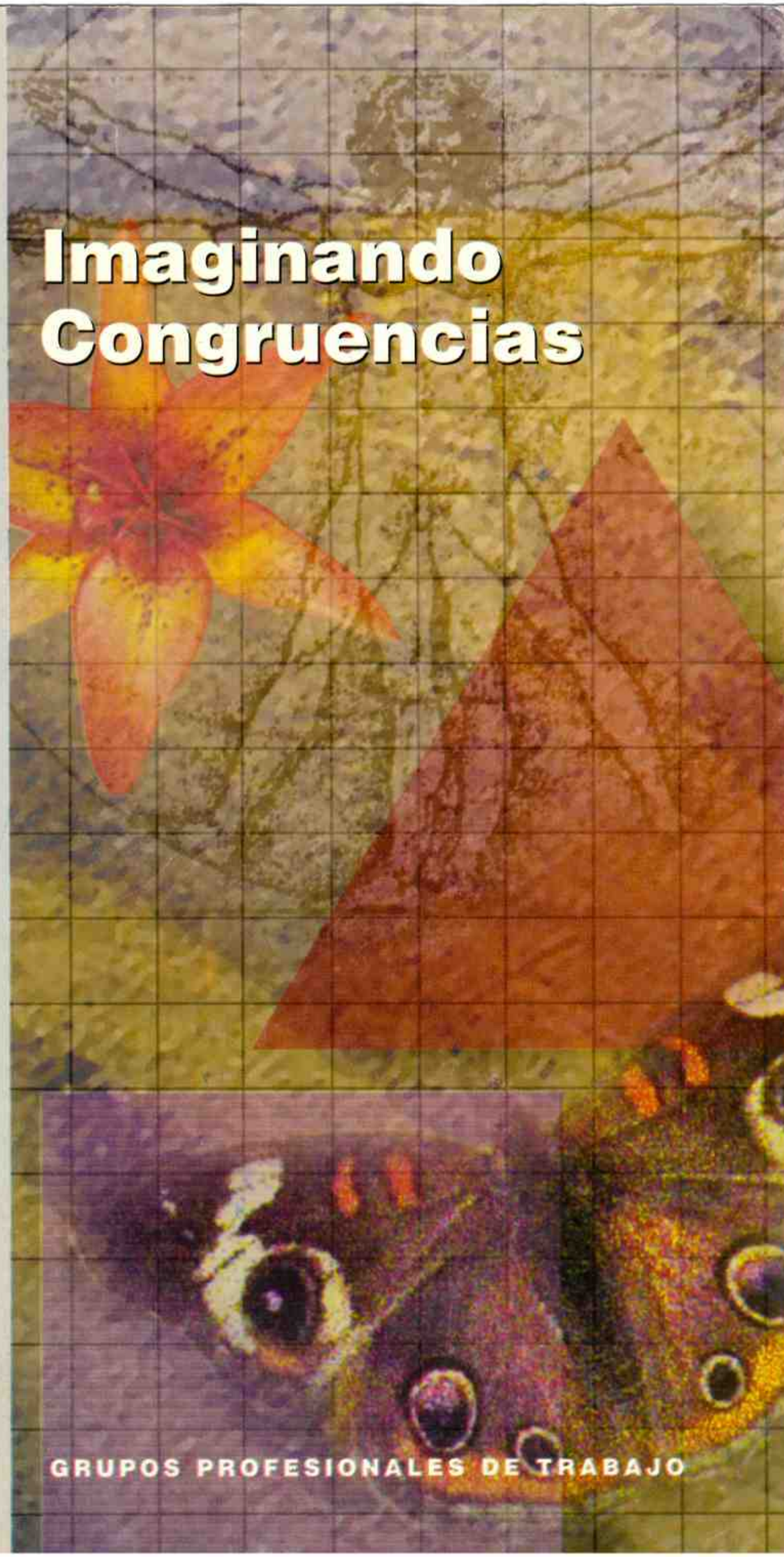
MÓDULO DE MATEMÁTICA

Imaginando Congruencias



Ministerio de Educación

PROGRAMA MECE-MEDIA

GRUPOS PROFESIONALES DE TRABAJO

Módulo de Matemática
Imaginando congruencias

Colaboración profesional del Programa MECE-Media
para los Grupos Profesionales de Trabajo
Jorge Galaz N., Gustavo Miranda N., Urit Lacoa M., Alicia Salinas y Eduardo Zamora P.

Asesoría: Silvia Navarro y M. Angélica Téllez

1999

Inscripción N° 108.716
I.S.B.N. N° 956-7405-93-X

Editores María Inés Noguera E
M. Victoria Gómez

Diseño Juan Manuel Aguiló
Impresión Impresos Toledo

Publicación del
Programa de Mejoramiento de la Calidad y Equidad de la Educación, MECE-Media
Ministerio de Educación
República de Chile
Alameda 1371, piso 9, Santiago
Fono: 699.1015 / Fax: 699.1030

Módulo de Matemática

Imaginando Congruencias

Autores: **Víctor H. Cortés y Rubí E. Rodríguez**
P. Universidad Católica de Chile

Grupos Profesionales de Trabajo
Ministerio de Educación – Programa MECE Media

Palabras preliminares

Módulos didácticos

El desarrollo profesional docente es un eje fundamental en el proceso de reforma educativa, puesto que marca la posibilidad de generar transformaciones sustantivas en las prácticas pedagógicas. Para ello se hace necesario la creación de espacios para el intercambio de experiencias, el trabajo colaborativo y la reflexión crítica sobre el propio quehacer. Este espacio se constituye en el origen de construcción del saber pedagógico.

En este contexto el Programa Mece–Media ha promovido la creación de Grupos Profesionales de Trabajo (GPT) al interior de cada liceo, en los cuales participan profesores y jefes de Unidades Técnico–Pedagógicas. En consecuencia, el GPT es el espacio natural del desarrollo profesional.

Como una forma de contribuir a este desarrollo, el Componente de Pedagogía presenta los Módulos Didácticos, que se constituyen en una herramienta centrada en aspectos fundamentales disciplinarios y didácticos como un aporte a la revisión y rediseño de las prácticas de enseñanza. Por otra parte, los Módulos Didácticos intentan conformarse como un referente que permita a los docentes encontrar los caminos más apropiados para la implementación del nuevo marco curricular.

Ejes organizadores de los módulos

- **Contenidos conceptuales**
  Se inscriben en ámbitos temáticos referidos a un área disciplinaria particular, aportando a la actualización y profundización de conceptos claves y sus relaciones, para promover la comprensión y aprendizaje de estructuras conceptuales de orden superior que facilite la construcción de conocimientos.

  Al mismo tiempo, y como correlato de lo anterior, los Módulos incorporan enfoques interdisciplinarios que permiten el trabajo con conceptos complejos desde miradas diversificadas. Lo que contribuye significativamente a los procesos de producción de conocimiento de los alumnos.

- **Procedimientos didácticos**
  Los Módulos explicitan la relación que el docente establece entre los contenidos conceptuales, el aprendizaje y los modos de enseñar, surgiendo algunas actividades en las diferentes temáticas que se abordan.

  Sin embargo, en su lectura y discusión es necesario tener presente permanentemente los diferentes contextos socioculturales donde está inserta la acción pedagógica de los profesores. Estos procesos de adecuación están marcados por los conocimientos que los docentes tienen de:

  a) las formas de conocer y producir conocimientos de sus alumnos,
  b) los modos de producción de conocimiento de la disciplina específica objeto de enseñanza y
  c) de la relación que es necesario establecer entre ambos.

Una invitación

Registrar y compartir las diversas formas de trabajo pedagógico, las manifestaciones y producciones de los alumnos, la reflexión e interpretación sobre las instancias de búsqueda, como dijimos antes, es el inicio del proceso de construcción de saber pedagógico, que se concretiza, se hace real en la escritura. Para ello, el Componente de Pedagogía extiende una invitación a todos los docentes de Enseñanza Media a escribir sus experiencias significativas de aula y publicitarlas en la Páginas Didácticas.

Índice

Introducción

Cuando recibimos la invitación a colaborar con la línea de Gestión Pedagógica del Programa Mece–Media en la preparación de un Módulo en el área de Geometría, nos sentimos enfrentados a un muy interesante desafío: cómo aprovechar esta oportunidad para transmitir nuestra experiencia en el tema de una manera atractiva y formadora, tratando de apoyar y enriquecer el trabajo de los profesores.

Nuestra propuesta está en las páginas siguientes. El tema escogido fue el de Isometrías y Congruencias, que, además de ser parte de los nuevos programas y contenidos mínimos, ofrece la posibilidad de tratarlo con una visión integradora y actual de las matemáticas, que facilite el cambio buscado por la reforma educacional.

El Módulo fue estructurado en cuatro sesiones y un apéndice, además de las referencias pertinentes. El esquema general es siempre el mismo, que creemos básico para la comprensión profunda de la Geometría, y que también puede ser relevante para otros requerimientos de nuestra sociedad: comenzar por la intuición, continuar con la construcción y culminar en la abstracción (o formalización, o demostración) de las propiedades intuitivas. También quisimos ofrecer variados niveles de dificultad, para permitir la utilización mejor del Módulo adecuándolo a las distintas realidades locales, así como las posibilidades de experimentar continuamente y de, tras terminar el trabajo con el Módulo, continuar explorando diversos temas relacionados que puedan ser del interés de los lectores.

La primera sesión es sobre todo una motivación, una primera exploración de los conceptos intuitivos de isometría y congruencia a través de fenómenos de la naturaleza y otros creados por el hombre; algunos ejemplos explícitos y varios temas de experimentación.

En la segunda sesión se procede a sistematizar los conceptos, nuevamente a través de ejemplos que ahora reflejan las propiedades comunes de las situaciones analizadas en la primera sesión. También se estudian las construcciones geométricas asociadas y se da los métodos necesarios para reconstruir los fenómenos encontrados, explicando cómo copiar las figuras para que resulten congruentes.

La tercera sesión (más "matematizada") se dedica a probar las propiedades comunes de los conceptos, que fueron encontradas en la segunda sesión, logrando llegar a la clasificación de isometrías del plano. En el caso de demostraciones más complejas o extensas, que debían estar presentes por razones de completitud, rigurosidad y con la esperanza de que haya lectores interesados, se prefirió postergarlas para el apéndice, de manera de no interrumpir la discusión natural.

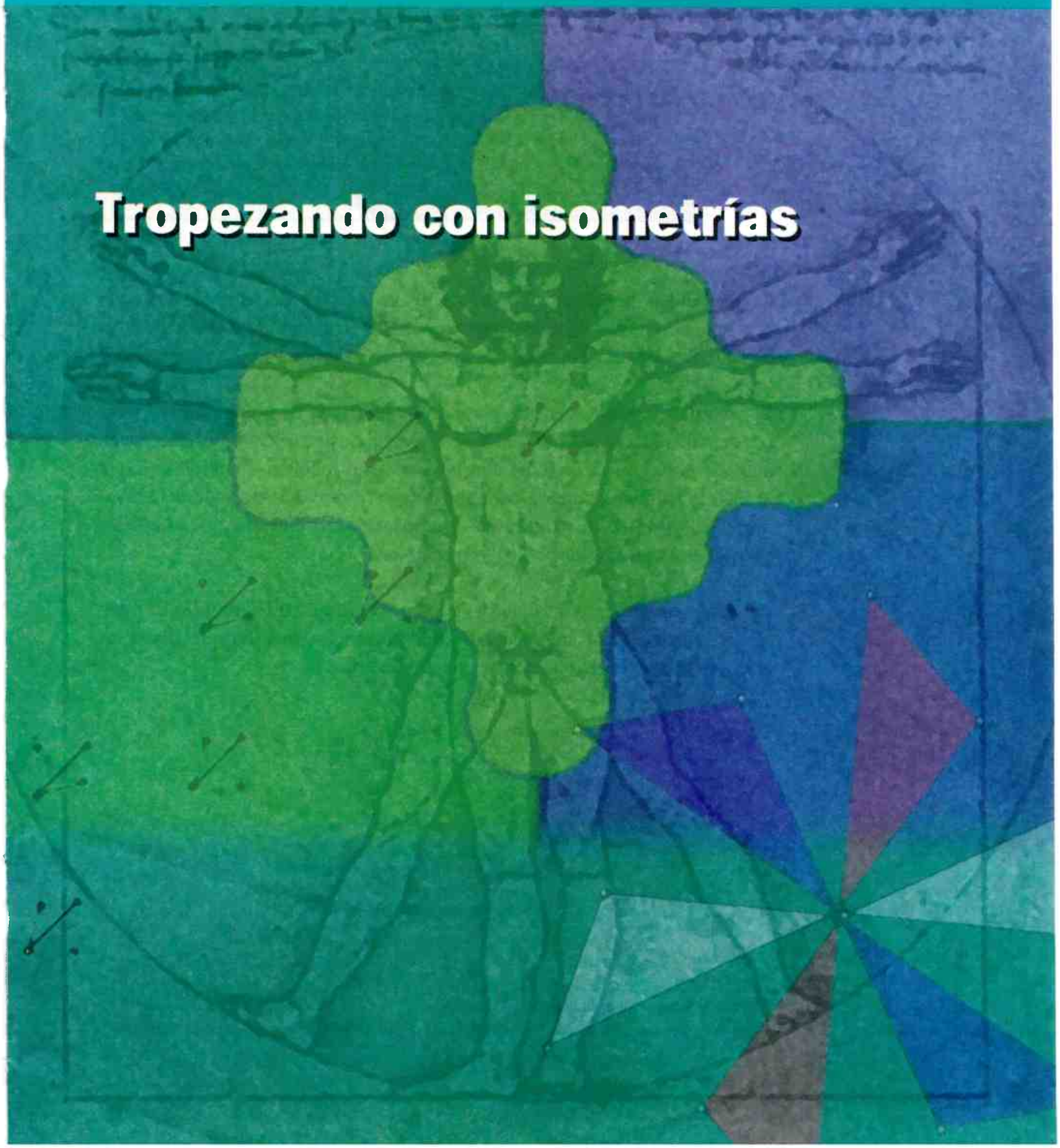
La cuarta sesión contiene aplicaciones y actividades relacionadas con los objetos de estudio. Se propone actividades concretas para realizar, se sugiere posibles profundizaciones o extensiones a otras áreas, y se cierra el ciclo volviendo al análisis de las situaciones intuitivas encontradas en la primera sesión y de situaciones conocidas como los teoremas de congruencia, ahora con la nueva visión que esperamos haber logrado.

Agradecemos las interesantes conversaciones con el equipo de Gestión Pedagógica, formado por María Inés Noguera y Alicia Salinas, y las valiosas sugerencias brindadas por el equipo de Matemática responsable de la elaboración de programas para la Enseñanza Media, formado por Silvia Navarro, Verónica Gruenberg y Francisco Cerda. También agradecemos sus aportes a este trabajo a nuestros colegas Víctor González–Aguilera y Rafael Benguria.

Santiago, marzo 1999

Sesión 1

Tropezando con isometrías



Motivación

Desde un punto de vista intuitivo del lenguaje, simétrico significa algo bien proporcionado, bien equilibrado. Y la simetría denota esa especie de concordancia entre partes diversas por medio de la cual ellas se integran en un todo. Hay una relación natural por lo tanto entre simetría y armonía.

Vitruvius* define: "la simetría resulta de la proporción de cada parte y de su proporción respecto del todo…". Es notable que la definición de simetría que podemos encontrar en la edición más reciente del Diccionario de la Real Academia Española coincide casi exactamente con ésta.

