Matemática

Programa de Estudio
Segundo Año Medio

Ministerio de Educación

2

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

IMPORTANTE

En el presente documento, se utilizan de manera inclusiva los términos como "el docente", "el estudiante", "el profesor", "el alumno", "el compañero" y sus respectivos plurales (así como otras palabras equivalentes en el contexto educativo); es decir, se refieren a hombres y mujeres.

Esta opción obedece a que no existe acuerdo universal respecto de cómo evitar la discriminación de géneros en el idioma español, salvo usando "o/a", "los/las" y otras similares para referirse a ambos sexos en conjunto, y ese tipo de fórmulas supone una saturación gráfica que puede dificultar la comprensión de la lectura.

Matemática

Programa de Estudio
Segundo Año Medio

Ministerio de Educación

Estimados profesores y profesoras:

La entrega de nuevos programas es una buena ocasión para reflexionar acerca de los desafíos que enfrentamos hoy como educadores en nuestro país.

La escuela tiene por objeto permitir a todos los niños de Chile acceder a una vida plena, ayudándolos a alcanzar un desarrollo integral que comprende los aspectos espiritual, ético, moral, afectivo, intelectual, artístico y físico. Es decir, se aspira a lograr un conjunto de aprendizajes cognitivos y no cognitivos que permitan a los alumnos enfrentar su vida de la mejor forma posible.

Los presentes Programas de Estudio, aprobados por el Consejo Nacional de Educación, buscan efectivamente abrir el mundo a nuestros niños, con un fuerte énfasis en las herramientas clave, como la lectura, la escritura y el razonamiento matemático. El manejo de estas habilidades de forma transversal a todos los ámbitos, escolares y no escolares, contribuye directamente a disminuir las brechas existentes y garantizan a los alumnos una trayectoria de aprendizaje continuo más allá de la escuela.

Asimismo, el acceso a la comprensión de su pasado y su presente, y del mundo que los rodea, constituye el fundamento para reafirmar la confianza en sí mismos, actuar de acuerdo a valores y normas de convivencia cívica, conocer y respetar deberes y derechos, asumir compromisos y diseñar proyectos de vida que impliquen actuar responsablemente sobre su entorno social y natural. Los presentes Programas de Estudio son la concreción de estas ideas y se enfocan a su logro.

Sabemos que incrementar el aprendizaje de todos nuestros alumnos requiere mucho trabajo; llamamos a nuestros profesores a renovar su compromiso con esta tarea y también a enseñar a sus estudiantes que el esfuerzo personal, realizado en forma sostenida y persistente, es la mejor garantía para lograr éxito en lo que nos proponemos. Pedimos a los alumnos que estudien con intensidad, dedicación, ganas de aprender y de formarse hacia el futuro. A los padres y apoderados los animamos a acompañar a sus hijos en las actividades escolares, a comprometerse con su establecimiento educacional y a exigir un buen nivel de enseñaza. Estamos convencidos de que una educación de verdad se juega en la sala de clases y con el compromiso de todos los actores del sistema escolar.

A todos los invitamos a estudiar y conocer en profundidad estos Programas de Estudio, y a involucrarse de forma optimista en las tareas que estos proponen. Con el apoyo de ustedes, estamos seguros de lograr una educación de mayor calidad y equidad para todos nuestros niños.

Felipe Bulnes Serrano
Ministro de Educación de Chile

Matemática
Programa de Estudio para Segundo Año Medio
Unidad de Currículum y Evaluación

ISBN 978-956-292-327-9

Ministerio de Educación, República de Chile
Alameda 1371, Santiago
Primera Edición: 2011

Índice

Presentación

El programa es una propuesta para lograr los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios

El programa de estudio ofrece una propuesta para organizar y orientar el trabajo pedagógico del año escolar. Esta propuesta pretende promover el logro de los Objetivos Fundamentales (OF) y el desarrollo de los Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) que define el Marco Curricular[1].

La ley dispone que cada establecimiento puede elaborar sus propios programas de estudio, previa aprobación de los mismos por parte del Mineduc. El presente programa constituye una propuesta para aquellos establecimientos que no cuentan con programas propios.

Los principales componentes que conforman la propuesta del programa son:

- una especificación de los aprendizajes que se deben lograr para alcanzar los OF y los CMO del Marco Curricular, lo que se expresa a través de los Aprendizajes Esperados[2]
- una organización temporal de estos aprendizajes en semestres y unidades
- una propuesta de actividades de aprendizaje y de evaluación, a modo de sugerencia

Además, se presenta un conjunto de elementos para orientar el trabajo pedagógico que se realiza a partir del programa y para promover el logro de los objetivos que este propone.

Este programa de estudio incluye:

- **Nociones básicas.** Esta sección presenta conceptos fundamentales que están en la base del Marco Curricular y, a la vez, ofrece una visión general acerca de la función de los Mapas de Progreso

- **Consideraciones generales para implementar el programa.** Consisten en orientaciones relevantes para trabajar con el programa y organizar el trabajo en torno a él

1 Decretos supremos 254 y 256 de 2009

2 En algunos casos, estos aprendizajes están formulados en los mismos términos que algunos de los OF del Marco Curricular. Esto ocurre cuando esos OF se pueden desarrollar íntegramente en una misma unidad de tiempo, sin que sea necesario su desglose en definiciones más específicas.

- **Propósitos, habilidades y orientaciones didácticas.** Esta sección presenta sintéticamente los propósitos y sentidos sobre los que se articulan los aprendizajes del sector y las habilidades a desarrollar. También entrega algunas orientaciones pedagógicas importantes para implementar el programa en el sector

- **Visión global del año.** Presenta todos los Aprendizajes Esperados que se debe desarrollar durante el año, organizados de acuerdo a unidades

- **Unidades.** Junto con especificar los Aprendizajes Esperados propios de la unidad, incluyen indicadores de evaluación y sugerencias de actividades que apoyan y orientan el trabajo destinado a promover estos aprendizajes[3]

- **Instrumentos y ejemplos de evaluación.** Ilustran formas de apreciar el logro de los Aprendizajes Esperados y presentan diversas estrategias que pueden usarse para este fin

- **Material de apoyo sugerido.** Se trata de recursos bibliográficos y electrónicos que pueden emplearse para promover los aprendizajes del sector; se distingue entre los que sirven al docente y los destinados a los estudiantes

---

3 Relaciones interdisciplinarias. En algunos casos las actividades relacionan dos o más sectores y se simbolizan con R

Nociones Básicas

Aprendizajes como integración de conocimientos, habilidades y actitudes

Habilidades, conocimientos y actitudes...

Los aprendizajes que promueven el Marco Curricular y los programas de estudio apuntan a un desarrollo integral de los estudiantes. Para tales efectos, esos aprendizajes involucran tanto los conocimientos propios de la disciplina como las habilidades y actitudes.

...movilizados para enfrentar diversas situaciones y desafíos...

Se busca que los estudiantes pongan en juego estos conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar diversos desafíos, tanto en el contexto del sector de aprendizaje como al desenvolverse en su entorno. Esto supone orientarlos hacia el logro de competencias, entendidas como la movilización de dichos elementos para realizar de manera efectiva una acción determinada.

...y que se desarrollan de manera integrada

Se trata una noción de aprendizaje de acuerdo con la cual los conocimientos, las habilidades y las actitudes se desarrollan de manera integrada y, a la vez, se enriquecen y potencian de forma recíproca.

Deben promoverse de manera sistemática

Las habilidades, los conocimientos y las actitudes no se adquieren espontáneamente al estudiar las disciplinas. Necesitan promoverse de manera metódica y estar explícitas en los propósitos que articulan el trabajo de los docentes.

HABILIDADES

Son importantes, porque...

Son fundamentales en el actual contexto social

...el aprendizaje involucra no solo el saber, sino también el saber hacer. Por otra parte, la continua expansión y la creciente complejidad del conocimiento demandan cada vez más capacidades de pensamiento que permitan, entre otros aspectos, usar la información de manera apropiada y rigurosa, examinar críticamente las diversas fuentes de información disponibles y adquirir y generar nuevos conocimientos.

Esta situación hace relevante la promoción de diversas habilidades, como resolver problemas, formular conjeturas, realizar cálculos en forma mental y escrita y verificar proposiciones simples, entre otras.

Se deben desarrollar de manera integrada, porque...

Permiten poner en juego los conocimientos

...sin esas habilidades, los conocimientos y conceptos que puedan adquirir los alumnos resultan elementos inertes; es decir, elementos que no pueden poner en juego para comprender y enfrentar las diversas situaciones a las que se ven expuestos.

CONOCIMIENTOS

Son importantes, porque…

…los conceptos de las disciplinas o sectores de aprendizaje enriquecen la comprensión de los estudiantes sobre los fenómenos que les toca enfrentar. Les permiten relacionarse con el entorno, utilizando nociones complejas y profundas que complementan, de manera crucial, el saber que han obtenido por medio del sentido común y la experiencia cotidiana. Además, estos conceptos son fundamentales para que los alumnos construyan nuevos aprendizajes.

Enriquecen la comprensión y la relación con el entorno

Por ejemplo, si se observa una información en un diario que contenga datos representados en tablas o gráficos, el estudiante utiliza sus conocimientos sobre estadística para interpretar a esa información. Los conocimientos previos le capacitan para predecir sobre lo que va a leer para luego verificar sus predicciones en la medida que entiende la información y así construir este nuevo conocimiento.

Se deben desarrollar de manera integrada, porque…

…son una condición para el progreso de las habilidades. Ellas no se desarrollan en un vacío, sino sobre la base de ciertos conceptos o conocimientos.

Son una base para el desarrollo de habilidades

ACTITUDES

Son importantes, porque…

…los aprendizajes no involucran únicamente la dimensión cognitiva. Siempre están asociados con las actitudes y disposiciones de los alumnos. Entre los propósitos establecidos para la educación, se contempla el desarrollo en los ámbitos personal, social, ético y ciudadano. Ellos incluyen aspectos de carácter afectivo y, a la vez, ciertas disposiciones.

Están involucradas en los propósitos formativos de la educación

A modo de ejemplo, los aprendizajes de Matemática involucran actitudes como perseverancia, rigor, flexibilidad y originalidad al resolver problemas matemáticos, trabajo en equipo e iniciativa personal en la resolución de problemas en contextos diversos y respeto por ideas distintas a las propias.

Se deben enseñar de manera integrada, porque…

…en muchos casos requieren de los conocimientos y las habilidades para su desarrollo. Esos conocimientos y habilidades entregan herramientas para elaborar juicios informados, analizar críticamente diversas circunstancias y contrastar criterios y decisiones, entre otros aspectos involucrados en este proceso.

Son enriquecidas por los conocimientos y las habilidades

Orientan la forma de usar los conocimientos y las habilidades

A la vez, las actitudes orientan el sentido y el uso que cada alumno otorgue a los conocimientos y las habilidades adquiridos. Son, por lo tanto, un antecedente necesario para usar constructivamente estos elementos.

Objetivos Fundamentales Transversales (OFT)

Son propósitos generales definidos en el currículum…

Son aprendizajes que tienen un carácter comprensivo y general, y apuntan al desarrollo personal, ético, social e intelectual de los estudiantes. Forman parte constitutiva del currículum nacional y, por lo tanto, los establecimientos deben asumir la tarea de promover su logro.

…que deben promoverse en toda la experiencia escolar

Los OFT no se logran a través de un sector de aprendizaje en particular; conseguirlos depende del conjunto del currículum. Deben promoverse a través de las diversas disciplinas y en las distintas dimensiones del quehacer educativo (por ejemplo, por medio del proyecto educativo institucional, la práctica docente, el clima organizacional, la disciplina o las ceremonias escolares).

Integran conocimientos, habilidades y actitudes

No se trata de objetivos que incluyan únicamente actitudes y valores. Supone integrar esos aspectos con el desarrollo de conocimientos y habilidades.

Se organizan en una matriz común para educación básica y media

A partir de la actualización al Marco Curricular realizada el año 2009, estos objetivos se organizaron bajo un esquema común para la Educación Básica y la Educación Media. De acuerdo con este esquema, los Objetivos Fundamentales Transversales se agrupan en cinco ámbitos: crecimiento y autoafirmación personal, desarrollo del pensamiento, formación ética, la persona y su entorno y tecnologías de la información y la comunicación.

Mapas de Progreso

Son descripciones generales que señalan cómo progresan habitualmente los aprendizajes en las áreas clave de un sector determinado. Se trata de formulaciones sintéticas que se centran en los aspectos esenciales de cada sector. A partir de esto, ofrecen una visión panorámica sobre la progresión del aprendizaje en los doce años de escolaridad[4].

Describen sintéticamente cómo progresa el aprendizaje...

Los Mapas de Progreso no establecen aprendizajes adicionales a los definidos en el Marco Curricular y los programas de estudio. El avance que describen expresa de manera más gruesa y sintética los aprendizajes que esos dos instrumentos establecen y, por lo tanto, se inscribe dentro de lo que se plantea en ellos. Su particularidad consiste en que entregan una visión de conjunto sobre la progresión esperada en todo el sector de aprendizaje.

...de manera congruente con el Marco Curricular y los programas de estudio

¿Qué utilidad tienen los Mapas de Progreso para el trabajo de los docentes?

Pueden ser un apoyo importante para definir objetivos adecuados y para evaluar (ver las Orientaciones para Planificar y las Orientaciones para Evaluar que se presentan en el programa).

Sirven de apoyo para planificar y evaluar...

Además, son un referente útil para atender a la diversidad de estudiantes dentro del aula:

- permiten más que simplemente constatar que existen distintos niveles de aprendizaje dentro de un mismo curso. Si se usan para analizar los desempeños de los estudiantes, ayudan a caracterizar e identificar con mayor precisión en qué consisten esas diferencias
- la progresión que describen permite reconocer cómo orientar los aprendizajes de los distintos grupos del mismo curso; es decir, de aquellos que no han conseguido el nivel esperado y de aquellos que ya lo alcanzaron o lo superaron
- expresan el progreso del aprendizaje en un área clave del sector, de manera sintética y alineada con el Marco Curricular

...y para atender la diversidad al interior del curso

4 Los Mapas de Progreso describen en siete niveles el crecimiento habitual del aprendizaje de los estudiantes en un ámbito o eje del sector. Cada uno de estos niveles presenta una expectativa de aprendizaje correspondiente a dos años de escolaridad. Por ejemplo, el Nivel 1 corresponde al logro que se espera para la mayoría de los niños y niñas al término de 2º básico; el Nivel 2 corresponde al término de 4º básico, y así sucesivamente. El Nivel 7 describe el aprendizaje de un alumno o alumna que, al egresar de la Educación Media, es "sobresaliente", es decir, va más allá de la expectativa para IV medio que describe el Nivel 6 en cada mapa.

Relación entre Mapa de Progreso, Programa de Estudio y Marco Curricular

MARCO CURRICULAR
Prescribe los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos obligatorios que todos los estudiantes deben lograr.

Ejemplo:
Objetivo Fundamental II medio
Utilizar los números reales en la resolución de problemas, ubicarlos en la recta numérica, demostrar algunas de sus propiedades y realizar aproximaciones.
Contenido Mínimo Obligatorio
Aproximación del valor de un número irracional por defecto, por exceso y por redondeo.

PROGRAMA DE ESTUDIO
Orienta la labor pedagógica, estableciendo Aprendizajes Esperados que dan cuenta de los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos, y los organiza temporalmente a través de unidades.

Ejemplo:
Aprendizaje Esperado II medio
Describir las características propias de una población y los factores que la regulan.

MAPA DE PROGRESO
Entrega una visión sintética del progreso del aprendizaje en un área clave del sector, y se ajusta a las expectativas del Marco Curricular.

Ejemplo:
Mapa de Progreso Números y Operaciones
Nivel 7 Comprende los diferentes conjuntos...
Nivel 6 Reconoce los números complejos como...
Nivel 5 Reconoce a los números racionales como un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no admiten solución en los enteros, a los irracionales como un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no admiten solución en los racionales, y a los reales como la unión entre racionales e irracionales. Interpreta potencias de base racional y exponente racional, raíces enésimas y logaritmos; establece relaciones entre ellos y los utiliza para resolver diversos problemas. Realiza operatoria con números reales, calcula potencias, raíces y logaritmos y los aplica en diversos contextos. Resuelve problemas, utilizando estrategias que implican descomponer un problema o situaciones propuestas en partes o subproblemas. Argumenta sus estrategias o procedimientos y utiliza ejemplos y contraejemplos para verificar la validez o falsedad de conjeturas.
Nivel 4 Reconoce a los números enteros como...
Nivel 3 Reconoce que los números naturales...
Nivel 2 Utiliza los números naturales hasta 1.000.000...
Nivel 1 Utiliza los números naturales hasta 1.000...

Consideraciones Generales para Implementar el Programa

Las orientaciones que se presentan a continuación destacan algunos elementos relevantes al momento de implementar el programa. Algunas de estas orientaciones se vinculan estrechamente con algunos de los OFT contemplados en el currículum.

La lectura, la escritura y la comunicación oral deben promoverse en los distintos sectores de aprendizaje

Uso del lenguaje

Los docentes deben promover el ejercicio de la comunicación oral, la lectura y la escritura como parte constitutiva del trabajo pedagógico correspondiente a cada sector de aprendizaje.

Esto se justifica, porque las habilidades de comunicación son herramientas fundamentales que los estudiantes deben emplear para alcanzar los aprendizajes propios de cada sector. Se trata de habilidades que no se desarrollan únicamente en el contexto del sector Lenguaje y Comunicación, sino que se consolidan a través del ejercicio en diversos espacios y en torno a distintos temas y, por lo tanto, involucran los otros sectores de aprendizaje del currículum.

Estas habilidades se pueden promover de diversas formas

Al momento de recurrir a la lectura, la escritura y la comunicación oral, los docentes deben procurar:

LECTURA

- la lectura de distintos tipos de textos relevantes para el sector (textos informativos propios del sector, textos periodísticos y narrativos, tablas y gráficos)
- la lectura de textos de creciente complejidad en los que se utilicen conceptos especializados del sector
- la identificación de las ideas principales y la localización de información relevante
- la realización de resúmenes y la síntesis de las ideas y argumentos presentados en los textos
- la búsqueda de información en fuentes escritas, discriminándola y seleccionándola de acuerdo a su pertinencia
- la comprensión y el dominio de nuevos conceptos y palabras

ESCRITURA

- la escritura de textos de diversa extensión y complejidad (por ejemplo, reportes, ensayos, descripciones, respuestas breves)
- la organización y presentación de información a través de esquemas o tablas
- la presentación de las ideas de una manera coherente y clara
- el uso apropiado del vocabulario en los textos escritos
- el uso correcto de la gramática y de la ortografía

COMUNICACIÓN ORAL

- la capacidad de exponer ante otras personas
- la expresión de ideas y conocimientos de manera organizada
- el desarrollo de la argumentación al formular ideas y opiniones
- el uso del lenguaje con niveles crecientes de precisión, incorporando los conceptos propios del sector
- el planteamiento de preguntas para expresar dudas e inquietudes y para superar dificultades de comprensión
- la disposición para escuchar información de manera oral, manteniendo la atención durante el tiempo requerido
- la interacción con otras personas para intercambiar ideas, analizar información y elaborar conexiones en relación con un tema en particular, compartir puntos de vista y lograr acuerdos

Uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs)

Debe impulsarse el uso de las TICs a través de los sectores de aprendizaje

Se puede recurrir a diversas formas de utilización de estas tecnologías

El desarrollo de las capacidades para utilizar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs) está contemplado de manera explícita como uno de los Objetivos Fundamentales Transversales del Marco Curricular. Esto demanda que el dominio y uso de estas tecnologías se promueva de manera integrada al trabajo que se realiza al interior de los sectores de aprendizaje. Para esto, se debe procurar que la labor de los estudiantes incluya el uso de las TICs para:

- buscar, acceder y recolectar información en páginas web u otras fuentes, y seleccionar esta información, examinando críticamente su relevancia y calidad
- procesar y organizar datos, utilizando plantillas de cálculo, y manipular la información sistematizada en ellas para identificar tendencias, regularidades y patrones relativos a los fenómenos estudiados en el sector
- desarrollar y presentar información a través del uso de procesadores de texto, plantillas de presentación (power point) y herramientas y aplicaciones de imagen, audio y video
- intercambiar información a través de las herramientas que ofrece internet, como correo electrónico, chat, espacios interactivos en sitios web o comunidades virtuales
- respetar y asumir consideraciones éticas en el uso de las TICs, como el cuidado personal y el respeto por el otro, señalar las fuentes de donde se obtiene la información y respetar las normas de uso y de seguridad de los espacios virtuales

Atención a la diversidad

En el trabajo pedagógico, el docente debe tomar en cuenta la diversidad entre los estudiantes en términos culturales, sociales, étnicos o religiosos, y respecto de estilos de aprendizaje y niveles de conocimiento.

