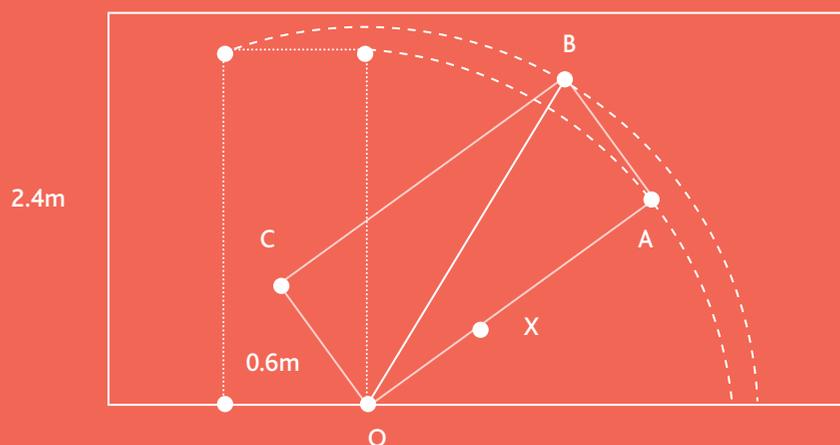


Ejemplos de problemas para el **desarrollo de habilidades** en 7° y 8° año básico



**DESARROLLO DE HABILIDADES:
APRENDER A PENSAR MATEMÁTICAMENTE**

7° y 8° año de Educación Básica

Ministerio de Educación

Material elaborado por Alejandro Pedreros Matta,
Unidad de Currículum y Evaluación y Profesionales del
Nivel de Educación Media de la División de Educación General.

Ministerio de Educación de Chile
Av. Bernardo O'Higgins N° 1371
Santiago - Chile

Coordinación Editorial:
Jasnaya Carrasco Segura
Sandra Molina Martínez
División de Educación General MINEDUC

Diseño:
Verónica Santana
Sebastián Olivari

Registro de Propiedad Intelectual N° 266188
ISBN: 978-956-292-547-1

mayo, 2016

Índice

Desarrollo de habilidades: Aprender a Pensar Matemáticamente.	5
Antecedentes del currículo de matemática.	7
Ejemplos de problemas para el desarrollo de habilidades en 7° y 8° año básico.	11
Situación problemática para 7° año de Educación Básica modelar.	13
Situación problemática para 7° año de Educación Básica argumentar y comunicar.	17
Situación problemática para 8° año de Educación Básica modelar.	22
Situación problemática para 8° año de Educación Básica argumentar y comunicar.	25
Situación problemática para 8° año de Educación Básica resolver problemas.	29
Situación problemática para 8° año de Educación Básica argumentar y comunicar.	34
Situación problemática para 8° año de Educación Básica resolver problemas.	39
Situación problemática para 8° año de Educación Básica representar.	45
Situación problemática para 8° año de Educación Básica representar.	51

Desarrollo de Habilidades:

Aprender a Pensar Matemáticamente

ANTECEDENTES DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICA

Las Bases Curriculares que abordan los años académicos de 7° año de Educación Básica a 2° año de Educación Media¹, comprenden en forma transversal habilidades de pensamiento en que subyace la habilidad de solucionar situaciones diversas. En la asignatura de Matemática, se señala:

“Comprender las matemáticas y aplicar los conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales, es fundamental para los ciudadanos en el mundo moderno. Para resolver e interpretar una cantidad cada vez mayor de problemas y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales, laborales, sociales y científicos, se requiere de un cierto nivel de comprensión de las matemáticas, de razonamiento matemático y del uso de herramientas matemáticas” (p.104).

Del mismo modo y con respecto a los Estándares de Aprendizaje, descritos para 8° año de Educación Básica, el Nivel de Aprendizaje Adecuado en el contexto de la resolución de problemas en la asignatura de Matemática establece que las y los estudiantes deben:

“(…) mostrar generalmente que son capaces de aplicar conocimientos y habilidades de razonamiento matemático en situaciones directas y en problemas de varios pasos en los que se requiere elección de datos, organizar la información o establecer un procedimiento apropiado”² (p. 10).

Asimismo, el currículum nacional potencia el logro de objetivos de aprendizaje que articulan el desarrollo de contenidos, habilidades matemáticas y actitudes frente a la asignatura de matemática. En este contexto, es importante analizar y ejemplificar cómo las habilidades matemáticas descritas para 7° y 8° año de Educación Básica aportan a la formación de un ciudadano para resolver e

-
1. Ministerio de Educación de Chile (2013). Bases Curriculares 7° básico a 2° medio.
 2. Ministerio de Educación de Chile (2013). Estándares de Aprendizaje Matemática.

interpretar problemas y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales, laborales, sociales y científicos, para lo cual se requiere de un alto nivel de comprensión de las matemáticas y de razonamiento matemático.

Por otra parte, la formación matemática y la alfabetización matemática de todos los ciudadanos se considera un elemento esencial a tener en cuenta para el desarrollo de cualquier país (Mineduc, 2013). Se conoce como alfabetización matemática a la capacidad de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar en forma adecuada tanto los conocimientos como las herramientas matemáticas para resolver problemas cotidianos.

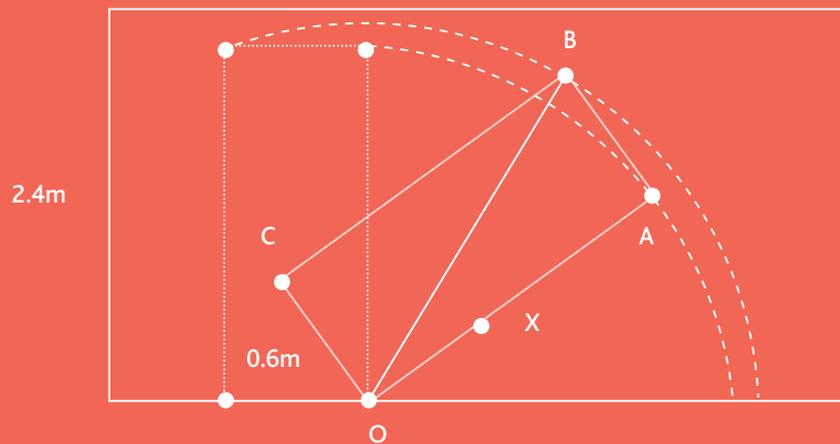
Para lograrlo, es necesario que los ciudadanos desarrollen el **razonamiento matemático**, uno de los principales focos a los cuales se orienta el currículum de esta asignatura. Esto implica formar a un estudiante que aplique la matemática en su entorno y que se valga de los conocimientos matemáticos como una herramienta útil para describir el mundo y para manejarse efectivamente en él, que reconozca las aplicaciones de la matemática en diversos ámbitos y que la use para comprender situaciones y resolver problemas. El pensamiento matemático se define como una capacidad que nos permite aplicar conocimiento y comprender las relaciones que se dan en el entorno, cuantificarlas, razonar sobre ellas, representarlas y comunicarlas. En este sentido, el papel de la enseñanza de las matemáticas es desarrollar las habilidades que generan el pensamiento matemático, sus conceptos y procedimientos básicos, con el fin de comprender y producir información representada en términos matemáticos.

La asignatura se focaliza en la **resolución de problemas**. Resolver un problema implica no solo poner en juego un amplio conjunto de habilidades, sino también creatividad para buscar y probar diversas soluciones. Al poner el énfasis en la resolución de problemas, se busca, por una parte, que las y los estudiantes descubran la utilidad de las matemáticas en la vida real y, por otro, abrir espacios para conectar esta disciplina con otras asignaturas. Otro de los énfasis del currículum de matemática consiste en que las y los estudiantes sean capaces de transitar entre distintos niveles de **representación** (concreto, pictórico y simbólico), traduciendo situaciones de la vida cotidiana a lenguaje formal, o utilizando símbolos matemáticos para resolver problemas o explicar situaciones concretas. Las Bases Curriculares dan relevancia al **modelamiento matemático**. El objetivo de desarrollar la habilidad de

modelamiento matemático es lograr que las y los estudiantes construyan una versión simplificada y abstracta de un sistema que opera en la realidad, que capturen los patrones clave y los expresen mediante símbolos matemáticos. Asimismo, [las habilidades comunicativas y argumentativas](#) son centrales en este escenario, estas se relacionan con la capacidad de expresar ideas con claridad y son muy importantes para comprender el razonamiento que hay detrás de cada problema resuelto o concepto comprendido.

Por lo tanto, aprender a ser docente de matemáticas implica desarrollar, entre otras, la competencia de planificar, aplicar y analizar estrategias e instrumentos de evaluación adaptados a las características de las competencias matemáticas desarrolladas por las y los estudiantes (Font y Godino, 2011). Además, como docentes de matemáticas, sabemos que debemos escuchar más a las y los estudiantes y, sobre todo, formular preguntas que permitan al docente generar oportunidades de aprendizaje. Es responsabilidad nuestra ir avanzando en el manejo del cuaderno como un instrumento de trabajo y un registro que permite obtener evidencia de aprendizaje.

Ejemplos de problemas para el **desarrollo de habilidades** en 7° y 8° año básico



Situación problemática para 7° año de Educación Básica

La siguiente actividad está destinada a resolver problemas de multiplicación de fracciones, correspondiente a los OA planteados para 7° año de Educación Básica. Esta actividad promueve generar una oportunidad de aprendizaje para que las y los estudiantes puedan desarrollar la habilidad de **modelar** en el contexto de la propuesta de las Bases Curriculares.

Mediante la resolución del problema, en específico se propone seleccionar el modelo matemático que permite representar y resolver la situación cotidiana con una expresión matemática, para luego predecir otros resultados en el mismo contexto, o en contextos similares.