Crear el orden, la belleza y la perfección está relacionado fuertemente con el concepto de simetría. Para los griegos, la esfera en el espacio y el círculo en el plano representaron la perfección pues eran las más simétricas de las figuras.

La palabra isometría, por otra parte, tiene su origen etimológico en el griego: de ***iso*** (igual o misma) y ***metría*** (de medir); su aserción más precisa en nuestra lengua sería algo así como tener igual medida. También es usual utilizar la palabra isometría para una acción (o movimiento) que deje invariante la forma de una figura en el caso planar, o que deje invariante un cuerpo, en el caso espacial o tri–dimensional.

Volviendo al concepto de simetría, podemos constatar que esta idea es inherente a la percepción humana. Si a una persona se le exhibe la figura siguiente, dirá sin cuestionarse que ella es simétrica.

* Marco Vitruvius Pollio, arquitecto romano del siglo I a. C., escribió *De architectura libris dicem*, un tratado de diez tomos sobre arquitectura e ingeniería que fue usado como texto hasta el Renacimiento.

Es así como desde este concepto intuitivo queremos pasar a un nivel más elaborado; queremos comprender cuáles de los elementos de esta figura pueden ser abstraídos para así poder discernir sus propiedades intrínsecas que hacen que la mayoría de las personas la considere una figura simétrica. Siguiendo el método científico, a partir de la observación debemos pasar a la etapa de experimentación, para finalmente aterrizar en la formalización.

Desde el punto de vista geométrico, observamos que la figura anterior (si olvidamos sus colores) posee lo que antiguamente se llamó ***simetría bilateral*** (y que en lenguaje moderno se denomina una ***reflexión***); es decir, hay una parte de la figura que se repite a la derecha y a la izquierda de una línea vertical central imaginaria, conformando un todo que resulta ser simétrico. Intuitivamente, la línea vertical virtual separa a la figura original en dos partes "iguales"; para ser más exactos, en dos partes que resultan ser ***congruentes***. Es decir, dos partes que son indistinguibles excepto por el hecho de que ellas ocupan lugares distintos en el plano.

A partir de esta observación es natural notar que hay un movimiento (o transformación, o función) que lleva la parte izquierda de la figura a la parte derecha, sin deformarla. Este movimiento sería efectuado en la práctica suponiendo que cada una de las partes de colores de la figura es una pieza de rompecabezas, que se puede levantar y poner sobre otra, que mide lo mismo, haciéndolas coincidir exactamente; es decir, sobre otra pieza congruente. Comenzamos así a visualizar la relación intrínseca existente entre los conceptos de simetría (proveniente del lenguaje intuitivo) y de isometría (del lenguaje técnico). Ya en esta etapa de nuestro análisis estamos descubriendo algunos conceptos abstractos que son comunes a las figuras que admiten simetrías bilaterales o reflexiones.

Continuando el estudio de la figura, notamos que el proceso de mover la parte izquierda a la derecha se puede invertir; es decir, si partimos de la parte derecha podemos llegar a la izquierda mediante otra transformación que posee la propiedad de enviar a esa parte en una congruente con ella. En resumen, el proceso de copiar una parte en la otra es reversible.

Finalmente, corresponderá por lo tanto estudiar desde un punto de vista formal las **transformaciones** en el plano que mandan figuras en figuras congruentes (también se puede hacer en el espacio tri–dimensional y en otros espacios más abstractos); es decir, estudiar lo que matemáticamente se denomina isometrías.

La sistematización de estas ideas intuitivas de simetría, isometrías y congruencias es objeto de estudio de los matemáticos. Para comprender estas transformaciones que aparecen naturalmente en el medio en que vivimos, el interés primero es en poder clasificarlas: por ejemplo, ¿cuántos tipos de movimientos esencialmente distintos hay?, ¿cómo describirlos?, ¿cómo construirlos?

Una vez contestadas estas preguntas, y a partir de esa clasificación, se comienza la búsqueda de criterios que puedan ser utilizados en la práctica para discernir cuándo dos figuras son congruentes. Ejemplos de estos criterios son los conocidos teoremas de congruencias de triángulos.

En estas notas recorreremos cada una de estas etapas, sin perder de vista que este estudio es parte de una concepción mucho más rica desde el punto de vista estético y filosófico, y que la matemática es parte de la ciencia que trata de encontrar modelos que expliquen los secretos del mundo que nos rodea.

Hay en la naturaleza muchos ejemplos de simetrías e isometrías, que en general parecen pasar inadvertidos a nuestros sentidos. Veamos que si observamos con más atención nuestro entorno, notaremos que estamos rodeados de isometrías, congruencias y variantes muy cercanas a ellas.

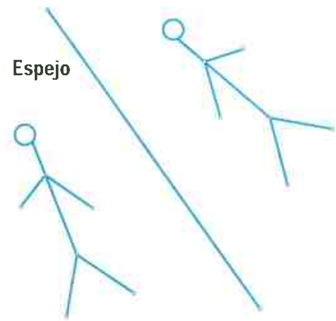
Exploremos algunos ejemplos simples de estos conceptos.

Ejemplo 1: espejos

Los espejos son una de las más claras manifestaciones del concepto de isometría. A pesar de su simpleza, veremos que es un ejemplo altamente complejo y lo estudiaremos con detención.

Si nos paramos frente a un espejo observamos que nuestra imagen se ve reflejada en una superficie plana; nuestro cuerpo se ve reflejado como en un cuadro.

Varias observaciones podemos hacer; por ejemplo, si nos paramos frente al espejo y levantamos la mano derecha observamos que la figura de nuestro cuerpo que se muestra en el espejo levanta la mano izquierda. Es decir, esta isometría preservó las dimensiones (las medidas) pero también hizo un cambio en la posición; es decir, hubo otra acción además del acto de copiar la figura.

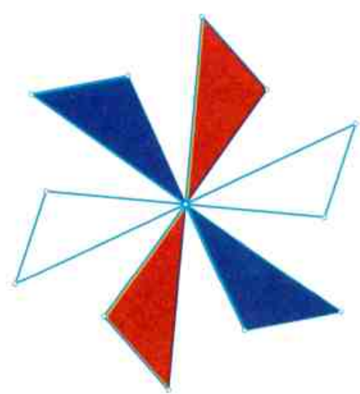


Experimentar: Utilice espejos en serie: ¿qué relación tiene la imagen reflejada en dos espejos sucesivos con la imagen original? Trate de lograr otros movimientos (distintos de una reflexión) con varios espejos conectados adecuadamente. Explore los reflejos de la luna en el agua, o la palabra **ambulancia** escrita "al revés" en el parabrisas de estos vehículos.

Ejemplo 2: timbres y calcos

Es quizás el ejemplo de los timbres, muy utilizado en el trabajo cotidiano de las oficinas, el más simple de una isometría. Fuera de los usos obvios que estos aparatos poseen, esta máquina de hacer isometrías planares es usada a niveles más sofisticados para lograr realizar cierto tipo de motivos repetidos o patrones.

Los calcos, que están presentes en todas las boletas o en los talones de depósitos bancarios, son otro ejemplo de la utilidad práctica de máquinas que producen isometrías. Uno está seguro de que estas copias son fieles, es decir, son iguales en todo sentido al original.



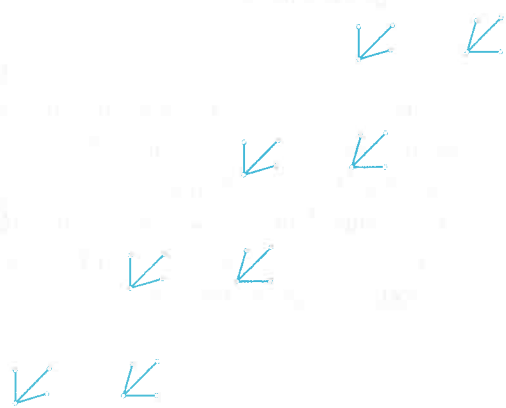
Por ejemplo, con un timbre triangular podemos fabricar el remolino de la figura anterior, asegurándonos así que todos los triángulos serán copia fiel (congruentes) del original.

Las diferencias entre el tipo de isometría producida por un timbre o un calco y aquella experimentada con los espejos no es obvia. Es claro que de alguna manera debemos llegar a un acuerdo sobre la idea de igualdad, al menos de objetos planares.

Experimentar: Diseñar un timbre (nótese que la imagen en el timbre mismo comparada con la imagen que deja al timbrar están relacionadas como a través de un espejo, a diferencia de la relación entre dos imágenes producidas timbrando). Timbrar colocando el timbre en diferentes posiciones: ¿que relación tienen entre sí las imágenes producidas? Conseguir boletas de depósito con calco y estudiar las imágenes que se puede producir con ellas. Deducir las diferencias entre las isometrías de los espejos y los timbres y calcos. Describir estas diferencias. Dibujarlas con lápiz y papel.

Ejemplo 3: las pisadas en la arena

Este ejemplo también produce isometrías. Cada huella dejada por nuestros pies o por los de una gaviota, como muestra la figura, queda copiada de cierta forma en la arena húmeda. Pero a medida que caminamos, estas figuran comienzan a cambiar de posición dependiendo de como sea nuestra trayectoria. Es decir, aquí nosotros mismos (o la gaviota) somos la máquina isométrica, y podemos realizar toda clase de giros con nuestras huellas, incluso pasando de nuevo por ellas. Este juego, que ha sido seguramente parte de nuestra niñez, es un ejemplo muy complejo y ofrece una variedad de movimientos que no es posible lograr con los ejemplos anteriores.



Experimentar: Con los materiales de la sala de clases recrear este fenómeno. Por ejemplo, con el borrador de tiza y el pizarrón. Al golpearlo contra la pizarra queda la huella del borrador. Describir los nuevos movimientos que se descubren en esta recreación.

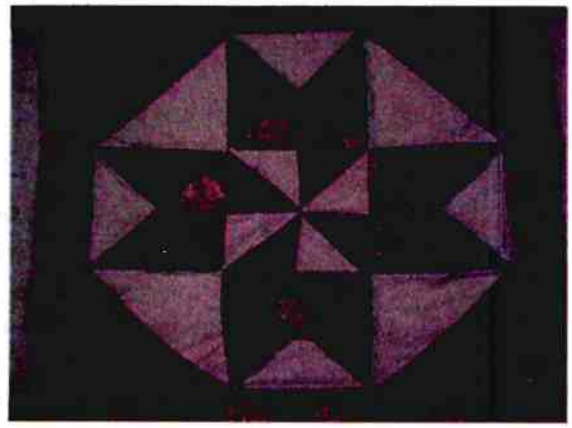
Ejemplo 4: mariposa multicolor

Este ejemplo es más natural que los anteriores, porque en él la naturaleza nos muestra en todo su esplendor isometrías de una belleza sublime. Una simple mariposa que está batiendo sus alas nos está mostrando movimientos que también son isometrías, aunque a simple vista no nos percatemos. Si tratamos de pensar en aquello sin tener una mariposa de verdad nos resulta difícil examinarlo. Cuidando los problemas con los grupos ecológicos, los cuales no estarían muy de acuerdo en atrapar una mariposa para su posterior observación, nos resulta imprescindible modelar de alguna manera una mariposa y sus movimientos. Y desde este modelo, deducir esta maravillosa mariposa isométrica multicolor.

Experimentar: Realizar un modelo de mariposa con cartulina e idear cómo mover sus alas. Estudiar estos movimientos. Descubrir todas las isometrías posibles.

Ejemplo 5: los moldes y el arte de la confección

Esta es quizás una de las aplicaciones más frecuentes de isometrías. La confección de un traje en una talla fija utiliza moldes, que se copian en la tela para dar la proporción adecuada. Es así como cuando nos compramos un traje nos ubicamos dentro de una talla para empezar a probarnos la tenida. Es interesante observar cómo las proporciones del traje se mantienen para diferentes tallas. También una técnica muy usada es la pavimentación o embaldosamiento de una tela, que se utiliza para los distintos diseños.



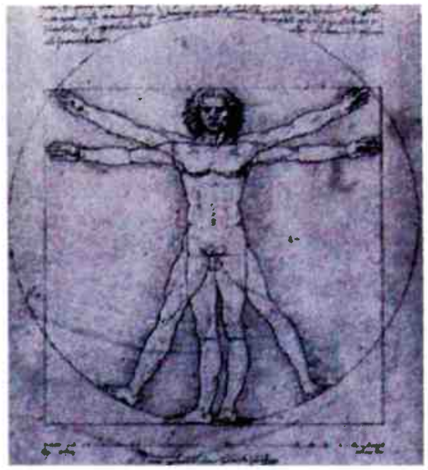
Análogamente, podríamos pensar en un patio pavimentado con baldosas todas iguales entre sí; o sea, baldosas isométricas. Como veremos más adelante, si se quiere economizar material es más conveniente que las baldosas tengan la forma de polígonos regulares; todos los lados y todos los ángulos iguales; por ejemplo, dentro de todos los rectángulos, el cuadrado es el "mejor" en este sentido. Todos hemos visto patios así pavimentados con baldosas cuadradas, triangulares (triángulos equiláteros) o hexagonales (hexágonos regulares). ¿Por qué no recordamos haber visto baldosas pentagonales (todas congruentes)?

Experimentación: hacer moldes de un traje. Estudiar sus proporciones. Descubrir sus simetrías y sus isometrías. ¿Habrá otros tipos de baldosas isométricas regulares?

Arte e isometrías

Entre las manifestaciones del Arte, la pintura es una donde se manifiesta en forma patente algunos conceptos isométricos. Esta forma de arte ha estado muy relacionado con el estudio del cuerpo humano, el cual posee, en su aspecto exterior, una tendencia fuerte a la simetría bilateral o reflexión. Hay dos ojos, dos manos, dos brazos. Los ojos, los brazos, las manos y otras partes del cuerpo humano son isométricos entre sí (casi siempre).

Cuadros famosos: Mario Toral, *Tres Desnudos en un Totem*, *Caras Alcanzando el Horizonte*.



Leonardo Da Vinci, *Estudio de las Proporciones* (ilustra una edición renacentista del tratado de Vitruvius mencionado anteriormente).

Otros tipos de isometrías se pueden visualizar en algunos paisajes pintados por Valenzuela Puelma, por ejemplo *Avenida de Alamos*, y otros cuadros de pintores chilenos de su misma generación.

Más abstractos pero también interesantes son los cuadros de M. C. Escher, donde el pintor trabajó con ideas matemáticas; más aún, uno de sus consultores fue Coxeter, experto geómetra de mitad de este siglo. Mencionamos dos de sus litografías famosas, donde el creador utilizó de una manera genial los conceptos de isometrías y pavimentaciones del plano y del espacio: *El Sol y la Luna*, y *Angeles y Demonios*.

Como contraposición a los conceptos de isometrías mencionamos a un pintor chileno que representa toda una escuela de lo asimétrico, nos referimos al pintor surrealista Roberto Matta. Casi cualquiera de sus cuadros muestra una asombrosa y, aunque parezca contradictorio, bella y armoniosa asimetría.

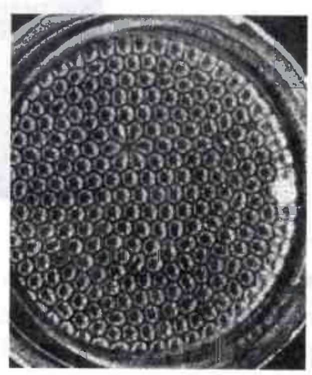
Experimentación: Dibujar el cuerpo humano y determinar las isometrías que existen en él. Determinar qué eje de simetría se está utilizando en cada caso. Llenar una hoja con pavimentaciones con una figura dada. Analizar cuadros de pintores chilenos y extranjeros. Visita a museos de Pintura.