La diversidad entre estudiantes establece desafíos que deben tomarse en consideración

Esa diversidad conlleva desafíos que los profesores tienen que contemplar. Entre ellos, cabe señalar:

- promover el respeto a cada uno de los estudiantes, en un contexto de tolerancia y apertura, evitando las distintas formas de discriminación
- procurar que los aprendizajes se desarrollen en relación con el contexto y la realidad de los estudiantes
- intentar que todos los alumnos logren los objetivos de aprendizaje señalados en el currículum, pese a la diversidad que se manifiesta entre ellos

Atención a la diversidad y promoción de aprendizajes

Se debe tener en cuenta que atender a la diversidad de estilos y ritmos de aprendizaje no implica "expectativas más bajas" para algunos estudiantes. Por el contrario, la necesidad de educar en forma diferenciada aparece al constatar que hay que reconocer los requerimientos didácticos personales de los alumnos, para que todos alcancen altas expectativas. Se aspira a que todos los estudiantes alcancen los aprendizajes dispuestos para su nivel o grado.

Es necesario atender a la diversidad para que todos logren los aprendizajes

Esto demanda conocer qué saben y, sobre esa base, definir con flexibilidad las diversas medidas pertinentes

En atención a lo anterior, es conveniente que, al momento de diseñar el trabajo en una unidad, el docente considere que precisarán más tiempo o métodos diferentes para que algunos estudiantes logren estos aprendizajes. Para esto, debe desarrollar una planificación inteligente que genere las condiciones que le permitan:

- conocer los diferentes niveles de aprendizaje y conocimientos previos de los estudiantes
- evaluar y diagnosticar en forma permanente para reconocer las necesidades de aprendizaje
- definir la excelencia, considerando el progreso individual como punto de partida
- incluir combinaciones didácticas (agrupamientos, trabajo grupal, rincones) y materiales diversos (visuales, objetos manipulables)
- evaluar de distintas maneras a los alumnos y dar tareas con múltiples opciones
- promover la confianza de los alumnos en sí mismos
- promover un trabajo sistemático por parte de los estudiantes y ejercitación abundante

Orientaciones para planificar

La planificación favorece el logro de los aprendizajes

La planificación es un elemento central en el esfuerzo por promover y garantizar los aprendizajes de los estudiantes. Permite maximizar el uso del tiempo y definir los procesos y recursos necesarios para lograr los aprendizajes que se debe alcanzar.

El programa sirve de apoyo a la planificación a través de un conjunto de elementos elaborados para este fin

Los programas de estudio del Ministerio de Educación constituyen una herramienta de apoyo al proceso de planificación. Para estos efectos, han sido elaborados como un material flexible que los profesores pueden adaptar a su realidad en los distintos contextos educativos del país.

El principal referente que entrega el programa de estudio para planificar son los Aprendizajes Esperados. De manera adicional, el programa apoya la planificación a través de la propuesta de unidades, de la estimación del tiempo cronológico requerido en cada una y de la sugerencia de actividades para desarrollar los aprendizajes.

CONSIDERACIONES GENERALES PARA REALIZAR LA PLANIFICACIÓN

Se debe planificar tomando en cuenta la diversidad, el tiempo real, las prácticas anteriores y los recursos disponibles

La planificación es un proceso que se recomienda realizar, considerando los siguientes aspectos:

- la diversidad de niveles de aprendizaje que han alcanzado los estudiantes del curso, lo que implica planificar considerando desafíos para los distintos grupos de alumnos
- el tiempo real con que se cuenta, de manera de optimizar el tiempo disponible
- las prácticas pedagógicas que han dado resultados satisfactorios
- los recursos para el aprendizaje con que se cuenta: textos escolares, materiales didácticos, recursos elaborados por la escuela o aquellos que es necesario diseñar; laboratorio y materiales disponibles en el Centro de Recursos de Aprendizaje (CRA), entre otros

SUGERENCIAS PARA EL PROCESO DE PLANIFICACIÓN

Lograr una visión lo más clara y concreta posible sobre los desempeños que dan cuenta de los aprendizajes...

Para que la planificación efectivamente ayude al logro de los aprendizajes, debe estar centrada en torno a ellos y desarrollarse a partir de una visión clara de lo que los alumnos deben aprender. Para alcanzar este objetivo, se recomienda elaborar la planificación en los siguientes términos:

- comenzar por una especificación de los Aprendizajes Esperados que no se limite a listarlos. Una vez identificados, es necesario desarrollar una idea lo más clara posible de las expresiones concretas que puedan tener. Esto implica reconocer qué desempeños de los estudiantes demuestran el logro de los aprendizajes. Se deben poder responder preguntas como ¿qué deberían ser capaces de demostrar los estudiantes que han logrado un determinado Aprendizaje Esperado?, ¿qué habría que observar para saber que un aprendizaje ha sido logrado?

- a partir de las respuestas a esas preguntas, decidir las evaluaciones a realizar y las estrategias de enseñanza. Específicamente, se requiere identificar qué tarea de evaluación es más pertinente para observar el desempeño esperado y qué modalidades de enseñanza facilitarán alcanzar este desempeño. De acuerdo a este proceso, se debe definir las evaluaciones formativas y sumativas, las actividades de enseñanza y las instancias de retroalimentación

...y, sobre esa base, decidir las evaluaciones, las estrategias de enseñanza y la distribución temporal

Los docentes pueden complementar los programas con los Mapas de Progreso, que entregan elementos útiles para reconocer el tipo de desempeño asociado a los aprendizajes.

Se sugiere que la forma de plantear la planificación arriba propuesta se use tanto en la planificación anual como en la correspondiente a cada unidad y al plan de cada clase.

La planificación anual

En este proceso, el docente debe distribuir los Aprendizajes Esperados a lo largo del año escolar, considerando su organización por unidades; estimar el tiempo que se requerirá para cada unidad y priorizar las acciones que conducirán a logros académicos significativos.

Para esto, el docente tiene que:

- alcanzar una visión sintética del conjunto de aprendizajes a lograr durante el año, dimensionando el tipo de cambio que se debe observar en los estudiantes. Esto debe desarrollarse a partir de los Aprendizajes Esperados especificados en los programas. Los Mapas de Progreso pueden resultar un apoyo importante
- identificar, en términos generales, el tipo de evaluación que se requerirá para verificar el logro de los aprendizajes. Esto permitirá desarrollar una idea de las demandas y los requerimientos a considerar para cada unidad
- sobre la base de esta visión, asignar los tiempos a destinar a cada unidad. Para que esta distribución resulte lo más realista posible, se recomienda:
  - listar días del año y horas de clase por semana para estimar el tiempo disponible
  - elaborar una calendarización tentativa de los Aprendizajes Esperados para el año completo, considerando los feriados, los días de prueba y de repaso, y la realización de evaluaciones formativas y retroalimentación
  - hacer una planificación gruesa de las actividades a partir de la calendarización
  - ajustar permanentemente la calendarización o las actividades planificadas

Realizar este proceso con una visión realista de los tiempos disponibles durante el año

La planificación de la unidad

Realizar este proceso sin perder de vista la meta de aprendizaje de la unidad

Implica tomar decisiones más precisas sobre qué enseñar y cómo enseñar, considerando la necesidad de ajustarlas a los tiempos asignados a la unidad.

La planificación de la unidad debiera seguir los siguientes pasos:

- especificar la meta de la unidad. Al igual que la planificación anual, esta visión debe sustentarse en los Aprendizajes Esperados de la unidad y se recomienda complementarla con los Mapas de Progreso
- crear una evaluación sumativa para la unidad
- idear una herramienta de diagnóstico de comienzos de la unidad
- calendarizar los Aprendizajes Esperados por semana
- establecer las actividades de enseñanza que se desarrollarán
- generar un sistema de seguimiento de los Aprendizajes Esperados, especificando los tiempos y las herramientas para realizar evaluaciones formativas y retroalimentación
- ajustar el plan continuamente ante los requerimientos de los estudiantes

La planificación de clase

Procurar que los estudiantes sepan qué y por qué van a aprender, qué aprendieron y de qué manera

Es imprescindible que cada clase sea diseñada considerando que todas sus partes estén alineadas con los Aprendizajes Esperados que se busca promover y con la evaluación que se utilizará.

Adicionalmente, se recomienda que cada clase sea diseñada distinguiendo su inicio, desarrollo y cierre y especificando claramente qué elementos se considerarán en cada una de estas partes. Se requiere considerar aspectos como los siguientes:

- **inicio:** en esta fase, se debe procurar que los estudiantes conozcan el propósito de la clase; es decir, qué se espera que aprendan. A la vez, se debe buscar captar el interés de los estudiantes y que visualicen cómo se relaciona lo que aprenderán con lo que ya saben y con las clases anteriores
- **desarrollo:** en esta etapa, el docente lleva a cabo la actividad contemplada para la clase
- **cierre:** este momento puede ser breve (5 a 10 minutos), pero es central. En él se debe procurar que los estudiantes se formen una visión acerca de qué aprendieron y cuál es la utilidad de las estrategias y experiencias desarrolladas para promover su aprendizaje.

Orientaciones para evaluar

La evaluación forma parte constitutiva del proceso de enseñanza. No se debe usar solo como un medio para controlar qué saben los estudiantes, sino que cumple un rol central en la promoción y el desarrollo del aprendizaje. Para que cumpla efectivamente con esta función, debe tener como objetivos:

Apoya el proceso de aprendizaje al permitir su monitoreo, retroalimentar a los estudiantes y sustentar la planificación

- ser un recurso para medir progreso en el logro de los aprendizajes
- proporcionar información que permita conocer fortalezas y debilidades de los alumnos y, sobre esa base, retroalimentar la enseñanza y potenciar los logros esperados dentro del sector
- ser una herramienta útil para la planificación

¿CÓMO PROMOVER EL APRENDIZAJE A TRAVÉS DE LA EVALUACIÓN?

Las evaluaciones adquieren su mayor potencial para promover el aprendizaje si se llevan a cabo considerando lo siguiente:

Explicitar qué se evaluará

- informar a los alumnos sobre los aprendizajes que se evaluarán. Esto facilita que puedan orientar su actividad hacia conseguir los aprendizajes que deben lograr

Identificar logros y debilidades

- elaborar juicios sobre el grado en que se logran los aprendizajes que se busca alcanzar, fundados en el análisis de los desempeños de los estudiantes. Las evaluaciones entregan información para conocer sus fortalezas y debilidades. El análisis de esta información permite tomar decisiones para mejorar los resultados alcanzados

Ofrecer retroalimentación

- retroalimentar a los alumnos sobre sus fortalezas y debilidades. Compartir esta información con los estudiantes permite orientarlos acerca de los pasos que debe seguir para avanzar. También da la posibilidad de desarrollar procesos metacognitivos y reflexivos destinados a favorecer sus propios aprendizajes; a su vez, esto facilita involucrarse y comprometerse con ellos

¿CÓMO SE PUEDEN ARTICULAR LOS MAPAS DE PROGRESO DEL APRENDIZAJE CON LA EVALUACIÓN?

Los Mapas de Progreso ponen a disposición de las escuelas de todo el país un mismo referente para observar el desarrollo del aprendizaje de los alumnos y los ubican en un continuo de progreso. Los Mapas de Progreso apoyan el seguimiento de los aprendizajes, en tanto permiten:

Los mapas apoyan diversos aspectos del proceso de evaluación

- reconocer aquellos aspectos y dimensiones esenciales de evaluar
- aclarar la expectativa de aprendizaje nacional, al conocer la descripción de cada nivel, sus ejemplos de desempeño y el trabajo concreto de estudiantes que ilustran esta expectativa

- observar el desarrollo, la progresión o el crecimiento de las competencias de un alumno, al constatar cómo sus desempeños se van desplazando en el mapa
- contar con modelos de tareas y preguntas que permitan a cada alumno evidenciar sus aprendizajes

¿CÓMO DISEÑAR LA EVALUACIÓN?

La evaluación debe diseñarse a partir de los Aprendizajes Esperados, con el objeto de observar en qué grado se alcanzan. Para lograrlo, se recomienda diseñar la evaluación junto a la planificación y considerar las siguientes preguntas:

Partir estableciendo los Aprendizajes Esperados a evaluar...

- **¿Cuáles son los Aprendizajes Esperados del programa que abarcará la evaluación?**
  Si debe priorizar, considere aquellos aprendizajes que serán duraderos y prerrequisitos para desarrollar otros aprendizajes. Para esto, los Mapas de Progreso pueden ser de especial utilidad

- **¿Qué evidencia necesitarían exhibir sus estudiantes para demostrar que dominan los Aprendizajes Esperados?**
  Se recomienda utilizar como apoyo los Indicadores de Evaluación sugeridos que presenta el programa.

...y luego decidir qué se requiere para su evaluación en términos de evidencias, métodos, preguntas y criterios

- **¿Qué método empleará para evaluar?**
  Es recomendable utilizar instrumentos y estrategias de diverso tipo (pruebas escritas, guías de trabajo, informes, ensayos, entrevistas, debates, mapas conceptuales, informes de laboratorio e investigaciones, entre otros).

En lo posible, se deben presentar situaciones que pueden resolverse de distintas maneras y con diferente grado de complejidad, para que los diversos estudiantes puedan solucionarlas y muestren sus distintos niveles y estilos de aprendizaje.

- **¿Qué preguntas se incluirá en la evaluación?**
  Se deben formular preguntas rigurosas y alineadas con los Aprendizajes Esperados, que permitan demostrar la real comprensión del contenido evaluado

- **¿Cuáles son los criterios de éxito?, ¿cuáles son las características de una respuesta de alta calidad?**
  Esto se puede responder con distintas estrategias. Por ejemplo:
  - comparar las respuestas de sus estudiantes con las mejores respuestas de otros alumnos de edad similar. Se pueden usar los ejemplos presentados en los Mapas de Progreso

- identificar respuestas de evaluaciones previamente realizadas que expresen el nivel de desempeño esperado, y utilizarlas como modelo para otras evaluaciones realizadas en torno al mismo aprendizaje
- desarrollar rúbricas[5] que indiquen los resultados explícitos para un desempeño específico y que muestren los diferentes niveles de calidad para dicho desempeño

5 Rúbrica: tabla o pauta para evaluar

Matemática

Programa de Estudio
Segundo Año Medio

2

Matemática

Propósitos

El aprendizaje de la matemática ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas para desenvolverse en la vida cotidiana. Entre ellas se encuentran el cálculo, el análisis de la información proveniente de diversas fuentes, la capacidad de generalizar situaciones, formular conjeturas, evaluar la validez de resultados y seleccionar estrategias para resolver problemas. Todo esto contribuye a desarrollar un pensamiento lógico, ordenado, crítico y autónomo, y a generar actitudes como precisión, rigurosidad, perseverancia y confianza en sí mismo, que se valoran no solo en la ciencia y la tecnología, sino también en la vida cotidiana.

Aprender matemáticas acrecienta también las habilidades relativas a la comunicación; por una parte, enseña a presentar información con precisión y rigurosidad y, por otra, a demandar exactitud y rigor en las informaciones y argumentos que se recibe.

El conocimiento matemático y la capacidad para usarlo provocan importantes consecuencias en el desarrollo, el desempeño y la vida de las personas. El entorno social valora el conocimiento matemático y lo asocia a logros, beneficios y capacidades de orden superior. Aprender matemática influye en el concepto que niños, jóvenes y adultos construyen sobre sí mismos y sus capacidades; por lo tanto, contribuye a que la persona se sienta un ser autónomo y valioso. En consecuencia, la calidad, la pertinencia y la amplitud de ese conocimiento afectan las posibilidades y

HABILIDADES DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO

5º BÁSICO	6º BÁSICO	7º BÁSICO
Resolver problemas en contextos diversos y significativos	Resolver problemas en contextos significativos	Resolver problemas en contextos diversos y significativos, utilizando los contenidos del nivel
		Analizar la validez de los procedimientos utilizados y de los resultados obtenidos
	Formular y verificar conjeturas, en casos particulares	
Ordenar números y ubicarlos en la recta numérica		Ordenar números y ubicarlos en la recta numérica
Realizar cálculos en forma mental y escrita	Realizar cálculos en forma mental y escrita	Realizar cálculos en forma mental y escrita
		Emplear formas simples de modelamiento matemático

la calidad de vida de las personas y el potencial de desarrollo del país.

La matemática ofrece también la posibilidad de trabajar con entes abstractos y sus relaciones, y prepara a los estudiantes para que entiendan el medio y las múltiples relaciones que se dan en un espacio simbólico y físico de complejidad creciente. Se trata de espacios en los que la cultura, la tecnología y las ciencias se redefinen en forma permanente y se hacen más difíciles, y las finanzas, los sistemas de comunicación y los vínculos entre naciones y culturas se relacionan y se globalizan.

Habilidades

Al estudiar matemáticas, el estudiante adquiere el razonamiento lógico, la visualización espacial, el pensamiento analítico, el cálculo, el modelamiento y las destrezas para resolver problemas. La tabla siguiente puede resultar útil para:

- observar transversalmente las habilidades que se desarrollan en el sector
- focalizarse en un nivel y diseñar actividades y evaluaciones que enfaticen dichas habilidades
- situarse en el nivel, observar las habilidades que se pretendió enseñar en los años anteriores y las que se trabajarán más adelante
- advertir diferencias y similitudes en los énfasis por ciclos de enseñanza

8º BÁSICO	I MEDIO	II MEDIO
Resolver problemas en contextos diversos y significativos	Analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos	Aproximar números mediante variados métodos
Evaluar la validez de los resultados obtenidos y el empleo de dichos resultados para fundamentar opiniones y tomar decisiones	Fundamentar opiniones y tomar decisiones	Argumentar respecto a las variaciones que se producen en la representación gráfica de funciones
		Ubicar raíces en la recta numérica
Realizar cálculos en forma mental y escrita		
Emplear formas simples de modelamiento matemático	Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables	Modelar situaciones diversas a través de funciones
Verificar proposiciones simples, para casos particulares	Diferenciar entre verificación y demostración de propiedades	Demostrar propiedades y teoremas

Orientaciones didácticas

Se ha concebido este sector como una oportunidad para que los estudiantes adquieran aprendizajes de vida. La matemática es un área poderosa de la cultura, pues permite comprender, explicar y predecir situaciones y fenómenos del entorno. Por eso, es importante que los docentes se esfuercen para que todos los alumnos del país aprendan los conocimientos y desarrollen las capacidades propias de esta disciplina. Estos programas entregan algunas orientaciones que ayudarán a los profesores a cumplir con este objetivo por medio de la planificación y en el transcurso de las clases.

LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS: PROFUNDIDAD E INTEGRACIÓN

Los estudiantes deben explorar en las ideas matemáticas y entender que ellas constituyen un todo y no fragmentos aislados del saber. Tienen que enfrentar variadas experiencias para que comprendan en profundidad los conceptos matemáticos, sus conexiones y sus aplicaciones. De esta manera, podrán participar activamente y adquirir mayor confianza para investigar y aplicar las matemáticas. Se recomienda que usen materiales concretos, realicen trabajos prácticos y se apoyen en la tecnología, en especial en el ciclo básico.

EL USO DEL CONTEXTO

Es importante que el docente aclare que esta disciplina está enraizada en la cultura y en la historia; asimismo, que impacta en otras áreas del conocimiento científico, crea consecuencias y permite aplicaciones. Preguntarse cómo se originaron los conceptos y modelos matemáticos, en qué períodos de la historia y cómo se enlazaron con la evolución del pensamiento, es un ancla importante para el aprendizaje. Se recomienda usar analogías y representaciones cercanas a los estudiantes, en especial en las etapas de exploración. También se sugiere aplicar las matemáticas a otras áreas del saber y en la vida diaria como un modo de apoyar la construcción del conocimiento matemático.

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Esta disciplina se construye a partir de regularidades que subyacen a situaciones aparentemente diversas y ayuda a razonar en vez de actuar de modo mecánico. Por eso es importante invitar a los alumnos a buscar regularidades. También se busca desarrollar y explicar la noción de estrategia, comparar diversas formas de abordar problemas y justificar y demostrar las proposiciones matemáticas. El docente debe procurar, asimismo, que los estudiantes conjeturen y verifiquen cómo se comportan los elementos y las relaciones con que se trabaja. Tienen que analizar los procedimientos para resolver un problema y comprobar resultados, propiedades y relaciones.

Aunque deben ser competentes en diversas habilidades matemáticas, el profesor tiene que evitar que pongan demasiado énfasis en los procedimientos si no comprenden los principios matemáticos correspondientes.

USO DEL ERROR

Usar adecuadamente el error ayuda a crear un ambiente de búsqueda y creación. Un educador puede aprovechar la equivocación para inducir aprendizajes especialmente significativos, si lo hace de manera constructiva. Se debe considerar el error como un elemento concreto para trabajar la diversidad en clases y permitir que todos los alumnos alcancen los aprendizajes propuestos.

APRENDIZAJE MATEMÁTICO Y DESARROLLO PERSONAL

La clase de Matemática ofrece abundantes ocasiones para el autoconocimiento y las interacciones sociales. Es una oportunidad para la metacognición[6]: ¿cómo lo hice?, ¿cómo lo hicieron?, ¿de qué otra manera es posible? Además, la percepción que cada cual tiene de su propia capacidad para aprender y hacer matemática, surge de la retroalimentación que le ha dado la propia experiencia. En ese sentido, el docente tiene en sus manos un poderoso instrumento: reconocer los esfuerzos y los logros de los alumnos. Otros aspectos que también ayudan a que cada estudiante aumente la confianza en sí mismo son valorar las diferencias, aceptar los éxitos o las acciones de sus pares, crear un clima de confianza y distinguir de qué modo enfrenta cada uno el triunfo o el fracaso, sea propio o de los demás.