En cuanto a los aprendizajes previos necesarios para enfrentar esta situación problemática, las y los estudiantes deben aplicar sus conocimientos del concepto de fracción, su representación como unidad y como parte de un conjunto de objetos, como también de la operatoria de fracciones, específicamente la multiplicación de una fracción por un entero y de una fracción por otra fracción.

OA: Relacionan procedimientos de la vida diaria con operaciones matemáticas tales como agregar y reducir con sumar y restar, repartir con dividir, entre otras.

Habilidades: Modelar, resolver problemas y representar.

Problema¹:

Ingredientes	
Huevos	4
Harina	8 tazas
Leche	$\frac{1}{2}$ taza

Los ingredientes de arriba se usan para hacer una receta de queque para 6 personas. Samuel quiere hacer esta receta solo para 3 personas.

Completa la siguiente tabla para mostrar qué necesita Samuel para hacer la receta para 3 personas. La tabla ya muestra la cantidad de huevos que necesita.

Ingredientes	
Huevos	2
Harina tazas
Leche taza

El planteamiento de este problema es relativamente sencillo, pues gran parte puede resolverse con conocimientos básicos en el ámbito numérico del 1 al 8 (en este caso indicar la mitad de las cantidades dadas). Se puede prever que determinar la mitad de $\frac{1}{2}$ taza podría significar a las y los estudiantes el quiebre cognitivo esperado con esta actividad. Una vez conocido los resultados numéricos, es factible concentrar la atención de las y los estudiantes en generalizar esta situación, y formular un modelo que satisfaga cualquier cambio de la situación dada. Se espera que el modelo plantee que cada parámetro puede ser dividido por 2 ya que la cantidad de personas disminuye a la mitad. Una vez obtenido el modelo, la o el estudiante lo aplica para resolver matemáticamente otros problemas.

1. Extraído de TIMSS 2011, p. 58.

Preguntas para analizar o comprender el problema. A través de este primer grupo de preguntas se espera que las y los estudiantes entiendan el contexto del problema, los datos que se entregan y se focalicen en si comprenden o no lo que se les está preguntando. Por ejemplo:

- ▶ ¿De qué depende que un queque alcance para un determinado número de personas?
- ▶ ¿A cuánto líquido equivale $\frac{1}{2}$ taza de leche?
- ▶ ¿Sabes cómo usar una receta para una cantidad de porciones distinta a la que señala la receta?

Preguntas para orientar el análisis de la resolución del problema. En este segundo grupo de preguntas el propósito es inducir a que la o el estudiante establezca relaciones entre la información entregada y lo que se quiere averiguar. Deben aparecer aquí palabras clave tales como generalizar, multiplicación de fracciones, dividir, entre otras. Por ejemplo:

- ▶ La receta señalada es para 6 personas y se debe cambiar para 3 personas ¿A qué parte de la original se ha reducido la cantidad de personas?
- ▶ ¿Por qué la cantidad de huevos se reduce a 2? ¿Qué parte de la parte original es?
- ▶ ¿Qué se debe hacer con los demás ingredientes para obtener queques del mismo tipo?
- ▶ ¿Cuál es la operación matemática que te permite determinar la mitad de los ingredientes en cada caso?
- ▶ ¿Cómo explicarías el procedimiento de dividir una fracción por un número natural?

Preguntas para obtener evidencia del aprendizaje

Este grupo de preguntas debe orientarse a poner a prueba el modelo encontrado: revisar el sentido de cada uno de los parámetros y ver qué sucede cuando se modifican; también establecer conexión con otras situaciones que puedan ser modeladas por la multiplicación de fracciones. Por ejemplo:

- ▶ Según el modelo encontrado ¿cuál sería la cantidad de ingredientes para

2 personas? En ese caso ¿cómo se contarían los huevos y las tazas de harina?

- ▶ ¿Qué pasaría si en lugar de querer la receta para 3 personas la quisieras para 12 personas? ¿Cómo cambiaría el modelo?
- ▶ ¿Qué otras situaciones de la vida cotidiana y que conozcas podrían ser modeladas por la división de fracciones por números naturales?
- ▶ ¿Por qué la división usada permite adaptar la receta para tres personas y no para otra cantidad de personas, por ejemplo para 2 personas?

Elementos clave en la resolución de la situación problemática

DATOS INVOLUCRADOS	
Datos conocidos	Datos desconocidos
Cantidad de Ingredientes. Cantidad de personas para la receta original. Cantidad de personas para la nueva receta.	Ingredientes para 3 personas, específicamente harina y leche.

Verbalización de la situación
La receta muestra los ingredientes para 6 personas, pero se quiere reducir a la mitad. La mitad de una cantidad corresponde a la cantidad dividida por 2.

En una tabla, se muestra la división para las cantidades de la receta:

Ingredientes	Dividir por 2	Resultado
4 huevos	$4 : 2$	2
8 tazas de harina	$8 : 2$	4
$\frac{1}{2}$ taza de leche	$\frac{1}{2} : 2$	$\frac{1}{4}$

¿Qué interpretación se le da a dividir por 2 una cantidad?

Modelo

Encontrar la mitad del número,
 $n : 2$
donde n es la cantidad

Situación problemática para 7° año de Educación Básica

La siguiente actividad está destinada a resolver problemas que involucran el cálculo de la medida de un ángulo exterior de un polígono regular, de acuerdo a los OA planteados para 7° año de Educación Básica. Esta actividad permite generar una oportunidad de aprendizaje para que las y los estudiantes desarrollen la habilidad de **argumentar y comunicar** en el contexto de la propuesta de las Bases Curriculares 2013.

Mediante la resolución de un problema se propone calcular la medida de ángulos internos y externos en polígonos, para luego aplicarla en diversos contextos.

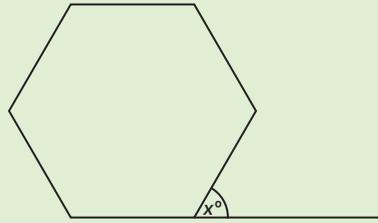
En cuanto a los aprendizajes previos necesarios para enfrentar esta situación problemática, las y los estudiantes deben identificar polígonos regulares, ángulos extendidos y ángulos suplementarios, además, saber que la suma de los ángulos interiores en un triángulo cualquiera es 180° .

En conjunto con la resolución de problemas, las y los estudiantes experimentarán cómo la habilidad de argumentar y comunicar es una de las habilidades que promueven el desarrollo del pensamiento matemático y dan la posibilidad de demostrar sus conjeturas utilizando argumentos lógicos y veraces. La resolución de un problema abre un momento propicio para que las y los estudiantes puedan dar a conocer las razones por las que eligen un camino u otro para resolver dicho problema y siempre se encuentra relacionada con habilidades como representar o modelar.

OA: Calcular la medida de un ángulo exterior de un polígono regular.

Habilidades: Argumentar y comunicar, resolver problemas y representar.

Problema²:



La figura de arriba es un hexágono regular en el cual se ha prolongado un lado formando el ángulo x . ¿Cuál es el valor del ángulo x ?

Preguntas para analizar o comprender el problema. A través de este primer grupo de preguntas se espera que las y los estudiantes entiendan el contexto del problema, los datos que se entregan, y se focalicen en si comprenden o no lo que se les está preguntando. Por ejemplo:

- ▶ ¿Cuáles son las características de un hexágono? ¿Qué hace que sea un polígono regular? ¿En qué se diferencian con los polígonos que no son regulares? Explica.
- ▶ ¿El ángulo de medida x es interior o exterior al hexágono? ¿Por qué?
- ▶ ¿Qué relación hay entre el ángulo x y el correspondiente ángulo interior del hexágono?

2. Extraído de TIMSS 2011, p. 186.

Preguntas para orientar el análisis de la resolución del problema. En este segundo grupo de preguntas el propósito es inducir a que la o el estudiante establezca relaciones entre la información entregada y lo que se quiere averiguar. Deben aparecer aquí palabras clave, tales como explicar, ángulos y su medida, polígono, entre otras. Por ejemplo:

- ▶ ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los vértices de un polígono regular?
- ▶ ¿Cómo se puede componer un polígono (con k vértices) utilizando solamente k triángulos isósceles?
- ▶ ¿Cuántos grados tiene el ángulo de una vuelta completa?
- ▶ Si se trata de un polígono regular de k vértices, ¿cómo se define la medida del ángulo interior en los vértices de los triángulos isósceles que se intersectan con la circunferencia?

Preguntas para obtener evidencia del aprendizaje

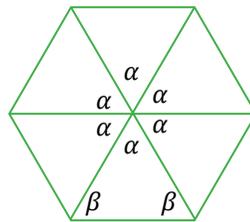
Este grupo de preguntas debe orientarse a poner a prueba la representación realizada. Revisar el sentido de cada uno de los datos y ver qué sucede cuando se modifican. También establecer conexión con otras situaciones que puedan ser resueltas a partir de la suma de ángulos en polígonos. Por ejemplo:

- ▶ ¿Podría ser mayor o igual la medida del ángulo exterior que la del ángulo interior? ¿Puedes encontrar un polígono regular donde ocurra esto? Descríbelo.
- ▶ ¿Cambiaría tu procedimiento si el hexágono no fuera regular?
- ▶ ¿Siempre se vincula la medida de un ángulo interior de un polígono con la medida de los ángulos de un triángulo?
- ▶ ¿Cómo aplicarías estos procedimientos para otros polígonos regulares?

Elementos claves en la resolución de la situación problemática

Datos involucrados	
Datos conocidos	Datos desconocidos
Hexágono regular	Medida del ángulo exterior

El hexágono regular puede ser visto como la reunión (conveniente) de 6 triángulos isósceles congruentes entre sí.