Física e isometrías

Mostraremos dos situaciones como ejemplos naturales de isometrías en la Física.

Celdas de Frayleigh-Bernard

La convección en un fluido es un fenómeno sobre el cual todos hemos tenido alguna experiencia al hacer hervir una olla. Si tenemos un recipiente con un fluido (digamos agua), y lo calentamos, en un principio el fluido va a estar en reposo mientras aumenta su temperatura. En este régimen, el calor se propaga en el fluido por conducción, tal como en un sólido. Pero si continuamos aumentando la temperatura, de pronto el líquido se pone en movimiento: decimos que el líquido hierve. En este régimen, es decir cuando el líquido hierve, el método de propagación del calor es la convección (es decir, por el movimiento del fluido mismo). Distintos líquidos hierven a distintas temperaturas. Si uno observa hervir el agua, el movimiento de ésta parece completamente desordenado. Sin embargo, algunos fluidos con mayor viscosidad, y en recipientes con poco espesor, hierven de una manera muy ordenada, formando celdas hexagonales congruentes. Estas celdas fueron descubiertas a principios de este siglo por Rayleigh y Benard.

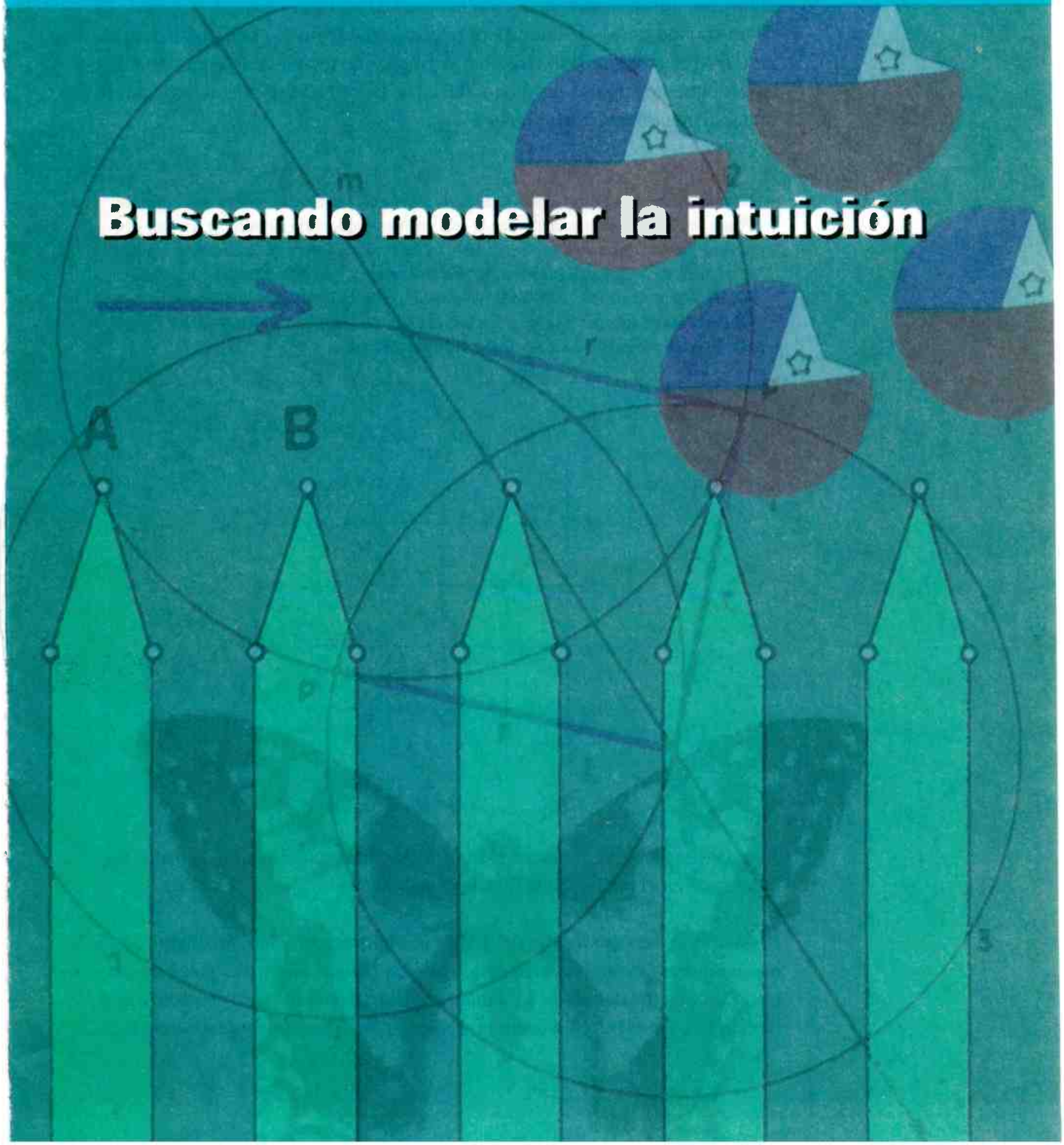


Formación de vórtices: "La calle de Von-Karman detrás de un cilindro"

Un fluido uniforme que se hace incidir sobre un obstáculo produce en la parte posterior (detrás del obstáculo) remolinos o vórtices, que presentan una estructura periódica. La formación de vórtices detrás de un obstáculo es un fenómeno conocido desde hace mucho tiempo. Famoso es el caso de los remolinos que se forman en el río Danubio al pasar por el puente viejo de la ciudad de Ratisbona (hoy Regensburg). Si uno hace incidir una corriente uniforme contra un disco circular se genera una línea de vórtices muy regulares que se conocen como "la calle de Von Karman" en honor a T. Von Karman, quien explicó el fenómeno en la década de los 30.

Sesión 2

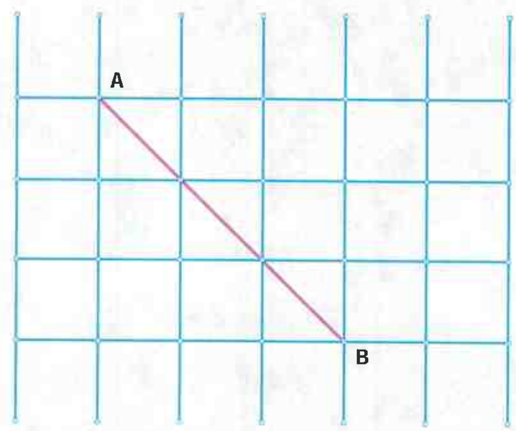
Buscando modelar la intuición



Hemos visto en la **Sesión 1** que las simetrías, isometrías y congruencias (intuitivas) nos rodean desde siempre, en la naturaleza y en los objetos creados por el hombre.

En esta sesión daremos a estas nociones intuitivas el tratamiento sistemático que han desarrollado los matemáticos para enfrentarlas, propiedades comunes y diversas. Centraremos nuestra atención principalmente en el caso del plano; allí usaremos la noción habitual de distancia entre dos puntos. Es decir, supondremos que la manera más rápida de viajar de un punto del plano a otro es moverse a lo largo del segmento de recta que los une; esta distancia entre dos puntos del plano, dada por la longitud del segmento que los une se llama ***distancia euclideana***.

Experimentar: ¿Qué otras maneras de medir distancias en el plano ocurren naturalmente? Piense por ejemplo en una ciudad, en la cual hay un cuadriculado de calles, y hay que desplazarse de un lugar a otro de ella viajando en locomoción colectiva. Si la figura siguiente es un plano de la ciudad, y cada cuadra mide 100 metros, ¿cuál es la distancia euclideana de **A** a **B**? Y si no es posible ir de **A** a **B** caminando (por entre las casas) y debemos utilizar un vehículo que transite por las calles, ¿cuánto mide el camino más corto? (nótese que en este caso hay varios caminos entre **A** y **B** que miden lo mismo).



Nos concentraremos ahora en el modelo euclideano del plano; es decir, trabajaremos en el plano con la distancia euclideana.

Llamaremos una ***isometría*** del plano a cualquier función del plano en sí mismo que no cambie la distancia entre los puntos originales y sus imágenes. Dos objetos del plano se llaman ***congruentes*** si hay una isometría que lleva a uno en el otro; es decir, si podemos ***transformar (sobreponer) uno***

en el otro sólo moviéndolo (incluyendo deslizarlo, trasladarlo o girarlo), sin doblarlo ni estirarlo ni romperlo.

Operaciones entre isometrías

Observamos que de la misma definición de isometría se deduce que el no alterar los puntos del plano (o el no alterar un objeto dado) es una isometría, denominada la *identidad.* También se deduce que el *producto (o composición) de dos isometrías* **f** y **g** es una nueva isometría, denotada por **f • g**, que resulta al aplicar sucesivamente las dos isometrías: primero la isometría **g** al objeto original y enseguida la isometría **f** al objeto resultante (si **f** y **g** mantienen las distancias, entonces su producto las mantiene). Es interesante observar que la mayoría de las veces el orden en que se haga el producto es muy importante: en general no es lo mismo **f • g** que **g • f**. Similarmente se deduce que si **f** es una isometría, hay otra isometría que deshace lo hecho por **f**; esta se llama la inversa de **f** y se denota por $\mathbf{f}^{-1}$.

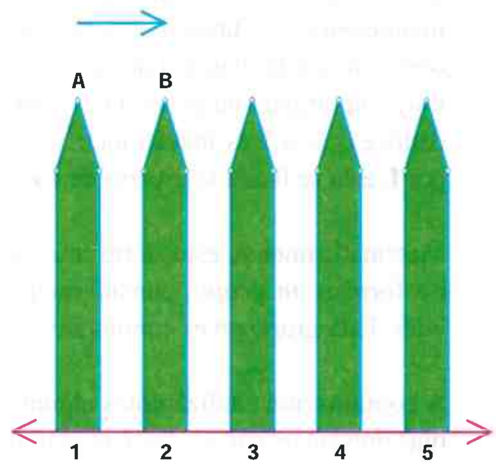
Matemáticamente, esto se resume diciendo que todas las isometrías del plano forman un *grupo*, considerando el producto como la operación entre ellas. Este grupo no es conmutativo, como veremos más adelante.

A continuación analizaremos algunos ejemplos (matemáticos) de isometrías que presentan características comunes. En cada caso, visualizaremos las isometrías con la mascota siguiente.

Ejemplo 1: las traslaciones

Una *traslación* es un movimiento en una dirección fija, con una magnitud fija (vale decir, en lenguaje técnico, en un vector fijo).

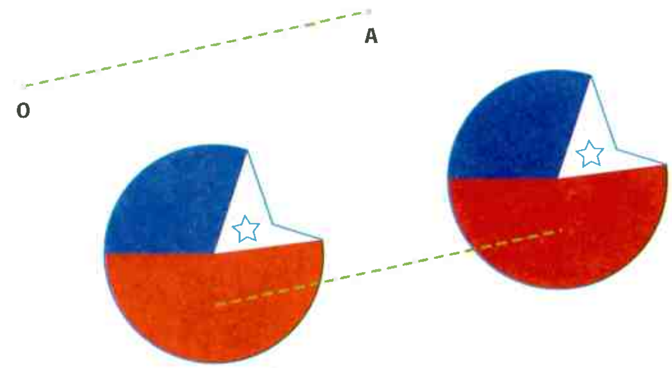
En la siguiente figura, que representa una reja construida con tablones todos "iguales" (es decir, tablones congruentes), vemos que hay una traslación **T** en dirección horizontal a la derecha y con magnitud dada por la distancia entre los vértices superiores de dos tablones consecutivos (digamos la distancia de **A** a **B**), que lleva cada tablón en su vecino por la derecha (el **1** al **2**, el **2** al **3**, etc.). También podemos anotar **T(1) = 2**, **T(2) = 3**, etc.



La inversa de la traslación de la figura es otra traslación, en la misma magnitud pero ahora hacia la izquierda. Si denotamos esta inversa por $\mathbf{T^{-1}}$, vemos que $\mathbf{T^{-1}(2) = 1}$, $\mathbf{T^{-1}(3) = 2}$, etc. El producto de la traslación a la derecha en un tablón consigo misma es una traslación a la derecha en dos tablones. El producto de **T** consigo misma se anota **T • T**, donde, por ejemplo, **T • T(1) = 3**, **T • T(2) = 4**, etc.

¿Qué movimiento obtenemos si hacemos el producto de la traslación original con sí misma muchas veces?

Para nuestra mascota, la traslación $\mathbf{T_A(P) = P + A}$ en el vector **OA** se visualiza en la siguiente figura.



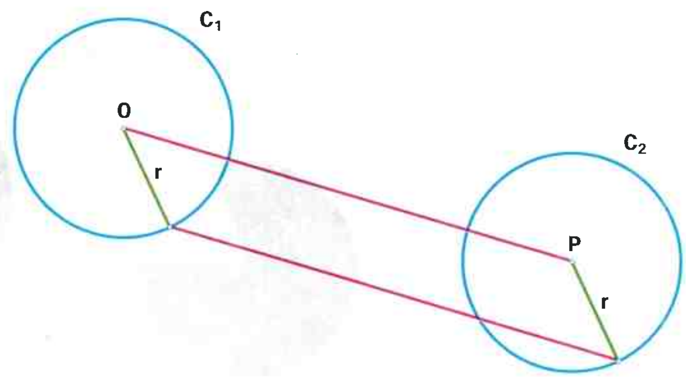
Construcción de una traslación

En la práctica hay instrumentos geométricos que podemos utilizar para realizar isometrías; por ejemplo una regla o un compás o una escuadra o un transportador. Las *construcciones matemáticas* (que son las que utilizaremos) se refieren a aquellas que son posibles sólo con regla (no graduada) y compás; esto se debe a que los elementos básicos (o axiomas) de la geometría euclideana son los puntos y las rectas.

Para producir traslaciones de figuras en el plano entonces utilizaremos la regla y el compás. Notemos que la identidad es una traslación, ya que no mueve ningún punto; es decir, la distancia de traslación en este caso es cero. En cambio, toda traslación que no sea la identidad desplaza la figura de su posición original.

El primer ejemplo es la traslación de una circunferencia. Empecemos dibujando una circunferencia con un compás. Para tal efecto ubicamos la punta del compás en un punto arbitrario de una hoja de papel, al cual identificaremos con la letra **O**, y fijamos su abertura **r**, en donde **r** representa el radio. A esta circunferencia la llamaremos C_1. A continuación procedemos a dibujar otra circunferencia apoyando el compás en un punto **P** distinto a **O** manteniendo la abertura del compás. Llamemos a esta nueva circunferencia C_2. Intuitivamente se observa que ambas circunferencias son isométricas.

