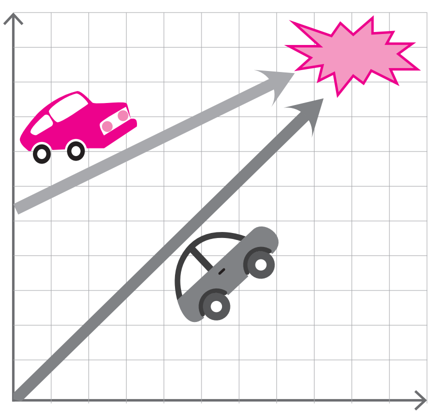
5. Resuelven el siguiente problema:

   Una empresa de productos plásticos recibe el encargo de fabricar cierto número de maceteros para un día determinado. Al planificar la producción, el jefe advierte que si fabrican 250 maceteros diarios, faltarían 150 macetas al concluir el plazo que les han dado y que si fabrican 260 maceteros diarios, entonces sobrarían 80 maceteros. ¿Cuántos días de plazo tenían y cuántas maceteros les encargaron?

6. Resuelven el siguiente problema:

   Marcia compró un abrigo que estaba rebajado un 15 %. Su amiga Marta compró otro abrigo $15 000 más caro, pero con un 20 % de descuento, con lo que solo pagó $4 000 más que Marcia. ¿Cuál era el precio de cada abrigo?

7. Inventan problemas de situaciones reales basándose en la figura, en la cual el eje horizontal representa el tiempo, y el eje vertical, el recorrido de los autos. Reflexionan en qué situaciones no se producen choques.

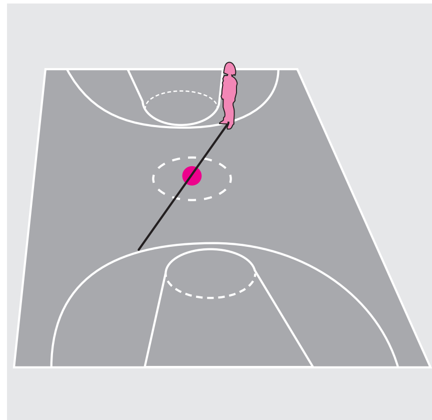


EJEMPLO DE EVALUACIÓN

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
AE 11 Relacionar la geometría elemental con la geometría cartesiana.	› Utilizan la ecuación vectorial de una recta que pasa por dos puntos. › Transforman la ecuación vectorial de una recta del plano en la forma cartesiana y viceversa.

ACTIVIDAD PROPUESTA

Un estudiante quiere trazar una línea recta en la cancha de básquetbol del patio del colegio. Para eso ha fijado el punto (0,0) exactamente en el centro de la cancha. Luego caminó dos pasos a la derecha y cinco a la izquierda, y decidió que ese punto donde estaba ubicado sería un punto de la recta, junto con el (0,0). Cada paso del estudiante corresponde a un metro de distancia. Entonces:



a. ¿Cuál es otra posible coordenada donde se podría ubicar?
b. Si ahora el estudiante quiere estar al otro lado de la cancha, ¿en qué coordenada podría ubicarse?
c. Describa todas las coordenadas donde puede ubicarse el estudiante en la línea que él mismo ha querido trazar.

Además, realice lo siguiente:

a. Traspase la información a un plano cartesiano adecuado.
b. Ubique el punto (0,0) y el punto (2,5).
c. Relacione la diferencia de estos vectores con el vector director de la recta.
d. Determine otras coordenadas donde el estudiante puede ubicarse.
e. Relacione el otro lado de la cancha con el cambio de dirección del vector director.
f. Determine puntos que están en el tercer cuadrante y que pertenecen a la recta.
g. Determine la ecuación vectorial o cartesiana de la recta que ha trazado el estudiante en la cancha de básquetbol.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Al evaluar, se sugiere considerar los siguientes aspectos:

- Escribe el vector director de la recta.
- Estima puntos que están en la recta.
- Verifica que los puntos estén en la recta.
- Determina puntos que pertenecen a la recta y que están en el tercer cuadrante.
- Determina la ecuación vectorial o cartesiana de la recta.

UNIDAD 4

DATOS Y AZAR

PROPÓSITO

Uno de los objetivos de esta unidad es que los y las estudiantes comprendan el concepto de probabilidad condicional y que lo relacionen con situaciones de la vida diaria. Los problemas experimentales se trabajan con las representaciones de árboles de decisión, las cuales posibilitan una mayor comprensión de los contenidos y una herramienta para los cálculos probabilísticos.

Además, se busca que las y los estudiantes profundicen sus conocimientos sobre una variable aleatoria discreta, representando sus funciones y distribuciones de probabilidades. También se espera que sean capaces de analizar el comportamiento de una variable aleatoria dicotómica en forma experimental y teórica, comparando los resultados de experimentos reales o de simulación con distribuciones binomiales. Asimismo, se pretende que modelen situaciones o fenómenos que involucran la aplicación de la distribución binomial.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Varianza, desviación estándar, variables aleatorias, cálculo combinatorio de probabilidades de eventos independientes, diagramas de árbol de probabilidad.

CONCEPTOS CLAVE

Probabilidad condicional, variable aleatoria discreta, función de probabilidad, distribución de probabilidad, experimentos aleatorios, modelo probabilístico.

CONTENIDOS

- Probabilidad condicional.
- Variable aleatoria discreta.
- Función de probabilidad.
- Distribuciones de probabilidad.
- Distribución binomial.
- Valor esperado de una distribución binominal.
- Varianza de una distribución binominal.
- Desviación estándar de una distribución binominal.

HABILIDADES

- Analizar información, utilizando el valor esperado, varianza y desviación estándar.
- Organizar datos usando distribución o función de probabilidad.
- Caracterizar variables aleatorias discretas.
- Determinar probabilidad condicional y servirse de ella.
- Conjeturar, si un juego es favorable o equitativo.
- Resolver problemas relacionados con la distribución binomial.

ACTITUDES

- Interesarse por conocer la realidad al trabajar con información cuantitativa de diversos contextos.

APRENDIZAJES ESPERADOS E INDICADORES DE EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
Se espera que los y las estudiantes sean capaces de:	*Cuando los y las estudiantes han logrado este aprendizaje:*
AE 15 Utilizar el concepto de probabilidad condicional en problemas cotidianos o científicos.	› Elaboran árboles de probabilidades de experimentos sin reposición relacionándolos con probabilidades condicionales de forma intuitiva. › Representan tablas de frecuencias de dos características para determinar las probabilidades condicionales. › Resuelven problemas cotidianos o científicos que involucran la aplicación de la probabilidad condicional.
AE 16 Aplicar el concepto de variable aleatoria discreta para analizar distribuciones de probabilidades en contextos diversos.	› Clasifican variables aleatorias discretas en experimentos aleatorios o en situaciones diarias interpretables como experimentos aleatorios. › Utilizan la terminología $X = x_i$, en la cual los x_i representan los valores discretos que puede tomar la variable aleatoria. › Determinan las probabilidades $P(X = x_i)$ de una variable aleatoria discreta.
AE 17 Representar funciones de probabilidad y distribuciones de una variable aleatoria discreta.	› Confeccionan histogramas de funciones de probabilidad relacionados con experimentos aleatorios sencillos. › Transforman histogramas de funciones de probabilidad de una variable aleatoria discreta en el gráfico escalonado de la función de probabilidad $F(x) = P(X \leq x)$.
AE 18 Comparar el comportamiento de una variable aleatoria en forma teórica y experimental, considerando diversas situaciones o fenómenos.	› Utilizan herramientas tecnológicas para representar el desarrollo de una variable aleatoria discreta. › Determinan el valor esperado $E(X)$, la varianza y la desviación estándar de una variable aleatoria discreta X. › Resuelven problemas de situaciones diarias que involucran la definición de una variable aleatoria discreta.
AE 19 Desarrollar la distribución binomial para experimentos tales como cara o sello y situaciones de éxito o fracaso.	› Confeccionan histogramas de frecuencias relativas obtenidas por repeticiones de experimentos del tipo Bernoulli, ya sean reales o por medio de simulación; por ejemplo: tablero de Galton, lanzamiento repetitivo de monedas, paseos al azar, etc. › Desarrollan la fórmula de Bernoulli para determinar las probabilidades teóricas $P(X = x_i)$ de variables aleatorias dicotómicas discretas. › Elaboran histogramas de distribuciones binomiales para diferentes valores de n y p dados. › Determinan el valor esperado $E(X)$ y la desviación estándar σ de distribuciones binomiales.
AE 20 Modelar situaciones o fenómenos mediante la distribución binomial.	› Conjeturan si una situación o un fenómeno de la vida diaria tiene las características para ser interpretado como experimento binomial. › Identifican, en el enunciado de un problema, los parámetros n, p y k usados para modelar fenómenos o situaciones que satisfacen las condiciones de una distribución binominal. › Resuelven problemas probabilistas y de situaciones de la vida diaria que involucran una aplicación de la distribución binomial.