Para determinar la medida de los ángulos no iguales de cada uno de esos triángulos se realiza la siguiente operación:

$$360^\circ : 6 = 60^\circ$$

En cada triángulo, la suma de los ángulos interiores es: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Transfiriendo esta propiedad a un triángulo isósceles, resulta:

$$\alpha + \beta + \beta = 180^\circ$$

Al reemplazar α por 60° , se tiene que 60° más dos veces sumando β es 180° . Se puede resolver determinando que:

$$60^\circ + \beta + \beta = 180^\circ$$

Aplicando la conmutatividad resulta:

$$\beta + \beta + 60^\circ = 180^\circ$$

Descomponiendo 180° en el lado derecho de la siguiente manera, resulta:

$$\beta + \beta + 60^\circ = 120^\circ + 60^\circ$$

Con el conocimiento del **OA6** planteado en las Bases Curriculares, las y los estudiantes pueden aplicar que $\beta + \beta = 2\beta$. Comparando con la ecuación anterior pueden razonar que

$$2\beta = 120^\circ$$

Con el conocimiento del **OA9** planteado en las Bases Curriculares, las y los estudiantes pueden resolver ecuaciones de la forma $ax = b$. Aplicando a la ecuación anterior resulta

$$\beta = 60^\circ$$

En la figura, se debe considerar que el ángulo interior y el exterior son ángulos suplementarios, por tanto

$$2\beta + x = 180^\circ$$

Al reemplazar por $\beta = 60^\circ$ y realizar un procedimiento similar al procedimiento anterior se tiene que:

$$x = 60^\circ$$

La respuesta al problema es: La medida del ángulo x es 60°

Preguntas para obtener evidencia del aprendizaje

Determinar el ángulo exterior de un octágono.

- Elaborar, a base de un cuadrado, un dibujo esquemático del octágono incluyendo los triángulos isósceles inscritos que lo componen.
- Determinar la medida del ángulo interior que tiene cada triángulo isósceles en el vértice que coincide con el centro de la circunferencia circunscrita.

Determine la medida del ángulo exterior mediante una ecuación.

Situación problemática para 8° año de Educación Básica

La siguiente actividad corresponde a resolver problemas que involucran la función afín, acorde a los OA planteados para 8° año de Educación Básica. Esta actividad permite generar una oportunidad de aprendizaje para que las y los estudiantes puedan desarrollar la habilidad de **modelar** en el contexto de la propuesta de las Bases Curriculares 2013. Mediante la resolución del problema específico, se propone seleccionar el modelo matemático que permite representar una situación cotidiana con una expresión matemática, para luego predecir otros resultados en el mismo contexto, o en contextos similares.

En cuanto a los aprendizajes previos necesarios para enfrentar esta problemática, las y los estudiantes deben aplicar sus conocimientos acerca de funciones, ya que se propone analizar una relación entre variables. En el caso particular de la función afín, se hace necesario haber trabajado antes la función lineal como modelo de proporcionalidad directa. La comprensión de estos conceptos permitirá posteriormente ampliar el estudio a otros tipos de funciones tales como la cuadrática.

En conjunto con la resolución de problemas, las y los estudiantes experimentarán que el modelamiento es una de las habilidades matemáticas que promueven el desarrollo del pensamiento matemático, ya que modelar es una habilidad fundamental para expresar y generalizar situaciones de la vida diaria en lenguaje matemático. La resolución de un problema permite desarrollar la habilidad de modelamiento y otras habilidades tales como representar, comunicar y argumentar.

OA: Aplican la función afín para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.

Habilidades: Modelar, resolver problemas y representar.

Problema:

Imagina que en la ciudad de Zedlandia³ una empresa de taxis tiene una tarifa mínima de 25 zeds⁴ y una tarifa de 0,2 zeds por cada kilómetro que recorre el taxi. ¿Cuál es la expresión matemática que modela el costo final en zeds de tomar un taxi?

Preguntas para analizar o comprender el problema. En este primer grupo de preguntas lo importante es que las y los estudiantes entiendan el contexto del problema, los datos que se entregan, y se focalicen en si comprenden o no lo que se les está preguntando. Por ejemplo:

- ▶ ¿Cuál es el contexto del problema?
- ▶ ¿De qué partes se compone el costo de un viaje en taxi?

Preguntas para orientar el análisis de la resolución del problema. En este segundo grupo de preguntas el propósito es inducir a que el estudiante establezca relaciones entre la información entregada y lo que se quiere averiguar. Deben aparecer aquí palabras clave tales como modelar, modelo y función. Por ejemplo:

- ▶ ¿Qué parte del costo final de un viaje es fija?
- ▶ ¿Cómo se calcula el costo que depende de los kilómetros recorridos?
- ▶ ¿Cómo se calcula el costo final de un viaje?

3. Adaptado de TIMSS 2011, 8°, p. 156.

4. Moneda utilizada en la ciudad de Zedlandia.

Se completa la tabla con algunos valores y se generaliza el problema

costo fijo	kilómetros	costo por kilómetro [zed]	costo por el kilometraje [zed]	costo final [zed]
25	1	0,2	$0,2 \cdot 1 = 0,2$	$25 + 0,2 \cdot 1 = 25,2$
25	2	0,2	$0,2 \cdot 2 = 0,4$	$25 + 0,2 \cdot 2 = 25,4$
25	5	0,2	$0,2 \cdot 5 = 1,0$	$25 + 0,2 \cdot 5 = 26,0$
25	30	0,2	$0,2 \cdot 30 = 6,0$	$25 + 0,2 \cdot 30 = 31,0$
Primera generalización del problema:				se recorre x km
25	x	0,2	$0,2 \cdot x$	$P(x) = 25 + 0,2 \cdot x$
constante del modelo matemático	variable independiente del modelo matemático	coeficiente de proporcionalidad de la parte proporcional del modelo matemático	parte proporcional del modelo matemático	ecuación funcional del modelo matemático del problema (función afín)

Segunda generalización del problema:

Se modela un proceso que se compone de una base constante b más un cambio proporcional con el factor a . El modelo matemático es una función afín que se representa mediante una ecuación de la forma:

$$P(X) = b + a \cdot x$$

Variando los parámetros b (base) y a (factor de proporcionalidad) se pueden modelar problemas similares de la vida diaria o de ciencias.

Preguntas para obtener evidencia del aprendizaje

- 1) ¿Por qué el cobro del viaje en el taxi de "Zedlandia" no se puede modelar con una función lineal? Explica tu respuesta.
- 2) Elabora gráficos de la forma $P(x) = b + a \cdot x$. Describe la influencia que tienen los parámetros b y a en la forma del gráfico.
 - a) Con el mismo factor a , pero con diferentes valores de b .
 - b) Con diferentes factores a , pero con el mismo valor de b .
- 3) Describe una situación que se puede modelar con una constante más un cambio proporcional. Determina los parámetros y elabora la ecuación correspondiente.

Situación problemática para 8° año de Educación Básica

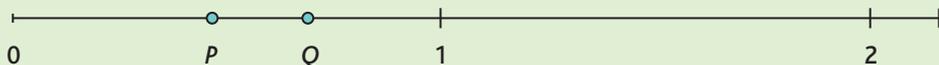
La siguiente actividad corresponde a la resolución de problemas que involucran el producto de números racionales, acorde a los OA planteados para 8° año de Educación Básica. Esta actividad permite generar una oportunidad de aprendizaje para que las y los estudiantes desarrollen la habilidad de **argumentar y comunicar** en el contexto de la propuesta de las Bases Curriculares 2013. Mediante la resolución del problema específico, se propone interpretar el resultado de multiplicar números decimales o fracciones menores que 1, apoyando el razonamiento con la representación pictórica en la recta numérica.

En cuanto a los aprendizajes previos necesarios para enfrentar esta problemática, las y los estudiantes deben aplicar sus conocimientos acerca de la operatoria con fracciones y números decimales. En conjunto con la resolución de problemas, las y los estudiantes experimentarán que argumentar es una de las habilidades que promueven el desarrollo del pensamiento matemático, ya que permite que demuestren sus conjeturas utilizando argumentos lógicos y veraces. La resolución de un problema es un medio para desarrollar la habilidad de argumentar. No obstante, también se desarrollan otras habilidades tales como representar y modelar.

OA: Argumentan respecto del resultado de un producto de números racionales.

Habilidades: Argumentar y comunicar, resolver problemas y representar.

Problema⁵: P y Q son dos números en la recta numérica. Si $P \cdot Q = R$, ¿dónde se ubica R en la recta? ¿Por qué?



5. Adaptado de TIMSS 2011, p.154.

Preguntas para analizar o comprender el problema. En este primer grupo de preguntas lo importante es que las y los estudiantes entiendan el contexto del problema, los datos que se entregan y se focalicen en si comprenden o no lo que se les está preguntando. Por ejemplo:

- ▶ ¿Podrían ser $\frac{5}{4}$ y $\frac{3}{2}$ dos representantes de P y Q respectivamente? ¿Por qué?
- ▶ ¿Podrían ser $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ dos representantes de P y Q respectivamente? ¿Por qué?
- ▶ ¿Qué par de números, por ejemplo, de ninguna manera podrían ser representantes de P y Q? Argumenta.
- ▶ ¿A qué conjunto numérico pertenecen los números P y Q?
- ▶ ¿Es P menor que Q? ¿Por qué?
- ▶ ¿Qué representa R? ¿Dónde debería ubicarse este número?
- ▶ ¿A qué conjunto numérico pertenecería R?
- ▶ ¿Podrías explicarle a un compañero/a detalladamente lo que entiendes de esta situación problemática?