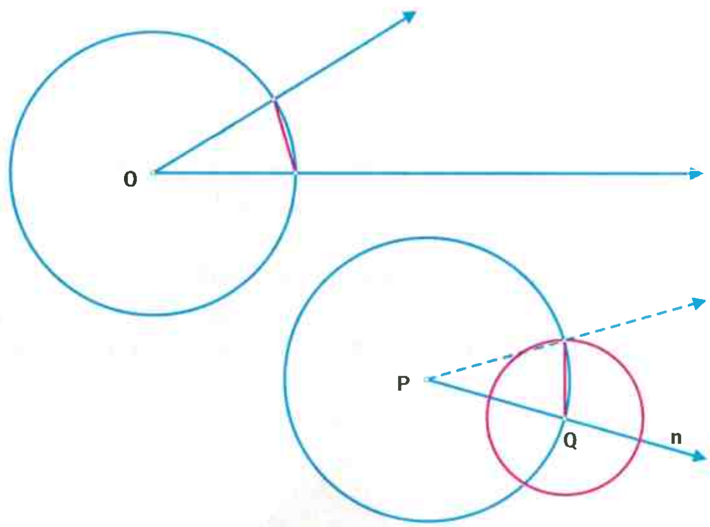
Para formalizar matemáticamente lo realizado manualmente con esta herramienta, debemos dar en forma explícita la traslación que ha enviado la circunferencia C_1 en C_2. Podemos ahora conjeturar que la traslación consistió en trasladar el centro de la primera circunferencia al centro de la segunda. Es decir, si denotamos por $\mathbf{x}$ a cualquier punto del plano, la candidata a traslación es $f(x) = x + P$.



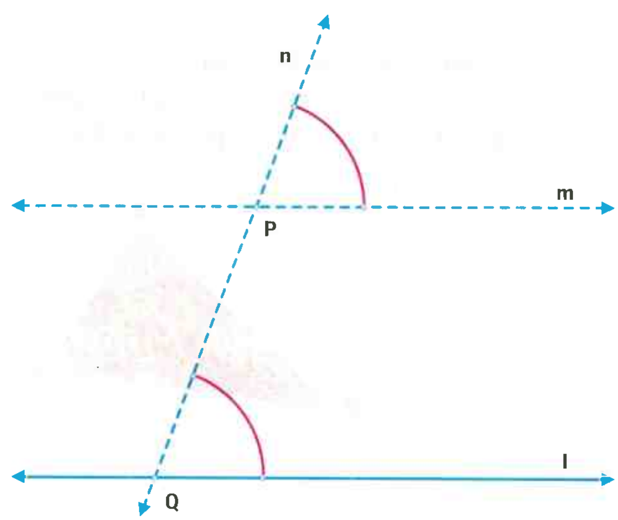
Después de esta disgresión se puede probar que efectivamente $\mathbf{f(C_1) = C_2}$; para ello es necesario probar que la distancia $\mathbf{d[P,\ f(x)] = r}$ sabiendo que $\mathbf{d(O,\ x) = r}$; es decir, que si **x** representa un punto de la primera circunferencia entonces $\mathbf{f(x)}$ es un punto de la segunda circunferencia. Esto lleva también a relacionar expresiones algebraicas con conceptos geométricos.

Una de las figuras más populares de la Geometría es el triángulo. Para trasladar un triángulo es necesario conocer cómo construir con regla y compás una recta paralela **m** a una recta dada **l** y que pasa por un punto **P** que no está en **l**. A partir de este conocimiento podremos construir con regla y compás traslaciones de diferentes figuras y también preguntarnos cómo escribir formalmente la traslación resultante.

Primero examinemos la construcción de una traslación (con regla y compás) en detalle; comenzaremos por ***copiar un ángulo*** (de nuevo, sólo con regla y compás): si nos dan un ángulo con vértice en un punto **O** y queremos copiarlo con vértice en otro punto **P**. Lo primero que se hace es dibujar un rayo **n** por **P** (que será uno de los lados del ángulo copiado). Enseguida se dibuja una circunferencia con centro en **O** (de radio cualquiera) y *con el mismo radio* otra con centro en **P**. La primera determina dos puntos, uno en cada rayo del ángulo original, y la segunda determina un punto **Q** en el rayo **n**. Utilizando como nuevo radio la distancia entre los dos puntos determinados en los rayos del ángulo original, se dibuja una circunferencia con centro en **Q**. Esta última circunferencia intersecta a la anterior con centro en **P** en dos puntos. Uniendo **P** con uno de estos dos puntos, obtenemos el segundo rayo del ángulo copiado.

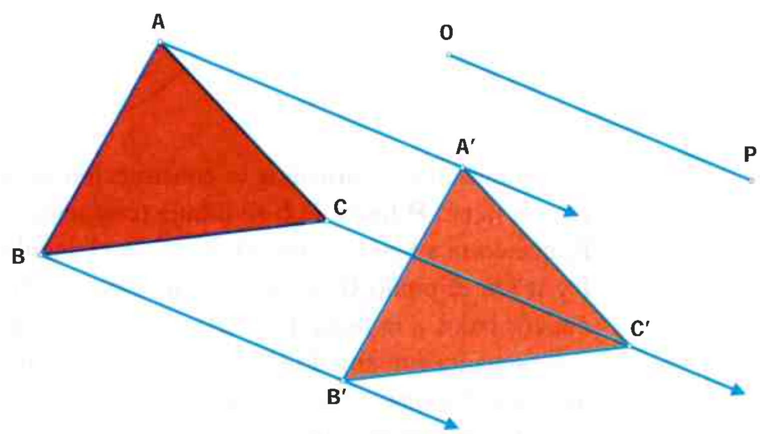


A continuación recordemos la construcción de la paralela **m** a una recta **l** por un punto **P** fuera de **l**: se dibuja (con regla) una recta **n** cualquiera por **P**, que corta a **l** en un punto **Q**. Se copia el ángulo que forman las dos rectas **l** y **n** (en el punto **Q**) usando como nuevo vértice a **P** y como uno de los nuevos lados a la recta **n**. Nótese que, por ejemplo, no está permitido usar una escuadra (un ángulo recto se construye como la mitad de uno extendido, dado por una recta y la elección de un punto en ella, no es un supuesto básico); por eso hablamos de la construcción, refiriéndonos a aquella sólo con regla y compás. La recta **m** queda así determinada.



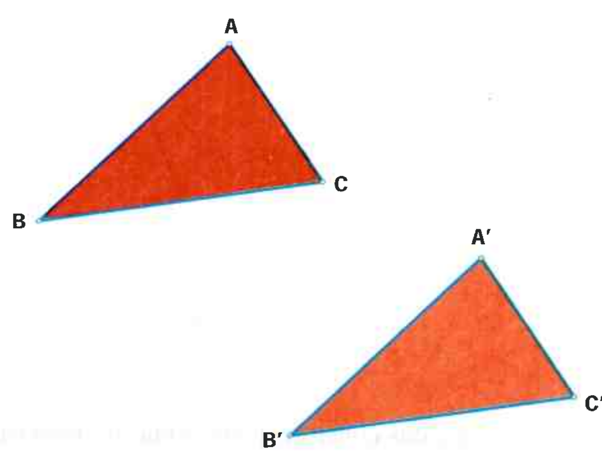
Con estas construcciones a nuestra disposición, podemos efectuar cualquier traslación de una figura dada. Lo ilustraremos trasladando un triángulo.

En efecto, si conocemos la traslación, es decir, si tenemos los datos de la dirección, el sentido y la magnitud en que queremos trasladar el triángulo, lo que hacemos es dibujar tres rayos, en que cada uno comience en un vértice del triángulo, todos sean paralelos a la dirección dada (aquí usamos la construcción de paralelas), y en el sentido dado de la traslación. En seguida utilizamos el compás para medir la magnitud dada, y dibujamos tres circunferencias con este radio, cada una con centro en un vértice del triángulo. Esto determina un punto sobre cada rayo, que es la imagen trasladada del vértice respectivo. En la figura siguiente vemos la traslación en **OP** del triángulo con vértices **A**, **B** y **C**, resultando el triángulo con vértices **A′**, **B′** y **C′**.

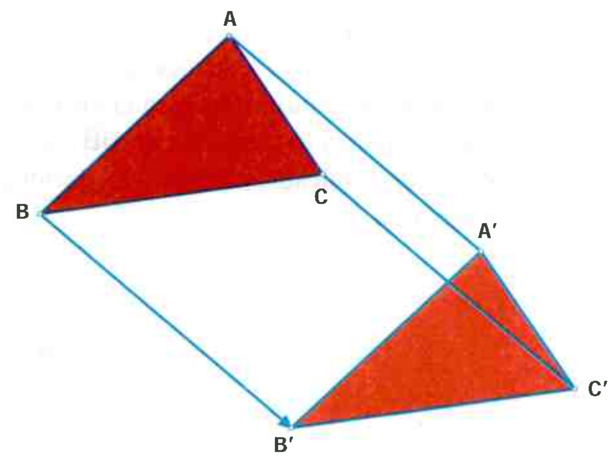


Al revés: Si nos dan dos figuras, una de las cuales es la imagen por una traslación de la otra, ¿cómo podemos encontrar la traslación adecuada?

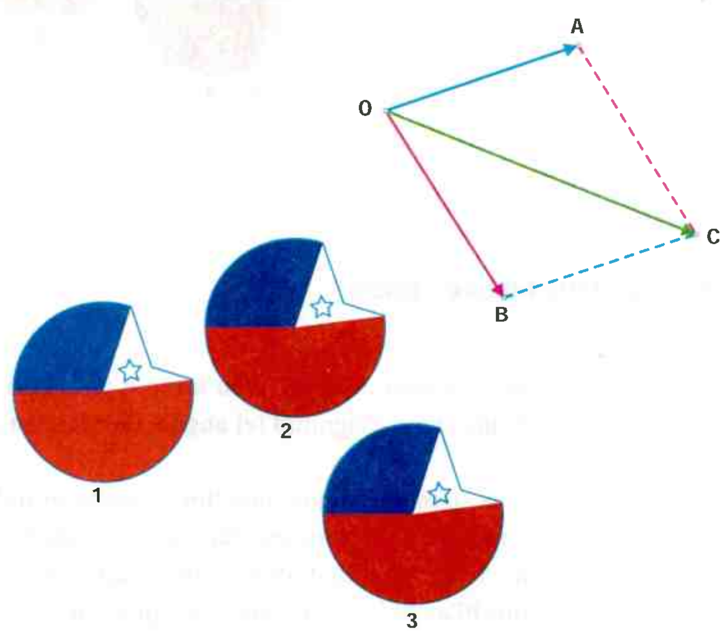
Miremos el caso siguiente: encontramos dos triángulos que, a simple vista, parecen congruentes por una traslación. Queremos encontrar la traslación que lleva al triángulo superior en el triángulo inferior.



Notamos que **B′** debe ser el punto que le corresponde a **B** bajo la traslación que buscamos, así como **A′** corresponde a **A** y **C′** a **C**. De esta manera vemos que basta con considerar la distancia entre **B** y **B′** (que es igual a la distancia entre **A** y **A′**, o entre **C** y **C′**) como nuestra magnitud de traslación, en el sentido y dirección de **B** a **B′**; en resumen, la traslación buscada debe ser en el vector **BB′** (que coincide con **AA′**, y con **CC′**).

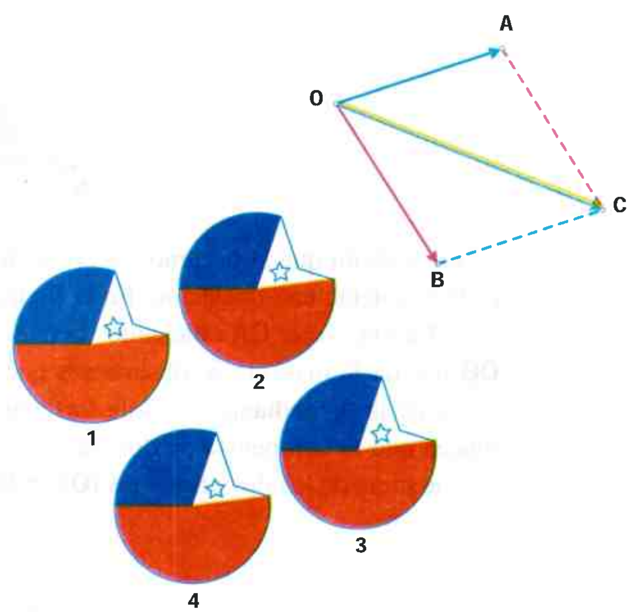


Veamos ahora que si hacemos el producto de dos traslaciones, el resultado es nuevamente una traslación. En la figura siguiente, si trasladamos la mascota **1** en el vector **OA** obtenemos la mascota **2**, que trasladada en el vector **OB** nos da la mascota **3**; obsevamos que la mascota **3** se puede obtener a partir de la **1** mediante una sola traslación, en el vector **OC**. Notamos entonces que la compuesta de dos traslaciones es una nueva traslación, en el vector suma de los dos originales (**OC = OA + OB**).



Como ya hemos visto, la identidad es una traslación, la isometría inversa de una traslación es otra traslación, y acabamos de constatar que el producto de dos traslaciones es nuevamente una traslación; matemáticamente esto se resume diciendo que las traslaciones forman un *subgrupo* de todas las isometrías.

Como la suma de vectores es conmutativa, obtenemos sin más esfuerzo que el orden en que efectuemos dos traslaciones no altera el resultado; en lenguaje matemático, se dice que el subgrupo de las traslaciones es *conmutativo* (o *abeliano*). Representamos esto en la figura siguiente, donde primero se aplica la traslación en **OB** a la mascota **1** para obtener la mascota **4**, y luego aplicamos a ésta la traslación en **OA**, obteniendo nuevamente la mascota **3**.



Ejemplo 2: las rotaciones

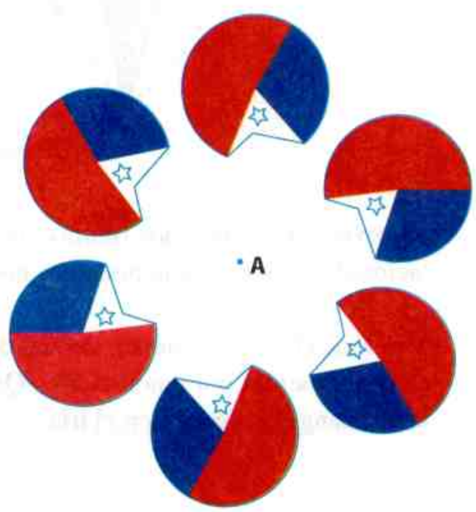
Una *rotación* es un giro en torno a un cierto punto (el centro de rotación), en una cierta magnitud (el ángulo de rotación).

En la siguiente figura, una flor con pétalos todos "iguales" (es decir, pétalos congruentes), vemos que hay una rotación **r** en torno al centro de la flor, en ángulo de magnitud 360/4 = 90 grados, que lleva cada uno de los cuatro pétalos blancos en su vecino a la izquierda.

Por supuesto esta flor también admite otras rotaciones: **r** producto consigo misma **(r • r)** es también una rotación en torno al centro de la flor en 180 grados, que lleva cada pétalo en el subsiguiente. Si hacemos el producto de la rotación original tres veces, obtenemos una rotación en 270 grados, que tiene el mismo efecto que una rotación en –90 grados (llevar cada pétalo en su vecino de la derecha), y es la inversa de la rotación original.

También en el Reino Animal encontramos rotaciones presentes: en ángulo 360/5 = 72 grados para la estrella de mar y para el erizo. ¿Qué otras rotaciones se puede detectar en estos animales?

Para nuestra mascota, la rotación en 60 grados con centro en **A** aplicada sucesivas veces se visualiza en la siguiente figura.