6 Metacongición: manera de aprender a razonar sobre el propio razonamiento

TECNOLOGÍAS DIGITALES Y APRENDIZAJE MATEMÁTICO

El presente programa propone usar software para ampliar las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes. Estas tecnologías permiten representar nociones abstractas a través de modelos en los que se puede experimentar con ideas matemáticas; también se puede crear situaciones para que los alumnos exploren las características, los límites y las posibilidades de conceptos, relaciones o procedimientos matemáticos. Los procesadores geométricos, simbólicos y de estadística son laboratorios para investigar relaciones y ponerlas a prueba. Con un procesador simbólico, se puede analizar y entender números grandes o muy pequeños. Y se puede estudiar el comportamiento de funciones, incluso las de alta complejidad. Internet ofrece múltiples ambientes con representaciones dinámicas de una gran cantidad de objetos matemáticos. Los procesadores geométricos permiten experimentar con nociones y relaciones de la geometría euclidiana, cartesiana o vectorial. Se trata de un espacio muy atractivo para los estudiantes y que los ayudará mucho a formarse para una vida cada vez más influida por las tecnologías digitales.

CLIMA Y MOTIVACIÓN

Se debe propiciar un ambiente creativo para que los alumnos formulen, verifiquen o refuten conjeturas respecto de los problemas que abordan. Ese ambiente debe admitir que el error, la duda y la pregunta son importantes y valiosos para construir conocimiento; asimismo, tiene que valorar los aportes de todos y aprovecharlos para crear una búsqueda y una construcción colectiva. En ese espacio será natural analizar acciones y procedimientos y explorar caminos alternativos.

Visión Global del Año

Aprendizajes Esperados por semestre y unidad

Semestre 1

Unidad 1

Números

AE 01
Comprender que los números irracionales permiten resolver problemas que no tienen solución en los números racionales.

AE 02
Aproximar números irracionales por defecto, por exceso y por redondeo.

AE 03
Ordenar números irracionales y representarlos en la recta numérica.

AE 04
Conjeturar y verificar propiedades de los números irracionales.

AE 05
Comprender que los números reales corresponden a la unión de los números racionales e irracionales.

AE 06
Demostrar algunas propiedades de los números reales.

AE 07
Analizar la existencia de las raíces en el conjunto de los números reales.

AE 08
Utilizar relaciones entre las potencias y raíces para demostrar propiedades de las raíces.

AE 09
Establecer relaciones entre los logaritmos, potencias y raíces.

AE 10
Deducir propiedades de los logaritmos.

AE 11
Resolver problemas en contextos diversos relativos a números reales, raíces y logaritmos.

Tiempo estimado
78 horas pedagógicas

Unidad 2

Geometría

AE 01
Comprender el concepto de semejanza de figuras planas.

AE 02
Identificar los criterios de semejanza de triángulos.

AE 03
Utilizar los criterios de semejanza de triángulos para el análisis de la semejanza de figuras planas.

AE 04
Comprender el teorema de Thales sobre trazos proporcionales y aplicarlo en el análisis y la demostración de teoremas relativos a trazos.

AE 05
Demostrar los teoremas de Euclides relativos a proporcionalidad de trazos.

AE 06
Demostrar el teorema de Pitágoras y el teorema recíproco de Pitágoras.

AE 07
Identificar ángulos inscritos y del centro en una circunferencia, y relacionar las medidas de dichos ángulos.

AE 08
Demostrar relaciones que se establecen entre trazos determinados por cuerdas y secantes de una circunferencia.

AE 09
Demostrar teoremas relativos a la homotecia de figuras planas.

AE 10
Resolver problemas relativos a:
a. el teorema de Thales sobre trazos proporcionales
b. la división interior de un trazo
c. teoremas de Euclides relativos a proporcionalidad de trazos

Tiempo estimado
62 horas pedagógicas

Semestre 2

Unidad 3

Álgebra

AE 01
Analizar gráficamente la función exponencial, en forma manual y con herramientas tecnológicas.

AE 02
Analizar gráficamente la función logarítmica, en forma manual y con herramientas tecnológicas.

AE 03
Analizar gráficamente la función raíz cuadrada, en forma manual y con herramientas tecnológicas.

AE 04
Analizar la validez de una expresión algebraica fraccionaria.

AE 05
Establecer estrategias para operar[7] fracciones algebraicas simples, con binomios en el numerador y en el denominador, y determinar los valores que indefinen estas expresiones.

AE 06
Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica y algebraicamente.

AE 07
Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Tiempo estimado
80 horas pedagógicas

Unidad 4

Datos y azar

AE 01
Determinar el rango, la varianza y la desviación estándar de conjuntos de datos.

AE 02
Comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando medidas de tendencia central, de posición y de dispersión.

AE 03
Emplear elementos del muestreo aleatorio simple para inferir sobre la media de una población.

AE 04
Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

AE 05
Calcular medias muestrales.

AE 06
Verificar que, a medida que el número de pruebas crece, la media muestral se aproxima a la media de la población.

AE 07
Resolver problemas en contextos diversos, aplicando las propiedades de la suma y el producto de probabilidades.

Tiempo estimado
55 horas pedagógicas

7 Suma, resta, multiplicación, división, simplificación, amplificación.

Unidades

Semestre 1

Unidad 1
Números

Unidad 2
Geometría

Semestre 2

Unidad 3
Álgebra

Unidad 4
Datos y azar

Unidad 1
Números

PROPÓSITO
En esta unidad se recogen los aprendizajes que los estudiantes ya tienen sobre números racionales y sus propiedades, para introducir ahora los números irracionales y posteriormente los reales. Se espera que comprendan las características y propiedades de los nuevos números y sean capaces de ordenarlos, ubicarlos en la recta numérica, aproximarlos y operar con ellos.

En esta unidad se incorporan, además, las potencias de exponente racional y el estudio de sus propiedades, las raíces enésimas y los logaritmos. Será importante que los estudiantes realicen conjeturas sobre propiedades, las verifiquen y apliquen los contenidos aprendidos anteriormente en la resolución de problemas.

CONOCIMIENTOS PREVIOS
- Operaciones de números racionales
- Potencias de base racional y exponente entero
- Propiedades de las potencias de base racional y exponente entero

PALABRAS CLAVE
Números irracionales, números reales, potencias de exponente racional, raíces enésimas, logaritmos.

CONTENIDOS
- Números irracionales y propiedades
- Números reales y propiedades
- Operaciones aritméticas con números reales
- Potencias de exponente racional
- Propiedades de las potencias de exponente racional
- Raíces enésimas
- Propiedades de las raíces enésimas
- Logaritmos
- Propiedades de los logaritmos

HABILIDADES
- Reconocer si un problema puede o no tener soluciones en los números racionales
- Identificar los números irracionales como aquellos que tienen un desarrollo infinito no periódico y que no se pueden escribir como fracción
- Aproximar números irracionales mediante algún método
- Ubicar raíces en la recta numérica, usando alguna estrategia
- Conjeturar acerca del valor a obtener al sumar, restar, multiplicar o dividir dos números racionales
- Resolver situaciones en las que es necesario operar con números reales
- Demostrar propiedades de las raíces enésimas a partir de las propiedades de las potencias de exponente racional
- Transformar raíces enésimas a notación de potencias y viceversa
- Demostrar propiedades de los logaritmos a partir de las propiedades de las potencias
- Relacionar potencias, raíces enésimas y logaritmos
- Resolver situaciones en las que es necesario operar con raíces enésimas y logaritmos

ACTITUDES
- Trabajo en equipo e iniciativa personal en la resolución de problemas en contextos diversos

Aprendizajes Esperados

APRENDIZAJES ESPERADOS Se espera que los estudiantes sean capaces de:	**INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS** Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 01

Comprender que los números irracionales permiten resolver problemas que no tienen solución en los números racionales.

- Identifican problemas geométricos, cuya solución corresponde a números irracionales. Por ejemplo: determinar el valor de la diagonal de un cuadrado de lado 1, la altura de un triángulo equilátero o la arista de un cubo de lado 2.
- Explican los argumentos usados para demostrar la irracionalidad de $\sqrt{3}$.

AE 02

Aproximar números irracionales por defecto, por exceso y por redondeo.

- Construyen números irracionales a partir del concepto de no periodicidad y explican su razonamiento. Por ejemplo, el número 0,1234567891011121314...
- Aproximan un número irracional por defecto y por exceso de acuerdo a una precisión dada (por ejemplo, con 4 decimales). Por ejemplo, $\sqrt{2}$ con 4 decimales.
- Usan métodos visuales (áreas de cuadrados) para aproximar raíces cuadradas.

AE 03

Ordenar números irracionales y representarlos en la recta numérica.

- Ordenan un conjunto de números irracionales de manera creciente.
- Ubican raíces cuadradas en la recta numérica, usando una variedad de estrategias, y explican su razonamiento. Por ejemplo, usando regla y compás.
- Ubican números irracionales en la recta numérica de acuerdo a restricciones dadas. Por ejemplo, ubican tres números irracionales mayores que 2 y menores que 4.

AE 04

Conjeturar y verificar propiedades de los números irracionales.

- Conjeturan y verifican aproximaciones del número π, evaluando el error cometido. Por ejemplo: $\frac{22}{7}, \frac{355}{113}$ ó $\sqrt{10}$
- Argumentan, a partir de la definición de un número irracional, acerca de la relación $\frac{P}{D} = \pi$, donde P es el perímetro de una circunferencia, D es el diámetro y π es un irracional.
- Conjeturan acerca del número obtenido a partir de operaciones como irracional + irracional, irracional · irracional o bien irracional : irracional.

APRENDIZAJES ESPERADOS Se espera que los estudiantes sean capaces de:	**INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS** Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 05

Comprender que los números reales corresponden a la unión de los números racionales e irracionales.

- Representan, usando un esquema, la relación entre los números reales y los números naturales, enteros, racionales e irracionales.
- Identifican situaciones donde el resultado no pertenece o no está definido en los números reales. Por ejemplo: $\sqrt{-2}$, $\sqrt[4]{-16}$, etc.
- A partir de un conjunto de números, forman conjuntos de números racionales y de números que son irracionales.

AE 06

Demostrar algunas propiedades de los números reales.

- Verifican la propiedad "entre dos números reales, siempre existe otro real".
- Verifican en casos particulares propiedades de la clausura, asociatividad, distributividad y conmutatividad para números reales.
- Demuestran algunas propiedades para los números reales, como:
  Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$;
  o bien si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$

AE 07

Analizar la existencia de las raíces en el conjunto de los números reales.

- Determinan para qué valores de a existe $\sqrt[n]{a}$, cuando n es par.
- Determinan para qué valores de n natural existe $\sqrt[n]{a}$, cuando a es cualquier número real.

AE 08

Utilizar relaciones entre las potencias y raíces para demostrar propiedades de las raíces.

- Reconocen la relación que existe entre las raíces y las potencias de exponente racional.
- Utilizan la relación que existe entre las raíces y las potencias para demostrar que $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

APRENDIZAJES ESPERADOS Se espera que los estudiantes sean capaces de:	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 09

Establecer relaciones entre los logaritmos, potencias y raíces.

- Reconocen potencias en el cálculo de logaritmos de números. Por ejemplo, en el cálculo $\log_2 8$, reconocen que $2^3 = 8$
- Deducen la relación que hay entre raíces y logaritmos a partir de la relación que existe entre raíces y potencias y la relación que existe entre potencias y logaritmos.
- Establecen resultados referidos a logaritmos. Por ejemplo, establecen que $\log_a a = 1$

AE 10

Deducir propiedades de los logaritmos.

- Demuestran propiedades de los logaritmos, a partir de las propiedades de las potencias. Por ejemplo, que:
  a. $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
  b. $\log_b a^x = x\log_b a$
- Calculan logaritmos, utilizando propiedades.

AE 11

Resolver problemas en contextos diversos relativos a números reales, raíces y logaritmos.

- Resuelven problemas que involucran el cálculo de logaritmos y la aplicación de propiedades en diversos contextos. Por ejemplo, calculan la energía liberada por un sismo de magnitud 5,5.
- Resuelven problemas en contextos matemáticos que involucran operaciones con raíces.
- Aplican propiedades de los números reales en la resolución de problemas.

Aprendizajes Esperados en relación con los OFT

Trabajo en equipo e iniciativa personal en la resolución de problemas en contextos diversos

- Participa de manera propositiva en actividades grupales
- Es responsable en la tarea asignada
- Toma iniciativa en actividades de carácter grupal
- Propone alternativas de solución a problemas relacionados con números enteros y potencias de base natural y exponente natural en actividades grupales

Orientaciones didácticas para la unidad

Al introducir los números irracionales, es importante poner énfasis en que estos constituyen un nuevo conjunto numérico, el cual permite resolver problemas que no admiten solución en los racionales. Hay que recordar que los estudiantes ya experimentaron este tipo de transición, cuando pasaron de los naturales a los enteros y luego, de los enteros a los racionales. Por otra parte, el docente tiene que explicar que, al considerar los números racionales y los irracionales, se genera un conjunto más grande denominado "conjunto de los números reales".

Debe notarse que, a diferencia de los números racionales, los irracionales no pueden expresarse como un cuociente entre dos números enteros y con denominador distinto de cero. Los alumnos deberán aceptar esta situación en primera instancia hasta que el docente revise con ellos, por ejemplo, la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Puede hacer más sentido a los estudiantes que con los irracionales no es posible encontrar un período, a diferencia de los números racionales. Los alumnos enfrentarán su primer desafío con las calculadoras, dada las limitaciones que estas presentan al momento de entregar un número determinado de decimales. Se sugiere utilizar diferentes tipos de calculadora; por ejemplo, una básica, una científica, la calculadora de Windows, la planilla excel, etc.

Se recomienda situar a los estudiantes en el contexto histórico en que estos números cobraron relevancia y los problemas que causaron al no comportarse como los números conocidos hasta ese momento. Una vez introducidos los irracionales, los alumnos deben familiarizarse con el conjunto de los números reales y sus propiedades, haciendo énfasis, por ejemplo, en que así se completa la recta numérica. Esto facilitará estudiar las funciones que ahora estarán definidas de $\mathbb{R}$[8] en $\mathbb{R}$.

Se sugiere trabajar las cuatro operaciones con números reales para resolver problemas ligados a la vida cotidiana y a temas de otros sectores de aprendizaje. La resolución de problemas genera, además, espacio para abordar el concepto de cifras significativas y de aproximación. Por otra parte, es importante revisar las propiedades de las operaciones con números reales, como la clausura, la conmutatividad, la asociatividad, los elementos neutros, etc. Aunque algunas propiedades ya han sido estudiadas, esta es una oportunidad para profundizar en ellas y en toda la magnitud que permite ahora el conjunto de los números reales como cuerpo ordenado. A partir de estas propiedades o axiomas, los alumnos pueden demostrar otras propiedades; el docente debe entender que esta es una habilidad de mayor nivel y que necesita trabajar con los estudiantes partiendo con casos sencillos.

En niveles anteriores, los alumnos ya han trabajado con las potencias y sus propiedades. En esta oportunidad se hace la extensión a las potencias de exponente racional y sus propiedades. Es importante que el profesor repase con ellos todas las propiedades de las potencias, pero ahora en el caso de exponente racional. Con esto, los estudiantes estarán a un paso del estudio de las raíces enésimas. Al entender las propiedades de las potencias, podrán comprender mejor las propiedades de las raíces y verificarlas. De hecho, el ejercicio inicial

8 $\mathbb{R}$: números reales

será transformar las raíces a notación de potencia de exponente racional y viceversa. Se sugiere que verifiquen la mayor cantidad de propiedades de las raíces enésimas, a partir de las propiedades de las potencias. Este ejercicio les será muy útil cuando se estudien las propiedades de los logaritmos.

También es importante que trabajen ejercicios en los que calculen diferentes raíces enésimas, simplifiquen expresiones o transformen expresiones en otras equivalentes por medio de la amplificación, usando términos convenientes; por ejemplo, para suprimir un radical del denominador. Conviene incorporar el trabajo con las raíces en el contexto de la resolución de problemas, analizando algunas aplicaciones en otras áreas.

El trabajo de la unidad termina con el estudio de los logaritmos y su relación con los conceptos de potencia y de raíz. En el caso de los logaritmos, deben comprender que, en los ejercicios y cálculos que involucran logaritmos, lo que buscan es un "exponente". Es importante que establezcan la relación con las potencias, pues a partir de eso podrán verificar las propiedades de los logaritmos. Se sugiere incorporar el trabajo con los logaritmos en el contexto de la resolución de problemas, analizando algunas aplicaciones en otras áreas.

Es fundamental que los estudiantes puedan elaborar sus propias estrategias para enfrentar una situación a lo largo de la unidad. En este sentido, se recomienda —cada vez que se pueda— proponerles problemas abiertos que los impulsen a encontrar soluciones y aventurarse en la búsqueda de patrones, de soluciones más generales, etc. Los alumnos deben comunicar procedimientos y resultados, discutirlos y explicar las conclusiones obtenidas en el desarrollo sistemático de las actividades.

Respecto de la evaluación, se aconseja ir monitoreando el logro de los Aprendizajes Esperados a medida que avanza la unidad y no solo al final de ella. De este modo, el docente sabrá si los estudiantes asimilan los conceptos centrales y podrá diseñar estrategias para trabajar con la diversidad de niveles de aprendizaje que conviven en el aula.

Es importante que estas evaluaciones midan habilidades y conocimientos y que contengan preguntas interesantes y desafiantes, pero deben adecuarse a la edad de los alumnos. Se sugiere diseñar preguntas abiertas y problemas que demanden a los estudiantes elaborar estrategias y utilizar procedimientos, considerando que los problemas en matemática no siempre tienen respuesta única ni importa siempre el resultado final. Con preguntas de este tipo, el docente podrá observar también los distintos niveles de desempeño de los alumnos y diseñar procesos de retroalimentación para aquellos aspectos que entiendan menos.

Ejemplos de Actividades

AE 01

Comprender que los números irracionales permiten resolver problemas que no tienen solución en los números racionales.

AE 05

Comprender que los números reales corresponden a la unión de los números racionales e irracionales.

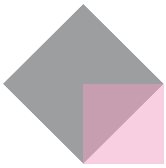
1

Identifican problemas geométricos que no tienen solución en los racionales. Por ejemplo: determinar el valor de la diagonal de un cuadrado de lado 1.

Con ese propósito los estudiantes:

a. dibujan un cuadrado de lado 1 y marcan su diagonal

b. construyen un nuevo cuadrado sobre la diagonal del cuadrado de lado 1



c. plantean estrategias para determinar el valor del área del nuevo cuadrado

Observaciones al docente: *Se sugiere poner énfasis en la discusión de las estrategias utilizadas en cada actividad. Además, es importante apoyar a los estudiantes respecto de la relación entre los diferentes conceptos utilizados, como el área de un cuadrado o la magnitud de un trazo.*

El propósito final de las actividades consiste en debatir sobre la naturaleza del valor obtenido para la diagonal del cuadrado de lado 1.

d. a partir del área del nuevo cuadrado, obtienen aproximaciones del valor de la diagonal del cuadrado de lado 1, usando calculadora

Observaciones al docente: *Para esta última actividad, se sugiere que los estudiantes utilicen diferentes calculadoras (por ejemplo, simple, científica o calculadora de Windows). La idea es que observen distintas aproximaciones, según las limitaciones de cada calculadora, y que discutan acerca de las características del número obtenido (* $\sqrt{2}$ *)*

2

Calculan raíces cuadradas a números primos y sacan conclusiones con respecto a los valores obtenidos. Por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

3

Identifican problemas en contextos matemáticos que no tienen solución en los números racionales. Por ejemplo, encontrar números cuyo cuadrado sea un número primo.

Observaciones al docente: *Con estas dos actividades, los estudiantes deberían plantear alguna conjetura, mediante casos específicos, sobre la particularidad que presentan los números primos cuando están presentes en algún cálculo de raíces.*

AE 02

Aproximar números irracionales por defecto, por exceso y por redondeo.

AE 03

Ordenar números irracionales y representarlos en la recta numérica.

1
Aproximan los valores de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ por defecto y por exceso, con una precisión de 3 decimales.

2
Obtienen valores aproximados de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, usando una calculadora.

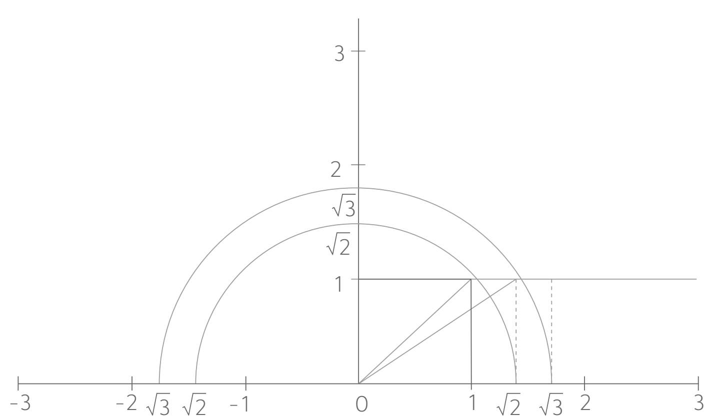
3
Ubican de manera aproximada los números $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ en la recta numérica.