OFT	APRENDIZAJES ESPERADOS EN RELACIÓN CON LOS OFT

› Buscar y acceder a información de diversas fuentes virtuales de manera responsable.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS PARA LA UNIDAD

Para tratar las probabilidades condicionales en esta unidad, es recomendable que el o la docente presente problemas de situaciones de experimentos aleatorios o de situaciones de la vida diaria cuyas resoluciones impliquen una modelación por medio de probabilidad condicional, entendiendo esta como la probabilidad de que ocurra el suceso A, si ha ocurrido el suceso B. Lo anterior, se denota $P(A/B) = P_B(A)$ y se lee "probabilidad de A dado B". En adición, se sugiere incluir actividades con material concreto (monedas, dados, bolitas), cuando sea pertinente.

Para representar procesos probabilistas, es importante utilizar árboles de probabilidad que permiten visualizar y destacar ocurrencias que pueden ser elegidas o excluidas. De esta manera, facilitan la determinación de probabilidades de ocurrencias compuestas. Además, mediante la elaboración de árboles de probabilidad o de tablas de doble entrada, las y los estudiantes pueden aprender en forma intuitiva el concepto de la probabilidad condicional: relacionan, en una primera instancia, el espacio muestral con el árbol de probabilidad y, posteriormente, comprenden el significado de un evento que implica probabilidad condicional. Al mismo tiempo, la o el docente debe promover la resolución de problemas y la modelación que involucra el cálculo propiamente tal de un evento de probabilidad condicionada. Es importante dar espacio para que los alumnos y las alumnas puedan inferir una solución, discutirla y argumentarla en grupos y verificar la solución en forma gráfica o mediante un cálculo.

Respecto a la introducción de variables aleatorias discretas, se sugiere que el o la docente utilice una representación pictórica con diagramas de Venn, para que las y los estudiantes puedan comprender que este tipo de variable aleatoria permite modelar diversas situaciones de azar de la vida cotidiana (por ejemplo, relacionadas con dados, monedas e integrantes de un curso, entre otros). En esta línea, es fundamental que la o el docente promueva el desarrollo del pensamiento aleatorio, es decir, que los y las estudiantes aprendan a tomar decisiones con evidencia en situaciones de incertidumbre. Asimismo, el o la docente debe representar y extrapolar los resultados obtenidos o generar datos de variables aleatorias mediante numerosas repeticiones de experimentos aleatorios. Lo anterior requiere el uso de herramientas tecnológicas de simulación que están gratuitamente disponibles en internet. En cuanto a la distribución binomial, es importante destacar el carácter de modelación que tiene la probabilidad en el caso de las preguntas estadísticas de la vida diaria o de ciencias que implican situaciones de "sí o no" o "éxito o fracaso".

Se sugiere organizar este trabajo en pares o grupos pequeños para que los alumnos y las alumnas puedan intercambiar argumentos sobre sus conjeturas.

Respecto de la evaluación, se aconseja monitorear el logro de los aprendizajes a medida que avanza la unidad y no solamente al final de ella. De este modo, el o la docente sabrá si las y los estudiantes comprenden y aplican los conceptos y cálculos relacionados con probabilidad condicionada. Así, la o el docente podrá obtener evidencia de aprendizaje de los distintos niveles de desempeño y diseñar procesos de retroalimentación para las diferentes dificultades o errores conceptuales o procedimentales propios de los contenidos trabajados en esta unidad.

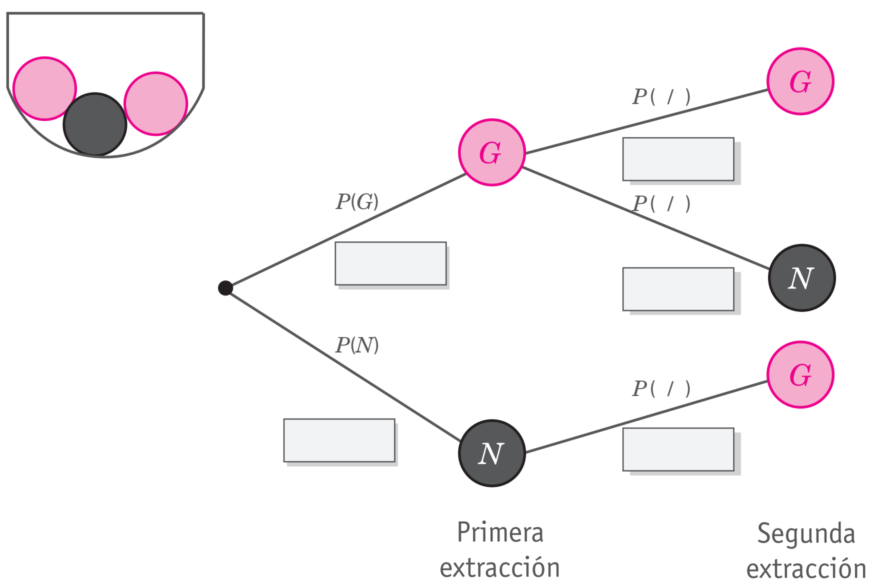
SUGERENCIAS DE ACTIVIDADES

Las sugerencias de actividades presentadas a continuación pueden ser seleccionadas, adaptadas y/o complementadas por la o el docente para su desarrollo, de acuerdo a su contexto escolar.

AE 15	Utilizar el concepto de probabilidad condicional en problemas cotidianos o científicos.

1. Se les plantea el siguiente problema:

   En una urna hay dos bolitas de color gris y una bolita negra. Se extrae dos veces al azar una bolita, sin reponer la primera, y se registra su color. Podemos representar este experimento aleatorio por el siguiente árbol de probabilidades.



El evento "extraer una bolita gris" se denomina G, y el evento "extraer una bolita negra" se denomina N. La notación $P(N/G) = P_G(N)$ designa la probabilidad de que ocurra N sabiendo que ocurrió G.

Con esta información, contestan las preguntas y llevan a cabo las actividades:

a. ¿Por qué, al principio, el árbol se divide en dos ramas y, luego, en G se divide en dos ramas nuevamente y en N sigue con una sola rama?

b. ¿Qué significan los términos $P(N/G) = P_G(N)$ y $P(G/N) = P_N(G)$? Contestan la pregunta en una frase.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que el color de la segunda bolita sea gris?

d. Rotulan el árbol con las probabilidades calculadas.

e. Completan el árbol de probabilidad para representar el suceso "sacar la tercera bolita" y calculan la probabilidad de que la última bolita sea negra.

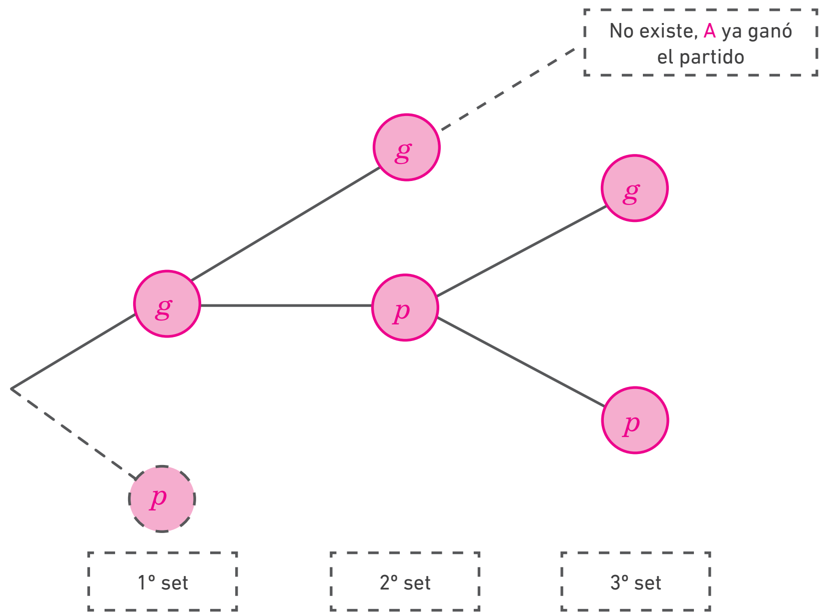
f. Comparan las probabilidades de la primera extracción con las de la última.