Preguntas para orientar el análisis de la resolución del problema. En este segundo grupo de preguntas el propósito es inducir a que la y el estudiante establezca relaciones entre la información entregada y lo que se quiere averiguar. Deben aparecer aquí palabras clave tales como conjeturar, relación de orden, representar y argumentar. Por ejemplo:

- ▶ Haz un listado de 8 o 10 pares de números que tú pienses que son representantes de P y Q. ¿Estás seguro de que son ejemplos que representan la situación? Argumenta.
- ▶ Construye una tabla como la siguiente y complétala según los números elegidos anteriormente:

P	Q	P · Q

- ▶ ¿A qué conjunto numérico pertenecen los números como resultado de $P \cdot Q$?
- ▶ Imagina que agregas más números que representen a P y Q respectivamente, ¿cómo sería el producto $P \cdot Q$?
- ▶ ¿Podrías conjeturar acerca del resultado del producto de dos números P y Q racionales positivos que son menores que 1?
- ▶ Completa la tabla anterior con una nueva columna donde comparas el producto con cada uno de los factores.

P	Q	$P \cdot Q$	$P \cdot Q$ es que P $P \cdot Q$ es que Q

- ▶ Si comparas el producto con los factores ¿qué te llama la atención? ¿Podrías conjeturar acerca del producto y los factores siempre que P y Q sean racionales positivos menores que 1?

Elementos clave en la resolución de la situación problemática

- ▶ Tabla con ejemplos de números racionales positivos menores que 1 y sus productos respectivos:

P	Q	$P \cdot Q$
0,4	0,6	0,24
0,5	0,7	0,35
$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5} = 0,2$
...

- ▶ Conjetura 1: "El producto de dos números racionales menores que 1 es un número menor que 1"

► Tabla con los números ordenados:

P	Q	P · Q	ORDEN
0,4	0,6	0,24	$0,24 < 0,4 < 0,6$
0,5	0,7	0,35	$0,35 < 0,5 < 0,7$
$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5} = 0,2$	$0,2 < \frac{1}{3} < \frac{3}{5}$
0,4	$\frac{2}{3}$	0,2666...	$0,2666... < 0,4 < \frac{2}{3}$
...

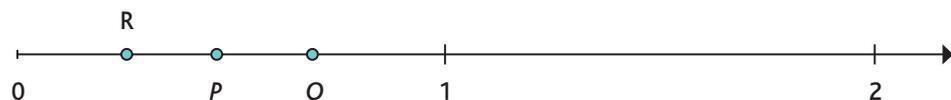
► **Conjetura 2:** "Si P y Q son racionales positivos menores que 1, entonces el producto P · Q es menor que P y que Q".

► Análisis general:

1. Se tiene que $0 < P < Q < 1$
2. Al multiplicar por P la desigualdad anterior se tiene que $0 < P^2 < QP < P$
3. De (1) se tiene que $P < Q < 1$
4. Luego, de (2) se tiene $0 < P^2 < QP < P < Q < 1$
5. Finalmente, $0 < QP < P < Q < 1$

Como $QP = PQ = R$, se obtiene $0 < R < P < Q < 1$

► **Conclusión:** La ubicación aproximada de $R = P \cdot Q$ se muestra en el siguiente diagrama:



Situación problemática para 8° año de Educación Básica

La siguiente actividad es parte de la resolución de problemas que involucran la aplicación del Teorema de Pitágoras, acorde a los OA planteados para 8° año de Educación Básica. Esta actividad genera una oportunidad de aprendizaje para que las y los estudiantes puedan desarrollar propiamente la habilidad de **resolver problemas** en el contexto de la propuesta de las Bases Curriculares 2013. Mediante la resolución del problema específico, se propone realizar la estimación de una magnitud (altura) acorde a ciertas condiciones dadas, apoyando el razonamiento con representaciones geométricas y modelos apropiados para la situación.

En cuanto a los aprendizajes previos necesarios para enfrentar esta situación problemática, las y los estudiantes deben aplicar sus conocimientos acerca del teorema de Pitágoras, además del cálculo de raíces cuadradas. Dependiendo de si lo han trabajado o no, también es posible conectar este problema con el concepto de rotación en el contexto de las transformaciones isométricas.

Las y los estudiantes experimentarán que la habilidad de resolver problemas promueve el desarrollo del pensamiento matemático, ya que permite que elaboren y prueben estrategias para llegar a la solución y luego verifiquen que sus resultados son correctos. La habilidad de resolver problemas es un medio para que las y los estudiantes desarrollen la capacidad de plantear conjeturas y usar el "ensayo y error" válidamente. No obstante, en esto están presentes también las habilidades de representar, modelar y argumentar.

OA: Aplicar el teorema de Pitágoras a la resolución de problemas en contextos cotidianos.

Habilidades: Resolver problemas, representar y modelar.

Problema⁶:

Un mueble tiene una profundidad de 60 *cm* y se lo quiere ubicar, tal como muestra la imagen, en una pieza que tiene una altura de 2,40 *m*. ¿Cuál es la altura máxima del mueble para ponerlo de pie sin topar el techo de la pieza?



Preguntas para analizar o comprender el problema. A través de este primer grupo de preguntas se busca que los estudiantes comprendan el contexto del problema, los datos que se entregan y lo que se les está preguntando. Por ejemplo:

- ▶ ¿Alguna vez te tocó ayudar a levantar un mueble como muestra la figura? ¿Cómo lo hiciste?
- ▶ ¿Qué situaciones podrían ocurrir si no se conocen bien las dimensiones del mueble, particularmente la altura de este al tratar de levantarlo?
- ▶ Observa el dibujo del enunciado. ¿Podrías marcar en él las dimensiones o magnitudes importantes a considerar en este problema?
- ▶ ¿Podrías conjeturar la altura máxima, con solo mirar el dibujo y las dimensiones entregadas?

6. Tomado del Programa de Estudio de 8° Básico, p. 113. Propuesta del 28 de enero de 2014.

Preguntas para orientar el análisis de la resolución del problema

En este segundo grupo de preguntas el propósito es inducir a que la o el estudiante establezca relaciones entre la información entregada y lo que se quiere averiguar. Deben aparecer aquí palabras clave tales como estrategia, magnitud, estimación, representar, ecuación, inecuación y argumentar. Por ejemplo:

- ▶ ¿Bastaría decir que la altura del mueble debe ser menor que 2,4 m? Argumenta.
- ▶ ¿Qué sucedería si el mueble es más ancho, por ejemplo, en 1 m o 1,2 m? En ese caso, ¿cómo varían los cálculos y la estimación de la altura? Explica.
- ▶ ¿Cuál de las magnitudes o dimensiones del mueble es determinante para resolver el problema? ¿Por qué?
- ▶ Haz un esquema geométrico que represente la situación. ¿Cuál sería una estrategia para estimar la altura máxima del mueble?
- ▶ ¿Qué forma tiene la cara café del mueble?
- ▶ ¿Qué relación (teorema) existe entre los lados de la cara y la diagonal?
- ▶ ¿Qué valor obtienes para la altura?

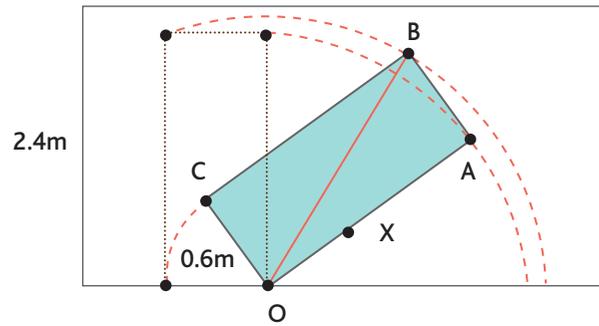
Preguntas para obtener evidencia del aprendizaje

Este grupo de preguntas debe orientarse de modo que ponga a prueba el análisis anterior y establezca un puente con situaciones similares que amplíen el razonamiento. Por ejemplo:

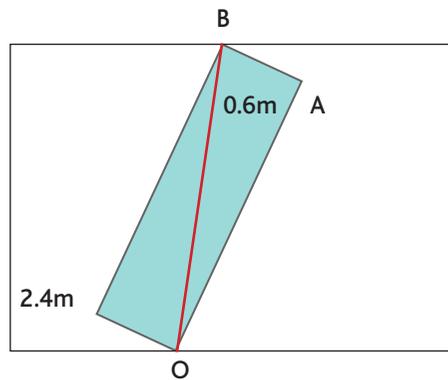
- ▶ ¿Qué sucedería si el alto de la pieza es diferente, por ejemplo, 2,5 m o 3 m? En ese caso, ¿cómo varían los cálculos y la estimación de la altura? Explica.
- ▶ ¿Cuál sería la altura máxima de un mueble cuyo ancho es 80 cm y se quiere parar en una habitación de 2,1 m de alto?
- ▶ Un mueble tiene una altura de 2,5 m y se lo quiere ubicar en una habitación que tiene un alto de 2,7 m ¿Cuál es el ancho máximo del mueble para ponerlo de pie sin topar el techo de la pieza?

Elementos claves en la resolución de la situación problemática

► Representación del problema:



El movimiento que hacen los vértices A, B y C, hasta que el mueble se para completamente, corresponde a una rotación en torno al punto O.



Estrategia: Dado que la diagonal OB es la de mayor magnitud, es la longitud clave en la resolución del problema. Entonces, una estrategia sería determinar la altura (x) del mueble, considerando que OB debería medir como máximo 2,4 m.

Conocimiento geométrico: Aplicación del Teorema de Pitágoras.