4
Ubican los valores de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ en la recta numérica, usando regla y compás.

5
Verifican los valores obtenidos, utilizando el teorema de Pitágoras.

Observaciones al docente: *Se sugiere poner énfasis en las distintas formas en que los estudiantes puedan ubicar los números irracionales solicitados en la recta. Pueden obtener valores aproximados con la calculadora e intentar ubicarlos aproximadamente en relación a los números enteros 1 y 2.*

Es importante revisar después una forma geométrica para ubicar estos números irracionales. Se debe recordar que ella forma parte de la construcción de un cuadrado de lado 1 en la recta numérica, tal como se muestra a continuación:



Los estudiantes deben entender que $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, lo que queda representado en la recta numérica.

También pueden usar un programa geométrico para construir la recta numérica.

AE 04

Conjeturar y verificar propiedades de los números irracionales.

1
Conjeturan acerca del número obtenido al sumar dos números irracionales.

2
Conjeturan acerca del número obtenido al multiplicar dos números irracionales.

3
Conjeturan acerca del número obtenido al multiplicar un número racional por uno irracional.

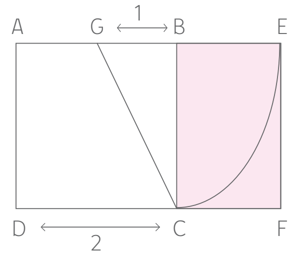
Observaciones al docente: *En este grupo de actividades, los estudiantes deberían plantear una conjetura mediante casos particulares y después, generalizar el resultado. Se sugiere poner atención a las argumentaciones de los alumnos, en especial aquellas que apunten a alguna generalización.*

4
Analizan y discuten la relación $\pi = \frac{P}{D}$, a partir de la naturaleza del número π (donde P es el perímetro de una circunferencia y D su diámetro).

Observaciones al docente: *Partiendo de la imposibilidad de representar un número irracional mediante un cuociente de enteros, esta actividad abierta permite a los estudiantes debatir si es posible plantear que* $\pi = \frac{P}{D}$

5
Analizan y discuten acerca de la naturaleza del número áureo, a partir de la expresión $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Observaciones al docente: *También es interesante analizar cómo obtener la expresión* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$*, a partir del rectángulo áureo de Euclides. En este rectángulo se verifica que* $\frac{AE}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



AE 06

Demostrar algunas propiedades de los números reales.

1
Argumentan, a través de ejemplos, acerca de la propiedad de clausura en los números reales.

2
Argumentan, a través de ejemplos, acerca de la propiedad de asociatividad en los números reales.

3
Argumentan, a través de ejemplos, acerca de la propiedad de conmutatividad en los números reales.

Observaciones al docente: *Para estas actividades, se sugiere que los estudiantes utilicen diferentes números; por ejemplo, 1, –3, 3/4, 0,5, y que también incorporen números como* π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Pueden trabajar en forma algebraica o numérica, usando aproximaciones mediante la calculadora. Lo importante es darse cuenta de que, independientemente del tipo de números, las propiedades se cumplen ineludiblemente.

4
Demuestran la siguiente propiedad de los números reales: Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a \cdot c = b \cdot d$

Observaciones al docente: *Esta actividad requiere un mayor apoyo del profesor, ya que implica realizar una demostración a partir de los axiomas o propiedades de las operaciones de los números reales. En primera instancia, se debe distinguir claramente los conceptos de hipótesis y tesis:*
Hipótesis: $a = b$ y $c = d$
Tesis: $a \cdot c = b \cdot d$

Para poder demostrar la proposición completamente, se tiene que realizar una secuencia de argumentos a partir de las propiedades básicas. Por ejemplo: dado que hay que demostrar que $a \cdot c = b \cdot d$, *es importante ver que si esta igualdad se cumple; entonces necesariamente* $(a \cdot c) - (b \cdot d) = 0$ *por la existencia del elemento neutro aditivo en* $\mathbb{R}$. *Por lo tanto, bastaría comprobar esto para demostrar el teorema.*

5
Analizan y discuten acerca de la propiedad "entre dos números reales, siempre existe otro real".

Observaciones al docente: *Esta es una actividad abierta. Los estudiantes proponen argumentos y ejemplos prácticos de que es posible encontrar un número real entre otros dos reales "cada vez que uno quiera". Por ejemplo, se puede proponer un juego con el intervalo entre 0 y 1. El juego consiste en dividir el intervalo a la mitad. Luego de la primera división, en que el intervalo queda 0 y* $^1/_2$, *volver a dividirlo a la mitad y así sucesivamente.*

6

Demuestran que, en la multiplicación de dos números reales negativos, se obtiene como producto un número real positivo, es decir: $- \cdot - = +$

Observaciones al docente: Esta actividad debe ser guiada por el profesor. Al respecto, puede recordar los axiomas de este conjunto a los alumnos y decirles que los usen para realizar la demostración.

AE 07

Analizar la existencia de las raíces en el conjunto de los números reales.

1

Utilizan la definición $\sqrt{x^2} = |x|$ para deducir que las raíces cuadradas son números mayores o iguales a cero, y determinan los valores de a para los cuales está definida $\sqrt{a}$

2

Determinan los valores para los cuales está definida $\sqrt[3]{x}$ y el conjunto de valores que toma esta raíz.

3

Determinan los valores para los cuales están definidas las raíces $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[5]{x}$, y el conjunto de valores que toman estas raíces.

4

Generalizan resultados de las actividades anteriores a $\sqrt[n]{x}$ para n par o impar.

AE 08

Utilizar relaciones entre las potencias y raíces para demostrar propiedades de las raíces.

A partir de las relaciones entre potencias y raíces, efectúan demostraciones como las siguientes:

a. $\sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$, para x, y apropiados y n natural

b. $\left(\sqrt[n]{x^p}\right)^m = \sqrt[n]{x^{mp}}$, para x apropiado y m, n naturales

c. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$, para x, y apropiado y n naturales

AE 09

Establecer relaciones entre los logaritmos, potencias y raíces.

1

Relacionan logaritmos con potencias, a partir de la definición de logaritmo.

2

Argumentan sobre la relación que existe entre raíces y logaritmos, a partir de la relación entre potencias y logaritmos y entre raíces y potencias.

AE 10

Deducir propiedades de los logaritmos.

1

Si M y N son dos números reales positivos, deducen la siguiente propiedad de los logaritmos a partir de la definición de logaritmo:

$\log M + \log N = \log(M \cdot N)$

2

Si M y N son dos números reales positivos, deducen la siguiente propiedad de los logaritmos a partir de la definición de logaritmo:

$\log N^m = m \cdot \log N$

3

Aplicando propiedades de logaritmos, resuelven los siguientes ejercicios:

a. Calcular $\log_2 \sqrt{32}$

b. Expresar en términos de a, $\log 25$, cuando $a = \log 2$

AE 11

Resolver problemas en contextos diversos relativos a números reales, raíces, y logaritmos.

1

Encuentran una expresión equivalente a $\frac{3}{\sqrt{5}}$ que no tenga un radical en el denominador. Explican la estrategia utilizada.

Observaciones al docente: *Para esta actividad, se puede discutir con los estudiantes respecto del sentido de este tipo de ejercicios relacionados con la racionalización de expresiones. En este caso, importa analizar el tipo de estrategia usada; por ejemplo, la amplificación de la fracción por un término conveniente y el uso de propiedades de las raíces.*

R **2**

Determinan la aceleración de gravedad del lugar donde se encuentra un péndulo simple, si su longitud es 37,1 cm. y oscila con una frecuencia de 0,8190 Hz. (Física)

Observaciones al docente: *Las ecuaciones que permiten describir el movimiento de un péndulo simple son las siguientes:*

(1) $f = \frac{1}{T}$ y *(2)* $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

donde f es frecuencia, T es el período, L su longitud y g la aceleración de gravedad.

En el aspecto interdisciplinario, se sugiere conectar esta actividad con la asignatura de Física, específicamente con "Fuerza y movimiento".

Observaciones al docente: *Tanto para el cálculo de logaritmos como para la verificación de sus propiedades, es fundamental que los estudiantes comprendan su significado a través de su relación con las potencias. Deben entender que, al buscar el valor de un logaritmo, lo que buscan es el valor de un "exponente".*

R **3**

Determinan la intensidad sonora, en decibeles, del sonido que un transeúnte percibe en la esquina de una calle transitada (considerar esto como 10^{-4} W/m^2). (Física)

Observaciones al docente: *El nivel de intensidad sonora en decibeles (dB) está dado por la expresión* $\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

El umbral de sensibilidad, I_0*, se usa como valor de referencia para definir el decibel (dB)*

El valor de este umbral es: $I_0 = 10^{-12}$ *W/m*^{2}

En el aspecto interdisciplinario, se sugiere conectar esta actividad con la asignatura de Física, específicamente con "La materia y sus transformaciones".

4

Determinan la cantidad de años que se requiere tener depositada una cantidad de dinero a un interés anual dado bajo el régimen de interés compuesto, para que rindan un determinado capital.

Ejemplo de Evaluación

AE 08

Utilizar relaciones entre las potencias y raíces para demostrar propiedades de las raíces.

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

- Reconocen la relación que existe entre las raíces y las potencias de exponente racional.
- Utilizan la relación que existe entre las raíces y las potencias para demostrar que $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

ACTIVIDAD

A continuación se presenta una expresión fraccionaria donde intervienen raíces. Se pide al estudiante que realice las siguientes actividades:

1 transformar la expresión $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}$ en una expresión de la forma $3\sqrt[n]{3}$

2 calcular el valor de $\sqrt[n]{729}$

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Se sugiere considerar los siguientes aspectos:

1 transforman raíces a potencias.
2 amplifican por la potencia adecuada.

Si utilizan propiedades de raíces:

1 amplifican por la raíz adecuada.
2 expresan correctamente la expresión que resulta del proceso de racionalización.
3 calculan correctamente la raíz pedida.

Unidad 2

Geometría

PROPÓSITO

En esta unidad, los estudiantes conocerán la semejanza de figuras planas en el plano cartesiano, retomarán el teorema de Pitágoras y estudiarán los teoremas de Thales y Euclides. Además, aplicarán la semejanza en la construcción de modelos a escala.

Por otro lado, identificarán los ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia y los teoremas relacionados con ellos.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Ángulos en polígonos
- Área de polígonos
- Perímetro de polígonos
- Congruencia de figuras planas
- Criterios de congruencia
- Proporciones
- Teorema de Pitágoras
- Circunferencia

PALABRAS CLAVE

Semejanza, criterios de semejanza, proporcionalidad de trazos, modelos a escala, teorema de Thales, teorema de Euclides, ángulo del centro, ángulo inscrito.

CONTENIDOS

- Semejanza de figuras planas
- Criterios de semejanza de figuras planas
- Trazos proporcionales
- Propiedades invariantes en modelos a escala
- Teorema de Pitágoras
- Teorema de Thales
- Teorema de Euclides
- Ángulo del centro en la circunferencia
- Ángulo inscrito en una circunferencia

HABILIDADES

- Construir modelos a escala
- Resolver problemas, aplicando semejanza de figuras planas
- Demostrar el teorema de Pitágoras
- Demostrar el teorema de Euclides
- Aplicar el teorema de Thales
- Aplicar el teorema que relaciona las medidas de los ángulos del centro y de los ángulos inscritos en una circunferencia

ACTITUDES

- Perseverancia, rigor, flexibilidad y originalidad al resolver problemas matemáticos

Aprendizajes Esperados

APRENDIZAJES ESPERADOS Se espera que los estudiantes sean capaces de:	**INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS** Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:
AE 01	
Comprender el concepto de semejanza de figuras planas.	› Identifican polígonos semejantes en contextos diversos y los caracterizan. › Construyen polígonos semejantes a un polígono dado, en forma manual o utilizando un procesador geométrico.
AE 02	
Identificar los criterios de semejanza de triángulos.	› Ejemplifican situaciones donde se utilizan los criterios de semejanza. › Explican los criterios de semejanza.
AE 03	
Utilizar los criterios de semejanza de triángulos para el análisis de la semejanza de figuras planas.	› Utilizan el criterio lado-ángulo-lado para realizar cálculos relativos a trazos en figuras geométricas. › Emplean el criterio ángulo-ángulo para analizar la semejanza de triángulos que se forman en cuadriláteros.
AE 04	
Comprender el teorema de Thales sobre trazos proporcionales y aplicarlo en el análisis y la demostración de teoremas relativos a trazos.	› Identifican la hipótesis y la tesis del teorema general de Thales. › Analizan la demostración del teorema general de Thales. › Emplean el teorema de Thales para demostrar teoremas relativos a medidas de trazos en triángulos. › Dividen segmentos en partes congruentes, utilizando el teorema de Thales.
AE 05	
Demostrar los teoremas de Euclides relativos a proporcionalidad de trazos.	› Deducen la relación que existe entre la altura de un triángulo rectángulo y las proyecciones de sus catetos sobre la hipotenusa. › Deducen la relación que existe entre un cateto, su proyección sobre la hipotenusa y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.
AE 06	
Demostrar el teorema de Pitágoras y el teorema recíproco de Pitágoras.	› Deducen la relación que existe entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo a partir de los teoremas de Euclides. › Relacionan el teorema de Pitágoras con el teorema recíproco de Pitágoras. › Determinan los pasos involucrados en la demostración del teorema recíproco de Pitágoras.

APRENDIZAJES ESPERADOS Se espera que los estudiantes sean capaces de:	**INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS** Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 07

Identificar ángulos inscritos y del centro en una circunferencia, y relacionar las medidas de dichos ángulos.	› Relacionan el ángulo inscrito y del centro en una circunferencia. › Calculan la medida de un ángulo inscrito en una circunferencia, conociendo el valor de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.

AE 08

Demostrar relaciones que se establecen entre trazos determinados por cuerdas y secantes de una circunferencia.	› Utilizan la noción de semejanza para demostrar la relación que existe entre los trazos que determinan dos cuerdas de una circunferencia que se cortan. › Utilizan la noción de semejanza para demostrar la relación entre los trazos que se determinan entre una circunferencia y las secantes de una circunferencia que se cortan.

AE 09

Demostrar teoremas relativos a la homotecia de figuras planas.	› Utilizan la noción de semejanza para demostrar que dos trazos homotéticos son paralelos. › Utilizan la noción de semejanza para demostrar que dos polígonos homotéticos son semejantes.

AE 10

Resolver problemas relativos a: **a. el teorema de Thales sobre trazos proporcionales** **b. la división interior de un trazo** **c. teoremas de Euclides relativos a proporcionalidad de trazos**	› Resuelven problemas relativos a trazos proporcionales en figuras planas, utilizando el criterio asociado a lados proporcionales en triángulos. › Resuelven problemas relativos a divisiones interiores de trazos en una razón dada. › Resuelven problemas relativos a cálculos de segmentos en triángulos rectángulos, utilizando los teoremas de Euclides. › Aplican el teorema de Thales para resolver problemas relativos a cálculos de segmentos en triángulos. › Aplican el teorema de Thales para resolver problemas relativos a divisiones de segmentos en partes congruentes. › Identifican situaciones donde se requiere dividir un trazo en una razón dada. › Resuelven problemas relativos a la división interior de un trazo en una razón dada, empleando el teorema de Thales.

Aprendizajes Esperados en relación con los OFT

Trabajo en equipo e iniciativa personal en la resolución de problemas en contextos diversos

- Participa de manera propositiva en actividades grupales
- Es responsable en la tarea asignada
- Toma iniciativa en actividades de carácter grupal

Orientaciones didácticas para la unidad

La unidad tiene un foco en la proporcionalidad de figuras geométricas y otro en las propiedades de los ángulos del centro e inscritos de una circunferencia.

La primera parte descansa en la noción de proporcionalidad de trazos y desarrolla los conceptos y relaciones en que se fundamentan los modelos a escala.

Como actividades iniciales, se recomienda que los alumnos puedan experimentar la medición y comparación de magnitudes de trazos, pues interesa que construyan trazos a partir de sus relaciones con otros trazos dados. Por ejemplo, construir trazos que sean el doble, el triple, la mitad o la cuarta parte de un trazo dado. Esas relaciones dan origen a expresiones algebraicas como $a = 3b$, que indica que el trazo de magnitud a es el triple del trazo de magnitud b. De este modo, los estudiantes conocerán diversas representaciones de las relaciones entre trazos: la geométrica (mediante la construcción), la verbal (que enuncia la relación) y la algebraica.

Aparte de las construcciones geométricas en papel, se puede generar actividades de trazado, medida y comparación en un procesador geométrico digital, lo que constituye otra representación de las relaciones entre magnitudes de trazos.

Dichas relaciones se pueden expresar mediante proporciones, preparando el terreno para aplicar la proporcionalidad a figuras como triángulos o polígonos.

Se puede introducir la semejanza como "la matemática de los modelos a escala". Planos, mapas, maquetas, diversas ampliaciones de una fotografía, entre otros, son ejemplos de modelos a escala. Por ejemplo, se pueden realizar preguntas como la siguiente sobre un mapa de escala 1: 25.000 : ¿qué distancia en el mapa representa un kilómetro en la realidad?

El tema de la circunferencia y las propiedades de los ángulos inscritos y al centro ofrece una buena oportunidad para aplicar el concepto de lugar geométrico, al referirse al arco que contiene los vértices de ángulos inscritos que subtienden una cuerda dada. Los procesadores geométricos digitales brindan una excelente representación de ese lugar geométrico, pues permiten variar las posiciones relativas y medir los ángulos involucrados. Sobre esa base, los alumnos pueden conjeturar en torno a preguntas como: ¿qué relación encuentra entre el ángulo al centro y uno inscrito que sustente la misma cuerda?

La unidad trabaja con tres teoremas centrales en la geometría: los de Thales[9], Pitágoras y Euclides; es una oportunidad para regresar a los conceptos de teorema y demostración.

Los criterios de semejanza merecen una mención especial. Por una parte, representan una generalización de los criterios de congruencia ya trabajados en I medio. Por otra, a partir de una definición de semejanza de triángulos como "aquellos triángulos que tienen sus tres lado proporcionales y sus tres ángulos interiores congruentes", los alumnos pueden analizar las combinaciones de las propiedades mencionadas, que bastan para garantizar las restantes.

9 También es frecuente, en la literatura matemática, escribir "Tales".

Ejemplos de Actividades

AE 01

Comprender el concepto de semejanza de figuras planas.

1
Dibujan triángulos que satisfacen las condiciones siguientes:
- tienen ángulos congruentes
- tienen lados de diferentes medidas

Ordenan los perímetros P_i de los triángulos, de manera que $P_1 < P_2 < P_3 < P_4 < \ldots$

Ubican los triángulos de manera que el de perímetro P_1 queda contenido en el de perímetro P_2, el de perímetro P_2 queda contenido en el de perímetro P_3, etc.

Sacan conclusiones sobre el concepto de semejanza, observando la disposición de los triángulos.

2
Identifican polígonos semejantes en distintos contextos.

3
Caracterizan triángulos, cuadriláteros, pentágonos y, en general, polígonos semejantes.

4
Dibujan un pentágono, lo fotografían y miden los lados de la imagen y los lados de la figura original. Denotan los vértices del pentágono mediante A, B, C, D, E y los vértices de la imagen, por A', B', C', D', E'. Comparan las longitudes de los lados correspondientes. Discuten respecto de la forma, la razón de los lados, etc.

AE 02

Identificar los criterios de semejanza de triángulos.

AE 03

Utilizar los criterios de semejanza de triángulos para el análisis de la semejanza de figuras planas.

1
Dibujan dos triángulos con la medida de sus ángulos congruentes, pero con distinta medida en sus lados, utilizando procesadores geométricos. Establecen resultados relativos a la proporcionalidad que se establece entre pares de lados correspondientes de cada triángulo.

2
Observan dos triángulos que tienen sus ángulos correspondientes congruentes e identifican que ellos son semejantes.

3
Observan dos triángulos que tienen dos pares de lados correspondientes proporcionales y los ángulos comprendidos por estos lados congruentes. Reconocen que dichos triángulos son semejantes.

4
Realizan cálculos, utilizando los criterios de semejanza. Por ejemplo, determinan la altura de un árbol por medio de información relativa a la sombra que proyecta una persona a una hora determinada.

5
Utilizan criterios de semejanza de triángulos para realizar mediciones que no se pueden realizar directamente con instrumentos. Por ejemplo, para medir el ancho de un canal o de un río.

6
Estiman medidas en contextos astronómicos. Por ejemplo, usan una moneda y lentes adecuados para estimar, por semejanza, el diámetro del Sol.

Observaciones al docente: Es importante que el docente guíe al estudiante en estas actividades de aplicación, para que efectúe los montajes necesarios para realizar estos cálculos.

AE 04

Comprender el teorema de Thales sobre trazos proporcionales y aplicarlo en el análisis y la demostración de teoremas relativos a trazos.

1
Analizan la demostración del teorema general de Thales.

2
Identifican casos particulares del teorema de Thales.

3
Reconocen el recíproco del teorema de Thales.

4
Realizan cálculos referidos a rectas paralelas cortadas transversalmente.

5
Utilizan el teorema de Thales para justificar construcciones geométricas relativas a la división de segmentos en partes iguales.