2. Se les plantea el siguiente problema:

En partidos de tenis, tenis de mesa, bádminton o de vóleibol de playa, el ganador es el jugador que gana dos sets.

En un campeonato de tenis de mesa entre dos colegios A y B, se juega el partido decisivo entre dos jugadores. El jugador del colegio A ganó el primer set, pero estaba muy nervioso. El profesor a cargo de su equipo tranquilizó al jugador con las siguientes palabras: "Tú y tu adversario tienen el mismo nivel de rendimiento y, como tú ya ganaste el primer set, tu probabilidad de ganar el partido es tres veces más grande que la del jugador del otro equipo".

El árbol de probabilidades de abajo está elaborado según el punto de vista del jugador A. Con g se denomina el evento "A gana un set" y con p se denomina el evento "A pierde un set".



Con esta información, llevan a cabo lo siguiente:

a. Rotulan los caminos con las probabilidades, considerando que ambos jugadores A y B tienen el mismo nivel de rendimiento, lo que significa probabilidades iguales de ganar un set.

b. Marcan en el árbol de probabilidades todos los caminos posibles que convierten al jugador A en el ganador del partido bajo la condición de haber ganado el primer set.

c. Calculan la probabilidad de ganar el partido que tiene el jugador A bajo la condición de haber ganado el primer set.

d. Calculan la probabilidad de perder el partido que tiene el jugador A bajo la condición de haber ganado el primer set.

e. Verifican o rechazan el enunciado del profesor encargado del equipo A.

3. Resuelven el problema de un equipo que ha ganado dos sets en un partido de vóleibol, en el cual resulta ganador quien gana tres set. Elaboran el árbol de probabilidades y calculan las diferentes probabilidades condicionales (probabilidad de ganar sabiendo que se han ganado los dos primeros set del partido).

4. Se les presenta el siguiente problema y llevan a cabo las actividades:

En una caja no transparente hay 100 bolitas de las cuales 70 son de madera y 30 de plástico. Las bolitas además tienen diferentes colores: 25 de las bolitas de madera son rojas y 45 son verdes, mientras que 10 de las bolitas plásticas son rojas y 20 son verdes. Se definen los siguientes eventos.

A: La bolita sorteada es de madera.
$\overline{A}$: La bolita sorteada es de plástico.
B: La bolita sorteada es roja.
$\overline{B}$: La bolita sorteada es verde.

a. Responden: Si al sacar una bolita de la caja, la persona se percata del tipo de material de esta, ¿cuáles son las probabilidades condicionales al conocer el material de la bolita extraída?

b. Completan la siguiente tabla.

		Característica 2 (color)		Total
		B: rojo	$\overline{B}$: verde	
Característica 1 (material)	A: madera	25		
	$\overline{A}$: plástico			
	Total			

c. Elaboran un árbol de probabilidades y lo rotulan con los símbolos $P(A)$, $P(\overline{A})$, $P(B/A) = P_A(B)$, $P(\overline{B}/A) = P_A(\overline{B})$, $P(B/\overline{A}) = P_{\overline{A}}(B)$ y $P(\overline{B}/\overline{A}) = P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

d. Calculan y anotan las probabilidades de los sucesos que conforman el árbol de probabilidades.

5. Se les entrega la siguiente información y realizan las actividades:

La estadística de la Organización Panamericana de Salud OPS del año 2013 informa que la tasa de fumadores de la población adulta en Chile es aproximadamente 40 %. Se estima que el 0,2 % de los adultos chilenos desarrolla un cáncer pulmonar. Otras estadísticas internacionales, indican que aproximadamente el 90 % de los enfermos de cáncer pulmonar corresponde a fumadores. El riesgo de desarrollar un cáncer pulmonar para fumadores y no fumadores se define mediante las probabilidades condicionales de estos grupos de la población.

a. Completan la tabla utilizando números decimales.

	Enfermos de cáncer pulmonar	No enfermos de cáncer pulmonar	Total
Fumadores			
No fumadores			
Total			

b. Calculan el riesgo de desarrollar un cáncer pulmonar para un no fumador y lo representan en porcentaje redondeado a la centésima (por ejemplo: 0,21 %)

c. Calculan el riesgo de desarrollar un cáncer pulmonar para un fumador y lo representan en porcentaje redondeado a la centésima.

d. Calculan cuántas veces más grande es el riesgo de desarrollar cáncer pulmonar para un fumador que el de un no fumador.

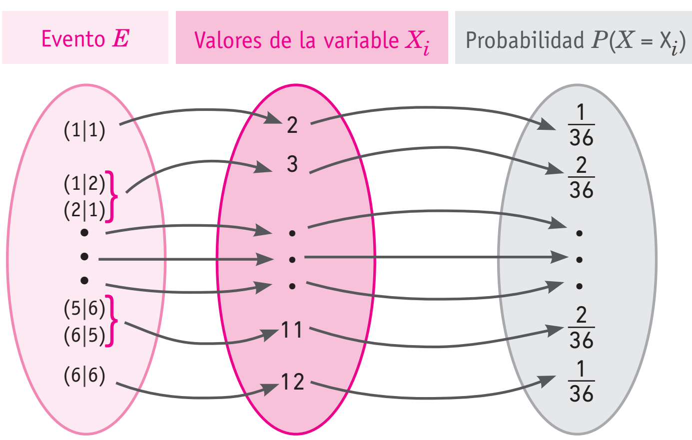
AE 16

Aplicar el concepto de variable aleatoria discreta para analizar distribuciones de probabilidades en contextos diversos.

Observaciones a la o el docente

Para tratar este AE, se recomienda, al inicio, darles la posibilidad a los y las estudiantes de visualizar el concepto de una variable aleatoria, por ejemplo, mediante un diagrama lateral de correspondencia.

Ejemplo: Lanzamiento simultáneo de un dado blanco y un dado rojo con los eventos representados por el par (x,y), en el cual el primer número es del dado blanco y el segundo número es del dado rojo. La variable aleatoria $X = x_i$ representa la suma de los números que resulta de los lanzamientos simultáneos de dos dados.



1. Se les plantea la siguiente situación y llevan a cabo las actividades:

   Se lanza una moneda dos veces, registrando los eventos "cara" C y "sello" S, y el orden en el cual resultan. Se define una variable aleatoria X de tal manera que se represente el número de los eventos "cara" C que pueden ocurrir.

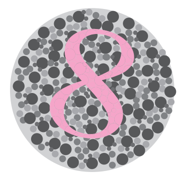
   a. Determinan los valores x_i que puede tomar la variable aleatoria X y los escriben en la tabla.
   b. Calculan las probabilidades $P(X = x_i)$ y las anotan en la tabla.

Eventos	$(S\|S)$	$(C\|S)$	$(S\|C)$	$(C\|C)$
Valores x_i = nº de caras	0			
Probabilidades $P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$			

   c. Responden:
      ¿Es correcto afirmar que $P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = P(x = 1) + P(x = 2)$?

2. Se les presenta la siguiente información y realizan las actividades:

   Se sabe que la tasa de daltonismo entre hombres es aproximadamente 8 %. Para obtener la licencia de conducir hay que someterse a un test de daltonismo. En la dirección de tránsito hay tres hombres que tienen que rendir el test. Una variable aleatoria determina el número de portadores de daltonismo entre ellos.



   a. Determinan, mediante un árbol de probabilidades, las posibilidades que cada uno de los tres hombres posee de ser portador de daltonismo. Se debe considerar que el evento "portador de daltonismo" se representa con 1 y el evento "no portador" se representa con 0.
   b. Completan la siguiente tabla con los eventos, los valores que puede tomar la variable aleatoria y las probabilidades de las variables aleatorias.

Evento	Valor de la variable $X = x_i$	$P(X = x_i)$
111	3	

2
U4

c. Conjeturan respecto de la posibilidad de que un hombre tenga daltonismo o que dos hombres tengan daltonismo.