Ecuación: Según el modelo, al plantear el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$OA^2 + OC^2 = OB^2$$

$$OA^2 + 0,6^2 = 2,4^2$$

$$OA^2 = 2,4^2 - 0,6^2$$

$$OA = \sqrt{2,4^2 - 0,6^2}$$

$$OA = \sqrt{5,4}$$

$$OA \approx 2,3$$

Estimación de la altura máxima: $OA = \sqrt{5,4} \approx 2,3 \text{ m}$

Conclusión: Para que el mueble se pueda parar sin problemas, la altura debe ser $2,3 \text{ m}$. Por otra parte, las y los estudiantes podrían concluir que la altura del mueble debe ser menor a $2,3 \text{ m}$.

Situación problemática para 8° año de Educación Básica

La siguiente actividad es parte de la resolución de problemas que involucran el área y volumen de prismas rectos, acorde a los OA planteados para 8° año de Educación Básica. Esta actividad genera una oportunidad de aprendizaje para que las y los estudiantes puedan desarrollar la habilidad de **argumentar y comunicar** en el contexto de la propuesta de las Bases Curriculares 2013. Mediante la resolución del problema específico, se propone analizar la capacidad de un envase en forma de paralelepípedo en relación a objetos que puedan distribuirse en su interior, apoyando el razonamiento con representaciones adecuadas.

En cuanto a los aprendizajes previos necesarios para enfrentar esta situación problemática, las y los estudiantes deben aplicar sus conocimientos acerca de área de paralelogramos, área y volumen de prismas rectos. En conjunto con la resolución de problemas, experimentarán que argumentar es una de las habilidades que promueven el desarrollo del pensamiento matemático, ya que permite que las y los estudiantes demuestren sus conjeturas utilizando argumentos lógicos y veraces. La resolución de un problema es un medio para desarrollar la habilidad de argumentar.

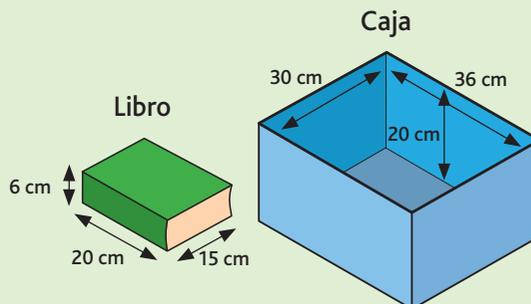
No obstante, también están presentes otras habilidades tales como representar y modelar.

OA: Argumentan sobre la capacidad de un envase de forma de paralelepípedo y objetos que puedan distribuirse en su interior.

Habilidades: Argumentar y comunicar, resolver problemas y representar.

Problema⁷:

Raúl está empackando libros en una caja rectangular como muestra la imagen. Todos los libros son del tamaño que se indica.



¿Cuál es el mayor número de libros que entrará en la caja?

Preguntas para analizar o comprender el problema. A través de este primer grupo de preguntas lo importante es que las y los estudiantes entiendan el contexto del problema y los datos que se entregan, y se focalicen en si comprenden o no lo que se les está preguntando. Por ejemplo:

- ▶ ¿A través de qué cuerpos geométricos se pueden representar tanto la caja como el libro?
- ▶ ¿Podrías definir lo que es un prisma recto?
- ▶ Respecto de la situación propuesta ¿qué concepto geométrico tiene directa relación con los cuerpos geométricos involucrados, área o volumen? Argumenta.
- ▶ Acorde al contexto del problema ¿en qué afectan las dimensiones tanto de la caja como de los libros? Explica.
- ▶ ¿Podrías explicarle a un/a compañero/a detalladamente lo que entiendes de esta situación problemática?

7. Tomado de TIMSS 2011, p. 139.

Preguntas para orientar el análisis de la resolución del problema. En este segundo grupo de preguntas el propósito es inducir a que la o el estudiante establezca relaciones entre la información entregada y lo que se quiere averiguar. Deben aparecer aquí palabras clave tales como conjeturar, volumen, capacidad, representar y argumentar. Por ejemplo:

- ▶ ¿Da lo mismo la disposición en que se ubiquen los libros en la caja? Argumenta.
- ▶ ¿En qué dimensiones de la caja deberías fijarte para obtener una buena distribución de los libros? ¿Por qué?
- ▶ ¿En qué dimensiones del libro deberías fijarte para obtener una buena distribución en la caja? ¿Por qué?
- ▶ ¿Qué relaciones se pueden establecer entre las dimensiones del libro y las dimensiones de la caja?
- ▶ Dibuja a continuación posibles distribuciones (al menos 3) de los libros en la caja:

Distribución 1	Distribución 2	Distribución 3

- ▶ Argumenta en cada caso las ventajas y desventajas de ubicar los libros según esas distribuciones.
- ▶ ¿Cuál es la distribución óptima para que la mayor cantidad de libros quepa perfectamente en la caja? Argumenta.
- ▶ ¿Cuántos libros como máximo caben en la caja?

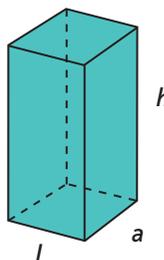
Preguntas para obtener evidencia del aprendizaje (posterior a la resolución del problema). Este grupo de preguntas debe orientarse para poner a prueba las conjeturas anteriores y establecer un puente con situaciones similares pero que amplíen el razonamiento geométrico. Por ejemplo:

- ▶ ¿Es posible que quepan 18 libros en una caja, correctamente ordenados? Argumenta.
- ▶ ¿Cuántas cajas se requieren para guardar 22 libros? Argumenta.
- ▶ Si cada una de las dimensiones de la caja aumenta al doble, ¿es cierto que el número máximo de libros aumenta también al doble? Argumenta.
- ▶ Si cada una de las dimensiones de la caja disminuye a la mitad, ¿es cierto que el número máximo de libros disminuye también a la mitad? Argumenta.
- ▶ ¿Cuántos libros caben si el ancho de los libros en lugar de 6 cm, fuera 3 cm? Argumenta.
- ▶ ¿Cuántos libros caben si el ancho de la caja en lugar de 30 cm, fuera 45 cm? Argumenta.

Elementos clave en la resolución de la situación problemática

Volumen de un prisma recto:

$$V = l \cdot a \cdot h$$



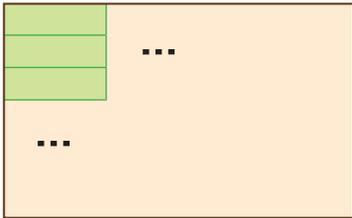
El concepto de capacidad:

Capacidad es la propiedad de una cosa al contener otras dentro de ciertos límites. También dice relación con el volumen de algún cuerpo. En el contexto del problema se refiere a la cantidad de libros que puede guardar.

Relación entre las dimensiones del libro y la caja.

Libro	Caja	Relación
Alto 20 cm	Alto 20 cm	Coincide
Grosor 6 cm	Largo 36 cm	$36 : 6 = 6$ (6 veces)
Ancho 15 cm	Ancho 30 cm	$30 : 15 = 2$ (2 veces)

► Posibles ordenamientos de los libros en la caja (ensayo y error):

Distribución 1	Distribución 2	Distribución 3
		
De canto horizontal	De canto vertical	Acostado horizontal
Caben: libros	Caben: libros	Caben: libros

¿Existen otras formas de organizar los libros dentro de la caja? Argumenta.
 ¿Cuál es la organización óptima? Argumenta.

Conclusión: La organización óptima de los libros depende de aprovechar al máximo la relación entre las dimensiones del libro y las dimensiones de la caja en el sentido que quepan.

Situación problemática para 8° año de Educación Básica

La siguiente actividad es parte de la resolución de problemas que involucran la aplicación del principio multiplicativo al cálculo de probabilidades, acorde a los OA planteados para 8° año de Educación Básica. Esta actividad genera una oportunidad de aprendizaje para que las y los estudiantes puedan desarrollar propiamente la habilidad de **resolver problemas** en el contexto de la propuesta de las Bases Curriculares 2013. Mediante la resolución del problema específico, se propone determinar la probabilidad de un evento compuesto en un experimento aleatorio combinado.

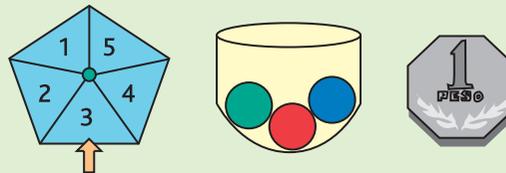
En cuanto a los aprendizajes previos necesarios para enfrentar esta problemática, las y los estudiantes deben aplicar sus conocimientos acerca de experimento aleatorio simple, suceso o evento, espacio muestral y probabilidad. Las y los estudiantes experimentarán que la habilidad de resolver problemas promueve el desarrollo del pensamiento matemático, ya que permite que ellas y ellos elaboren y prueben estrategias para llegar a la solución y luego verifiquen que sus resultados son correctos. La habilidad de resolver problemas es un medio para que las y los estudiantes desarrollen la capacidad de plantear conjeturas y usar el "ensayo y error" válidamente. No obstante, en esto están presentes también las habilidades de representar, modelar y argumentar.

OA: Resuelven problemas que utilicen el principio multiplicativo para calcular probabilidades.

Habilidades: Resolver problemas, representar y modelar.

Problema⁸:

En un experimento aleatorio combinado, se gira primero una ruleta en forma de pentágono con los números del 1 al 5, puestos en sectores iguales; después desde una urna se saca al azar una bolita entre tres, la que puede ser de color azul, rojo o verde; finalmente se lanza una moneda cuyos resultados pueden ser cara o sello. Un evento de este experimento es un triple ordenado (número, color, lado de la moneda).



¿Cuál es la probabilidad de obtener el evento A "número par – rojo – sello"?

Preguntas para analizar o comprender el problema. A través de este primer grupo de preguntas lo importante es que las y los estudiantes entiendan el contexto del problema, los datos que se entregan y se focalicen en si comprenden o no lo que se les está preguntando. Por ejemplo:

¿Qué es un experimento aleatorio? Da ejemplos.