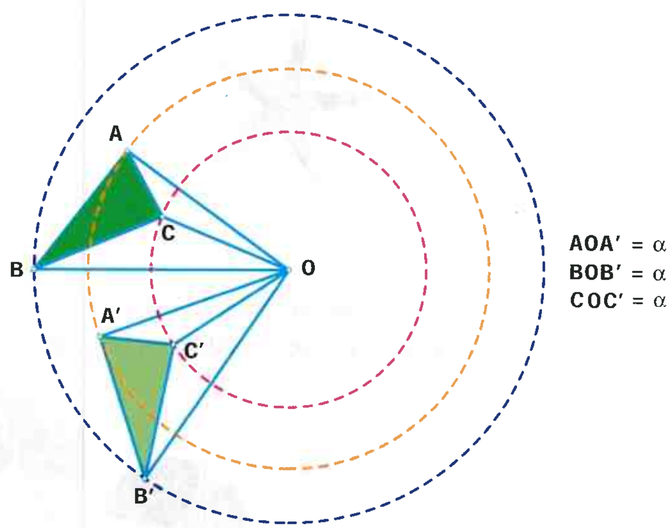


Construcción de rotaciones

La herramienta natural para realizar rotaciones de una figura en el plano es el compás. Para medir una rotación necesitamos además un transportador, que mide el ángulo de la rotación. También debemos recordar cómo copiar un ángulo desde una región a otra mediante un compás, lo cual vimos en la construcción de traslaciones.

Los datos que nos permiten conocer una rotación son el centro **O** y el ángulo de rotación α. Nuevamente ilustraremos la construcción con un triángulo de vértices **A**, **B** y **C**.

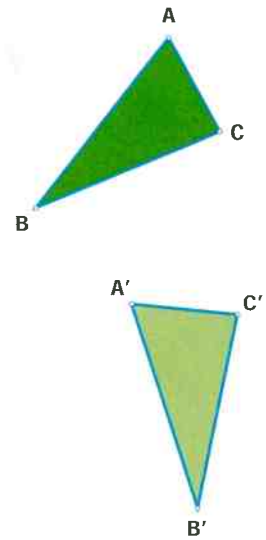
Esta vez dibujamos tres circunferencias, todas con centro en **O** y con respectivos radios la distancia de **O** a **A**, de **O** a **B** y de **O** a **C**. Enseguida dibujamos tres ángulos con vértice en **O**, con la misma medida α, y en que uno de sus rayos pasa por un vértice del triángulo original. El punto de intersección del otro rayo del ángulo con la respectiva circunferencia es la imagen rotada del respectivo vértice. En la figura siguiente, los ángulos **AOA',** **BOB'** y **COC'** miden α cada uno.



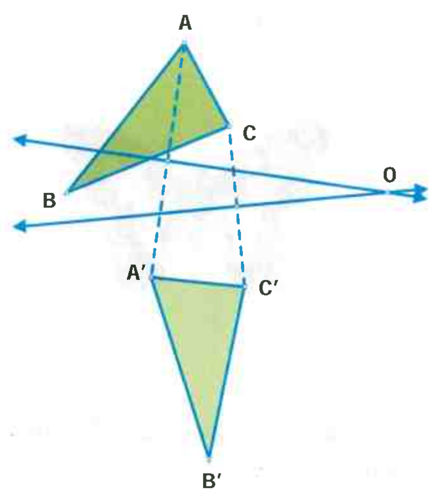
Al revés: Si nos dan dos figuras, una de las cuales es la imagen por una rotación de la otra, ¿cómo podemos encontrar esa rotación?

Miremos el caso siguiente: vemos dos triángulos que, a simple vista, parecen congruentes por una rotación. Queremos encontrar una rotación que lleve al triángulo superior en el triángulo inferior.

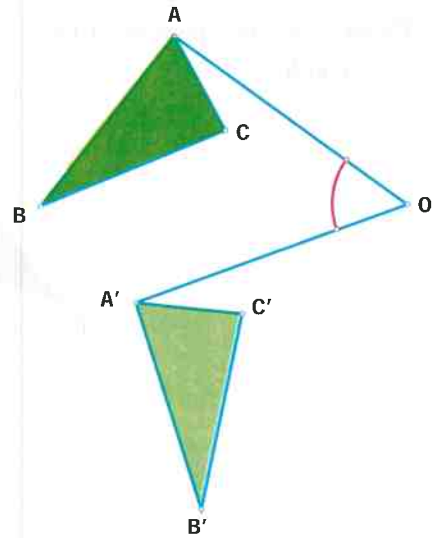
Recordemos que para determinar una rotación debemos encontrar su centro y su ángulo.



Primero buscaremos el centro de rotación **O**. Notamos que **A′** debe ser el punto que le corresponde a **A** bajo la rotación que buscamos, así como **B′** corresponde a **B** y **C′** a **C**. Como la distancia del punto **O** a los puntos **A** y **A′** debe ser la misma, **O** se encuentra en la simetral de **A** y **A′** y también en la de **C** y **C′** (así como también en la de **B** y **B′**).

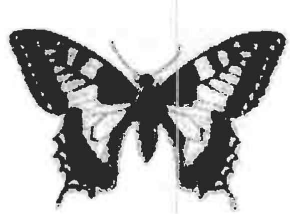


Ahora necesitamos encontrar el ángulo de rotación: vemos que basta con considerar el ángulo **AOA′** (que es igual al ángulo **BOB′**, e igual al ángulo **COC′**) como nuestro ángulo de rotación; en resumen, la rotación buscada debe ser con centro en **O** y ángulo **AOA′** (que coincide con el ángulo **BOB′**, y con el ángulo **COC′**).

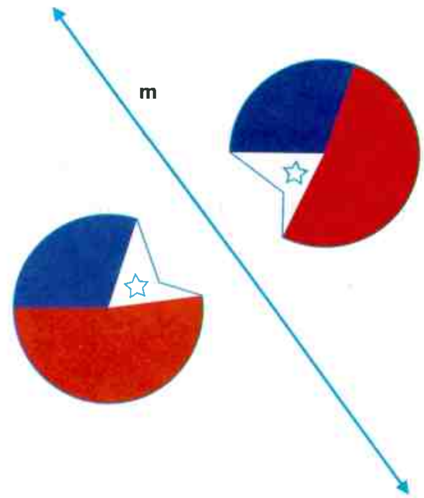


Ejemplo 3: las reflexiones

Una *reflexión* (o *simetría* bilateral) es una isometría que fija una recta (llamada el eje de reflexión, o eje de simetría, o espejo). Los espejos (usuales) proveen los ejemplos más comunes de reflexiones, así como nuestra mariposa y un ciervo. ¿Cuál es la inversa de una reflexión?

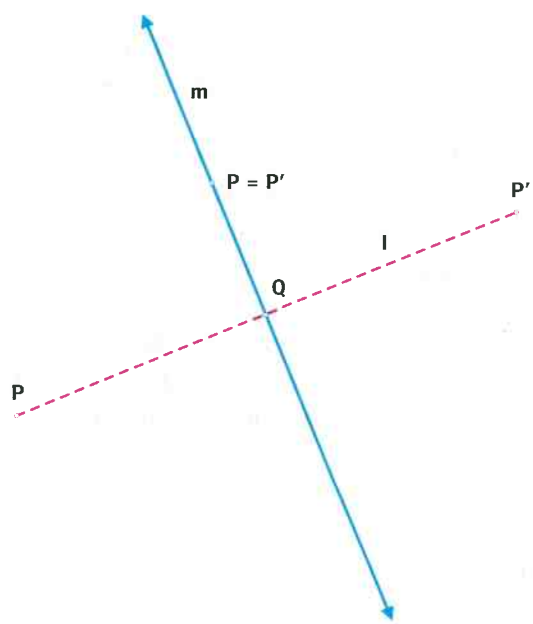


Para nuestra mascota, la reflexión en el espejo **m** se visualiza en la siguiente figura.

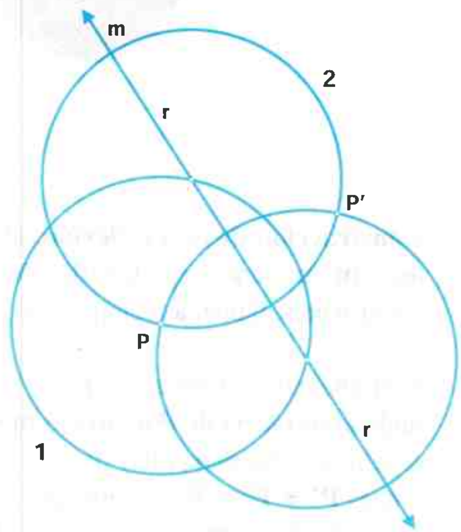


Construcción de una reflexión: el dato que necesitamos en este caso es la recta **m** que será el eje de reflexión. Esta recta divide al plano en dos partes congruentes, llamadas semiplanos.

Para encontrar el reflejado **P′** de un punto **P** cualquiera: *intuitivamente* se mide la distancia de **P** al espejo **m** y se copia esta distancia al otro lado del espejo. *Formalmente*, hay dos posibilidades: si **P** pertenece al espejo **m**, entonces **P′ = P**; si **P** no pertenece a **m**, entonces se dibuja la recta **l** que es perpendicular a **m** y que pasa por **P**. Luego se determina el punto de intersección **Q** de las dos rectas y se mide la distancia de **P** a **Q**; entonces **P′** es el punto que se encuentra sobre **l** a la misma distancia de **Q** que **P**, en el semiplano donde *no* se encuentra **P**.



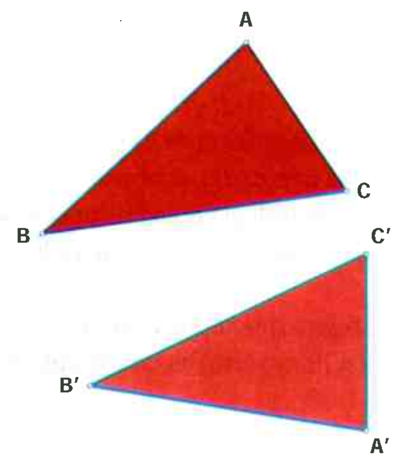
Nótese que la construcción de una reflexión se puede hacer con sólo el compás: Se dibuja una circunferencia (**1**) con centro en **P** y cualquier radio **r** mayor que la distancia de **P** a **m**; esto determina dos puntos en **m**. Con centro en cada uno de estos dos puntos dibujamos respectivas circunferencias (**2** y **3**) con el mismo radio anterior **r**. Estas se cortan en dos puntos: **P** y **P′** uno reflejado del otro. Es inmediato ver que sus distancias a **m** coinciden.



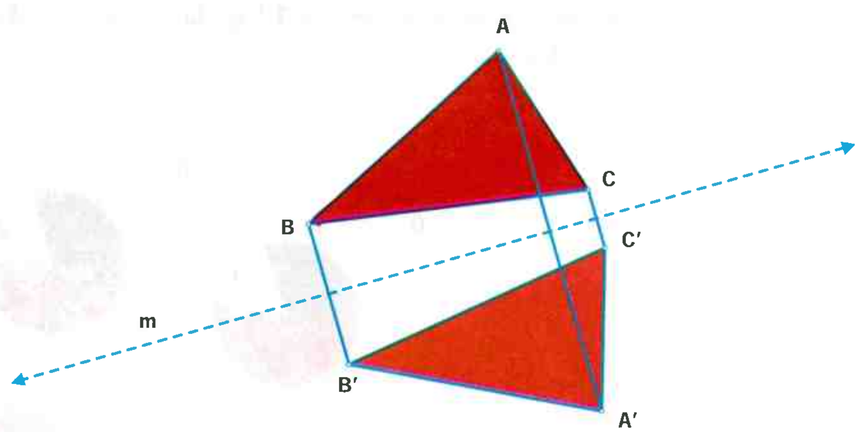
Al revés: si nos dan dos figuras y nos dicen que una es la imagen reflejada de la otra, ¿cómo saber cuál es la reflexión que sirve?

La pregunta que nos hacen es en realidad la siguiente: ¿Cómo encontramos el espejo? Un momento de reflexión (valga la redundancia) nos indica que éste se puede encontrar tomando dos puntos que sean claramente imagen uno de otro y construyendo su simetral: éste es el espejo.

Por ejemplo, si nos dan dos triángulos como en la figura siguiente, intuitivamente "se ve" que son congruentes; como ya sabemos, esto quiere decir que debe haber una isometría que lleve uno en el otro.



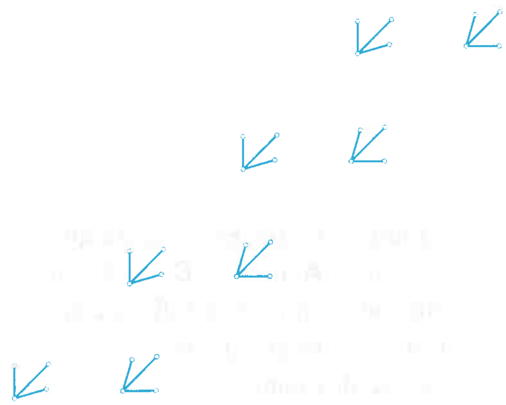
También "se ve" en la figura que, por ejemplo, **B′** debe ser la imagen de **B** (así como **A′** de **A**, o **C′** de **C**). Si construimos la simetral **m** de **B** y **B′** (que coincide con la de **A** y **A′**, y con la de **C** y **C′**), vemos que el triángulo inferior es la imagen del triángulo superior por la reflexión en **m**. Aquí la *simetral* de dos puntos es la usual en geometría: la recta formada por todos los puntos del plano que equidistan de los dos puntos dados. Recuerde que ésta se puede construir con regla y compás.



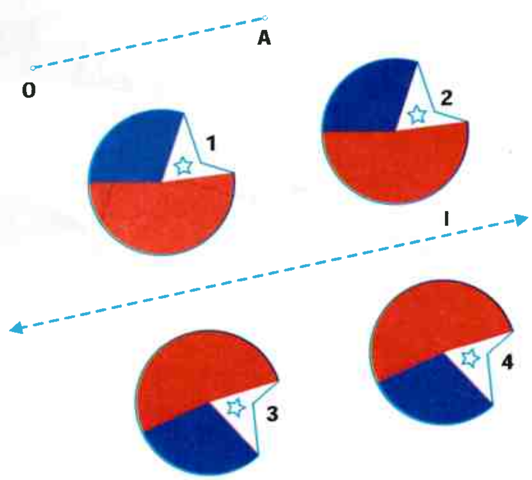
Ejemplo 4: los deslizamientos

Un *deslizamiento* es el producto de una traslación y una reflexión que comparten una recta: el objeto se traslada en una cierta dirección y magnitud y luego se refleja en una recta con la misma dirección. Nótese que *en este caso especial* no importa en qué orden se haga el producto de las dos isometrías.

La figura que representa pisadas en la arena (si quien deja las huellas camina en línea recta) es un ejemplo de deslizamiento.

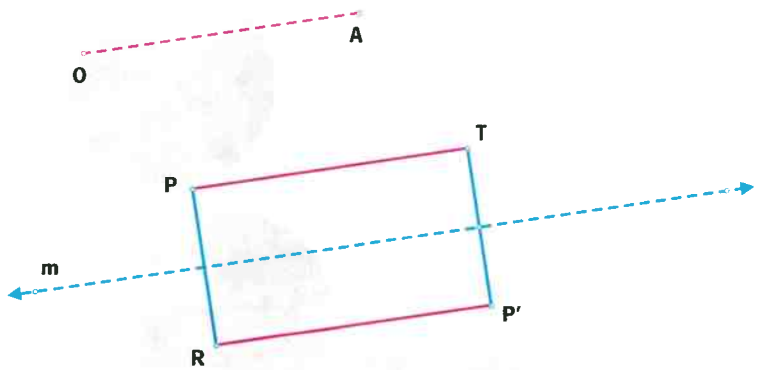


Para nuestra mascota, el deslizamiento se visualiza en la siguiente figura. Si la mascota original es denotada por **1**, entonces **4** es la imagen de **1** bajo el deslizamiento formado por la traslación en **OA** y la reflexión en **l**. La mascota **2** es la imagen de **1** bajo la traslación y **3** es la imagen de **1** bajo la reflexión.