3. Se les presenta la siguiente situación y llevan a cabo las actividades:

Se lanza un dado dos veces. Se definen las siguientes variables aleatorias:

X: La suma de los números.
Y: El producto de los números.
Z: El mayor número de ambos números.
V: El valor absoluto de la diferencia de ambos números.

d. Elaboran para la variable X una tabla con eventos, valor de la variable $X = x_i$ y la probabilidad $P(X = x_i)$.
e. Elaboran para la variable Y una tabla con eventos, valor de la variable $Y = y_i$ y la probabilidad $P(Y = y_i)$.
f. Elaboran para la variable X una tabla con eventos, valor de la variable $X = x_i$ y la probabilidad P($X = x_i$).

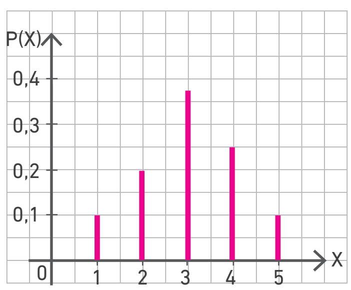
AE 17

Representar funciones de probabilidad y distribuciones de una variable aleatoria discreta.

Observaciones a la o el docente

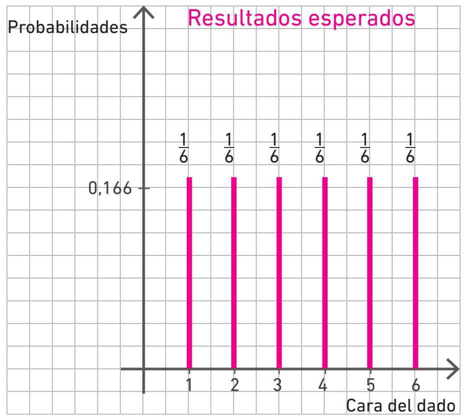
Para representar funciones de variables aleatorias se recomienda el siguiente gráfico de barras[7].

X	1	2	3	4	5
$P(X)$	0,1	0,2	0,35	0,25	0,1



7 Este tipo de gráfico de barras delgadas se usa comúnmente para graficar funciones de variables aleatorias.

Sería conveniente mostrar otros ejemplos donde se vean los datos del experimento y los datos de la probabilidad teórica, como los siguientes:



1. Se les plantea el siguiente problema y realizan las actividades:

   Diferentes personas marcan al azar dos celdas de una fila de cuadrículas numerada del 1 al 5. Se registra la suma de los números de las celdas marcadas. Una variable aleatoria X representa la suma de los números de las celdas marcadas.

1	2	3	4	5	Suma
X	X				3
X		X			4
		.			
		.			
			X	X	9

   a. Determinan todas las formas posibles de marcar dos de cinco celdas.
   b. Elaboran una tabla con los eventos, valor de la variable $X = x_i$ y la probabilidad $P(X = x_i)$.

c. Representan la distribución de la variable aleatoria X mediante un gráfico de barras (ver Observación a la o el docente).

2. Se les presenta la siguiente situación y llevan a cabo las actividades:

Un jugador de la selección nacional de fútbol de un país tuvo que someterse a una operación de la rodilla derecha. Como faltaban tres meses para el próximo mundial, se especulaba sobre su posible recuperación para jugar el campeonato. La clínica en la que el jugador se operó dispone de una estadística basada en la experiencia de varios años.

x: Recuperación de pacientes en semanas	<6	7	8	9	10	11	12	13	14	>14
$P(X = x)$: Probabilidad de recuperación en porcentaje	0	5	20	20	20	15	10	5	5	0

a. Responden: ¿Con qué probabilidad se espera una recuperación de hasta 10 semanas?

b. Responden: ¿Con qué probabilidad se espera una recuperación de 10 a 13 semanas?

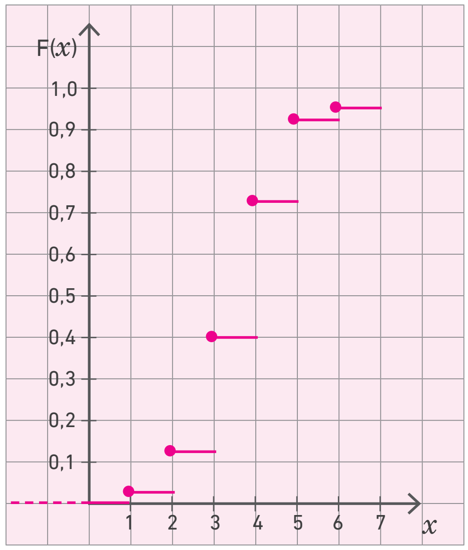
c. Completan la tabla con los valores de la función de probabilidad F con $F(x) = P(X \leq x)$.

x: Recuperación de pacientes en semanas	<6	7	8	9	10	11	12	13	14	>14
$P(X \leq x)$: Probabilidad acumulada de recuperación en porcentaje										

d. Elaboran el gráfico escalonado de la función de probabilidad $F(x) = P(X \leq x)$.

3. Se les plantea el siguiente problema y realizan las actividades:

La variable aleatoria X representa el tiempo de incubación de una enfermedad contagiosa. El gráfico a continuación muestra la función F de probabilidad de la variable aleatoria X con $F(x) = P(X \leq x)$.



a. Estiman el valor de la probabilidad de acuerdo al gráfico de la función F de probabilidad.

Intervalo	]−∞;1]	[1;2[	[2;3[	[3;4[	[4;5[	[5;6[	[6;7[	[7;∞[
$F(x) = P(X \leq x)$								

b. Utilizan los valores de la tabla anterior para elaborar el gráfico de barras delgadas que representa la distribución de la variable aleatoria X.

AE 18

Comparar el comportamiento de una variable aleatoria en forma teórica y experimental, considerando diversas situaciones o fenómenos.

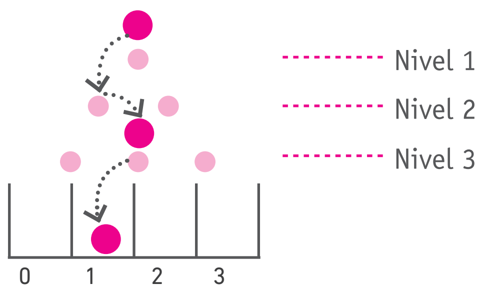
Observaciones a la o el docente

En la actividad 1 se presenta un ejemplo para comparar el comportamiento de una variable aleatoria en forma teórica y experimental. Se puede utilizar un simulador de un quincunce o tablero de Galton y simular un experimento aleatorio del tipo Bernoulli, en el cual hay dos posibilidades (como "si" y "no", "cara" y "sello", "izquierda" y "derecha"). En internet hay disponible varias simulaciones de un tablero de Galton, por ejemplo: http://www.disfrutalasmatematicas.com/datos/quincunce-explicada.html

Esta actividad se compone de una parte teórica y otra experimental. Se sugiere comenzar con la primera parte para contrastar el resultado teórico con la simulación. Asimismo, se pueden confeccionar tableros de Galton.

1. Se les presenta la siguiente situación y llevan a cabo las actividades:

   En un tablero de Galton, las bolitas entran por separado y caen por un sistema de obstáculos como botones o clavos. Al pasar un obstáculo, las bolitas seguirán su camino con la probabilidad de 0,5 por la izquierda (i) o por la derecha (d). Después de haber pasado todos los niveles de obstáculos, caerán en las casillas numeradas por 0, 1, 2, 3 o más. El dibujo de abajo muestra el esquema de un tablero de Galton de tres niveles.



   a. Determinan todos los caminos posibles para llegar a las casillas 0, 1, 2 y 3 del tablero de Galton de tres niveles y los representan con un triple ordenado. Por ejemplo, un posible camino para llegar a la casilla 1 se representa con $(i; d; i)$.

b. Una variable aleatoria X representa el número de la casilla a la cual llega la bolita. Determinan en forma teórica todas las probabilidades $P(X = x_i)$ que puede tomar la variable aleatoria.

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$			

c. Elaboran un gráfico de barras delgadas que represente la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X.

d. Utilizan un simulador de un tablero de Galton para comparar el resultado teórico con la simulación.

e. Conjeturan acerca del resultado de simulación si se aumenta la cantidad de repeticiones.