- ▶ ¿Qué es un experimento aleatorio combinado? Da ejemplos.
- ▶ Si solo se hace girar la ruleta pentagonal, ¿cuál es el conjunto de todos los resultados posibles o espacio muestral en este caso? Argumenta.
- ▶ Si solo se extrae al azar una bolita de la urna, ¿cuál es el espacio muestral en este caso? Argumenta.
- ▶ Si solo se lanza la moneda, ¿cuál es el espacio muestral? Argumenta.
- ▶ ¿Cómo se determina una probabilidad en un experimento, cuando todos los sucesos elementales tienen la misma posibilidad de ser escogidos? Describe.

8. Adaptado del Programa de Estudio de 8° Básico, p. 143. Propuesta del 28 de enero de 2014.

- ▶ ¿Cuál es la probabilidad de obtener un "2" al hacer girar la ruleta pentagonal? Argumenta.
- ▶ ¿Cuál es la probabilidad de obtener una "bolita verde" cuando se extrae al azar una bolita desde la urna? Argumenta.
- ▶ ¿Cuál es la probabilidad de obtener una "cara" al lanzar la moneda? Argumenta.
- ▶ ¿Podrías explicarle a un compañero/a lo que entiendes de esta situación problemática?

Preguntas para orientar el análisis de la resolución del problema. En este segundo grupo de preguntas el propósito es inducir a que la o el estudiante establezca relaciones entre la información entregada y lo que se quiere averiguar. Deben aparecer aquí palabras clave tales como estrategia, evento compuesto, principio multiplicativo, representar, diagrama de árbol y probabilidad. Por ejemplo:

- ▶ Se considera el experimento compuesto: "Primero girar la ruleta y después sacar una bolita de la urna" ¿Por qué un evento del experimento compuesto se representa por un par ordenado de (número, color)?
- ▶ En la siguiente tabla las filas representan los resultados de la ruleta pentagonal y las columnas los resultados del sorteo al azar de las bolitas pintadas. Completa la tabla con todos los eventos posibles.

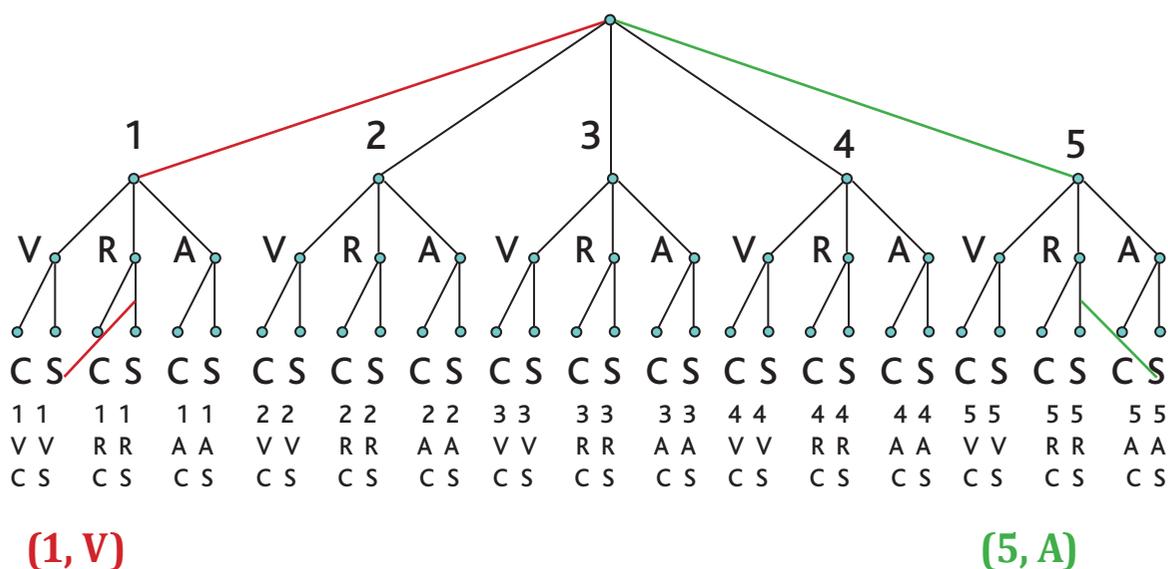
	v	r	a
1	(1,V)	(1,R)	
2	(2,V)		
3			
4			
5			

- ▶ ¿Cuántas celdas para eventos del experimento compuesto tiene la tabla?
- ▶ En vez de contar ¿cómo se puede calcular la cantidad de las celdas?
- ▶ Si la ruleta tuviera 12 números y la urna 5 bolitas de diferentes colores ¿cuántas celdas tendría la tabla? ¿Cuántos eventos (número, color) tendría el experimento compuesto?

- ▶ Si un experimento aleatorio está compuesto de dos experimentos con **m** posibles resultados del primer experimento y **n** resultados posibles del segundo experimento ¿cuántos eventos posibles tiene el experimento compuesto?
- ▶ Si se cambiara el orden de los experimentos ¿se cambiaría la cantidad de los eventos? Argumenta tu respuesta.

Alternativa a la tabla: Elaborar un árbol de posibilidades.

- ▶ Anotan los eventos y marcan en el árbol las vías que llevan al evento. Completan la representación con vías y eventos.



- ▶ ¿Cuántas vías que llevan a eventos del experimento compuesto tiene el árbol?
- ▶ En vez de contar, ¿cómo se puede calcular la cantidad de las vías?
- ▶ Si la ruleta tuviera 12 números y la urna 5 bolitas de diferentes colores ¿cuántas vías tendría el árbol? ¿Cuántos eventos (número, color) tendría el experimento compuesto?

- ▶ Si un experimento aleatorio está compuesto de dos experimentos con m posibles resultados del primer experimento y n resultados posibles del segundo experimento, ¿cuántos eventos posibles tiene el experimento compuesto?
- ▶ Si se cambiara el orden de los experimentos, ¿se cambiaría la cantidad de los eventos? Razona tu respuesta.

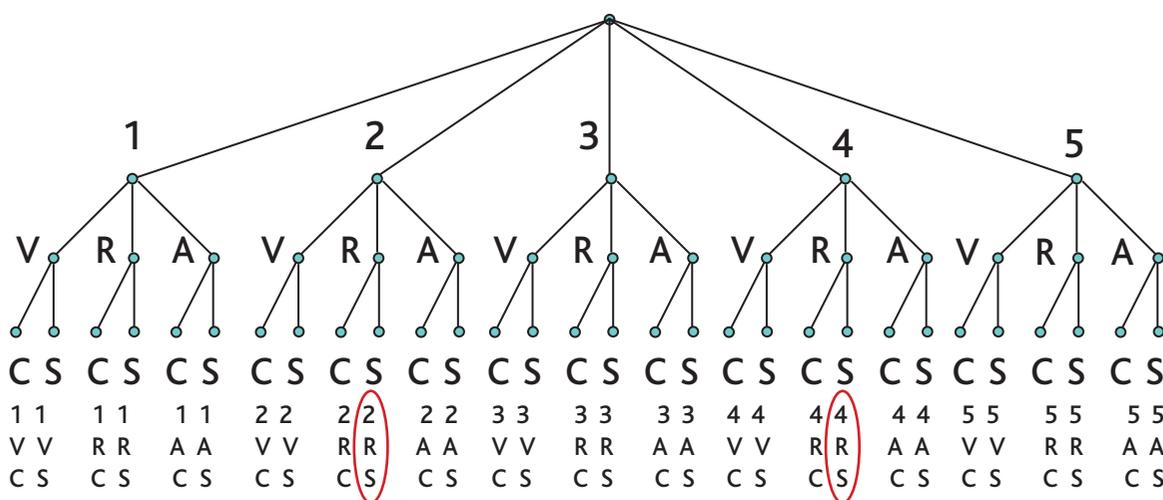
Preguntas para obtener evidencia del aprendizaje (posterior a la resolución del problema). Este grupo de preguntas debe orientarse de modo que ponga a prueba el análisis anterior y establezca un puente con situaciones similares pero que amplíen el razonamiento. Por ejemplo:

- ▶ ¿Cuántos eventos hay en el experimento anterior?
- ▶ ¿Cómo se calcula la probabilidad de un evento, por ejemplo el evento $E = (3, A)$?
- ▶ Calcula la probabilidad $P(E)$ y exprésala con una fracción.
- ▶ Si la ruleta tuviera 8 números y la urna 5 bolitas, determina la probabilidad de un evento F cualquiera. Expresa $P(F)$ con una fracción.
- ▶ Si un experimento compuesto de dos experimentos con m y n resultados respectivos, ¿cuál sería la expresión algebraica que representa la probabilidad de un evento G ?
- ▶ En el experimento compuesto de la ruleta pentagonal y la urna de tres colores se define un evento D "número par y color rojo". Marca en la tabla o en el árbol los eventos que forman el evento D .
- ▶ Determina la probabilidad del evento (definido) D y exprésala con una fracción.

Elementos claves en la resolución de la situación problemática

Cantidad de eventos compuestos de los tres experimentos
 $z = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ (Principio multiplicativo)

Diagrama del árbol del experimento compuesto



- ▶ Eventos específicos: (2, R, S) o (4, R, S)
- ▶ Probabilidad buscada: "Cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles o totales". En este caso es: $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$
- ▶ Relación entre probabilidades: Existe una relación entre las probabilidades individuales y la probabilidad de los eventos compuestos. Por ejemplo:

$$P(2, R, S) = \frac{1}{30} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = P(2) \cdot P(R) \cdot P(S)$$

$$P(4, R, S) = \frac{1}{30} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = P(4) \cdot P(R) \cdot P(S)$$

$$P(2, R, S) + P(4, R, S) = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Conclusión: A través del diagrama de árbol es posible encontrar todos los eventos posibles del experimento compuesto. Mediante la Regla de Laplace se puede obtener la probabilidad buscada. Existe una relación entre las probabilidades de los eventos compuestos y la probabilidad de los eventos simples, a través de la multiplicación o la suma de probabilidades.