Construcción de un deslizamiento: en este caso necesitamos dos datos, el espejo **m** y la magnitud y sentido de traslación. Como ya sabemos trasladar y reflejar, sólo necesitamos efectuar estas dos operaciones consecutivamente, sin importar el orden en que lo hagamos.

Para encontrar el deslizado **P′** de un punto **P** cualquiera: *intuitivamente* se refleja **P** en **m** (obteniendo **R**) y se traslada la imagen reflejada **R**; o bien, se traslada primero **P** (obteniendo **T**) y luego se refleja la imagen **T** en **m**.



¿Habrá otras isometrías?

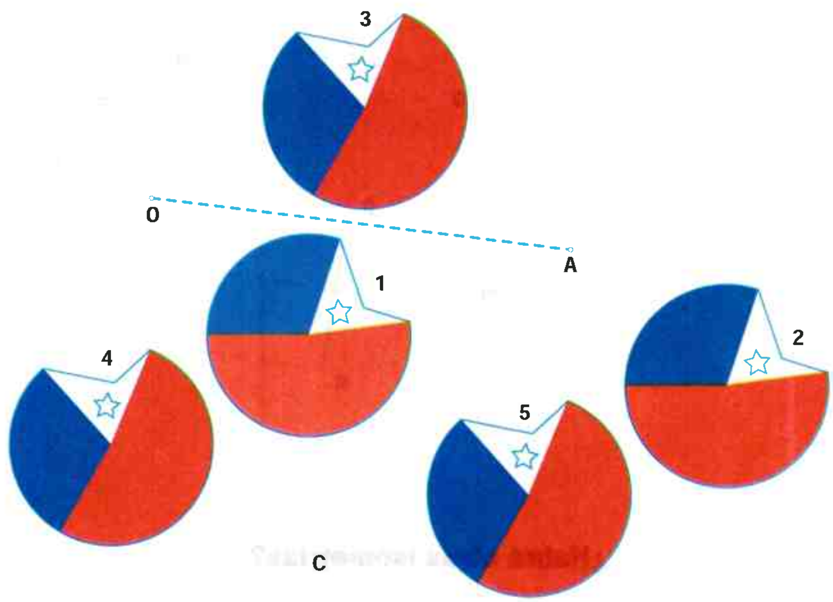
Como ya se mencionó en la introducción, el producto de dos isometrías es una isometría. Podríamos pensar entonces que haciendo productos entre las isometrías de nuestros ejemplos sería posible encontrar nuevas isometrías, de tipo distinto a las ya mencionadas.

Experimentar: Dibuje dos líneas en el plano y úselas como espejos de dos reflexiones. ¿Qué isometría se obtiene como producto? Observe que su respuesta depende de la posición original de las dos rectas; en particular, la respuesta en el caso de líneas paralelas es distinta a la del caso de líneas que se intersectan. ¿Qué se obtiene al hacer el producto de una traslación y una rotación?, ¿de dos traslaciones?, ¿de una reflexión y una rotación?, etc.

Un resultado fundamental es que estos cuatro ejemplos que hemos dado constituyen **todas** las isometrías del plano. Es decir, por mucho que esforcemos la imaginación, no es posible encontrar una isometría que no sea una de las ya mencionadas. Esta afirmación será probada en la próxima sesión.

Para concluir esta sesión, mostramos un ejemplo de dos isometrías que **no conmutan**, utilizando nuestra mascota; así se obtiene la afirmación hecha al comienzo de esta sesión sobre la no–conmutatividad del grupo de isometrías del plano euclideano.

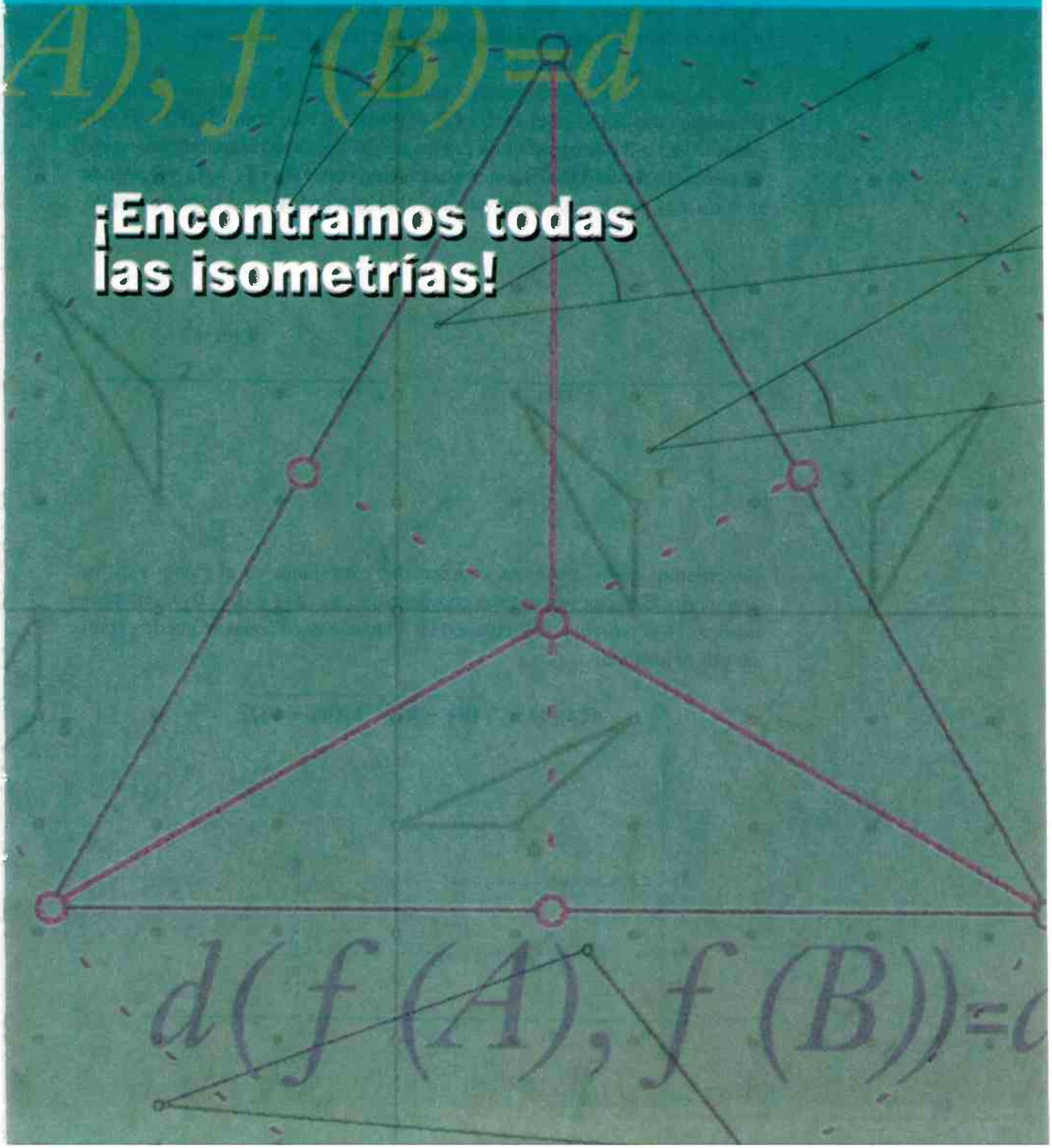
En esta figura, **1** representa la mascota original, **2** representa la mascota **1** trasladada en **A**, **3** representa la mascota **2** rotada en 60 grados en torno a **C**, **4** representa la mascota **1** rotada en 60 grados en torno a **C**, **5** representa la mascota **4** trasladada en **A**.



Si las dos isometrías dadas por traslación en **OA** y rotación con centro en **C** en 60 grados conmutaran, no debería importar el orden en que se las aplicáramos a **1**, y obtendríamos el mismo resultado. Pero en la figura vemos que los dos resultados posibles (**3** y **5**) no coinciden.

Sesión 3

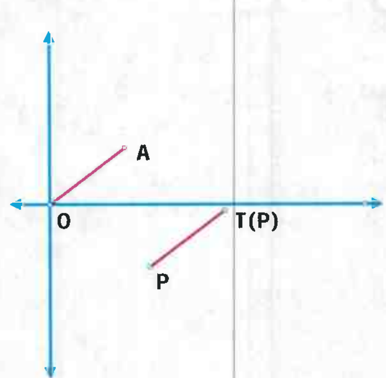
¡Encontramos todas las isometrías!

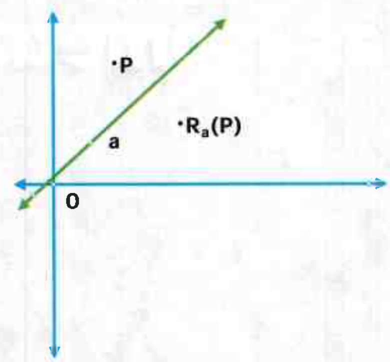


Veremos ahora cómo probar las afirmaciones sobre isometrías hechas anteriormente.

Primero nos pondremos de acuerdo en la notación que utilizaremos. El origen del plano será denotado por **O**, las letras mayúsculas **A**, **B**, **C**, se utilizarán para denotar puntos del plano, las letras minúsculas **a**, **b**, **c**, se utilizarán para denotar las rectas del plano. La distancia (euclideana) entre dos puntos **A** y **B** se denotará por $\mathbf{d(A,\ B)}$; como ya dijimos en la sesión anterior, esta distancia mide la longitud del segmento que une a los dos puntos.

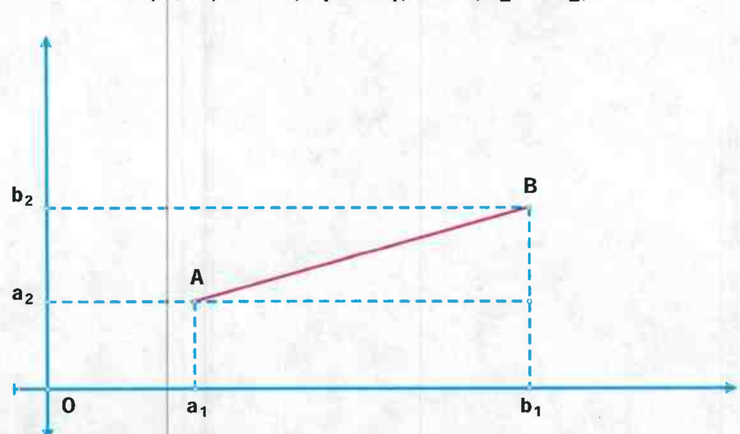
En esta terminología, por ejemplo, si denotamos por **P** a cualquier punto del plano, una traslación en el vector **OA** se puede escribir como $\mathbf{T_A(P) = P + A}$ (donde "+" es la suma usual de puntos del plano), una reflexión con espejo de reflexión **a** como $\mathbf{R_a(P)}$, un deslizamiento como $\mathbf{R_a \cdot T_A = T_A \cdot R_a}$ donde la recta **a** es paralela al vector que une al origen con **A**, y así sucesivamente.





Recordemos que si ponemos coordenadas cartesianas en el plano, y si los puntos **A** y **B** tienen respectivas coordenadas $(\mathbf{a_1},\ \mathbf{a_2})$ y $(\mathbf{b_1},\ \mathbf{b_2})$, entonces (utilizando el teorema de Pitágoras) su distancia euclideana se puede expresar por la fórmula:

$$\mathbf{d(a,\ b) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}}$$



Algunas propiedades interesantes de esta **distancia** (y que recomendamos verificar) son las siguientes.

D1: **d(A, B)** es un número real no negativo para todo par de puntos **A** y **B** del plano. Además **d(A, B) = 0** si y sólo si **A = B**.

D2: **d(A, B) = d(B, A)** para todo par de puntos **A** y **B** en el plano.

D3: Para tres puntos cualesquiera **A**, **B** y **C** en el plano se tiene la siguiente desigualdad:

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

Los matemáticos han llamado distancia a cualquier función que satisfaga estas tres propiedades.

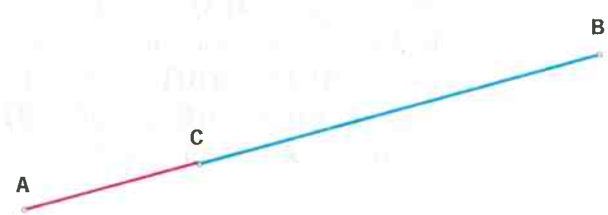
Observemos que nuestra distancia (la euclideana en el plano) satisface además la siguiente propiedad:

D4: La igualdad

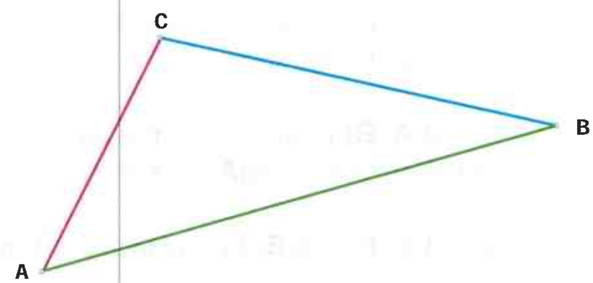
$$d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$$

se satisface si y sólo si los tres puntos **A**, **B** y **C** son colineales.

La *idea* geométrica detrás de esta afirmación es muy clara; en efecto, si los tres puntos son colineales, digamos por ejemplo que **C** pertenece al segmento de extremos **A** y **B**, entonces la igualdad es sólo la traducción del hecho que el segmento de extremos **A** y **B** es igual a la unión de los dos segmentos de **A** a **C** (rojo) y de **C** a **B** (azul) respectivamente.



Por otra parte, si los tres puntos no son colineales, entonces son los vértices de un triángulo, y "sabemos" que en un triángulo se da que la suma de dos cualesquiera de sus lados es siempre mayor que la medida del tercer lado.



Experimentar: Compruebe las propiedades de la distancia (D1 a D4) con cordel delgado y alfileres.

A continuación relacionaremos nuestra distancia con las isometrías: una **isometría** (o congruencia) del plano es (formalmente) una función **f** del plano en sí mismo que satisface

$$d[f(A),\ f(B)] = d(A,\ B)$$

para todos los puntos **A** y **B** en el plano. Dos objetos (o dos subconjuntos) del plano se dicen **congruentes** (o isométricos) si existe una isometría que lleve uno al otro.

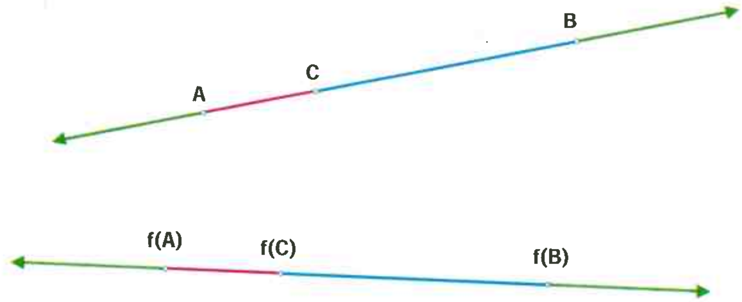
Algunas *propiedades de las isometrías* que podemos deducir directamente de su definición y de las propiedades vistas para la distancia son las siguientes:

I1: Si **f** es una isometría, entonces las imágenes de puntos distintos son distintas; es decir, **f** es inyectiva.