2
U4

Observaciones a la o el docente

La media $\overline{x}$ de un conjunto de datos x_1, x_2, … x_n se calcula mediante la expresión $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. Mientras que la media $\overline{x}$ se calcula con datos obtenidos de un experimento o una muestra, y el valor esperado de una variable aleatoria X se calcula con la expresión
$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$.

El o la docente puede orientar el análisis de la variable aleatoria con el siguiente ejemplo: En un juego al azar se puede ganar y perder puntos. La variable aleatoria $X = x_i$ representa las ganancias y las pérdidas de puntos, como se muestra en la siguiente tabla junto con sus probabilidades respectivas.

x_i	–2 000	0	1 000	3 000
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Con el objetivo de saber si el juego al azar es favorable para el jugador, se calcula el valor esperado de la variable aleatoria.
$E(X) = -2\,000 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1\,000 \cdot \frac{1}{3} + 3\,000 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1\,000}{6} \approx 167$. Como el valor esperado $E(X)$ es positivo, el juego es favorable para el jugador. Con un número muy alto de repeticiones del juego se puede esperar una ganancia aproximada de 167 puntos.

2. Se les plantea el siguiente problema y realizan las actividades:

Se inventa un juego aleatorio, con tres dados y un banco de fichas, en el cual se gana o se pierde fichas contra el banco. Se apuesta una ficha y se lanzan los tres dados. Si aparece una, dos o tres veces el 6, se devuelve la ficha y, además, se gana una, dos o tres fichas, según la cantidad de 6 obtenidos. Si no se obtiene un número 6, se asigna el valor menos uno (pérdida de una ficha). Una variable aleatoria X representa la ganancia o pérdida de fichas del triple lanzamiento.

a. Completan la tabla con los eventos, valores x_i, probabilidades $P(X = x_i)$ y los productos $x_i \cdot P(X = x_i)$.

Cantidad de 6	x_i	$P(X = x_i)$	$X_i \cdot P(X = x_i)$
0	–1	$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 0{,}5787$	$-1 \cdot 0{,}5787$

b. Determinan el valor esperado $E(X)$ de la variable aleatoria X.

c. Conjeturan si el juego es favorable para el jugador o para el banco de fichas.

Observaciones a la o el docente

Al evento de no conseguir un 6 se asigna el valor –1, según reglas arbitrarias de este juego. Por esta razón se observan valores negativos en la tabla. Por ejemplo, si sale tres veces el 6, se devuelve la ficha y el banco entrega tres fichas más.

Se puede jugar en parejas, donde una alumna o un alumno toma el rol de banquero de fichas.

3. Se les plantea la siguiente situación y llevan a cabo las actividades:

Una moneda manipulada tiene la probabilidad $p = 0{,}4$ de mostrar sello después de un lanzamiento al azar. Se lanza la moneda cuatro veces. Una variable aleatoria X representa la cantidad de sellos en el cuádruple lanzamiento.

a. Determinan el valor esperado $E(X)$ de la variable aleatoria. Completan la tabla.

x_i	$P(X = x_i)$	$X_i \cdot P(X = x_i)$
0	$0{,}6^4 = 0{,}1296$	$0 \cdot 0{,}1296 = 0$
1		
2		
3		
4		
	Valor esperado $E(X)$	

b. Determinan la varianza σ^2 y la desviación estándar σ de la variable aleatoria. Completan la tabla.

x_i	$x_i - E(x)$	$(x_i - E(x))^2$	$(x_i - E(x))^2 \cdot P(X = x_i)$
0			
1			
2			
3			
4			
			$\sigma^2 =$
			$\sigma =$

c. Luego de lanzar una moneda "ideal", la probabilidad tanto de que muestre cara como de que salga sello es de 0,5. Para el experimento anterior, el valor esperado $E(X)$ es 2, y la desviación estándar σ es 1. Conjeturan y argumentan acerca de la diferencia entre ambos experimentos.

2
U4

AE 19

Desarrollar la distribución binomial para experimentos tales como cara o sello y situaciones de éxito o fracaso.

Observaciones a la o el docente

En las siguientes actividades se pueden utilizar herramientas tecnológicas de cálculo y de simulación para determinar el coeficiente binomial $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ o para generar histogramas de distribuciones binomiales con los valores de n, k y p dados. Con cualquier buscador de internet se pueden encontrar sitios que ofrecen gratuitamente la utilización de calculadoras o simuladores, como: www.ugr.es/~jsalinas/herramar.htm o http://www.mcgraw-hill-educacion.com/pye01e/cap5/galton.html.

También es posible aplicar el programa Excel con los macros estadísticos.

1. Se les presenta el siguiente problema y realizan las actividades:

Se lanza un dado cinco veces. El evento 6 se considera como éxito (e) del experimento, y los demás eventos como fracaso (f).

a. Determinan, mediante un árbol o por aplicación del coeficiente binomial $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, la cantidad de caminos o eventos que tienen tres éxitos.

b. Responden: ¿Cuál es la probabilidad de un éxito (e) y cuál es la probabilidad de un fracaso (f)?

c. Desarrollan el cálculo de la probabilidad de un camino con tres éxitos, por ejemplo, del camino $D = (e; f; e; e; f)$.

d. Verifican mediante la actividad anterior (c) la validez de la fórmula $P(D) = p^3 \cdot (1 - p)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

e. Elaboran un gráfico de barras que represente la variable aleatoria X (cantidad de éxitos en el experimento).

2. Elaboran gráficos de barras delgadas de la distribución binomial para los siguientes experimentos aleatorios o situaciones interpretables como experimento aleatorio del tipo Bernoulli:

   a. Lanzamiento repetitivo de un chinche ($n = 7$; probabilidad de $p = 0{,}4$ del evento que registra si cae sobre la base).

   b. Un medicamento contra una enfermedad genera en el 70% de los pacientes un mejoramiento. Un médico aplica el medicamento a ocho pacientes.

   c. La final de un campeonato de fútbol se decide por tiro de penales. El entrenador de uno de los equipos entrega la lista de los primeros cinco jugadores que tienen aproximadamente el mismo rendimiento de 80% de éxito en el tiro de penales.

3. Se les presenta el siguiente problema y realizan las actividades:

   Se tienen dos variables aleatorias binomiales, X y Z, en las cuales se cumple que la variable aleatoria X se refiere a 10 repeticiones de un experimento Bernoulli con una probabilidad de 10%, y la variable aleatoria Z está relacionada con un experimento aleatorio Bernoulli con una probabilidad de 40%, que se repite cinco veces.

   a. Elaboran, mediante herramientas tecnológicas, los gráficos de barras que representan las distribuciones de ambas variables aleatorias.

   b. Determinan el valor esperado $E(X)$ y la desviación estándar de ambas variables aleatorias.

   c. Comparan ambas distribuciones refiriéndose a la forma de los histogramas, a los valores esperados $E(X)$ y a las desviaciones estándar σ.

AE 20 Modelar situaciones o fenómenos mediante la distribución binomial.

1. Se les presenta la siguiente situación y llevan a cabo las actividades:

   Una familia tiene seis hijos. La probabilidad de que nazca un niño se estima en 50%. Una variable aleatoria X representa la cantidad de niñas entre los hijos de la familia.

   a. Identifican los valores de los parámetros n y p de la distribución binomial que modela la situación.
   b. Elaboran un gráfico de barras de la distribución binomial, utilizando una calculadora o *software* para determinar las probabilidades $P(X = x_i)$, aplicando la fórmula $P(X = k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$
   c. Determinan la probabilidad de que entre los seis hijos haya cuatro niñas.
   d. Determinan la probabilidad de que entre los seis hijos haya dos niñas como máximo.
   e. Una variable aleatoria Y representa la cantidad de niños entre los hijos de la familia. Formulan el evento de la actividad b mediante la variable aleatoria Y.

2. Se les plantea el siguiente problema y realizan las actividades:

   En una prueba universitaria se evalúan los conocimientos mediante un test del tipo selección múltiple, que consiste en 20 preguntas de cinco alternativas de las cuales una sola es correcta.

   a. Identifican los valores de los parámetros n y p de la distribución binomial que modela la situación.
   b. Determinan el valor esperado $E(X)$ y la desviación estándar σ.
   c. Contestan: ¿Con cuántas respuestas correctas se puede contar si se marcan al azar todas las alternativas?
   d. Para pasar la prueba se requiere como mínimo siete respuestas correctas. Determinan la probabilidad de aprobar la prueba si se adivinan las respuestas. Redondean el resultado a un porcentaje entero.