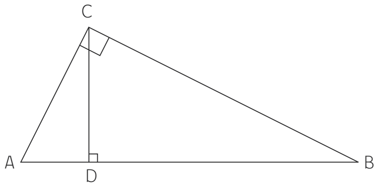
Observaciones al docente: Se sugiere que el docente repase con sus estudiantes algunos elementos básicos de las construcciones geométricas; en este caso, cómo construir paralelas a rectas dadas que pasen por puntos dados, con regla y compás.

AE 05

Demostrar los teoremas de Euclides relativos a proporcionalidad de trazos.

1

A los estudiantes se les presenta un triángulo rectángulo en C, donde el segmento $\overline{CD}$ es altura.



a. si α es el ángulo CAB y β es el ángulo ABC, deben determinar los ángulos ACD y DCB en función de ellos

b. tienen que verificar que los triángulos ADC, DBC y ABC son semejantes

A continuación, se les pide que demuestren:

c. que el cuadrado de la altura $\overline{CD}$ es el producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa

d. que el cuadrado de cada cateto es igual al producto entre la hipotenusa y su proyección sobre ella

Observaciones al docente: *Se sugiere que el docente trabaje junto con sus estudiantes la deducción de otras relaciones que se pueden establecer entre los trazos que se forman en el triángulo.*

AE 06

Demostrar el teorema de Pitágoras y el teorema recíproco de Pitágoras.

1

Utilizan las relaciones establecidas por el teorema de Euclides entre la altura h correspondiente a la hipotenusa c de un triángulo rectángulo, la proyección p del cateto a sobre c y la proyección q del cateto b sobre c, para demostrar el teorema de Pitágoras; es decir, las relaciones:

- $h^2 = pq$
- $a^2 = pc$
- $b^2 = qc$

2

Enuncian el teorema recíproco de Pitágoras, para luego demostrarlo. Con este propósito:

- suponen que en un triángulo de lados a, b, c se verifica que $a^2 + b^2 = c^2$
- demuestran que el ángulo comprendido entre a y b es recto

Observaciones al docente: *Se sugiere al docente que trabaje algunas demostraciones por contradicción antes de esta. En este caso, que los estudiantes supongan que el ángulo que se forma entre estos lados no es recto y que consideren las posibilidades que surgen a raíz de esta suposición.*

3

Realizan actividades concretas para verificar el teorema recíproco de Pitágoras en casos particulares. Por ejemplo, hacen 11 nudos en una cuerda, igualmente espaciados, para construir el ángulo recto.

AE 07

Identificar ángulos inscritos y del centro en una circunferencia, y relacionar las medidas de dichos ángulos.

1

Se les solicita a los estudiantes que:

- dibujen una circunferencia, un ángulo del centro y cinco ángulos inscritos que subtiendan el mismo arco
- midan el ángulo del centro y los ángulos inscritos
- completen una tabla con las mediciones
- realicen este mismo proceso con tres ángulos distintos del centro
- formulen una conjetura basada en sus datos y argumenten su validez

Observaciones al docente: *Esta actividad busca que los alumnos investiguen las relaciones entre los ángulos inscritos y del centro de una circunferencia que subtienden arcos iguales. Para esto, se les solicitará que traigan a la clase compás, regla y transportador.*

2

Los estudiantes deducen la relación que existe entre un ángulo inscrito y del centro que subtienden arcos iguales. Con este propósito:

- dibujan una circunferencia de radio r y centro O
- marcan en ella tres puntos: A, B y C
- forman los triángulos AOC, BOC y ABO
- demuestran que $\angle AOC = 2\angle ACB$

AE 08

Demostrar relaciones que se establecen entre trazos determinados por cuerdas y secantes de una circunferencia.

1

Demuestran la relación que se establece entre los segmentos que se forman al cortarse dos cuerdas de una circunferencia.

2

Utilizan la noción de semejanza para demostrar la relación entre los trazos que se determinan al cortar una circunferencia con dos secantes.

AE 09

Demostrar teoremas relativos a la homotecia de figuras planas.

1

Los estudiantes identifican, a partir de una representación gráfica, los conceptos de:

- homotecia
- centro de homotecia
- razón de homotecia

2

Demuestran que dos trazos homotéticos son paralelos, para:

- homotecia positiva
- homotecia negativa

3

Demuestran que dos polígonos homotéticos son semejantes.

AE 10

Resolver problemas relativos a:

a. el teorema de Thales sobre trazos proporcionales

b. la división interior de un trazo

c. teoremas de Euclides relativos a proporcionalidad de trazos

1

Trazan tres rectas paralelas y dos rectas transversales a ellas. Aplican el teorema de Thales respecto de esta figura, para identificar las proporciones que se establecen entre los segmentos que se forman.

2

Demuestran el teorema de la bisectriz interior de un triángulo.

3

Resuelven problemas relativos a determinar la medida de segmentos cuando dos rectas paralelas son cortadas por rectas transversales, utilizando el teorema de Thales.

4

Modelan situaciones referidas a triángulos rectángulos y emplean los teoremas de Euclides para calcular segmentos en ellos.

5

Resuelven problemas relativos a la división interior de un segmento.

Por ejemplo:

- dividir interiormente un segmento de longitud a en la razón $1:4$
- un segmento mide 140 cm. y ha sido dividido interiormente por un punto Q en la razón $3:4$. Deben determinar la medida del trazo de mayor longitud

Ejemplo de Evaluación

AE 03

Utilizar los criterios de semejanza de triángulos para el análisis de la semejanza de figuras planas.

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

- Utilizan el criterio lado-ángulo-lado para realizar cálculos relativos a trazos en figuras geométricas.
- Emplean el criterio ángulo-ángulo para analizar la semejanza de triángulos que se forman en cuadriláteros.

ACTIVIDAD

A continuación se presenta una situación relativa a cálculos de trazos en triángulos rectángulos. Se pide que realicen las siguientes actividades:

1 dibuje el triángulo ABC, rectángulo en C, donde $\angle A = 30^\circ$, AC = 2 cm. y la altura $h_c = \sqrt{3}$ cm.
2 verifique que los triángulos ADC, DBC y ABC son semejantes, donde h_c = CD
3 calcule la longitud de los trazos AD y DB, empleando criterios relativos a la semejanza de triángulos.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Se sugiere considerar los siguientes aspectos:

1 Dibujan de manera correcta el triángulo con los datos dados.
2 Deducen correctamente todos los ángulos involucrados.
3 Verifican que los triángulos son semejantes.
4 Determinan las longitudes de los trazos pedidos, aplicando correctamente los criterios de semejanza.

Unidad 3
Álgebra

PROPÓSITO
Los alumnos han estudiado en años anteriores el concepto de función y, en particular, la función lineal y afín. En esta unidad se introducen las funciones exponencial, logaritmo y raíz cuadrada en diversos contextos y las respectivas representaciones gráficas con la ayuda de herramientas tecnológicas.

Por otra parte, se enseña la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, estrechamente ligada a la resolución de problemas. Además, se puede apoyar la representación gráfica de estos sistemas con herramientas tecnológicas.

Con respecto a las expresiones algebraicas, los estudiantes generalizarán las estrategias que usaban en las operaciones de números fraccionarios para operar con expresiones algebraicas fraccionarias e identificarán los valores para los cuales se indefine una fracción algebraica.

CONOCIMIENTOS PREVIOS
- Función
- Dominio
- Recorrido
- Función lineal
- Función afín
- Ecuación de primer grado con una incógnita
- Expresiones algebraicas
- Operaciones de fracciones

PALABRAS CLAVE
Función exponencial, función logarítmica, función raíz cuadrada, sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, expresiones algebraicas fraccionarias.

CONTENIDOS
- Función exponencial y representación gráfica
- Función logarítmica y representación gráfica
- Función raíz cuadrada y representación gráfica
- Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas
- Métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas
- Gráfica de un sistema de ecuaciones
- Expresiones algebraicas fraccionarias
- Operaciones de expresiones algebraicas fraccionarias

HABILIDADES
- Identificar las funciones exponenciales, logarítmicas y raíz cuadrada en contextos diversos
- Modelar situaciones diversas a través de las funciones exponenciales, logarítmicas y raíz cuadrada
- Representar gráficamente las funciones exponenciales, logarítmicas y raíz cuadrada
- Argumentar respecto de las variaciones que se producen en la representación gráfica de las funciones exponenciales, logarítmicas y raíz cuadrada, al modificar los parámetros
- Resolver problemas mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas
- Representar gráficamente un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas
- Resolver problemas que involucren expresiones algebraicas fraccionarias
- Relacionar las operaciones de fracciones con las operaciones de expresiones algebraicas fraccionarias
- Argumentar respecto de los valores permitidos del denominador de una expresión algebraica fraccionaria

ACTITUDES
- La perseverancia, el rigor, la flexibilidad y la originalidad al resolver problemas matemáticos

Aprendizajes Esperados

APRENDIZAJES ESPERADOS Se espera que los estudiantes sean capaces de:	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 01

Analizar gráficamente la función exponencial, en forma manual y con herramientas tecnológicas.

- Representan gráficamente la función exponencial $f(x) = a^x$, con $a \in \mathbb{R}$ y $a > 0$, en forma manual y usando herramientas tecnológicas.
- Identifican las características gráficas de una función exponencial, incluyendo dominio, recorrido e interceptos.
- Argumentan acerca de las variaciones que se producen en la gráfica al modificar los parámetros de la función exponencial. Por ejemplo, caracterizan la función $f(x) = a^x + b$, *con* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $a > 0$, observando en el gráfico la traslación vertical que resulta al variar el parámetro b.

AE 02

Analizar gráficamente la función logarítmica, en forma manual y con herramientas tecnológicas.

- Representan de modo gráfico la función logaritmo en base a $f(x) = \log_a x$, con x, $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, en forma manual y con herramientas tecnológicas.
- Identifican la función logaritmo natural como un caso particular de la función logaritmo en base a cuando $a = e$
- Identifican las características gráficas de una función logarítmica, incluyendo dominio, recorrido e interceptos.
- Argumentan sobre las variaciones que se producen en la gráfica al modificar los parámetros de la función logarítmica. Por ejemplo, caracterizan la función $f(x) = \log(x + a)$, con $a \in \mathbb{R}$, observando en el gráfico la traslación horizontal que resulta al variar el parámetro a.

AE 03

Analizar gráficamente la función raíz cuadrada, en forma manual y con herramientas tecnológicas.

- Representan gráficamente la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, con $x \in \mathbb{R}_0^+$ en forma manual y usando herramientas tecnológicas.
- Identifican las características gráficas de una función raíz cuadrada, incluyendo dominio y recorrido.
- Argumentan acerca de las variaciones que se producen en la gráfica al modificar los parámetros de la función raíz cuadrada. Por ejemplo, caracterizan la función $f(x) = \sqrt{x - a}$ con $x - a > 0$, observando en el gráfico la traslación horizontal que resulta al variar el parámetro a.

APRENDIZAJES ESPERADOS Se espera que los estudiantes sean capaces de:	**INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS** Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 04

Analizar la validez de una expresión algebraica fraccionaria.	› Identifican aquellos valores para los cuales una fracción algebraica se indefine y justifican adecuadamente. › Analizan fórmulas e interpretan las variaciones que se producen por cambios en las variables.

AE 05

Establecer estrategias para operar[10] fracciones algebraicas simples, con binomios en el numerador y en el denominador, y determinar los valores que indefinen estas expresiones.	› Relacionan la operatoria de números fraccionarios con la operatoria de las expresiones algebraicas fraccionarias, y establecen analogías y diferencias. › Establecen estrategias para simplificar fracciones algebraicas. › Establecen estrategias para sumar o restar fracciones algebraicas, considerando si los denominadores son iguales o diferentes. › Establecen estrategias para multiplicar y dividir fracciones algebraicas. › Resuelven problemas, utilizando operatoria con expresiones algebraicas fraccionarias, productos notables y factorizaciones.

AE 06

Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica y algebraicamente.	› Determinan y verifican la solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el plano cartesiano, manualmente. › Determinan y verifican la solución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en el plano cartesiano, usando un software gráfico. › Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante sustitución. › Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante reducción. › Resuelven sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante igualación. › Fundamentan acerca de cuál es el método más eficiente para resolver un sistema de ecuaciones lineales dado y determinan su solución. › Discuten acerca de la existencia y pertinencia de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

10 Suma, resta, multiplicación, división, simplificación, amplificación.

APRENDIZAJES ESPERADOS Se espera que los estudiantes sean capaces de:	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 07

Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.	› Modelan una situación, usando un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. › Relacionan un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas con el contexto de un problema. › Interpretan la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas según el contexto del problema asociado. › Identifican la función exponencial en contextos diversos. › Modelan situaciones diversas, cuyo modelo resultante sea una función exponencial. Por ejemplo, la reproducción bacteriana. › Identifican la función raíz cuadrada en contextos diversos. › Modelan situaciones diversas, cuyo modelo resultante sea una función raíz cuadrada. › Identifican la función logarítmica en contextos diversos. › Modelan situaciones diversas, cuyo modelo resultante sea una función logarítmica. Por ejemplo, la medición de la energía que libera un sismo a través de la escala de Richter.

Aprendizajes Esperados en relación con los OFT

La perseverancia, el rigor, la flexibilidad y la originalidad al resolver problemas matemáticos

- Tiene un orden y método para el registro de información
- Termina los trabajos iniciados
- Es tenaz frente a los obstáculos o dudas que se le presentan en problemas matemáticos

Orientaciones didácticas para la unidad

En la unidad anterior, los estudiantes ampliaron su conocimiento con respecto a los conjuntos numéricos. En esta, trabajarán las funciones exponenciales logarítmicas y las funciones raíz cuadrada e identificarán correctamente el dominio, el recorrido y los valores que pueden tomar algunos parámetros, incluyendo este nuevo conjunto numérico (los números reales) donde sea pertinente hacerlo.

Se recomienda apoyar el estudio de estas funciones con algún programa matemático que permite usar gráfica, como Graphmatica o funciones para Windows. El programa libre GeoGebra permite modificar las funciones de manera más dinámica.

Se sugiere que el docente ponga énfasis en la aplicación de las funciones señaladas en contextos científicos, naturales, geográficos y otro; así, el alumno extenderá el ámbito de las matemáticas a situaciones de la vida cotidiana y aterrizará los conceptos que parecen muy abstractos cuando se estudian separados del mundo real.

Con respecto a las expresiones algebraicas, se incorporan las expresiones algebraicas fraccionarias. El profesor debe guiar a los estudiantes a los procesos que ellos ya conocen (como las operaciones de números racionales) para que relacionen los procedimientos que hacían al sumar dos fracciones, con la suma de expresiones algebraicas. Deben visualizar que en estos casos también se busca un denominador común entre dos expresiones, como cuando lo hacían al sumar números; por lo tanto, tienen que generalizar los procedimientos conocidos y aplicarlos en las operaciones de fracciones algebraicas.

También debe proponerse la resolución de sistemas de ecuaciones como una herramienta matemática capaz de resolver situaciones de la vida cotidiana. Es importante usar algún programa matemático que apoye la verificación gráfica de la solución.

Es fundamental que los estudiantes desarrollen sus propias estrategias para enfrentar una situación a lo largo de la unidad. En este sentido, se recomienda -cada vez que se pueda- proponerles problemas abiertos que los impulsen a encontrar soluciones y aventurarse en la búsqueda de patrones, de soluciones más generales, etc. Los alumnos deben comunicar procedimientos y resultados, discutirlos y explicar las conclusiones obtenidas en el desarrollo sistemático de las actividades.

Respecto de la evaluación, se aconseja monitorear el logro de los Aprendizajes Esperados a medida que avanza la unidad y no solo al final de ella. De este modo, el docente sabrá si los estudiantes asimilan los conceptos centrales y podrá diseñar estrategias para trabajar con la diversidad de niveles de aprendizaje que conviven en el aula.

Es importante que estas evaluaciones midan habilidades y conocimientos y que contengan preguntas interesantes y desafiantes, pero deben adecuarse a la edad de los alumnos. Se sugiere diseñar preguntas abiertas y problemas que demanden a los estudiantes elaborar estrategias y utilizar procedimientos, considerando que los problemas en matemática no siempre tienen respuesta única ni importa siempre el resultado final. Con preguntas de este tipo, el docente podrá observar también los distintos niveles de desempeño de los alumnos y diseñar procesos de retroalimentación para aquellos aspectos que entiendan menos.

Ejemplos de Actividades

AE 01

Analizar gráficamente la función exponencial, en forma manual y con herramientas tecnológicas.

1

Estudian la función exponencial $f(x) = a^x$ para distintos valores de a, con $a \in \mathbb{IR}^+$

Construyen tablas de valores para distintos valores de a, para luego graficar. Por ejemplo, para:

a. $a = 2$

b. $a = \frac{1}{2}$

c. $a = \frac{9}{10}$

d. $a = e$

Observaciones al docente: *Se sugiere poner énfasis en los valores que puede tomar el parámetro a, ¿Qué sucede si se construye la tabla de valores para la función $f(x) = (-2)^x$? El profesor puede pedir a los alumnos que construyan esta tabla y observen los valores que se obtienen. ¿Por qué el valor de a está definido en los reales positivos? Estudiar el caso de $f(0{,}5)$.*

Luego propone que obtengan la tabla de valores de la función $f(x) = -2^x$ y observen que este caso sí es una función exponencial.

2

Analizan la gráfica de las funciones y responden para cada uno de los casos estudiados:

- ¿cuál es el dominio?
- ¿cuál es el recorrido?
- ¿en qué punto la función se intersecta con el eje de las ordenadas?

3

Responden preguntas acerca de la función exponencial $f(x) = a^x + b$, con $a, b \in \mathbb{IR}$ y $a > 0$

- ¿cuál es el dominio?
- ¿cuál es el recorrido?
- ¿en qué punto la función se intersecta con el eje de las ordenadas?

Observaciones al docente: *Se sugiere promover el uso de programas gráficos, sin dejar de lado la gráfica manual, para comprobar lo realizado por los estudiantes. También es importante apoyarse de una calculadora científica y obtener aproximaciones de ciertos valores, ya que se está trabajando en el conjunto de los números reales.*

Para el caso de la función $f(x) = a^x + b$, con $a, b \in \mathbb{IR}$ y $a > 0$, se recomienda preguntar a los alumnos qué sucede con la gráfica al variar el parámetro b.

Se puede proponer el estudio de otras funciones, modificando la posición del parámetro b; por ejemplo: $f(x) = a^x \cdot b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $b \neq 0$, y formular preguntas acerca del crecimiento y decrecimiento de la función.

AE 02

Analizar gráficamente la función logarítmica, en forma manual y con herramientas tecnológicas.

1

Estudian la función logarítmica $f(x) = \log_{10} x$, para distintos valores de x, con x Î IR.

Construyen tablas de valores para distintos valores de x. Por ejemplo, para:

- $x = 10$
- $x = 100$
- $x = 20$
- $x = -10$

Observaciones al docente: *Los estudiantes deben descubrir por qué es importante precisar el dominio de la función logaritmo. Se les puede formular preguntas como: ¿qué pasa si $x < 0$? Se propone que el docente los guíe, recordándoles la definición de un logaritmo y cuáles son sus restricciones con respecto al dominio.*

2

Estudian la función logarítmica $f(x) = \log_a x$ para distintos valores de a, con $a \in \mathbb{R}^+$ y $a \neq 1$.

Construyen las tablas de valores para distintos valores de a. Por ejemplo, para:

- $a = 10$
- $a = e$
- $a = 2$

Observaciones al docente: *Se sugiere preguntar a los estudiantes por qué es importante precisar el dominio de la base del logaritmo. Puede formular preguntas como: ¿qué pasa si $a < 0$?*

Se propone que el docente les recuerde la definición de un logaritmo y las propiedades estudiadas en la unidad de Números, especialmente la propiedad de cambio de base. Así los ayudará a encontrar los valores de la función logarítmica en base 2, que no se pueden obtener directamente de una calculadora científica convencional.

3

Grafican las funciones propuestas en las actividades 1 y 2.

4

Analizan la gráfica de las funciones y responden las siguientes preguntas para cada uno de los casos estudiados:

- ¿cuál es el dominio?
- ¿cuál es el recorrido?
- ¿en qué punto la función se intersecta con el eje de las abscisas?

5

Dada la función logarítmica $f(x) = \log\ (x + a)$, con $a \in \mathbb{R}$, responden:

- ¿cuál es el dominio?
- ¿cuál es el recorrido?
- ¿en qué punto la función se intersecta con el eje de las abscisas?

Observaciones al docente: *Para estas funciones, se sugiere usar un programa gráfico y una calculadora científica para apoyar la gráfica manual.*

Para el caso de la función $f(x) = \log\ (x + a)$, con $a \in \mathbb{R}$, el profesor puede preguntar a los alumnos qué sucede con la gráfica al variar el parámetro a.

Se puede estudiar otras funciones, modificando la posición del parámetro a; por ejemplo: $f(x) = a \log\ (x)$, con $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, y preguntar acerca del crecimiento y decrecimiento de la función.

AE 03

Analizar gráficamente la función raíz cuadrada, en forma manual y con herramientas tecnológicas.

1

Estudian la función raíz cuadrada $f(x) = a\sqrt{bx}$, con $bx \in \mathbb{R}_0^+$ y $a \in \mathbb{R}$.