► ***Demostración:*** Tomemos dos puntos distintos **A** y **B** del plano. Debemos probar que **f(A)** y **f(B)** son distintos. Pero la propiedad **D1** para la distancia euclideana nos dice que probar esto es equivalente a probar que **d[f(A), f(B)]** es diferente de cero. Como **f** es isometría, se tiene que **d[f(A), f(B)] = d(A, B)**. Pero **d(A, B)** es un número positivo, pues **A** es distinto de **B**.

I2: Las isometrías llevan rectas en rectas; es decir, si **f** es una isometría y si **C** pertenece a la recta determinada por dos puntos **A** y **B**, entonces **f(C)** pertenece a la recta determinada por **f(A)** y **f(B)** (en lenguaje técnico, se dice que **f** es una *colineación*).

► ***Demostración:*** Por la propiedad **D4** para la distancia euclideana, basta probar que **d[f(A), f(B)] = d[f(A), f(C)] + d[f(C), f(B)]**. Como **A**, **B** y **C** son colineales, de la propiedad **D4** para la distancia euclideana se deduce que **d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)**. Pero como **f** es isometría, tenemos **d[f(A), f(B)] = d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) = d[f(A), f(C)] + d[f(C), f(B)]**.

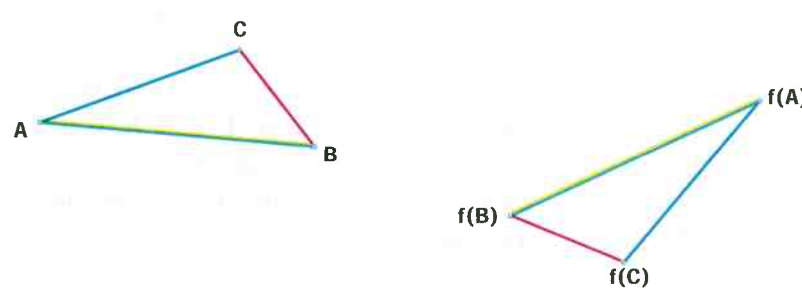


Experimentar: ¿Puede dar ejemplos de colineaciones en el plano que no sean isometrías?. Compruebe experimentalmente la propiedad **I2** con hilo delgado y alfileres; se sugiere hacer esto antes de enfrentar la demostración formal.

I3: Si una isometría fija dos puntos, entonces fija la recta que los contiene: es decir, si **f** es una isometría, si **A** y **B** son dos puntos del plano tales que **f(A) = A** y **f(B) = B** y si **C** es cualquier punto de la recta por **A** y **B**, entonces **f(C) = C**.

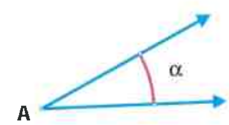
► ***Demostración:*** De la propiedad **I2** obtenemos que **f(C)** pertenece a la recta determinada por **A = f(A) y B = f(B)**. Pero, como **f** es isometría, además se tiene que **f(C)** está a la misma distancia de **A** y de **B** que **C**, puesto que se tiene que
d(A, C) = d[f(A), f(C)] = d[A, f(C)] y **d(B, C) = d[B, f(C)]**;
así, la única posibilidad es que **f(C)** coincida con el punto **C**.

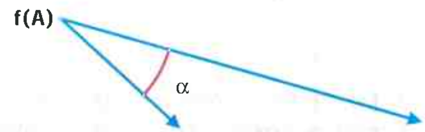
I4: Una isometría lleva tres puntos no colineales en tres puntos no colineales; dicho de otra manera, una isometría lleva un triángulo en otro triángulo (congruente con el primero).



► ***Demostración:*** Se deduce de inmediato de **I2**.

I5: Una isometría preserva ángulos; es decir, si **f** es una isometría y si dos rectas se cortan en un ángulo α, entonces las dos rectas imágenes por **f** también se cortan en el mismo ángulo α.





► ***Demostración:*** La posponemos hasta después de haber clasificado las isometrías, al final de esta sesión.

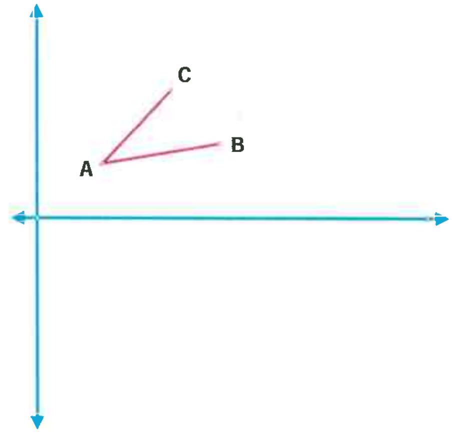
A continuación proseguiremos el estudio de las isometrías, con el fin de llegar a su clasificación.

En primer lugar, notemos que si una isometría del plano fija tres puntos no colineales, entonces debe ser la identidad; es decir, debe fijar todos los puntos.

Matemáticamente, esto se expresa como sigue.

> **Proposición 1:** Si **f** es una isometría del plano euclideano tal que **f(A) = A**, **f(B) = B** y **f(C) = C**, para **A, B y C** tres puntos no colineales del plano, entonces **f(P) = P** para todo punto **P** del plano.

► La ***idea de la demostración*** es sencilla: si observamos la siguiente figura, como se tiene que **f** fija a **A**, **B** y **C**, esto obliga a que **f** fije los vectores de **A** a **B** y de **A** a **C**. Pero toda transformación lineal del plano en sí mismo que fija dos vectores no múltiplos uno del otro es la identidad.

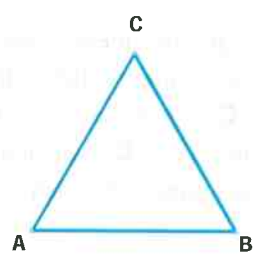


De esta proposición, cuya demostración está en el **Apéndice**, se deduce de inmediato el siguiente resultado.

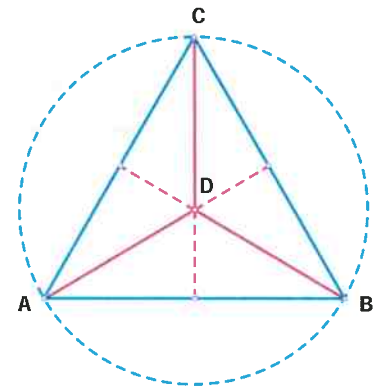
► *Corolario 1:* Si **f** y **g** son dos isometrías del plano que coinciden en tres puntos no colineales, entonces **f** y **g** coinciden en todos los puntos del plano.

► *Demostración:* Si $\mathbf{f(A)} = \mathbf{g(A)}$, $\mathbf{f(B)} = \mathbf{g(B)}$ y $\mathbf{f(C)} = \mathbf{g(C)}$ (con **A**, **B** y **C** tres puntos no colineales), entonces la isometría $\mathbf{g^{-1} \bullet f}$ fija estos tres puntos y, por la **Proposición 1**, debe ser la identidad, de donde se sigue que $\mathbf{f = g}$.

Un tipo de aplicación inmediata de estas ideas es el siguiente: supongamos que tomamos un triángulo equilátero, como en la próxima figura, y queremos encontrar todas las isometrías que él posee; es decir, necesitamos buscar todas las isometrías que llevan el triángulo en sí mismo. Supongamos que llamamos **A**, **B** y **C** a los vértices de nuestro triángulo.



Hay algunas isometrías evidentes: la identidad y tres reflexiones, donde cada una tiene como espejo una altura del triángulo. Otra posibilidad son las rotaciones del triángulo, con centro en el punto de intersección **D** de las alturas y ángulos de 60 ó 120 grados (también podríamos rotar en –60 grados, pero el efecto es el mismo que el de rotar en 120 grados, etc.). Así encontramos rápidamente seis isometrías.



¿Cómo podemos convencernos de que no hay más posibilidades? Una manera es utilizar el corolario que recién probamos.

En efecto, cualquier isometría del triángulo debería llevar a los vértices en vértices; es decir, por ejemplo, **A** puede ir a **A**, a **B** o a **C**. Si listamos en la siguiente tabla el efecto sobre los tres vértices de las seis isometrías que ya encontramos,

	A	**B**	**C**
Identidad	**A**	**B**	**C**
Reflexión en altura por **A**	**A**	**C**	**B**
Reflexión en altura por **B**	**C**	**B**	**A**
Reflexión en altura por **C**	**B**	**A**	**C**
Rotación en 60 grados	**B**	**C**	**A**
Rotación en 120 grados	**C**	**A**	**B**

vemos que no quedan más posibilidades donde enviar a los vértices; así, cualquier isometría del triángulo que lleve por ejemplo a **A** en **B**, a **B** en **A** y a **C** en **C** coincide en estos tres puntos con la isometría dada por la reflexión en la altura por **C**, y de acuerdo a nuestro **Corolario 1**, coincide con ella en todos los puntos del plano.

Experimentar: Encuentre todas las isometrías de un cuadrado; nótese que el argumento en este caso no es el mismo, ya que no puede llevarse cualquier par de vértices en cualquier otro par (hay que preservar distancias). Estudie también las isometrías de otras figuras geométricas: polígonos (regulares o no), una circunferencia, etc.

A continuación estudiaremos la información que nos entrega la estructura del *conjunto de puntos fijos* de una isometría; es decir, si tenemos una isometría **f**, consideremos el conjunto formado por todos los puntos **P** del plano que satisfacen la propiedad que **f(P) = P**.

La **Proposición 1** nos dice que si este conjunto contiene tres puntos no colineales entonces **f** es la identidad. Pero hay otras posibilidades: por ejemplo, puede haber una recta de puntos fijos (como en una reflexión), o un único punto fijo (como en una rotación), o ningún punto fijo (como en una traslación o en un deslizamiento).

Se podría pensar que quizás haya otras posibilidades, pero es posible probar que no es así. La proposición siguiente nos dice que los casos ya encontrados son los únicos posibles.

Proposición 2: Si **f** es una isometría del plano euclideano distinta de la identidad, entonces su conjunto de puntos fijos es vacío o consta de un punto o es una recta.

► La ***idea de la demostración*** es sencilla: si el conjunto de puntos fijos de la isometría **f** contiene al menos dos puntos **A** y **B**, entonces la propiedad **I3** de las isometrías nos dice que este conjunto contiene una recta **m** (la recta por **A** y **B**). Si el conjunto de puntos fijos contuviera algún punto **C** que no está en **m**, entonces **A**, **B** y **C** serían tres puntos no colineales fijos por **f** y, en este caso, la **Proposición 1** dice que **f** es la identidad, lo que contradice nuestra hipótesis, probando así el resultado.

En el **Apéndice** estudiaremos cómo es una isometría dada, de acuerdo a su conjunto de puntos fijos, el cual debe corresponder a uno de los casos que aparecen en la **Proposición 2.** De ese análisis obtenemos una descripción completa de todas las isometrías del plano. Esta descripción se resume en el siguiente resultado.

Teorema de clasificación

Si **f** es una isometría del plano distinta de la identidad, entonces

1. **f** se puede escribir como el producto de reflexiones, utilizando un máximo de tres.

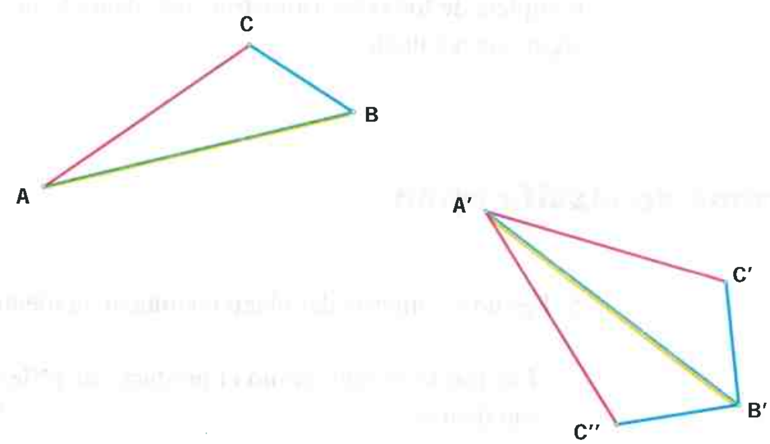
2. **f** es de uno (y de uno sólo) de los tipos siguientes: una rotación, una reflexión, una traslación o un deslizamiento.
3. **f** tiene un único punto fijo si y solamente si **f** es una rotación con centro en ese punto, si y solamente si **f** se puede escribir como el producto de dos reflexiones cuyos espejos pasan por el punto dicho. En este caso, el ángulo de rotación es el doble del ángulo que forman los espejos.
4. **f** tiene una recta de puntos fijos si y sólo si **f** es una reflexión. La recta de puntos fijos es el espejo.
5. Si **f** no tiene puntos fijos, entonces **f** es una traslación o un deslizamiento.
6. **f** es una traslación si y sólo si se puede escribir como producto de dos reflexiones con espejos paralelos. En este caso, el vector de traslación es perpendicular a los dos espejos, y de magnitud igual al doble de la distancia entre ellos.
7. **f** es un deslizamiento si y sólo si se puede escribir como el producto de tres reflexiones cuyos espejos son dos contiguos paralelos y perpendiculares al otro.

Este poderoso teorema nos permite en verdad clasificar isometrías; es decir, si tenemos dos objetos congruentes, nos permite decidir mediante un algoritmo (manera práctica) de qué tipo es la isometría que lleva a uno en el otro.

Antes de explicar este algoritmo, observemos primero lo siguiente:

Proposición 3: Si **A**, **B** y **C** son los vértices de un triángulo (o sea, tres puntos no colineales) y si **A′** y **B′** son dos puntos tales que **d(A′, B′) = d(A, B)**, entonces existen exactamente dos triángulos con vértices en **A′** y **B′** que son congruentes al original.

► ***Idea de la demostración:*** hay dos isometrías que llevan **A** en **A′** y **B** en **B′** y que son útiles.



► ***Demostración formal:*** Veamos primero que hay *a lo más* dos triángulos. Si **f** y **g** son dos isometrías que llevan **A** en **A′** y **B** en **B′**, llamemos **C′ = f(C)**. La isometría producto $\mathbf{g} \bullet \mathbf{f}^{-1}$ fija los dos puntos **A′** y **B′**, y por lo tanto fija a la recta que los contiene. Si esta isometría fija algún otro punto fuera de la recta, debe ser la identidad, y se obtiene que **f = g**, y **g(C) = f(C) = C′**. Si no, debe ser la reflexión **R** en la recta por **A′** y **B′**, y se obtiene **g = R • f**, y **g(C) = R[f(C)] = R(C′) = C″**.

Ahora veamos que efectivamente hay tales triángulos: el razonamiento recién hecho prueba que si podemos construir una isometría que lleve a **A** en **A′** y a **B** en **B′** entonces hay exactamente dos isometrías que sirven, concluyendo así la demostración. No es difícil construir una tal isometría, que lleve a **A** en **A′** y a **B** en **B′**, dado que **d(A′, B′) = d(A, B)** (inténtelo).