3. Se les presenta la siguiente situación y responden las preguntas:

El biatlón es una disciplina del deporte de invierno que combina una carrera de esquí de fondo con una competencia de tiro con rifle a cinco blancos. En el tiro con rifle, un atleta tiene una probabilidad de 90% de éxito. ¿Con qué probabilidad…

a. da en todos los blancos?
b. da por lo menos en tres blancos?
c. da en el blanco por primera vez en el tercer tiro?
d. da solamente en los últimos dos blancos?
e. necesita menos de tres tiros hasta dar por primera vez en un blanco?
f. alterna entre dar en el blanco y fracasar?

4. Se les plantea el siguiente problema y realizan las actividades:

Un veterinario receta un medicamento que cura una enfermedad en cuatro de cinco casos, y lo aplica a ocho perros. La situación se modela por una distribución binomial con la variable aleatoria X, que representa los éxitos del medicamento.

a. Explican por qué la distribución binomial permite modelar este problema.
b. Identifican los valores de los parámetros de n y p.
c. Elaboran un histograma que represente la distribución binomial de la variable aleatoria X.
d. Responden: ¿Con qué probabilidad se curan por lo menos seis de los ocho perros?

5. Se les presenta la siguiente situación y llevan a cabo las actividades:

Al regresar de una fiesta a la casa hay un corte de luz. En total oscuridad, Claudia debe sacar, del llavero de cinco llaves, la llave de la puerta principal. Las llaves son parecidas entre ellas y no tienen ninguna marca para reconocerlas. Claudia debe tomar de a una llave para probarlas hasta que encuentre la correcta.

a. Responden: ¿Con qué tipo de experimento aleatorio se puede modelar la situación? Explique su respuesta.
b. La variable aleatoria X representa la cantidad de llaves que se prueba hasta que se encuentra la correcta. Construyen la tabla de las probabilidades de la variable X.

c. Elaboran un gráfico de barras delgadas para la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X.

d. Responden: ¿Con qué probabilidad Claudia…

– encuentra la llave correcta en el segundo intento?
– encuentra la llave correcta antes del cuarto intento?
– encuentra la llave en el cuarto intento?
– encuentra la llave en el último intento?

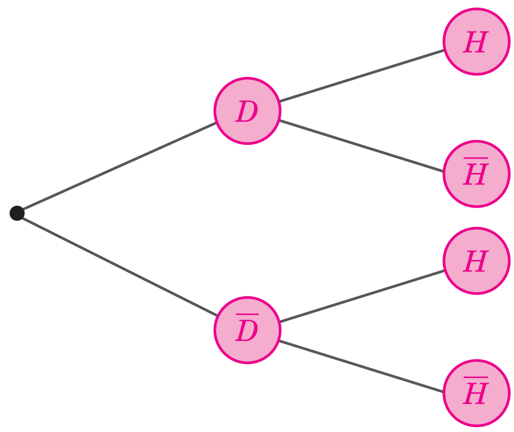
EJEMPLO DE EVALUACIÓN

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
AE 15 Utilizar el concepto de probabilidad condicional en problemas cotidianos o científicos.	> Elaboran árboles de probabilidades de experimentos sin devolución relacionándolos con probabilidades condicionales de forma intuitiva. > Representan tablas de frecuencias de dos características para determinar las probabilidades condicionales. > Resuelven problemas cotidianos o científicos que involucran la aplicación de la probabilidad condicional.

ACTIVIDAD PROPUESTA

Una clínica publicó una estadística sobre sus pacientes. Se representa el resultado en la siguiente tabla. El evento D significa que el paciente tiene diabetes. El evento H significa que el paciente es masculino.

Enfermedad	H	$\overline{H}$
$P(D)$	4 %	1 %
$P(\overline{D})$	56 %	39 %



a. Rotule el árbol de probabilidad con los símbolos $P(D)$, $P(\overline{D})$, $P(H/D)$, $P(\overline{H}/D)$, $P(H/(\overline{D})$ y $P(\overline{H}/\overline{D})$.

b. Determine la probabilidad de que un paciente tenga diabetes.

c. Determine la probabilidad de que un paciente tenga diabetes si es masculino.

d. Determine la probabilidad de que un paciente sea masculino si tiene diabetes.

e. Determine la probabilidad de que un paciente tenga diabetes si es femenino.

f. Determine la probabilidad de que un paciente sea femenino si tiene diabetes.

g. Complete el árbol con las probabilidades determinadas.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Al evaluar, se sugiere considerar los siguientes aspectos:

- Rotula el árbol de probabilidad.
- Interpreta los términos $P(H/D) = P_D(H)$, $P(\overline{H}/D) = P_D(\overline{H})$, $P(H/\overline{D}) = P_{\overline{D}}(\mathrm{H})$ y $P(\overline{H}/\overline{D}) = P_{\overline{D}}(\overline{H})$.
- Transforma los porcentajes en números decimales.
- Elige la operación matemática para determinar las probabilidades condicionales.
- Calcula las probabilidades condicionales.
- Completa el árbol de probabilidades.

2

U4

Bibliografía

BIBLIOGRAFÍA PARA LOS Y LAS DOCENTES

Aguilar, A. (2009). *Álgebra*. México: Pearson Educación.

Alsina, C., Fortuny, J. M. y Burgués, C. (1989). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Araya, R. y Matus, C. (2008). *Buscando un orden para el azar*. Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Ciudad de México: Iberoamericana.

Baum, D., Klein, H. (2008). *XQuadrat 6*. München: Oldenbourg.

Berlanga, R., Bosch, C. y Rivaud, J. (2000). *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*. Ciudad de México: Fondo de Cultura Económica.

Bescherer, C. y Jöckel, S. (2011). *Denkstark 9*. Braunschweig: Westermann.

Bobabdilla A. y Billike, J. (1997). *Apuntes de Cálculo I*. Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Böer, H. (2007). *Mathe live*. Stuttgart: Klett.

Brousseau, G. (1993). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba.

Burger, E. (2011). *Álgebra 1*. California: Holt McDougal.

Canavos, G. C. (1988). *Probabilidad y Estadística*. Ciudad de México: McGraw-Hill.

Cantoral, R. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Ciudad de México: Trillas.

Cedillo, T. (1997). *Calculadoras: Introducción al álgebra*. Ciudad de México: Iberoamericana.

Centeno, J. (1995). *Números decimales*. Madrid: Síntesis.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: Horsori.

Corbalán, F. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Graó.

Dolores, C. (2007). *Matemática educativa*. Madrid: Ediciones Diaz de Santos.

Douglas, G. (1997). *Física. Principios con Aplicaciones*. Ciudad de México: Prentice Hall.

Duhalde, M. E. y González, M. T. (2003). *Encuentros cercanos con la matemática*. Buenos Aires: Aigue.

Elphick, D., Winston, H. et al. (2001). *101 Actividades para implementar los objetivos fundamentales transversales*. Santiago de Chile: Lom.

Filloy, E. (2003). *Matemática educativa*. Ciudad de México: Fondo De Cultura Económica.

Fortuny, J. (1996). *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Graó.

Freudigmann, H. (2009). *Lambacher Schweizer: Mathematik für Gymnasien*. Stuttgart: Klett.

Goñi, J. M. (2000). *El currículo de matemática en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Graó.

Govinden, L. (1998). *Introducción a la estadística*. Ciudad de México: McGraw-Hill.

Guedj, D. (2000). *El teorema del Loro. Novela para aprender matemáticas*. Barcelona: Anagrama.

Hong, T., Riddington, M. y Grier, M. (2008). *New Mathematics Counts*. Singapore: Marshall Cavendish Internacional.

Jiménez, M., Matus, C., Moya, M. y Muñoz, M. (2009). *Unidad de Álgebra y Funciones*. Santiago de Chile: Enlaces.

Joshua, S. y Dupin, J. (2005). *Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática*. Buenos Aires: Colihue.

Lehmann, C. (2001). *Álgebra*. Ciudad de México: Limusa.

Miller, C., Heeren, V., Hornsby, E. (1999). *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*. Ciudad de México: Pearson Educación.

Ministerio de Educación. (2004). *Matemática. Programa de Estudio 3° Medio*. Santiago de Chile: Autor.

Ministerio de Educación. (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios Matemática*. Santiago de Chile: Autor.