Construyen tablas de valores para distintos valores de a y b. Por ejemplo, para:

- $a = b = 1$
- $a = -2$ y $b = 1$
- $a = 1$ y $b = -2$
- $a = -\frac{1}{2}$ y $b = -5$

Observaciones al docente: *Se sugiere observar las tablas de valores que construyen los estudiantes y utilizar los errores. Por ejemplo, algunos estudiantes podrían pensar que no se puede obtener el valor aproximado de una raíz solo por el hecho de ver el signo negativo en el radicando. Algunos alumnos también pueden considerar números negativos de la función $j(x) = \sqrt{x}$ en la tabla de valores y no percatarse de que ese valor no existe en los números reales; por ejemplo, quizás escriban $x = -4$, $j(-4) = -2$*

La idea es hacer la prueba en una calculadora para que vean qué resultado arroja al pedir el valor de $\sqrt{-4}$.

Se recomienda recordar después el concepto de raíz cuadrada de un número.

2

Grafican las funciones propuestas en la actividad 1.

3

Analizan la gráfica de las funciones y responden para cada uno de los casos estudiados:

- ¿cuál es el dominio?
- ¿cuál es el recorrido?

Describen los cambios producidos en los gráficos al variar los valores de los parámetros a y b.

4

Sea la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x-h} + k$, con $h, k \in IR$. Responden:

- ¿cuál es su dominio?
- ¿cuál es el recorrido?

Describen los cambios producidos en los gráficos al variar los valores de los parámetros h y k.

Observaciones al docente: *Se sugiere usar algún graficador para estudiar mejor los cambios que se registran al variar los distintos parámetros y analizar el dominio y el recorrido de todos esos casos.*

AE 04

Analizar la validez de una expresión algebraica fraccionaria.

1

Dada la expresión $\frac{a}{b}$, responder:

- ¿por qué se dice que esta expresión se indefine cuando $b = 0$ para cualquier valor de $a \in IR$ con $a \neq 0$?
- ¿qué sucede en el caso $a = b = 0$? ¿También se indefine o ese valor es infinito? Fundamente.

2

Si x pertenece a los números reales, ¿qué restricción pondría usted al valor de x en las siguientes expresiones?

- $\frac{x^3 + x}{4x^2 + 4}$
- $\frac{3x}{2x + 1}$
- $\frac{x + 1}{2x}$
- $\frac{2x - 3}{3x + 7}$

Observaciones al docente: *Se sugiere poner énfasis en la importancia de restringir el dominio de las variables en los denominadores de las fracciones algebraicas, dar algunos ejemplos algebraicos y formular preguntas con ejemplos numéricos que conduzcan a los estudiantes al algoritmo de la división. Por ejemplo: $10 : 5 = 2$, porque existe un único número en el conjunto de los números reales que multiplicado por 5 resulte 10, y ese número es 2.*

¿Qué sucede en el caso $10 : 0 = x$? ¿Es posible atribuir un valor definido para x en esta expresión? También puede proponer el caso $0 : 0 = x$.

AE 05

Establecer estrategias para operar[11] fracciones algebraicas simples, con binomios en el numerador y en el denominador, y determinar los valores que identifiquen estas expresiones.

1

En las siguientes expresiones, n pertenece a los números naturales.

$$\frac{3n}{4n+1},\ \frac{n+1}{2n},\ \frac{2n}{3n+7}$$

a. los estudiantes evalúan esas expresiones para distintos valores de n

b. responden las siguientes preguntas:

- ¿cuál es el menor valor que toma cada una de esas expresiones?, ¿para qué n se produce?
- ¿qué se puede decir de esas expresiones cuando n toma valores grandes; por ejemplo, $n = 100$, $n = 1.000$, $n = 10.000$?

2

Factorizan expresiones algebraicas.

Por ejemplo:
$a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$, $a^5 - b^5$

- Identifican regularidades en esas factorizaciones y la aplican para factorizar; por ejemplo, las expresiones $a^7 - b^7$, $a^3 + b^3$, $a^5 + b^5$, $a^7 + b^7$
- Identifican regularidades en esas factorizaciones y la aplican para factorizar; por ejemplo, la expresión $a^9 + b^9$
- Utilizan factorizaciones del tipo $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$ para factorizar las siguientes expresiones:
  a. $x^2 + 7x + 10$
  b. $a^2 + 3a - 4$
  c. $b^2 - 12b + 27$

R
- Usan factorizaciones para determinar magnitudes del mundo. Por ejemplo, la suma por diferencia para determinar el radio de la Tierra, conocida su masa. (Física)

❗ ***Observaciones al docente:*** *Se sugiere trabajar esta actividad junto con el profesor de Física. Uno de los objetivos que debieran alcanzar los estudiantes es llegar a la ecuación* $\frac{GM_T m}{r^2} = mg$*, donde* mg *es el peso de un cuerpo que está en la superficie de la Tierra,* G *la constante de gravitación universal,* M_T *la masa de la Tierra y* r*, su radio.*

3

Simplifican al máximo expresiones fraccionarias, justificando los procedimientos utilizados. Por ejemplo, simplifican las siguientes expresiones:

- $\frac{a^2 + 2a - 3}{a^2 + 5a + 6}$, $a \neq -2$, $a \neq -3$
- $\frac{m^3 + m}{4m^2 + 4}$
- $\frac{9xy - 7x}{9y^2 + 11y + 14}$, $y \neq -2$, $y \neq \frac{7}{9}$
- $\frac{(n-3)^2(m-1)}{(1-m)(9-3n)}$, $m \neq 1$, $n \neq 3$

11 Suma, resta, multiplicación, división, simplificación, amplificación.

› $\dfrac{m^3 + n^3}{m^2 - n^2}$, $m \neq \pm n$

4
Obtienen el mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas. Por ejemplo, el mínimo común múltiplo de:

› $5m^2nr$ y $25mn^3$

› $x^2 - x$ y $x^2 - 1$

› $a^2 + b^2 + 2ab$, $a^2 - b^2$ y $a^2 + ab$

› $a^3 + b^3$, $a^2 - b^2$ y $a^2 + ab$

5
Operan expresiones fraccionarias y justifican los procedimientos utilizados. Por ejemplo, realizan las siguientes operaciones:

› $\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x}$

› $\dfrac{a+b}{a(a-b)} + \dfrac{a+b}{b(a-b)}$

› $\dfrac{a}{a^2-ab} + \dfrac{a+b}{ab-b^2}$

› $\dfrac{1}{a^2+ab+b^2} - \dfrac{b}{a^3-b^3} + \dfrac{a}{a^2-ab}$

› $\dfrac{y-1}{x+2} : \dfrac{y+1}{x+2}$

› $\dfrac{a^2+b^2+2ab}{a^2-b^2} : \dfrac{ab+b^2}{a-b}$

Observaciones al docente: *Es importante que los estudiantes:*

› *reconozcan y justifiquen los procedimientos que utilizan, si usan propiedades como conmutatividad, distributividad;*

› *identifiquen los nombres de los factores que trabajan (monomios, binomios, etc.), si realizan simplificaciones, factorizaciones,*

para que se vayan apropiando del lenguaje matemático y comprendan las acciones que realizan; es decir, que razonen matemáticamente, no que memoricen procedimientos.

AE 06

Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica y algebraicamente.

1
Para cada una de las ecuaciones de los siguientes sistemas, asignan valores a una de las variables (por ejemplo, a x) y calculan la otra variable (en este caso, y). Registran los valores en una tabla.

› $\left.\begin{array}{r} -3x + y = -2 \\ 2x + y = 8 \end{array}\right|$

› $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 2 \\ 3x + y = 3 \end{array}\right|$

Grafican las tablas de valores asociadas a cada una de las ecuaciones. La solución del sistema es la intersección de las rectas obtenidas.

2
Resuelven algebraicamente los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, utilizando el método más apropiado. Justifican la elección del método.

› $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 3 \\ 3x + 6y = 4 \end{array}\right|$

› $\left.\begin{array}{r} a + m = 40 \\ 4a + 2m = 100 \end{array}\right|$

› $\left.\begin{array}{r} -3p - q = 2 \\ p - q = -7 \end{array}\right|$

3
Antes de la resolución, analizan los sistemas y determinan si tienen una, ninguna o infinitas soluciones. Por ejemplo, indican si los siguientes sistemas de ecuaciones tienen una, ninguna o infinitas soluciones:

› $\left.\begin{array}{r} 2a + b = 6 \\ a + \frac{b}{2} = 1 \end{array}\right|$

› $\left.\begin{array}{r} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 2 \\ x + y = 4 \end{array}\right|$

Observaciones al docente: Se sugiere al profesor usar un graficador para resolver un sistema de ecuaciones gráficamente o comprobar resultados obtenidos algebraicamente. También debe asegurarse de dejar clara la diferencia entre rectas paralelas coincidentes y no coincidentes, tanto gráfica como algebraicamente.

AE 07

Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

1
Determinan los sistemas de ecuaciones lineales asociados a situaciones en diversos contextos. Por ejemplo, determinan el sistema asociado a la siguiente situación:

Una compañía A de telefonía móvil ofrece un plan nocturno para los teléfonos de prepago a un costo de $0,5 el segundo más un cargo fijo de $40 por llamada. Una compañía B ofrece otro plan nocturno para los teléfonos de prepago a un costo de $0,2 el segundo, pero con un cargo fijo de $70 por llamada. ¿Cuál es el plan más económico?

2
Considerando el problema de la actividad 1, analizan los resultados en función del problema y responden:

- ¿cuál es el punto de intersección de las rectas asociadas a las ecuaciones del problema?
- ¿qué interpretación tiene el punto de intersección en ese problema?
- ¿cuál es el plan más conveniente para contratar?
- ¿siempre es más económico un plan que otro?

Observaciones al docente: *Se sugiere que el profesor proponga situaciones de la vida cotidiana que sean significativas para los alumnos. Por ejemplo, problemas de comparación de cuentas de insumos básicos, telefonía y compañías de servicios, entre otros.*

3
Formulan situaciones de interés, asociadas a modelos consistentes en sistemas de ecuaciones, y elaboran estos modelos. Por ejemplo, los estudiantes de II medio de un colegio desean saber qué cantidad de entradas se vendió en una fiesta a jóvenes y adultos; conocen el valor para adultos y el valor para jóvenes, el monto recaudado y la cantidad total de asistentes.

4
De una lista de situaciones en contexto, identifican cuáles son modelos exponenciales.

Por ejemplo:

Situación	Modelo	Variables
1 Población de ciervos en una biorreserva	$N(t) = 100 \cdot e^{0,9t}$	$N(t)$: cantidad de ciervos t: tiempo en años
2 Altura que alcanza un objeto con una velocidad inicial de 19,6 metros por segundo en un tiempo determinado	$h(t) = 19,6t - 4.9t^2$	$h(t)$: altura en metros t: tiempo en segundos
3 Eliminación de un fármaco por la orina	$f(x) = 0,8^x$	$f(x)$: cantidad de dosis en el cuerpo en mg. x: número de días

5
Aplican un modelo exponencial para resolver problemas.
Por ejemplo: La cantidad de miligramos $f(t)$ de un medicamento que queda en el organismo de una persona, luego de t horas de haber sido administrado, está dada por la función $f(t) = 10 \cdot e^{(-0,2t)}$.

Responden las siguientes preguntas:
- ¿cuántos miligramos contiene el medicamento al momento de administrarlo?
- al cabo de 12 horas, ¿cuántos miligramos quedan en el organismo de la persona que lo tomó?

6
Grafican la función anterior de acuerdo al contexto del problema planteado. ¿Cuál es el dominio de la función en ese contexto?

Observaciones al docente: *Es importante que los estudiantes reconozcan un modelo exponencial en un contexto que les permita apreciar que, en esos casos, la variable independiente es el exponente de una base real positiva dada; así se evitará que, por el solo hecho de ver una potencia en un modelo, concluyan que ese modelo es una función exponencial.*

Además de reconocer un modelo exponencial, deben aplicarlo para resolver problemas. Se sugiere que el profesor presente a los alumnos (o los incentive a investigar) situaciones como la población de un lugar determinado, la reproducción de alguna célula o bacteria, la estimación de la antigüedad por medio del carbono 14, etc.

R **7**
Aplican un modelo logarítmico para resolver problemas. (Física)

Por ejemplo:
La escala de Richter es una de las que se usa para medir la magnitud de un sismo. La cantidad de energía liberada en un movimiento sísmico está dada por la función

$$R(E) = \frac{\log(E) - 11.8}{1.5},$$

donde E es la energía liberada medida en ergios[12] y R es la magnitud del sismo en grados de la escala de Richter.

Responden las siguientes preguntas:
- ¿cuál es la magnitud de un sismo que liberó $6,309573445 \cdot 10^{17}$ ergios?
- ¿cuál es la magnitud de un sismo que liberó $1,9952622315 \cdot 10^{25}$ ergios?

12 Ver detalles en http://es.wikipedia.org/wiki/Ergio

Observaciones al docente: *Se recomienda que el profesor motive a los estudiantes a recopilar información acerca de las distintas escalas de medidas de sismos, identifique algunos sucesos de esta naturaleza y los relacione con las magnitudes involucradas en cada uno. Esta actividad se puede relacionar con la asignatura de física, en la unidad "Tierra y universo", donde han estudiado contenidos relativos a movimientos sísmicos.*

8

Aplican un modelo de raíz cuadrada para resolver problemas.

Por ejemplo:
El tiempo que tarda un cuerpo en caer verticalmente a una distancia determinada se representa a través de la siguiente función:

$$t(d) = \frac{\sqrt{2d}}{\sqrt{g}},$$

donde:
d: distancia recorrida en caída libre vertical medida en metros
g: constante de aceleración de gravedad medida en metros por segundos cuadrados (utiliza esta aproximación de la constante: $10\ \frac{m}{s^2}$)
t: tiempo medido en segundos

Responden:
- se deja caer una piedra en sentido vertical desde un acantilado de 180m de altura sobre el mar; ¿cuánto tiempo demora en llegar al mar?
- se deja caer una manzana desde un edificio de 15 metros, ¿cuántos segundos tarda en llegar al suelo?
- averigüe la altura de la torre Eiffel y calcule el tiempo que demoraría un cuerpo en llegar al suelo
- con respecto a la constante de aceleración de gravedad, averigüe el valor exacto que se ocupa para estos cálculos o si hay un rango de este valor
- ¿influye la masa de un cuerpo en caída libre?

Observaciones al docente: *Se sugiere relacionar esta actividad con los conceptos estudiados en la unidad de "Fuerza y movimiento" en Física. Además, los alumnos pueden hacer una investigación más acabada en la que analicen qué otras variables intervienen en este tipo de movimientos, cuáles son las unidades de medida involucradas, etc.*

Ejemplo de Evaluación

AE 05

Establecer estrategias para operar[13] fracciones algebraicas simples, con binomios en el numerador y en el denominador, y determinar los valores que indefinen estas expresiones.

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

- Relacionan la operatoria de números fraccionarios con la operatoria de las expresiones algebraicas fraccionarias, y establecen analogías y diferencias.
- Establecen estrategias para simplificar fracciones algebraicas.
- Establecen estrategias para sumar o restar fracciones algebraicas, considerando si los denominadores son iguales o diferentes.
- Establecen estrategias para multiplicar y dividir fracciones algebraicas.
- Resuelven problemas, utilizando operatoria con expresiones algebraicas fraccionarias, productos notables y factorizaciones.

ACTIVIDAD

Se presenta una situación relativa a operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias.
Se pide que calculen la siguiente suma:

$$\frac{b}{a^4 - ab^3} + \frac{a-b}{a^3 + a^2b + ab^2}$$

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Se sugiere considerar los siguientes aspectos:

1 Factorizan correctamente las expresiones de los denominadores de las fracciones.
2 Determinan correctamente el mínimo común denominador.
3 Realizan correctamente la suma.

13 Suma, resta, multiplicación, división, simplificación, amplificación.

Unidad 4

Datos y azar

PROPÓSITO

Uno de los objetivos de esta unidad es que los estudiantes comprendan que, para analizar la dispersión de datos, es razonable considerar las desviaciones respecto de la media. De esta manera se introduce el concepto de desviación estándar como herramienta para realizar ese análisis. Es útil que los estudiantes utilicen las medidas de tendencia central y las de posición para resumir bien la información, especialmente cuando hay un conjunto numeroso de datos. Se incorpora el concepto de variable aleatoria y los alumnos la identifican como una herramienta fundamental para entender resultados de la probabilidad y de la estadística y aplicar estos resultados. Es el caso de la ley de los grandes números, en la cual se basa gran parte de la probabilidad y de la estadística y que los estudiantes trabajan de manera central. También se busca que los alumnos caractericen eventos independientes, utilizando la medida de probabilidad, generen resultados donde interviene este tipo de eventos y los apliquen para resolver problemas asociados al cálculo de probabilidades.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Población y muestra
- Experimento aleatorio
- Muestreo aleatorio simple
- Equiprobabilidad de eventos
- Principio multiplicativo
- Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio
- Probabilidad teórica de un evento
- Medidas de tendencia central
- Medidas de posición: cuartiles y percentiles

PALABRAS CLAVE

Rango, varianza, desviación estándar, medidas de posición, medidas de dispersión, medidas de tendencia central, muestreo aleatorio, variable aleatoria, media muestral, media de la población, probabilidad.

CONTENIDOS

- Medidas de dispersión: desviación estándar
- Variables aleatorias
- Media muestral
- Ley de los grandes números
- Pruebas independientes
- Eventos independientes
- Eventos mutuamente excluyentes
- Cálculo de probabilidades de eventos independientes y mutuamente excluyentes

HABILIDADES

- Analizar información, utilizando la desviación estándar
- Organizar datos, usando cuartiles y percentiles
- Caracterizar variables aleatorias
- Determinar medias maestrales
- Conjeturar acerca de la relación entre la media muestral y la media de una variable aleatoria y verificar las conjeturas formuladas
- Resolver problemas acerca de las probabilidades de sucesos independientes o mutuamente excluyentes

ACTITUDES

- Interés por conocer la realidad al trabajar con información cuantitativa de diversos contextos

Aprendizajes Esperados

APRENDIZAJES ESPERADOS
Se espera que los estudiantes sean capaces de:

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 01

Determinar el rango, la varianza y la desviación estándar de conjuntos de datos.

- Interpretan las fórmulas que permiten calcular la desviación estándar de un conjunto de datos.
- Analizan datos a través de la desviación estándar de ese conjunto de datos.
- Determinan el rango de un conjunto de datos.

AE 02

Comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando medidas de tendencia central, posición y dispersión.

- Determinan las medidas de tendencia central para uno o más conjuntos de datos e interpretan correctamente la información.
- Determinan las medidas de posición para uno o más conjuntos de datos e interpretan correctamente la información.
- Comparan dos conjuntos de datos a partir de sus medidas de tendencia central, de posición y de dispersión.

AE 03

Emplear elementos del muestreo aleatorio simple para inferir sobre la media de una población.

- Producen muestras aleatorias de una población, utilizando diferentes métodos.
- Emplean medios computacionales para hacer inferencias de una población.

AE 04

Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

- Reconocen una variable aleatoria como una clase especial de función.
- Asignan números específicos a resultados de experimentos aleatorios.

AE 05

Calcular medias muestrales.

- Calculan la media muestral de pruebas independientes de experimentos probabilísticos.
- Realizan experimentos con medias muestrales y establecen resultados.

APRENDIZAJES ESPERADOS Se espera que los estudiantes sean capaces de:	**INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS** Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 06

Verificar que, a medida que el número de pruebas crece, la media muestral se aproxima a la media de la población.

- Calculan la media de una población. Por ejemplo, la media de los resultados del lanzamiento de un dado no trucado.
- Extraen muestras de una población y calculan sus medias. Por ejemplo, si se tira 4 veces un dado no trucado y si los números son $x_1=4$, $x_2=5$, $x_3=1$, $x_4=3$, calculan la media de estos resultados.
- Analizan los resultados de las medias obtenidas de las muestras cuando el número de datos de las muestras aumenta. Por ejemplo, analizan los resultados de las medias obtenidas al lanzar un dado 5 veces, 6 veces, 7 veces, 8 veces, etc.

AE 07

Resolver problemas en contextos diversos, aplicando las propiedades de la suma y el producto de probabilidades.

- Identifican cuándo dos eventos son independientes.
- Establecen cuándo la probabilidad de la intersección de dos eventos equivale a la multiplicación de las probabilidades.
- Establecen cuándo la probabilidad de la unión de dos eventos equivale a la suma de las probabilidades.
- Resuelven problemas relativos al cálculo de probabilidades, aplicando propiedades de la suma de probabilidades.
- Resuelven problemas relativos al cálculo de probabilidades, aplicando propiedades del producto de probabilidades.

Aprendizajes Esperados en relación con los OFT

Interés por conocer la realidad al trabajar con información cuantitativa de diversos contextos

- Propone temas de su interés para trabajar en clases
- Aporta información complementaria sobre los temas abordados
- Formula preguntas sobre los temas implicados en la información trabajada
- Plantea opiniones al interpretar los datos
- Argumenta y contrargumenta con base en los datos analizados

Orientaciones didácticas para la unidad

Respecto de las medidas de dispersión, conviene que el docente trabaje en profundidad el concepto de desviación estándar y la fórmula asociada a él; específicamente, por qué esta fórmula mide la dispersión de valores respecto de la media y la importancia que tiene para comparar muestras.