Situación problemática para 8° año de Educación Básica

La siguiente actividad es parte de la resolución de problemas que involucran las medidas de posición, acorde a los OA planteados para 8° año de Educación Básica. Esta actividad permite generar una oportunidad de aprendizaje para que las y los estudiantes puedan desarrollar la habilidad de **representar** en el contexto de la propuesta de las Bases Curriculares 2013. Mediante la resolución del problema específico, se propone analizar dos conjuntos de datos mediante el uso de gráficos de caja y establecer inferencias. En cuanto a los aprendizajes previos necesarios para enfrentar esta problemática, las y los estudiantes deben aplicar sus conocimientos acerca de los números racionales, medidas de tendencia central, medidas de posición y gráficos de caja.

En conjunto con la resolución de problemas, las y los estudiantes experimentarán que representar es una de las habilidades matemáticas que promueven el desarrollo del pensamiento matemático, ya que representar es una habilidad fundamental para expresar y generalizar situaciones de la vida diaria en lenguaje matemático. No obstante, también están presente otras habilidades tales como comunicar y argumentar.

OA: Representan y comparan datos usando gráficos de Caja en el contexto de la resolución de problemas y las medidas de posición.

Habilidades: Representar, resolver problemas, argumentar y comunicar.

Problema⁹: Se sabe que la existencia de alcohol en la sangre disminuye la capacidad de reaccionar. En la tabla se registra el resultado de un experimento que midió el tiempo de reacción de 100 personas. Primero se aplicó el test a personas en estado sobrio y después se midió el tiempo de reacción a personas con 0,5g de alcohol por litro en la sangre.

Tiempo de reacción en s	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
Frecuencia para el estado sobrio	1	1	3	14	29	30	19	3	0	0	0	0
Frecuencia con 0,5g por litro en la sangre	0	0	1	6	20	37	16	15	4	0	0	1

Representa la situación anterior usando gráficos de Caja y responde: ¿qué se puede inferir de la información graficada? Argumenta.

Preguntas para analizar o comprender el problema. A través de este primer grupo de preguntas lo importante es que las y los estudiantes entiendan el contexto del problema, los datos que se entregan y se focalicen en si comprenden o no lo que se les está preguntando. Por ejemplo:

- ▶ ¿A qué tipos de números corresponden los tiempos de reacción?
- ▶ ¿Cuáles son las categorías definidas para este estudio?
- ▶ ¿En qué tiempos de reacción se concentran más los individuos? Argumenta.

9. Adaptado del Programa de Estudio de 8° Básico, p. 143. Propuesta del 28 de enero de 2014.

- ▶ ¿Puedes observar diferencias entre los dos grupos de personas a partir de la tabla? Argumenta.
- ▶ ¿Cuáles son la moda, la media y la mediana para las personas en estado sobrio? Argumenta.
- ▶ ¿Cuáles son la moda, la media y la mediana para las personas con 0,5 g de alcohol por litro en la sangre? Argumenta.
- ▶ ¿Qué información entregan las anteriores medidas de tendencia central? Argumenta.
- ▶ ¿Qué se puede inferir con la información anterior? Argumenta.

Preguntas para orientar el análisis de la resolución del problema. En este segundo grupo de preguntas el propósito es inducir a que la o el estudiante establezca relaciones entre la información entregada y lo que se quiere averiguar. Deben aparecer aquí palabras clave tales como operaciones con decimales, conjetura, inferencia, verificación, modelar. Por ejemplo:

- ▶ ¿Cuáles son los tiempos mínimo y máximo de reacción para las personas sobrias?
- ▶ ¿Cuáles son los tiempos mínimo y máximo de reacción para las personas con 0,5 g de alcohol por litro en la sangre?
- ▶ ¿Cuál es el primer cuartil para las personas en estado sobrio? Argumenta.
- ▶ ¿Cuál es el porcentaje mínimo de las personas sobrias que tienen un tiempo de reacción menor que indica el primer cuartil?
- ▶ ¿Cuál es el primer cuartil para las personas con 0,5 g de alcohol por litro en la sangre? Argumenta.
- ▶ ¿Cuál es el porcentaje mínimo de las personas con 0,5 g de alcohol por litro en la sangre que tienen un tiempo de reacción menor que indica el primer cuartil? Argumenta.
- ▶ ¿Cuál es el segundo cuartil para las personas en estado sobrio? Argumenta.
- ▶ ¿Qué porcentaje mínimo de las personas sobrias tienen un tiempo de reacción indicado entre el primer y tercer cuartil?
- ▶ ¿Cuál es el segundo cuartil para las personas con 0,5 g de alcohol por litro en la sangre? Argumenta.

- ▶ ¿Qué porcentaje mínimo de las personas con 0,5 g de alcohol por litro en la sangre tienen un tiempo de reacción indicado entre el primer y tercer cuartil?
- ▶ ¿Con qué medida de tendencia central coincide el segundo cuartil?
- ▶ ¿Cuál es el tercer cuartil para las personas en estado sobrio? Argumenta.
- ▶ ¿Cuál es el porcentaje mínimo de las personas sobrias que tienen un tiempo de reacción mayor que indica el tercer cuartil?
- ▶ ¿Cuál es el tercer cuartil para las personas con 0,5 g de alcohol por litro en la sangre? Argumenta.
- ▶ ¿Cuál es el porcentaje mínimo de las personas con 0,5 g de alcohol por litro en la sangre que tienen un tiempo de reacción mayor que indica el tercer cuartil?
- ▶ Ordena las medidas anteriores en el siguiente cuadro:

Categoría	N	MIN	Q1	Q2 (MEDIANA)	Q3	MAX
Estado sobrio						
0,5 g de alcohol						

- ▶ ¿Cómo se puede representar la información respecto a los tiempos de reacción de ambas categorías, utilizando los datos de la tabla? ¿Para qué se utilizan las medidas de posición? Argumenta.
- ▶ ¿Podrías conjeturar respecto a los tiempos de reacción en ambas categorías?
- ▶ ¿Qué son los gráficos de caja? ¿Cómo se construyen? ¿Para qué sirven?
- ▶ A partir de la información de la tabla construye los gráficos de caja para ambas categorías.
- ▶ ¿Qué se puede inferir de la información gráfica anterior? Argumenta y concluye.

Preguntas para obtener evidencia del aprendizaje (posterior a la resolución del problema).

- ▶ ¿Cómo se procede en el caso de un número par o impar de los datos? Discute con tus compañeros.

Elementos clave en la resolución de la situación problemática

Tabla de valores:

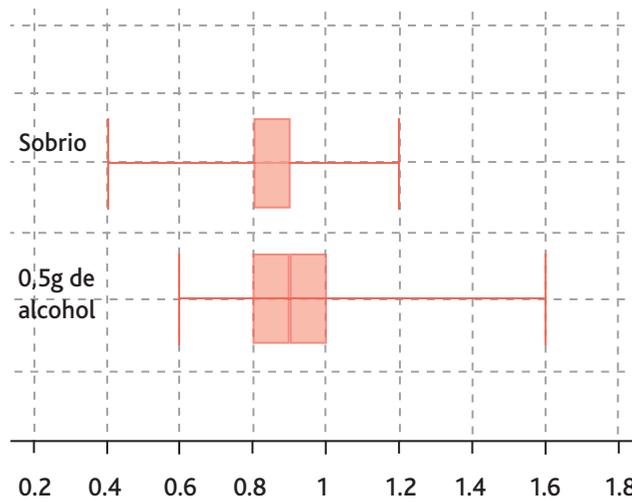
Tiempo de reacción en s	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
En estado sobrio	1	1	3	14	29	30	19	3	0	0	0	0
Con 0,5 g por litro en la sangre	0	0	1	6	20	37	16	15	4	0	0	1

- ▶ Compare los tiempos de reacción ambas poblaciones y conjeture acerca de coincidencias y diferencias.

Tabla de cuartiles:

Categoría	N	MIN	Q1	Q2 (MEDIANA)	Q3	MAX
Estado sobrio	100	0,4	0,8	0,9	0,9	1,2
0,5 g de alcohol	100	0,6	0,8	0,9	1	1,6

Gráficos de caja (elaborado sin o con software educativo)



Compare los gráficos de caja y conteste las siguientes preguntas.

- ▶ ¿Cómo están posicionados los mínimos y los máximos?
- ▶ ¿Qué llama la atención si se comparan los datos entre el primer y el tercer cuartil de ambas poblaciones? Argumenta tu respuesta.

Situación problemática para 8° año de Educación Básica

La siguiente actividad es parte de la resolución de problemas que involucran la evaluación de la información gráfica según como se presenten los datos, acorde a los OA planteados para 8° año de Educación Básica. Esta actividad genera una oportunidad de aprendizaje para que las y los estudiantes desarrollen la habilidad de **representar** en el contexto de la propuesta de las Bases Curriculares 2013. Mediante la resolución del problema específico, se propone evaluar si la denuncia que hace un cierto presentador de TV es válida o no acorde a la información gráfica que se utiliza.

Para apoyar el análisis se usan representaciones pictóricas que ayuden a la comprensión y resolución del problema.