Ministerio de Educación. (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Números y Operaciones*. Santiago de Chile: Autor.

Ministerio de Educación. (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Álgebra*. Santiago de Chile: Autor.

Ministerio de Educación. (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Geometría*. Santiago de Chile: Autor.

Ministerio de Educación. (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Datos y Azar*. Santiago de Chile: Autor.

Miranda, H., Moya, M. (2008). *Álgebra. El poder generalizador de los símbolos.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Oteíza, F., Zamorano, L. y Baeza, O. (2008). *La geometría de los modelos a escala. Semejanza de figuras planas.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Oteíza, F., Zamorano, L. y Baeza, O. (2008). *La circunferencia y un par de rectas en el plano. Ángulos en el plano.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Planas, N. y Alsina, Á. (2005). *Educación matemática y buenas prácticas.* Barcelona: Graó.

Luelmo, M. J. (1997). *Las matemáticas en el entorno.* Barcelona: Graó.

Rodríguez, J. (1997). *Razonamiento matemático.* Ciudad de México: Internacional Thompson.

Rodríguez, G. y Escalante, M. (2008). *Unidad función cuadrática y raíz cuadrada.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Saavedra, E. (2005). *Contenidos básicos de estadística y probabilidad. Colección ciencias.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Santander, R. (2008). *Álgebra I.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Schätz, U. y Eisentraut, F. (2009). *Mathematik für Gymnasien.* Bamberg: C.C. Buchner.

Serrano, J. M. (1997). *Aprendizaje cooperativo en matemática.* Murcia: Universidad de Murcia.

Spiegel, M. y Moyer, R. (2006). *Álgebra superior.* Ciudad de México: McGraw-Hill.

Tahan, M. (2002). *El hombre que calculaba.* Ciudad de México: Limusa.

Wai-Keung, C. y Kam-Yuk, L. (2010). *New Way: Mathematics & Statistics.* Hong Kong: Times Publishing.

BIBLIOGRAFÍA PARA LOS Y LAS ESTUDIANTES

Aguilar, A. (2008). *Matemáticas simplificadas: aritmética, álgebra, geometría analítica, cálculo diferencial, cálculo integral.* Ciudad de México: Pearson Educación.

Araya, R. y Matus, C. (2008). *Buscando un orden para el azar.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Baeza, O. (2008). *Funciones potencia, exponencial y logaritmo.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Baum, D. y Klein, H. (2008). *XQuadrat 6.* München: Oldenbourg.

Berlanga, R., Bosch, C. y Rivaud, J. (2000). *Las matemáticas, perejil de todas las salsas.* Ciudad de México: Fondo de Cultura Económica.

Bescherer, C. y Jöckel, S. (2011). *Denkstark 9.* Braunschweig: Westermann.

Böer, H. et al. (2007). *Mathe live.* Stuttgart: Klett.

Burger, E. (2011). *Álgebra 1.* California: Holt McDougal

Cantoral, R. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático.* Ciudad de México: Trillas.

Filloy, E. (2003). *Matemática educativa.* Ciudad de México: Fondo De Cultura Económica.

Freudigmann, H. (2009). *Lambacher Schweizer: Mathematik für Gymnasien.* Stuttgart: Klett.

García, G. (1998). *Heurística geométrica.* Ciudad de México: Limusa.

Govinden, L. (1998). *Introducción a la estadística.* Ciudad de México: McGraw-Hill.

Hong, T., Riddington, M. y Grier, M. (2008). *New Mathematics Counts.* Singapore: Marshall Cavendish Internacional.

Magnus, H. (1997). *El Diablo de los números.* Madrid: Siruela.

Miranda, H. y Moya, M. (2008). *Álgebra. El poder generalizador de los símbolos.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Oteíza, F., Zamorano, L. y Baeza,O. (2008). *La geometría de los modelos a escala. Semejanza de figuras planas.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Oteíza, F., Zamorano, L. y Baeza, O. (2008). *La circunferencia y un par de rectas en el plano. Ángulos en el plano.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Rodríguez, G. y Escalante, M. (2008). *Unidad función cuadrática y raíz cuadrada.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Schätz, U., Eisentraut, F. (2009). *Mathematik für Gymnasien.* Bamberg: C.C. Buchner.

Tahan, M. (2002). *El hombre que calculaba.* Ciudad de México: Limusa.

Wai-Keung, C. y Kam-Yuk, L. (2010). *New Way: Mathematics & Statistics.* Hong Kong: Times Publishing.

PÁGINAS Y RECURSOS DIGITALES INTERACTIVOS

(Los sitios web y enlaces sugeridos en este Programa fueron revisados en noviembre de 2014. Es importante tener en cuenta que para acceder a los enlaces puede ser necesario utilizar un navegador distinto al que usa frecuentemente. Además, para la correcta ejecución de algunos recursos, se recomienda actualizar la versión Flash y Java).

Universidad de UTAH: http://nlvm.usu.edu/es/nav

Proyecto Descartes, España: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/aplicaciones.php

Eduteka, Colombia: www.eduteka.org

http://www.disfrutalasmatematicas.com/graficos/grafico-funciones.php

http://fooplot.com/?lang=es#W3sidHlwZSI6MCwiZXEiOiJ4XjIiLCJjb2xvciI6IiMwMDAwMDAifSx7InR5cGUiOjEwMDB9XQ--

http://www.disfrutalasmatematicas.com/datos/quincunce-explicada.html o http://www.geogebratube.org/student/m45700.html

www.ugr.es/~jsalinas/herramar.htm

www.virtual.uptc.edu.co

www.es.easycalculation.com/statistics/binomial-distribution.php

Software: Graphmática, Geogebra, Excel con los macros estadísticos.

BIBLIOGRAFÍA CRA

A continuación se detallan publicaciones que se pueden encontrar en las Bibliotecas CRA (Centro de Recursos para el Aprendizaje) a lo largo del país, las cuales pueden ser utilizadas en las distintas unidades.

Berlanga, R., Bosch y C. y Rivaud, J. (2000). *Las matemáticas, perejil de todas las salsas.* Ciudad de México: Fondo de Cultura Económica.

Corbalán, F. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana.* Barcelona: Graó.

Galdós, L. (1995). *Consultor matemático.* Madrid: Cultural de Ediciones.

Gardner, M. (2007). *Los acertijos de Sam Loyd.* Madrid: Zugarto.

Guedj, D. (1998). *El imperio de las cifras y los números.* Barcelona: Ediciones B.

Heber, J. (2005). *Olimpíadas matemáticas: el arte de resolver problemas.* Ciudad de México: Los libros de El Nacional.

Jiménez, D. (2006). *Matemáticos que cambiaron al mundo.* Ciudad de México: Los libros de El Nacional.

Nomdedeu, X. (2000). *Mujeres, manzanas y matemáticas, entretejidas.* Madrid: Nivola Libros.

Pérez-Ruiz, M. (2002). *Pitágoras. El misterio de la voz interior. Una investigación de arqueología filosófica.* Barcelona: Océano.

Serrano, E. (2007). *¡Ojalá no hubiera números!* Madrid: Nivola Libros.

Tahan, M. (2006). *Matemática curiosa y divertida.* Buenos Aires: Pluma y Papel.

Vancleave, J. (1997). *Matemáticas para niños y jóvenes.* Ciudad de México: Limusa.

Anexos

ANEXO 1

USO FLEXIBLE DE OTROS INSTRUMENTOS CURRICULARES

Existe un conjunto de instrumentos curriculares que los y las docentes pueden utilizar de manera conjunta y complementaria con el Programa de Estudio. Estos pueden ser usados de manera flexible para apoyar el diseño e implementación de estrategias didácticas y para evaluar los aprendizajes.

Orientan sobre la progresión típica de los aprendizajes

MAPAS DE PROGRESO

Ofrecen un marco global para conocer cómo progresan los aprendizajes clave a lo largo de la escolaridad.

Pueden usarse, entre otras posibilidades, como un apoyo para abordar la diversidad de aprendizajes que se detectan al interior de un curso, ya que permiten:

› Caracterizar los distintos niveles de aprendizaje en los que se encuentran las y los estudiantes de un curso.
› Reconocer de qué manera deben continuar progresando los aprendizajes de los grupos de estudiantes que se encuentran en estos distintos niveles.