Respecto de las medidas de posición, es importante promover actividades que lleven a los estudiantes a proponer maneras de ordenar datos y de contrastar esos métodos con los que entregan los cuarteles y percentiles. Se sugiere al docente trabajar las fórmulas que permiten calcular los cuartiles y percentiles y, específicamente, orientar a los alumnos para que las entiendan. Ellos deben ordenar cantidades grandes de datos que emanan de contextos diversos.

Respecto de las variables aleatorias, el profesor tiene que destacar la importancia que tienen en la probabilidad y la estadística y explicar que, sin ellas, no se puede comprender ni aplicar resultados en estas áreas. Es necesario que los estudiantes entiendan estas variables como una clase especial de función y ejerciten el cálculo de espacios maestrales. Asimismo, que den ejemplos de distintas instancias donde se presentan (como conjunto de partida de estas funciones) y que constaten que sus valores de llegada o su imagen son los números reales. Es recomendable ejercitar actividades relacionadas con la generación de distintas variables aleatorias que tengan como dominio un mismo espacio muestral.

Es importante que el estudiante asimile uno de los resultados más importantes de estas áreas: la ley de los grandes números. Para ello, se sugiere trabajar la noción de pruebas independientes e identificarlas en contextos diversos. Se recomienda que el estudiante identifique, en el caso de una variable aleatoria X de media μ, que el resultado de cada prueba es una variable aleatoria con la misma media que X, y que el valor medio (o media muestral) de todos los resultados también es una variable aleatoria. Conviene hacer muchos experimentos para que verifiquen que, mientras más experimentos lleven a cabo, más se aproxima la media muestral a la media μ.

Respecto del cálculo de probabilidades de eventos independientes y mutuamente excluyentes, se sugiere trabajar de manera exhaustiva las operaciones con conjuntos; asimismo, usar los diagramas de Venn para verificar y generar resultados que midan la probabilidad de uniones e intersecciones entre ellos. Se tiene que aplicar estas actividades a distintos contextos con ese tipo de eventos.

Ejemplos de Actividades

AE 01

Determinar el rango, la varianza y la desviación estándar de conjuntos de datos.

1
Calculan el rango de diferentes conjuntos de datos. Por ejemplo, el rango de las notas de una prueba de matemática que obtuvieron los estudiantes de un curso.

2
Analizan, a través de ejemplos, la fórmula $\sqrt{\dfrac{(x_1-\mu)^2 + (x_2-\mu)^2+\ldots+(x_n-\mu)^2}{n}}$,

que permite calcular la desviación estándar σ de n valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ de una población que tiene media μ.

Por ejemplo, utilizan los datos 1, 2, 2, 4, 12, 15 y los datos 4, 5, 5, 7, 7, 8, ambos de media $\mu = 6$, para analizar esta fórmula.

3
Comprueban, a través de ejemplos, que una manera alternativa de calcular la desviación estándar σ es a través de la fórmula

$\sigma = \sqrt{\dfrac{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2}{n} - \mu^2}$, donde μ es la media de los datos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ de una población.

4
Interpretan correctamente que la dispersión de los n valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ de una muestra respecto de su media $\overline{x}$ se puede medir a través de la fórmula:

$$\sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n - 1}}$$

En cambio, si $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son los n valores numéricos de una población total con media μ, su desviación estándar se calcula mediante la fórmula:

$$\sqrt{\frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \ldots + (x_n - \mu)^2}{n}}$$

Aplican estos resultados para calcular varianzas y desviaciones estándar de poblaciones y de muestras de esas poblaciones.

AE 02

Comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando medidas de tendencia central, posición y dispersión.

1
Aplican la definición de la mediana para calcular esa medida en cantidades de datos pares e impares.

2
Organizan datos en tablas de frecuencias y calculan la media de esos datos en función de esas frecuencias. Por ejemplo, en un condominio de 21 casas, el número de habitantes de cada casa es:

3	3	2	1	1	4	5
4	3	2	5	1	1	3
2	4	3	1	4	2	5

- realizan una tabla de frecuencias
- calculan la media del conjunto de datos, utilizando las frecuencias

3
Establecen que, aunque la media y la mediana se sitúan en el centro de los datos, la mediana es sensible al número de ellos y la media lo es respecto de sus valores. Por ejemplo, de 30 afiliados de una AFP, 6 de ellos cotizan mensualmente $70.000, 12 cotizan $80.000, 8 cotizan $90.000, 3 cotizan $100.000 y 1 cotiza $110.000.
- calculan la media y la mediana de las cotizaciones
- calculan la media y la mediana de las cotizaciones cuando las personas que cotizan $100.000 y $110.000 aumentan este monto en $40.000 y $50.000
- analizan los resultados obtenidos y entregan conclusiones

4
Distinguen muestras de igual media a partir de la medida de la dispersión de sus valores respecto de esa media. Por ejemplo, distinguen las muestras A y B a partir de la desviación estándar de los siguientes conjuntos de datos:
A: 18, 18, 19, 20, 20
B: 5, 10, 10, 30, 40

AE 03

Emplear elementos del muestreo aleatorio simple para inferir sobre la media de una población.

1
Generan números aleatorios, usando una calculadora. Por ejemplo, emplean la tecla RAN de la calculadora para seleccionar de manera aleatoria una muestra de 70 personas de una población de 1.500 personas.

2
Infieren acerca de la media de una población, utilizando elementos del muestreo aleatorio simple. Por ejemplo, estiman la estatura promedio de los estudiantes de un colegio de 3.000 estudiantes con una tabla de números aleatorios para seleccionar una muestra aleatoria de 20 estudiantes.

AE 04

Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

1
Describen espacios muestrales de experimentos aleatorios. Por ejemplo, describen el espacio muestral que resulta al lanzar cuatro monedas.

2
Asignan valores numéricos a cada punto de un espacio muestral. Por ejemplo, asignan valores numéricos a cada punto (a, b) de un espacio muestral S que resulta del lanzamiento de dos dados.

Observaciones al docente: *El docente debe cerciorarse de que la regla para asignar valores numéricos a cada punto del espacio muestral sea fácil de seguir. En el caso de la actividad propuesta, sería fácil asignar a cada punto (a, b) el mínimo entre a y b. De esta manera $(2, 5) \rightarrow 2$, $(1, 6) \rightarrow 1$.*

3
Caracterizan una variable aleatoria de un espacio muestral de un experimento.

Observaciones al docente: *Es importante que el profesor trabaje con sus estudiantes en esta caracterización y los guíe para que concluyan, por ejemplo, que una de las características de una variable aleatoria es que todas las preimágenes de cada intervalo de los números reales es un suceso del espacio muestral.*

4
Verifican que la función $X : S \rightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria, donde S es el espacio muestral del experimento (que consiste en lanzar cinco veces una moneda) y $X(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5)$, con A_i cara o sello, corresponde al número de caras que salen.

5
Al tirar un par de dados, los estudiantes determinan:

- el espacio muestral S
- $X(1,5)$
- $X(6,3)$

donde X es la variable aleatoria que asigna a cada punto (a, b) de S la suma de los números; es decir, $X(a, b) = a + b$

6
Determinan el conjunto de pares ordenados $[(x_i), f(x_i)]$, donde f es la función que asigna probabilidades a los puntos del conjunto del recorrido de la variable aleatoria $X : \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$; es decir, $f(x_k) \equiv P(X = x_k)$, y representan el gráfico de probabilidad de la variable aleatoria en un diagrama de barras o histograma. Por ejemplo, en el lanzamiento de una moneda tres veces, donde X es la variable aleatoria que asigna a cada punto del espacio muestral:

$S = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS\}$

El número de sellos que resultan representa el gráfico de probabilidad de X en un diagrama de barras o en un histograma.

AE 05

Calcular medias muestrales.

AE 06

Verificar que, a medida que el número de pruebas crece, la media muestral se aproxima a la media de la población.

1
Calculan la media muestral $\overline{X}_n$ de pruebas independientes de experimentos aleatorios. Los estudiantes lanzan cuatro veces una moneda y consideran que la variable aleatoria es el número de caras que salen. Utilizan el computador para simular el experimento: repiten a veces el experimento de lanzar la moneda cuatro veces y registran los resultados en la tabla siguiente para $a = 10$, $a = 50$, $a = 100$. Luego registran la media muestral $\overline{X}_n$:

	0	1	2	3	4	$\overline{X}_n$
10 experimentos						
50 experimentos						
100 experimentos						

2
Comparan los valores $\overline{X}_{10}$, $\overline{X}_{50}$, $\overline{X}_{100}$ con el valor 2.

3
Realizan otros experimentos; por ejemplo, el lanzamiento de dados.

4
Establecen conclusiones respecto del valor al que se aproxima la media muestral $\overline{X}_n$ a medida que n aumenta.

❗ ***Observaciones al docente:*** *El profesor debe realizar actividades adicionales para trabajar la ley de los grandes números. Los estudiantes tienen que asimilar esa ley, debido a su importancia.*

AE 07

Resolver problemas en contextos diversos, aplicando las propiedades de la suma y el producto de probabilidades.

1
Identifican eventos mutuamente excluyentes y aplican el postulado relativo a la probabilidad de la unión de eventos mutuamente excluyentes $A_1, A_2, A_3, \ldots : P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$ en el cálculo de probabilidades.

Por ejemplo, se basan en el postulado anterior para calcular la probabilidad de sacar, al menos, una cara al lanzar dos veces una moneda.

❗ ***Observaciones al docente:*** *El profesor debe definir las probabilidades como los valores de una función de conjunto que asigna números reales a los diferentes subconjuntos de un espacio muestral. Se sugiere que muestre a sus estudiantes los postulados de probabilidad; es decir, que la probabilidad de un evento satisface:*

1) $P(A) \geq 0$, para cualquier subconjunto A del espacio muestral S
2) $P(S) = 1$
3) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$, para eventos mutuamente excluyentes $A_1, A_2, A_3, \ldots$ de S

2
Usan diagramas de Venn para verificar que la probabilidad de la unión de dos eventos es la suma de las probabilidades de esos eventos menos la probabilidad de la intersección entre ellos, y la aplican en el cálculo de probabilidades.

Por ejemplo, calculan la probabilidad de que una familia posea cualquiera de dos aparatos (un televisor convencional o un televisor de alta definición) o ambas clases de aparatos, sabiendo que las probabilidades de que una familia escogida aleatoriamente para una encuesta de muestreo en una región tenga un televisor convencional, un LCD o ambas clases de aparatos, son 0,85, 0,32 y 0,28, respectivamente.

3
Aplican la definición de eventos independientes para determinar los eventos que satisfacen esa condición. Por ejemplo, al lanzar una moneda tres veces, determinan si los eventos A y B o B y C son independientes, donde A es el evento de que ocurra cara en los dos primeros lanzamientos, B el evento de que en el tercer lanzamiento se obtenga sello, y C el evento de que se obtengan dos sellos en los tres lanzamientos.

4
Identifican situaciones donde la igualdad entre la probabilidad de la intersección de tres eventos y la multiplicación entre sus probabilidades no garantiza la independencia entre ellos. Por ejemplo, en un espacio equiprobable $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ se definen los eventos:
$A_1=\{a, b, c, d\}$, $A_2=\{a, b, c, d\}$, $A_3=\{a, b, c, d\}$

Se puede verificar que $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)$, pero que
$P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1)\,P(A_2)$
$P(A_1 \cap A_3) \neq P(A_1)\,P(A_3)$
$P(A_2 \cap A_3) \neq P(A_2)\,P(A_3)$

Observaciones al docente: *Se sugiere trabajar actividades de generalización de la independencia entre eventos.*

Ejemplo de Evaluación

AE 02

Comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando medidas de tendencia central, posición y dispersión.

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

- Determinan las medidas de tendencia central para uno o más conjuntos de datos e interpretan correctamente la información.
- Determinan las medidas de posición para uno o más conjuntos de datos e interpretan correctamente la información.
- Comparan dos conjuntos de datos a partir de sus medidas de tendencia central, de posición y de dispersión.

ACTIVIDAD

A continuación, se presenta una situación relativa a comparaciones de conjuntos de datos. Explique las similitudes y diferencias de las siguientes distribuciones:

Edad	Frecuencia
20-29	15
30-39	17
40-49	20
50-59	23
60-69	15

Edad	Frecuencia
20-29	1
30-39	5
40-49	50
50-59	30
60-69	4

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Se sugiere considerar los siguientes aspectos:

1 Interpretan correctamente el problema.

2 Identifican que, para comparar ambas distribuciones, deben calcular sus medias y desviación estándar.

3 Calculan correctamente las medias y las desviaciones estándar en cada distribución.

4 Explican las similitudes y diferencias de estas dos distribuciones.

Bibliografía

BIBLIOGRAFÍA PARA EL DOCENTE

ALEKSANDROV, A., KOLMOGOROV, A., LAURENTIEV, M. Y OTROS. *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Tres volúmenes. Madrid, Alianza Universidad, 1976.

ALSINA CATALÁ, C. Y OTROS. *Simetría dinámica*. Ed. Síntesis, 1990.

ALSINA CATALÁ, C., BURGUÉS FLAMERICH, C., FORTUNY AYMENY, J. M. *Materiales para construir la geometría*. Ed. Síntesis, 1988.

ALSINA CATALÁ, C., FORTUNY AYMENI, J. M., BURGUÉS FLAMERICH, C. *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid. Ed. Síntesis.

ARAYA S., ROBERTO, MATUS, CLAUDIA. *Buscando un orden para el azar, Proyecto Enlaces Matemática*. 2ª ed. Ed. Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile, 2008.

ARGÜELLES RODRÍGUEZ, J. *Historia de la matemática*. Ed. Akal, 1989.

ARIAS, NAFRÍA, DOMÍNGUEZ ET AL. *Hoja de cálculo en la enseñanza de las matemáticas en secundaria*. Ed. de la Universidad Autónoma de Madrid, 1992.

ARTIGUE, M. *Una introducción a la didáctica de la matemática*. En: Enseñanza de la Matemática, Selección bibliográfica. Traducción para el PTFD, MCyE, 1994.

ARTIGUE, MICHÉLE ET AL. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México, Grupo Editorial Iberoamericana, 1995.

AZCÁRATE GIMÉNEZ, C., DEULOFEU PIQUET, J. *Funciones y gráficas*. Ed. Síntesis, 1990.

BAEZA R., OSVALDO. *Funciones potencia, exponencial y logaritmo*. Proyecto Enlaces Matemática. 2ª ed. Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile, 2008.

BERLANGA, R., BOSCH, C., RIVAUD, J. *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*. México, Fondo de Cultura Económica, 2000.

BOYER, C. B. *Historia de las Matemáticas*. Madrid, Alianza Universidad Textos, 1987.

BOBADILLA A., GLADYS, BILLIKE, J. *Apuntes de Cálculo I*. Universidad de Santiago de Chile, 1997.

BROUSSEAU, GUY. *"Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática"*, traducción realizada por Dilma Fregona (FAMAF), Universidad de Córdoba y Facundo Ortega, Centro de Estudios Avanzados. Argentina. UNC, 1993.

BURGOS DE, J. *Curso de Álgebra y Geometría*. Madrid, Alhambra Longman, 1994.

CALLEJO, MARÍA LUZ. *Un club de matemática para la diversidad*. Madrid, Nancea, 1994.

CANTORAL, R. ET AL. *Desarrollo del pensamiento matemático*. México, D.F, México, Trillas, 2003.

CAÑÓN, C. *La matemática creación y descubrimiento*. Madrid, Universidad Pontifica de Comillas, 1993.

CEDILLO, TENOCH. *Calculadoras: Introducción al álgebra*. México, Grupo Editorial Iberoamericana, 1997.

CENTENO, JULIA. *Números decimales*. Madrid, Ed. Síntesis, 1995.

CHEVALLARD, Y. *La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Aique, 1991.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M., GASCÓN, J. *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, Horsori, 1997.

CORBALÁN, FERNANDO. *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona, Ed. Grao, 1995.

COXETER, H. S. M., GREITZER, S. L. *Retorno a la geometría*. Madrid, Ed. Euler, 1994.

DE MELLO S., JULIO CÉSAR (MALBA TAHAN). *El hombre que calculaba*. Ed. Limusa, 2002.

DÍAZ, J. ET AL. *Azar y probabilidad*. Madrid, Ed. Síntesis, 1987.

DICKSON, L., BROWN, M., GIBSON, O. *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona, Ed. Labor, 1991.

DOLORES, C. ET AL. *Matemática educativa*. Madrid, Ed. Díaz de Santos, 2007.

DOUGLAS C., GIANCOLI. *Física. Principios con Aplicaciones,* 4ª edición. Prentice Hall, 1997.

DUHALDE, M. E. Y GONZÁLEZ, M. T. *Encuentros cercanos con la matemática*. Argentina, Ed. Aique, 2003.

ELPHICK, D., WINSTON, H. ET AL. (2001). 101 *Actividades para implementar los objetivos fundamentales transversales*. Santiago: Lom.

FORTUNY AYMEMI, JOSEP M. ET AL. (1996). *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Graó.

GARCÍA TALAVERA, G. (1998). *Heurística geométrica*. México: Limusa.

GHYKA, MALILA C. (1968). *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Buenos Aires: Poseidón.

GOÑI, J. M. (COORD.). (2000). *El currículo de matemática en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Graó.

GOVINDEN PORTUS, LINCOYÁN. (1998). *Introducción a la estadística*. Mc Graw Hill.

GUEDJ, DENIS. (2000). *El teorema del Loro. Novela para aprender matemáticas*. Anagrama.

HONSBERGER, R. (1994). *El ingenio en las matemáticas*. Madrid: DLS-Euler.

JIMÉNEZ, MATUS, MOYA, MUÑOZ. (2009). *Unidad de Algebra y Funciones*. Santiago: Enlaces.

JOHSUA, S., DUPIN, J. (2005). *Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática*. Buenos Aires: Colihue.

KOSTOVSKY, A. N. (1984). *Construcciones geométricas mediante un compás*. Moscú: Mir.

LEHMANN, CHARLES. (2001). *Álgebra*. Limusa.

MILLER, CH., HEEREN, V., HORNSBY, E. (1999). *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*. Addison Wesley Longman. Pearson.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2004). *Matemática. Programa de Estudio, 2º Medio*.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2004). *Matemática. Programa de Estudio, 3º Medio.*
MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2004). *Matemática. Programa de Estudio, 4º Medio.*
MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios, matemática.* Mayo.
MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Números y Operaciones.*
MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Álgebra.*
MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Geometría.*
MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Datos y Azar.*
MIRANDA V., HERNÁN, MOYA, MAURICIO. (2008). *Álgebra. El poder generalizador de los símbolos.* Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.
OTEÍZA M., FIDEL, ZAMORANO A., LUCRECIA, BAEZA R., OSVALDO. (2008). *La geometría de los modelos a escala. Semejanza de figuras planas.* Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.
OTEÍZA M., FIDEL, ZAMORANO A., LUCRECIA, BAEZA R., OSVALDO. (2008). *La circunferencia y un par de rectas en el plano. Ángulos en el plano.* Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.
PLANAS, NURIA Y ALSINA, ÁNGEL. (2005). *Educación matemática y buenas prácticas.* Barcelona: Graó.
REVISTA UNO. (1997). *Las matemáticas en el entorno.* Barcelona: Graó.
REYES, C. Y VALENZUELA, M. (2006). *Matemática. Guía didáctica para el profesor, 1º Medio.* Santiago: Mc Graw Hill.
RODRÍGUEZ, JOSÉ ET AL. (1997). *Razonamiento matemático.* México: Internacional Thompson.
RODRÍGUEZ, G. Y ESCALANTE, M. (2008). *Unidad función cuadrática y raíz cuadrada*, Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.
SAAVEDRA G., EUGENIO. (2005). *Contenidos básicos de estadística y probabilidad. Colección ciencias.* Santiago: Universidad de Santiago.
SADOVSKY, P. (2005). *Enseñar matemática hoy.* Argentina: Libros del Zorzal.
SANTANDER, RICARDO. (2008). *Álgebra I. Primera versión.* Santiago: Universidad de Santiago de Chile.
SERRANO, J. M. ET AL. (1997). *Aprendizaje cooperativo en matemática.* Universidad de Murcia.
SMITH, STANLEY A. *Álgebra, trigonometría y geometría.* Prentice Hall.
SPIEGEL, M., MOYER, R. E. (2006). *Álgebra superior.* Mc Graw Hill.
SULLIVAN, M. (2006). *Álgebra y trigonometría.* Pearson-Prentice Hall.
TAPIA, ÓSCAR ET AL. (2007). *Manual de Preparación PSU. Matemática.* Ediciones Universidad Católica.
VALENZUELA, P. H. (2006). *Fundamentos de matemática universitaria.* Pearson.
VARGAS-MACHUCA, INMACULADA ET AL. (1990). *Números enteros-Matemáticas: cultura y aprendizaje.* Madrid: Síntesis.
VILLANUEVA, F., MASJUAN, G., ARENAS, F. (1993). *Geometría elemental.* Santiago: Universidad Católica de Chile.