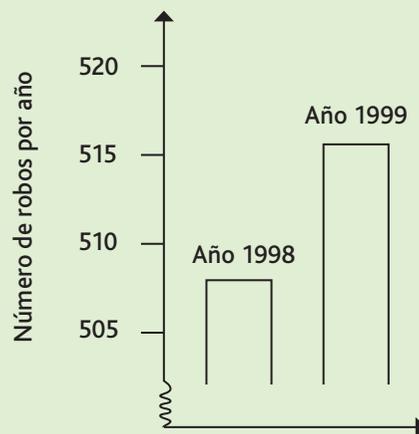
En cuanto a los aprendizajes previos necesarios para enfrentar esta situación problemática, las y los estudiantes deben aplicar sus conocimientos acerca de gráficos de barra y barras. En conjunto con la resolución de problemas, las y los estudiantes experimentarán que representar es una de las habilidades que promueven el desarrollo del pensamiento matemático, ya que permite apoyar la comprensión mediante la visualización. La resolución de un problema es apoyada por el uso de representaciones adecuadas. No obstante, también están presentes otras habilidades como modelar y argumentar.

OA: Resuelven problemas que involucran manipulación en la información comunicada gráficamente.

Habilidades: Representar, resolver problemas, argumentar y comunicar.

Problema¹⁰:

Un presentador de TV mostró este gráfico y dijo: “El gráfico muestra que hay un enorme aumento de robos comparando 1998 y 1999”.



¿Consideras que la afirmación del presentador es una afirmación razonable del gráfico? Da una explicación que fundamente tu respuesta.

Preguntas para analizar o comprender el problema. A través de este primer grupo de preguntas lo importante es que las y los estudiantes entiendan el contexto del problema, los datos que se entregan y se focalicen en si comprenden o no lo que se les está preguntando. Por ejemplo:

- ▶ ¿Qué tipo de gráfico es el que muestra el problema?
- ▶ ¿Qué información es la que entrega el gráfico?
- ▶ ¿Podrías explicarle a un/a compañero/a lo que entiendes de esta situación problemática?

10. Adaptado de PISA 2009, p.12.

Preguntas para orientar el análisis de la resolución del problema. En este segundo grupo de preguntas el propósito es inducir a que la y el estudiante establezca relaciones entre la información entregada y lo que se quiere averiguar. Deben aparecer aquí palabras clave tales como analizar, estrategias y representar. Por ejemplo:

- ▶ Aproximadamente, ¿cuántos robos hubo en 1998 y luego en 1999?
- ▶ ¿Piensas que la escala usada en el gráfico es la adecuada? Argumenta.
- ▶ ¿Qué tipo de escala es la que se utiliza? Explica.
- ▶ ¿Qué estrategia podrías utilizar para analizar la situación? Describe.

Con las estrategias sugeridas por las y los estudiantes se establece que se experimentará cambiando las escalas de gráficos de barras para representar los datos sobre robos en 1998 y 1999. Se acuerda hacer los siguientes cambios en las escalas de los gráficos.

Construye gráficos de barra con los mismos datos utilizando diferentes escalas:

Escala	Gráfico 1	Gráfico 2	Gráfico 3	Gráfico 4
Unidad	2	5	50	100
Mínimo	502	490	0	0
Máximo	518	540	600	600

A continuación, preguntas para la argumentación de la solución.

- ▶ ¿Cómo se muestra la información en cada gráfico? Analiza.
- ▶ ¿Qué sucede en los gráficos de barra 1 y 2 versus los gráficos 3 y 4? Argumenta.
- ▶ ¿Cuál sería una escala más apropiada para presentar los datos del problema? Argumenta.
- ▶ ¿Cuál es la importancia de la escala en un gráfico? Argumenta.
- ▶ ¿De qué depende la elección de la escala al construir un gráfico? Argumenta.
- ▶ Respecto del problema original ¿es razonable que el presentador señale como un “enorme” aumento de los robos desde 1998 a 1999? Argumenta.

- ▶ Usando una escala más adecuada ¿qué debería señalar el presentador de TV en forma más justa respecto al aumento de robos? Discute con tus compañeros y argumenta.
- ▶ ¿Cuál gráfico elegirías? Constrúyelo y argumenta tu respuesta.
- ▶ El docente puede sugerir lo siguiente: Inténtalo con gráficos de líneas usando diferentes escalas.

Preguntas para obtener evidencia del aprendizaje (posterior a la resolución del problema). Este grupo de preguntas debe orientarse a revisar lo realizado hasta ahora y analizar las estrategias utilizadas. También se debe establecer conexión con otras situaciones problemáticas similares que amplíen o profundicen los contenidos involucrados. Por ejemplo:

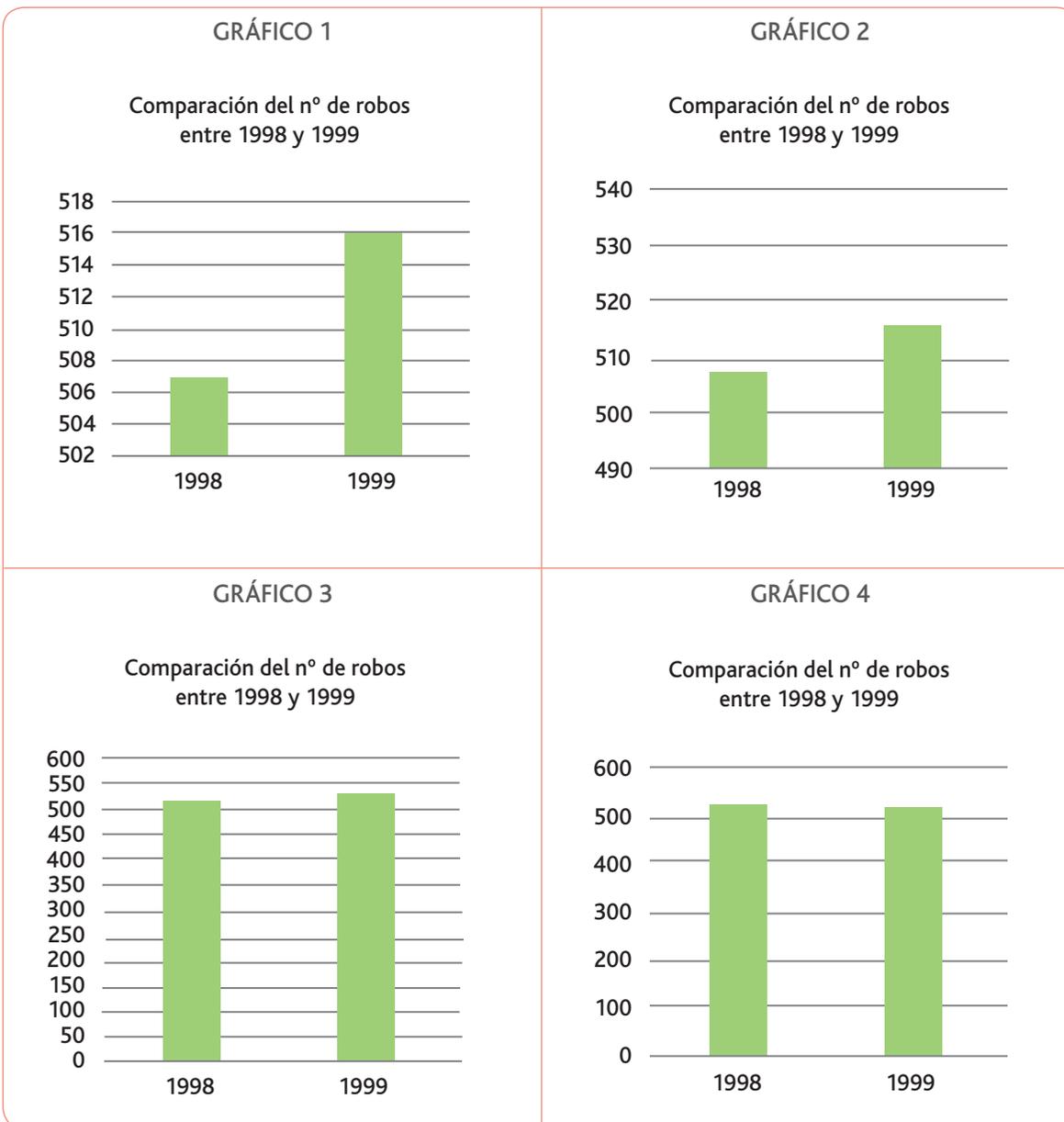
- ▶ ¿Piensas que este tipo de situaciones, tal como la del problema original, obedece a un desconocimiento en la construcción de gráficos, o más bien a una forma de "manipular" la información? Discute con tus compañeros y argumenta.
- ▶ Investiga alguna situación cotidiana en la cual la información gráfica no represente fielmente lo que se quiere informar. Puedes usar, por ejemplo, recortes de diario. Describe lo que averigues.
- ▶ Analiza junto a tus compañeros la siguiente situación mostrada en un medio español: http://www.eldiario.es/cienciacritica/Representacion-grafica-claridad-manipulacion-fraude_6_355624442.html ¿Cuál es la situación de manipulación que se pone en evidencia respecto a las tasas de desempleo? Argumenta.

Elementos clave en la resolución de la situación problemática:

Tabla con diferentes escalas para los gráficos:

Escala	Gráfico 1	Gráfico 2	Gráfico 3	Gráfico 4
Unidad	2	5	50	100
Mínimo	502	490	0	0
Máximo	518	540	600	600

Gráficos con diferentes escalas:



Conclusión: Claramente el uso de diferentes escalas hace que la información de un gráfico se vea muy distinta. Los gráficos 1 y 2 son semejantes al original del problema, donde se muestra una diferencia significativa respecto al aumento de robos. No obstante, en los gráficos 3 y 4 la escala comienza desde 0 y la información se presenta más acorde al número de robos en cada año. Por lo que el aumento en el número de robos ya no es tan significativo.



Ministerio de
Educación

Gobierno de Chile