Apoyan el trabajo didáctico en el aula

TEXTOS ESCOLARES

Desarrollan los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios para apoyar el trabajo de los las y los estudiantes en el aula y fuera de ella, y les entregan explicaciones y actividades para favorecer su aprendizaje y su autoevaluación.

Las y los docentes pueden enriquecer la implementación del currículum haciendo también uso de los recursos entregados por el Mineduc por medio de:

› Los Centros de Recursos para el Aprendizaje (CRA), que ofrecen materiales impresos, audiovisuales y digitales.
› El Programa Enlaces, que pone a disposición de los establecimiento diversas herramientas tecnológicas.

ANEXO 2

OBJETIVOS FUNDAMENTALES POR SEMESTRE Y UNIDAD

OBJETIVO FUNDAMENTAL	Semestre 1		Semestre 2	
	U1	U2	U3	U4
1. Comprender que los números complejos constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números reales, y reconocer su relación con los números naturales, números enteros, números racionales y números reales.	●			
2. Aplicar procedimientos de cálculo de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de números complejos, formular conjeturas acerca de esos cálculos y demostrar algunas de sus propiedades.	●			
3. Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean funciones cuadráticas.		●		
4. Comprender que toda ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene raíces en el conjunto de los números complejos.		●		
5. Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.			●	
6. Establecer la relación entre la representación gráfica de rectas en el plano cartesiano y los sistemas de ecuaciones a que dan origen.			●	
7. Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.				●
8. Comparar el comportamiento de una variable aleatoria en forma teórica y experimental, considerando diversas situaciones o fenómenos.				●
9. Aplicar el concepto de modelo probabilístico para describir resultados de experimentos binomiales.				●
10. Comprender el concepto de probabilidad condicional y aplicarlo en diversas situaciones que involucren el cálculo de probabilidades.				●
11. Formular conjeturas, verificar para casos particulares y demostrar proposiciones utilizando conceptos, propiedades o relaciones de los diversos temas tratados en el nivel, y utilizar heurísticas para resolver problemas combinando, modificando o generalizando estrategias conocidas, fomentando la actitud reflexiva y crítica en la resolución de problemas.				●

ANEXO 3

CONTENIDOS MÍNIMOS OBLIGATORIOS POR SEMESTRE Y UNIDAD

CONTENIDOS MÍNIMOS OBLIGATORIOS	Semestre 1		Semestre 2	
	U1	U2	U3	U4
NÚMEROS				
1. Identificación de situaciones que muestran la necesidad de ampliar los números reales a los números complejos, caracterización de estos últimos y de los problemas que permiten resolver.	●			
2. Identificación de la unidad imaginaria como solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ y su utilización para expresar raíces cuadradas de números reales negativos.	●			
3. Extensión de las nociones de adición, sustracción, multiplicación, división y potencia de los números reales a los números complejos y de procedimientos de cálculo de estas operaciones.	●			
4. Formulación de conjeturas y demostración de propiedades relativas a los números complejos, en situaciones tales como producto entre un número complejo y su conjugado, operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y elevación a potencia con exponente racional de números complejos.	●			
ÁLGEBRA				
5. Representación y análisis gráfico de la función f(x) = $ax^2 + bx + c$, para distintos valores de a, b y c. Discusión de las condiciones que debe cumplir la función cuadrática para que su gráfica intersecte el eje X (ceros de la función). Uso de *software* para el análisis de las variaciones de la gráfica de la función cuadrática a partir de la modificación de los parámetros.		●		
6. Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita por completación de cuadrados, por factorización o por inspección, con raíces reales o complejas. Interpretación de las soluciones y determinación de su pertenencia al conjunto de los números reales o complejos.		●		
7. Deducción de la fórmula de la ecuación general de segundo grado y discusión de sus raíces y su relación con la función cuadrática.		●		
8. Resolución de problemas asociados a ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Análisis de la existencia y pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto en que se plantea el problema.		●		
9. Modelamiento de situaciones o fenómenos asociados a funciones cuadráticas.		●		

CONTENIDOS MÍNIMOS OBLIGATORIOS	Semestre 1		Semestre 2	
	U1	U2	U3	U4
GEOMETRÍA				
10. Deducción de la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano y su aplicación al cálculo de magnitudes lineales en figuras planas.			●	
11. Descripción de la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar; uso de un procesador geométrico para visualizar las relaciones que se producen al desplazar figuras homotéticas en el plano.			●	
12. Determinación de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.			●	
13. Deducción e interpretación de la pendiente y del intercepto de una recta con el eje de las ordenadas y la relación de estos valores con las distintas formas de la ecuación de la recta.			●	
14. Análisis gráfico de las soluciones de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y su interpretación a partir de las posiciones relativas de rectas en el plano: condiciones analíticas del paralelismo, coincidencia y de la intersección entre rectas.			●	
DATOS Y AZAR				
15. Utilización de la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta y establecimiento de la relación con la función de distribución.				●
16. Explorar la relación entre la distribución teórica de una variable aleatoria y la correspondiente gráfica de frecuencias en experimentos aleatorios discretos, haciendo uso de simulaciones digitales.				●
17. Aplicación e interpretación gráfica de los conceptos de valor esperado, varianza y desviación típica o estándar de una variable aleatoria discreta.				●
18. Determinación de la distribución de una variable aleatoria discreta en contextos diversos y de la media, varianza y desviación típica a partir de esas distribuciones.				●
19. Uso del modelo binomial para analizar situaciones o experimentos cuyos resultados son dicotómicos: cara o sello, éxito o fracaso, cero o uno.				●
20. Resolución de problemas, en diversos contextos, que implican el cálculo de probabilidades condicionales y sus propiedades.				●

ANEXO 4

RELACIÓN ENTRE APRENDIZAJES ESPERADOS, OBJETIVOS FUNDAMENTALES (OF) Y CONTENIDOS MÍNIMOS OBLIGATORIOS (CMO).

SEMESTRE 1

APRENDIZAJES ESPERADOS		OF	CMO
UNIDAD 1			
AE 01	Reconocer los números complejos como una extensión del campo numérico de los números reales.	1	1
AE 02	Utilizar los números complejos para resolver problemas que no admiten solución en los números reales.	1	2
AE 03	Resolver problemas aplicando las cuatro operaciones con números complejos.	2	3, 4
AE 04	Formular y justificar conjeturas que suponen generalizaciones o predicciones de números complejos y sus propiedades.	2	4
AE 05	Argumentar la validez de los procedimientos o conjeturas referentes a números complejos y sus propiedades.	2	4
AE 06	Representar un número complejo de forma polar y calcular la potencia, con exponente racional, de un número complejo.	2	4
UNIDAD 2			
AE 07	Reconocer el tipo de situaciones que modelan las funciones cuadráticas.	3	5
AE 08	Representar la función cuadrática mediante tablas y gráficos, y algebraicamente.	3	7
AE 09	Modelar situaciones reales por medio de la función cuadrática para resolver problemas relativos a situaciones de cambio cuadrático.	3	8, 9
AE 10	Reconocer que todas las ecuaciones de segundo grado con una incógnita tienen soluciones en el conjunto de los números complejos.	4	6

SEMESTRE 2

APRENDIZAJES ESPERADOS		OF	CMO
UNIDAD 3			
AE 11	Relacionar la geometría elemental con la geometría cartesiana.	5	10, 12, 13
AE 12	Describir la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar.	5	11
AE 13	Relacionar sistemas 2x2 de ecuaciones lineales con pares de rectas en el plano cartesiano para representar gráficamente las soluciones.	6	14
AE 14	Resolver problemas de sistemas 2x2 de ecuaciones lineales e interpretar la solución en función del contexto cotidiano.		
UNIDAD 4			
AE 15	Utilizar el concepto de probabilidad condicional en problemas cotidianos o científicos.	10	20
AE 16	Aplicar el concepto de variable aleatoria discreta para analizar distribuciones de probabilidades en contextos diversos.	7	15
AE 17	Representar funciones de probabilidad y distribuciones de una variable aleatoria discreta.	7	17, 18
AE 18	Comparar el comportamiento de una variable aleatoria en forma teórica y experimental, considerando diversas situaciones o fenómenos.	8	16
AE 19	Desarrollar la distribución binomial para experimentos tales como cara o sello y situaciones de éxito o fracaso.	9, 11	19
AE 20	Modelar situaciones o fenómenos mediante la distribución binomial.	9, 11	19