Páginas y recursos digitales interactivos

Portal Educar Chile: www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/verContenido.aspx?ID=186119
Enlaces: www.catalogored.cl/recursos-educativos-digitales?nivel_educativo=50&subsector_basica=65
Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales, applets de la Universidad de UTAH: http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html
Eduteka, portal educativo, Colombia: www.eduteka.org/directorio, luego elegir la carpeta "Matemáticas" o bien desde el enlace directo: www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=204
Actividades sugeridas por temas: www.eduteka.org/MI/master/interactivate
Instrumentos Curriculares (Mapas de Progreso, Programas de estudio, etc.): www.curriculum-mineduc.cl
Instituto Nacional de Estadísticas: www.ine.cl
Ministerio de Educación de Chile: www.mineduc.cl
Proyecto Descartes, España: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/
Red Maestros de Maestros (Mineduc): www.rmm.cl
Sitio Key Currículum Press de textos de matemática:
Álgebra: www.keypress.com/x19578.xml (ver capítulos de lecciones en español).
Geometría: www.keypress.com/x19850.xml (ver capítulos de lecciones en español).
Textos para el docente y el estudiante educación secundaria México: www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/recdidactico.html
http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/mat_ed/mat_ed_01.php

BIBLIOGRAFÍA PARA EL ESTUDIANTE

ARAYA S., ROBERTO, MATUS, CLAUDIA. (2008). *Buscando un orden para el azar*. Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.

ARGÜELLES RODRÍGUEZ, J. (1989). *Historia de la matemática*. Akal.

ARIAS, NAFRÍA, DOMÍNGUEZ, SANTISO, DÍEZ, GARRÁN, TIMÓN, CARAVANTES, MARTÍNEZ, VILLARINO, SÁENZ Y GONZÁLEZ. (1992). *Hoja de cálculo en la enseñanza de las matemáticas en secundaria*. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.

AZCÁRATE GIMÉNEZ, C., DEULOFEU PIQUET, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Síntesis.

BAEZA R., OSVALDO. (2008). *Funciones potencia, exponencial y logaritmo*. Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.

BERLANGA, R., BOSCH, C., RIVAUD, J. (2000). *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*. México: Fondo de Cultura Económica.

BOYER, C. B. (1987). *Historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad.

CANTORAL, R. ET AL. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

CAÑÓN LOYES, CAMINO. (1993). *La matemática: creación y descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

COXETER, H. S. M., GREITZER, S. L. (1994). *Retorno a la geometría*. Madrid: Ed. Euler.

DE BURGOS, JUAN. (1994). *Curso de álgebra y geometría*. Madrid: Alambra.

DE MELLO S., JULIO CÉSAR (MALBA TAHAN). (2002). *El hombre que calculaba*. Limusa.

GARCÍA TALAVERA, G. (1998). *Heurística geométrica*. México: Limusa.

GOVINDEN PORTUS, LINCOYÁN. (1998). *Introducción a la estadística*. Mc Graw Hill.

HONSBERGER, R. *El ingenio en las matemáticas* (1994). Madrid: DLS-Euler.

MAGNUS E., HANS. (1997). *El Diablo de los números*. Madrid: Siruela.

MIRANDA V., HERNÁN, MOYA, MAURICIO. (2008). *Álgebra. El poder generalizador de los símbolos*. Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.

OTEÍZA M., FIDEL, ZAMORANO A., LUCRECIA, BAEZA R., OSVALDO. (2008). *La geometría de los modelos a escala. Semejanza de figuras planas*. Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.

OTEÍZA M., FIDEL, ZAMORANO A., LUCRECIA, BAEZA R., OSVALDO. (2008). *La circunferencia y un par de rectas en el plano. Ángulos en el plano*. Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.

RODRÍGUEZ, G., ESCALANTE, M. (2008). *Unidad función cuadrática y raíz cuadrada*, Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.

Páginas y recursos digitales interactivos

Portal Educar Chile: www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/verContenido.aspx?ID=186119

Enlaces: www.catalogored.cl/recursos-educativos-digitales?nivel_educativo=50&subsector_basica=65

Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales, applets de la Universidad de UTAH. El enlace genérico es http://nlvm.usu.edu/es/nav o bien los siguientes enlaces directos:
Geometría: http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_4_t_3.html http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_4_t_4.html
Números y operaciones: http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_4_t_1.html
Álgebra: http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_4_t_2.html
Análisis de Datos y Probabilidad: http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_4_t_5.html

Proyecto Descartes, España: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/aplicaciones.php

Eduteka, portal educativo, Colombia: enlace genérico de las unidades temáticas es www.eduteka.org/directorio o bien los siguientes enlaces directos:
Actividades sugeridas: www.eduteka.org/MI/master/interactivate
Álgebra: www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=366
Geometría: www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=363
www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=364
Números y operaciones: www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=362
Probabilidad y Estadística: www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=365

BIBLIOGRAFÍA CRA

A continuación se detallan publicaciones que se puede encontrar en las bibliotecas de los Centros de Recursos para el Aprendizaje (CRA) en cada establecimiento:

Unidad 1

BALDOR, AURELIO. (2002). *Aritmética*. México: Publicaciones Cultural.

Unidad 2

BALDOR, AURELIO. *Geometría y trigonometría*. México: Publicaciones Cultural.

FILLOY, E.; HITT, F. (1981). *Geometría analítica*., Iberoamérica.

MASJUÁN, GONZALO; ARENAS, FERNANDO. (1997). *Ejercicios de geometría elemental*. Santiago, Universidad Católica de Chile.

RICH, BARNETT. *Geometría*. Mc Graw-Hill.

RIERA, GONZALO. (1996). *Lecciones de geometría clásica*. Santiago: Universidad Católica de Chile.

Unidad 1 y2

VARIOS AUTORES. *Aritmética y álgebra*. Santiago de Chile, Santillana.

Unidad 3

CARREÑO, XIMENA; CRUZ, XIMENA. (1997). *Álgebra*. Santiago: Arrayán.

OTEYZA, ELENA DE. *Conocimientos fundamentales de matemáticas: álgebra*. Prentice Hall.

ROJANO, T.; URSINI, S. *Aprendiendo álgebra con hojas electrónicas de cálculo*. Iberoamérica.

Todas las unidades

ARGÜELLES, JUAN. (1994). *Matemática recreativa*. México: Akal.

ARGÜELLES, JUAN. (1989). *Historia de la matemática*. México: Akal.

BERLANGA Y OTROS. (1999). *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*. Fondo de Cultura Económica.

CORBALÁN, FERNANDO. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Graó.

GALDOS, L. (1995). *Consultor matemático*. Madrid: Cultural de Ediciones.

GARDNER, MARTIN. (2007). *Los acertijos de Sam Loyd*. España: Zugarto.

GARDNER, MARTIN. (1992). *Magia Inteligente*. España: Zugarto.

GARDNER, MARTIN. (1994). *Matemática para divertirse*. España: Zugarto.

GUEDJ, DENIS. (1998). *El imperio de las cifras y los números*. Barcelona: Ediciones B.

HEBER NIETO, JOSÉ. (2005). *Olimpíadas matemáticas: el arte de resolver problemas*. México: Los libros de El Nacional.

IRIZO, CONSTANZA; LÓPEZ, JORGE. (1992). *De la prensa a las matemáticas*. Barcelona: Octaedro.

JIMENEZ, DOUGLAS. (2006). *Matemáticos que cambiaron al mundo*. México: Los libros de El Nacional.

KLINE, MORRIS. (1992). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. México: Fondo de Cultura Económica.

MATAIX, MARIANO. (1993). *Esbozos biográficos y pasatiempos matemáticos*. Barcelona: Marcombo.

NOMDEDEU, X. (2000). *Mujeres, manzanas y matemáticas, entretejidas*. Madrid: Nivola Libros.

PÉREZ-RUIZ SOBERON, MARIO. (2002). *Pitágoras. El misterio de la voz interior. Una investigación de arqueología filosófica*. Barcelona: Océano.

SERRANO, ESTEBAN. (2007). *¡Ojalá no hubiera números!* Madrid: Nivola Libros.

TAHAN, MALBA. (2006). *El hombre que calculaba*. Buenos Aires: Pluma y Papel.

TAHAN, MALBA. (2006). *Matemática curiosa y divertida*. Buenos Aires: Pluma y Papel.

VANCLEAVE, JANICE. (1997). *Matemáticas para niños y jóvenes*. México: Limusa.

Anexos

Anexo 1

Uso flexible de otros instrumentos curriculares

Existe un conjunto de instrumentos curriculares que los docentes pueden utilizar de manera conjunta y complementaria con el programa de estudio. Estos se pueden usar de manera flexible para apoyar el diseño e implementación de estrategias didácticas y para evaluar los aprendizajes.

Orientan sobre la progresión típica de los aprendizajes

Mapas de Progreso[14]. Ofrecen un marco global para conocer cómo progresan los aprendizajes clave a lo largo de la escolaridad.

Pueden usarse, entre otras posibilidades, como un apoyo para abordar la diversidad de aprendizajes que se expresa al interior de un curso, ya que permiten:

› caracterizar los distintos niveles de aprendizaje en los que se encuentran los estudiantes de un curso
› reconocer de qué manera deben continuar progresando los aprendizajes de los grupos de estudiantes que se encuentran en estos distintos niveles

Apoyan el trabajo didáctico en el aula

Textos escolares. Desarrollan los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios para apoyar el trabajo de los alumnos en el aula y fuera de ella, y les entregan explicaciones y actividades para favorecer su aprendizaje y su autoevaluación.

Los docentes también pueden enriquecer la implementación del currículum, haciendo uso de los recursos entregados por el Mineduc a través de:

› Los **Centros de Recursos para el Aprendizaje (CRA)** y los materiales impresos, audiovisuales, digitales y concretos que entregan
› El **Programa Enlaces** y las herramientas tecnológicas que ha puesto a disposición de los establecimientos

---

14 En una página describen, en 7 niveles, el crecimiento típico del aprendizaje de los estudiantes en un ámbito o eje del sector a lo largo de los 12 años de escolaridad obligatoria. Cada uno de estos niveles presenta una expectativa de aprendizaje correspondiente a dos años de escolaridad. Por ejemplo, el Nivel 1 corresponde al logro que se espera para la mayoría de los niños y niñas al término de 2º básico; el Nivel 2 corresponde al término de 4º básico, y así sucesivamente. El Nivel 7 describe el aprendizaje de un alumno que, al egresar de la Educación Media, es "sobresaliente"; es decir, va más allá de la expectativa para IV medio descrita en el Nivel 6 en cada mapa.

Anexo 2

Objetivos Fundamentales por semestre y unidad

OBJETIVO FUNDAMENTAL	SEMESTRE 1		SEMESTRE 2	
OF 01 Comprender que los números irracionales constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números racionales, y que los números reales corresponden a la unión de los números racionales e irracionales.	unidad 1			
OF 02 Utilizar los números reales en la resolución de problemas, ubicarlos en la recta numérica, demostrar algunas de sus propiedades y realizar aproximaciones.	unidad 1			
OF 03 Establecer relaciones entre potencias, logaritmos y raíces en el contexto de los números reales, demostrar algunas de sus propiedades y aplicarlas a la resolución de problemas.	unidad 1			
OF 04 Utilizar las funciones exponenciales, logarítmicas y raíz cuadrada como modelos de situaciones o fenómenos en contextos significativos y representarlas gráficamente en forma manual o usando herramientas tecnológicas.		unidad 2		
OF 05 Interpretar las operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias como una generalización de las operaciones con fracciones numéricas, establecer estrategias para operar con este tipo de expresiones y comprender que estas operaciones tienen sentido solo en aquellos casos en que estas están definidas.		unidad 2		
OF 06 Modelar situaciones o fenómenos, cuyos modelos resultantes sean sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.		unidad 2		
OF 07 Comprender conceptos, propiedades e identificar invariantes y criterios asociados a la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.			unidad 3	
OF 08 Identificar ángulos inscritos y del centro en una circunferencia y relacionar las medidas de dichos ángulos.			unidad 3	
OF 09 Comprender el concepto de dispersión y comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión.				unidad 4

OBJETIVO FUNDAMENTAL	SEMESTRE 1	SEMESTRE 2
OF 10 Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.		unidad 4
OF 11 Comprender que la media muestral de pruebas independientes de un experimento aleatorio se aproxima a la media de la población cuando crece el número de pruebas.		unidad 4
OF 12 Aplicar propiedades de la suma y el producto de probabilidades en diversos contextos, a partir de la resolución de problemas que involucren el cálculo de probabilidades.		unidad 4

Anexo 3

Contenidos Mínimos Obligatorios por semestre y unidad

CONTENIDOS MÍNIMOS OBLIGATORIOS	SEMESTRE 1	SEMESTRE 2
NÚMEROS		
CMO 01		
Identificación de situaciones que muestran la necesidad de ampliar los números racionales a los números reales, reconocimiento de algunas de las propiedades de los números y de las operaciones y su uso para resolver diversos problemas.	unidad 1	
CMO 02		
Aproximación del valor de un número irracional por defecto, por exceso y por redondeo.	unidad 1	
CMO 03		
Ubicación de algunas raíces en la recta numérica, exploración de situaciones geométricas en que ellas están presentes y análisis de la demostración de la irracionalidad de algunas raíces cuadradas.	unidad 1	
CMO 04		
Análisis de la existencia de la raíz enésima en el conjunto de los números reales, su relación con las potencias de exponente racional y demostración de algunas de sus propiedades.	unidad 1	
CMO 05		
Interpretación de logaritmos, su relación con potencias y raíces, deducción de sus propiedades y aplicaciones del cálculo de logaritmos a la resolución de problemas en diversas áreas del conocimiento.	unidad 1	
ÁLGEBRA		
CMO 06		
Establecimiento de estrategias para simplificar, sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones algebraicas simples, con binomios en el numerador y en el denominador, y determinación de aquellos valores que indefinen una expresión algebraica fraccionaria.		unidad 3
CMO 07		
Reconocimiento de sistemas de ecuaciones lineales como modelos que surgen de diversas situaciones o fenómenos.		unidad 3
CMO 08		
Resolución de problemas asociados a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas en contextos variados, representación en el plano cartesiano, usando un software gráfico, y discusión de la existencia y pertinencia de las soluciones.		unidad 3

CONTENIDOS MÍNIMOS OBLIGATORIOS	SEMESTRE 1	SEMESTRE 2
CMO 09 Uso de un programa gráfico en la interpretación de funciones exponenciales, logarítmicas y raíz cuadrada, análisis de las situaciones que modela y estudio de las variaciones que se producen por la modificación de sus parámetros.		unidad 3
GEOMETRÍA		
CMO 10 Exploración de diversas situaciones que involucran el concepto de semejanza y su relación con formas presentes en el entorno.	unidad 2	
CMO 11 Identificación y utilización de criterios de semejanza de triángulos para el análisis de la semejanza en diferentes figuras planas.	unidad 2	
CMO 12 Aplicación del teorema de Thales sobre trazos proporcionales, división interior de un trazo en una razón dada y uso de un procesador geométrico para verificar relaciones en casos particulares.	unidad 2	
CMO 13 Demostración de los teoremas de Euclides relativos a la proporcionalidad de trazos en el triángulo rectángulo, demostración del teorema de Pitágoras y del teorema recíproco de Pitágoras.	unidad 2	
CMO 14 Aplicación de la noción de semejanza a la demostración de relaciones entre segmentos en cuerdas y secantes en una circunferencia y a la homotecia de figuras planas.	unidad 2	
CMO 15 Identificación de ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia, demostración del teorema que relaciona la medida del ángulo del centro con la del correspondiente ángulo inscrito.	unidad 2	
DATOS Y AZAR		
CMO 16 Determinación del rango, la varianza y la desviación estándar, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando, en forma manual y con herramientas tecnológicas.		unidad 4

CONTENIDOS MÍNIMOS OBLIGATORIOS	SEMESTRE 1	SEMESTRE 2
CMO 17 Análisis de las características de dos o más muestras de datos, usando indicadores de tendencia central, posición y dispersión.		unidad 4
CMO 18 Empleo de elementos básicos del muestreo aleatorio simple en diversos experimentos para inferir sobre la media de una población finita a partir de muestras extraídas.		unidad 4
CMO 19 Aplicación del concepto de variable aleatoria en diferentes situaciones que involucran azar e identificación de ella como una función.		unidad 4
CMO 20 Exploración de la ley de los grandes números, a partir de la repetición de experimentos aleatorios, con apoyo de herramientas tecnológicas y su aplicación a la asignación de probabilidades.		unidad 4
CMO 21 Resolución de problemas de cálculo de probabilidades, aplicando las técnicas del cálculo combinatorio, diagramas de árbol, lenguaje conjuntista, operaciones básicas[15] con conjuntos y propiedades de la suma y el producto de probabilidades.		unidad 4

15 Unión, diferencia y complemento de conjuntos.

Anexo 4

Relación entre Aprendizajes Esperados, Objetivos Fundamentales (OF) y Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO)

APRENDIZAJES ESPERADOS	OF	CMO

Unidad 1

Números

	OF	CMO
AE 01	1	1 – 3
Comprender que los números irracionales permiten resolver problemas que no tienen solución en los números racionales.		
AE 02	2	2 – 3
Aproximar números irracionales por defecto, por exceso y por redondeo.		
AE 03	2	2 – 3
Ordenar números irracionales y representarlos en la recta numérica.		
AE 04	2	1
Conjeturar y verificar propiedades de los números irracionales.		
AE 05	1	1 – 3
Comprender que los números reales corresponden a la unión de los números racionales e irracionales.		
AE 06	2	1
Demostrar algunas propiedades de los números reales.		
AE 07	3	4
Analizar la existencia de las raíces en el conjunto de los números reales.		
AE 08	3	4
Utilizar relaciones entre las potencias y raíces para demostrar propiedades de las raíces.		
AE 09	3	5
Establecer relaciones entre los logaritmos, potencias y raíces.		
AE 10	3	5
Deducir propiedades de los logaritmos.		
AE 11	3	4 – 5
Resolver problemas en contextos diversos relativos a números reales, raíces y logaritmos.		

APRENDIZAJES ESPERADOS	OF	CMO

Unidad 2

Geometría

AE	OF	CMO
AE 01 Comprender el concepto de semejanza de figuras planas.	7	10
AE 02 Identificar los criterios de semejanza de triángulos.	7	10 – 11
AE 03 Utilizar los criterios de semejanza de triángulos para el análisis de la semejanza de figuras planas.	7	10 – 11
AE 04 Comprender el teorema de Thales sobre trazos proporcionales y aplicarlo en el análisis y la demostración de teoremas relativos a trazos.	7	12
AE 05 Demostrar los teoremas de Euclides relativos a proporcionalidad de trazos.	7	13
AE 06 Demostrar el teorema de Pitágoras y el teorema recíproco de Pitágoras.	7	13
AE 07 Identificar ángulos inscritos y del centro en una circunferencia y relacionar las medidas de dichos ángulos.	8	15
AE 08 Demostrar relaciones que se establecen entre trazos determinados por cuerdas y secantes de una circunferencia.	8	14
AE 09 Demostrar teoremas relativos a la homotecia de figuras planas.	7	14
AE 10 Resolver problemas relativos a: a. el teorema de Thales sobre trazos proporcionales b. la división interior de un trazo c. teoremas de Euclides relativos a proporcionalidad de trazos	7	12 – 13

APRENDIZAJES ESPERADOS	OF	CMO

Unidad 3

Álgebra

AE 01	**4**	**9**
Analizar gráficamente la función exponencial en forma manual y con herramientas tecnológicas.		
AE 02	**4**	**9**
Analizar gráficamente la función logarítmica, en forma manual y con herramientas tecnológicas.		
AE 03	**4**	**9**
Analizar gráficamente la función raíz cuadrada, en forma manual y con herramientas tecnológicas.		
AE 04	**5**	**6**
Analizar la validez de una expresión algebraica fraccionaria.		
AE 05	**5**	**6**
Establecer estrategias para operar fracciones algebraicas simples, con binomios en el numerador y en el denominador, y determinar los valores que indefinen estas expresiones.		
AE 06	**6**	**7 – 8**
Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica y algebraicamente.		
AE 07	**4 – 6**	**7 – 8 – 9**
Modelar y aplicar la función exponencial, raíz cuadrada y logarítmica en la resolución de problemas, y resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.		

APRENDIZAJES ESPERADOS	OF	CMO

Unidad 4

Datos y azar

	OF	CMO
AE 01	9	16 – 17
Determinar el rango, la varianza y la desviación estándar de conjuntos de datos.		
AE 02	9	16 – 17
Comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando medidas de tendencia central, de posición y de dispersión.		
AE 03	11	18
Emplear elementos del muestreo aleatorio simple para inferir sobre la media de una población.		
AE 04	10	19
Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.		
AE 05	11	17 – 18
Calcular medias muestrales.		
AE 06	11	20
Verificar que, a medida que el número de pruebas crece, la media muestral se aproxima a la media de la población.		
AE 07	12	21
Resolver problemas en contextos diversos, aplicando las propiedades de la suma y el producto de probabilidades.		

En este programa se utilizaron las tipografías Helvetica Neue en su variante **Bold** y Digna (tipografía chilena diseñada por Rodrigo Ramírez) en todas sus variantes.

Se imprimió en papel Magnomatt (de 130 g para interiores y 250 g para portadas) y se encuadernó en lomo cuadrado, con costura al hilo y hot melt.

Ministerio de
Educación

Gobierno de Chile