La **Proposición 3** nos permite dividir las isometrías en dos grandes grupos, que llamaremos las *isometrías directas* y las *indirectas*. Estas se diferencian en su comportamiento sobre los triángulos: dada una isometría **f**, considere cualquier triángulo y llame a sus vértices **A**, **B** y **C**, nominados de manera que al recorrer el borde del triángulo desde **A** hasta **B**, el interior del triángulo esté hacia la izquierda (como en la figura anterior). Luego considere la imagen del triángulo por **f**, con respectivos vértices **f(A)**, **f(B)** y **f(C)**. Si al recorrer el borde del nuevo triángulo desde **f(A)** hasta **f(B)** el interior del triángulo sigue quedando a la izquierda, diremos que la isometría es *directa* (el caso del triángulo con vértices **A′**, **B′** y **C′** de la figura anterior). Si en cambio el interior del triángulo queda a la derecha, diremos que la isometría es *indirecta* (el caso del triángulo con vértices **A′**, **B′** y **C″** de la figura anterior).

Experimentar: Compruebe que las traslaciones y las rotaciones son isometrías directas, mientras que las reflexiones y deslizamientos son isometrías indirectas. ¿Qué pasa con los productos de isometrías directas?, ¿Y de indirectas?, ¿Y de una directa y una indirecta?

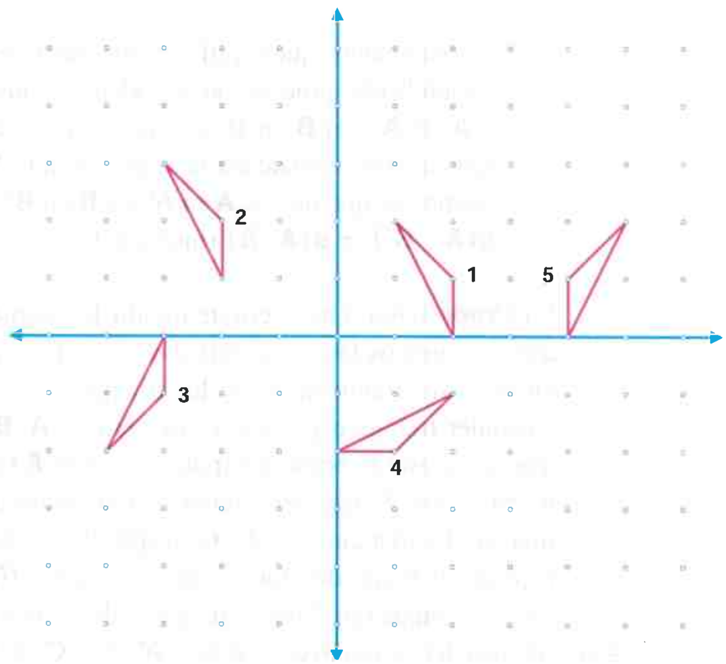
Ahora podemos explicar el *algoritmo de clasificación de isometrías*. Dada una isometría **f** (o dadas dos figuras congruentes), decidimos el tipo al cual pertenece **f** mediante el siguiente procedimiento:

1. Decida si **f** tiene algún punto fijo.

2. Si la respuesta a **1** es afirmativa: decida si **f** tiene una recta de puntos fijos, en cuyo caso es una reflexión, o no, en cuyo caso es una rotación.

3. Si la respuesta a **1** es negativa: decida si **f** es directa, en cuyo caso es una traslación, o indirecta, en cuyo caso es un deslizamiento.

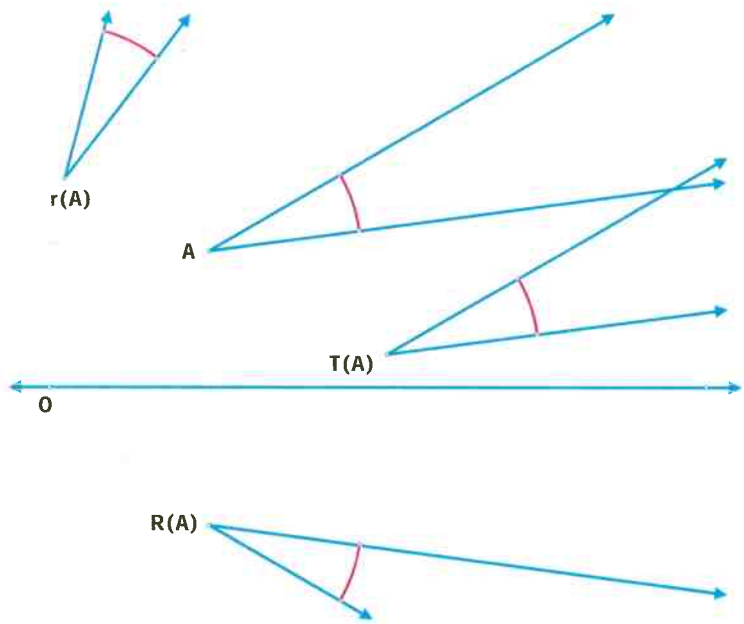
Para ejercitar el algoritmo, considere los cinco triángulos congruentes de la siguiente figura. Si pensamos que el triángulo **1** es el original, decida qué tipo de isometría lo lleva en **2**, en **3**, en **4** y en **5** respectivamente.



Utilizando el Teorema de Clasificación, podemos probar ahora la Propiedad **I5** de las isometrías; esto es, que las isometrías preservan ángulos

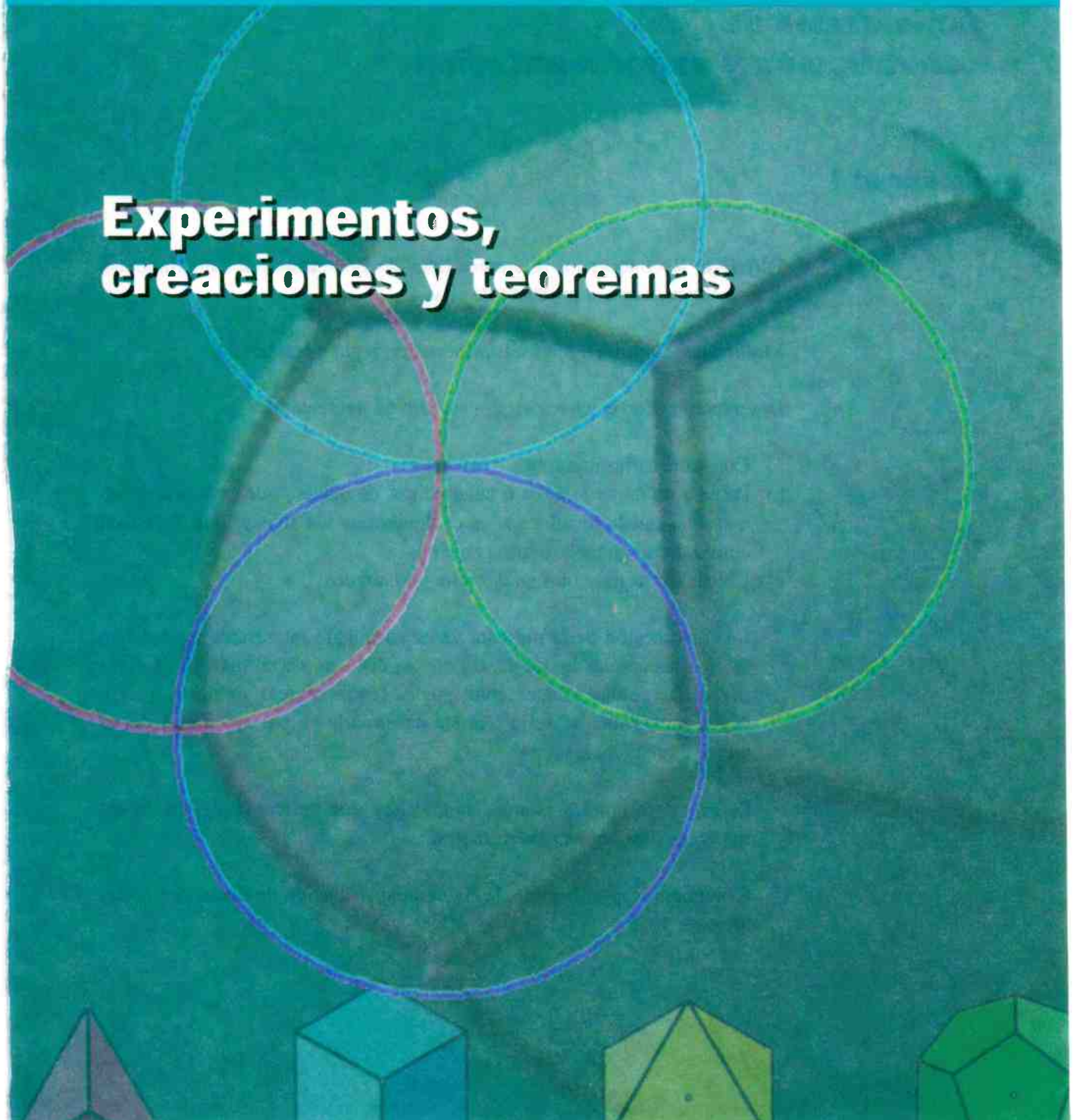
► *Idea de la demostración de I5:* Notemos primero que si dos isometrías preservan ángulos, entonces su producto también lo hace. Utilizando el Teorema de Clasificación, basta probar entonces que las traslaciones, las rotaciones en torno al origen y la reflexión en el eje **x** preservan ángulos, ya que cualquier isometría se puede escribir como productos de éstas (¿por qué?).

Pero es geométricamente claro que todas las traslaciones **T**, todas las rotaciones **r** en torno al origen y la reflexión **R** en el eje **x** preservan ángulos, lo que concluye la demostración.



Experimentar: Aplique el teorema (o el algoritmo) a cada una de las figuras que vimos en los ejemplos de las Sesiones 1 y 2.

Sesión 4



Experimentos, creaciones y teoremas

En esta sesión veremos algunas actividades relacionadas con isometrías que complementan y concluyen el análisis de los ejemplos y las construcciones descritas en las **Sesiones 1** y **2**, así como también estudiaremos en detalle los conocidos Teoremas de Congruencia.

Actividades de construcción y experimentación

Actividad 1

Objetivo: Reconocer los diferentes tipos de isometrías y los movimientos que se obtienen con el producto de ellas.

Materiales: Cartulina, tijeras, transportador, regla y compás.

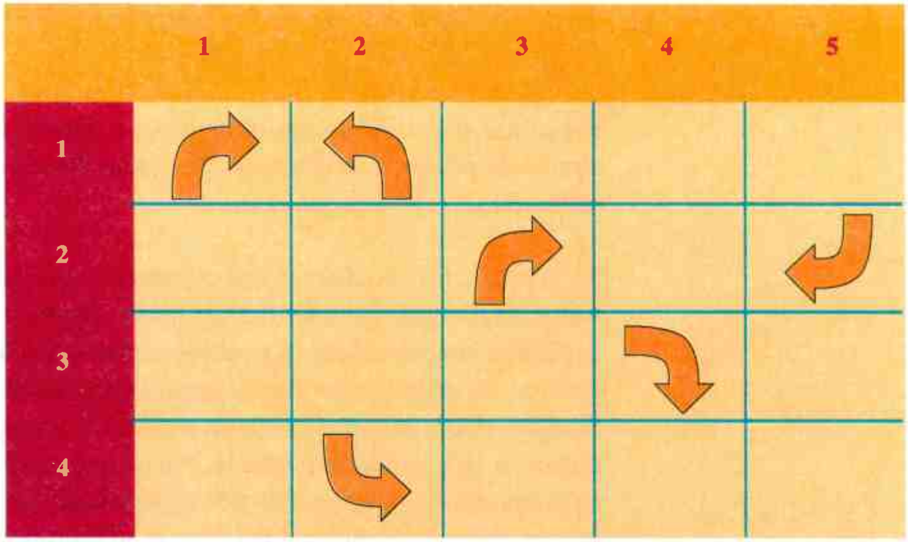
Descripción: Con estos materiales realizar lo siguiente:

a) Construir varias mascotas.
b) Dibujar un tablero de 6 x 6 cuadraditos, de manera que cada una de las mascotas pueda ser ubicada en cualquiera de los 36 espacios. Se puede empezar con un tablero más pequeño.
c) Ubicar varias mascotas en diferentes cuadrados.

La construcción de la mascota ya es un trabajo interesante pues deben fabricarlas con las herramientas que se dispone, de tal manera de obtener varias copias exactamente iguales (congruentes); es decir, que se pueda mover una sobre la otra sin deformarla en sus medidas y de tal manera que coincidan.

Se pregunta por las isometrías que hay que aplicar a alguna de las mascotas para obtener las restantes.

Examinemos, por ejemplo, la siguiente distribución de flechas en un tablero de 4 x 5.



La idea es preguntar por los movimientos que fueron necesarios para llevar la figura original (en la posición superior izquierda) hasta alguno de los otros cuadrados. Proponemos que en un principio se realicen los más simples, como traslaciones. La etapa final de la actividad consistirá en describir los movimientos como producto de a lo más tres reflexiones.

A estudiantes más avanzados se les puede pedir las expresiones formales de los productos de isometrías involucrados en cada movimiento.

Actividad 2

Objetivo: Producir reflexiones, interpretarlas y aplicaciones a la vida diaria.

Materiales: Un cuaderno, lápiz, regla, compás y varios calcos.

Descripción: En el cuaderno colocar dos calcos juntos debajo de una hoja. Disponer los calcos de la siguiente manera:

a) El primer calco colocarlo de tal forma de que el carbón copie en el reverso de la hoja original y el segundo de tal forma que la copia quede sobre la siguiente hoja del cuaderno.
b) Dibujar sobre la hoja original una figura, la que el estudiante desee,o dirigir la actividad con una figura que tenga rasgos distinguibles, por ejemplo la mascota, o un triángulo con sus vértices identificados con las letras **ABC**.

c) A continuación se comparan los dibujos calcados en el reverso de la hoja y en la hoja siguiente del cuaderno.

Preguntar qué tipo de movimientos se obtuvo. Esta es una manera simple de producir reflexiones. Preguntar dónde se encuentra el eje de reflexión.

Se le pide a los estudiantes que escriban la reflexión de la palabra **ambulancia**, lo cual resulta difícil de hacer. También se pide que escriban la palabra con los calcos en posición como antes. Relacionar esto con el por qué las ambulancias llevan escrito esta palabra"al revés" en su parabrisas. Hacer el experimento de mirarse en un espejo con un cartel escrito con la palabra ambulancia. Notar que mediante la experimentación con el calco pueden fabricar rápidamente la reflexión de una palabra sin mayor dificultad. ¿Qué pasa si se escribe la palabra **ama**? Buscar otras palabras simétricas. ¿Cuáles de las letras del alfabeto admiten reflexiones?

En el entorno que rodea al estudiante observar las reflexiones presentes. Ejemplo: cuando se entra a la sala de clases a través de la puerta, la manilla de la puerta está a la izquierda; para salir de la sala por la misma puerta resulta ser que la manilla está a la derecha.

Actividad 3

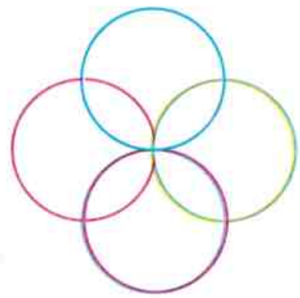
Objetivo: Construir y experimentar con rotaciones. Diseños.

Materiales: Pita y clavos u otros materiales equivalentes. También se puede realizar esta actividad en el cuaderno con regla y compás.

Descripción: Rotar una figura con respecto a un punto. Resulta entretenido cuando se considera que el punto respecto al cual se desea rotar es un punto de la figura. Una flor con cuatro pétalos congruentes se puede construir mediante esta técnica.

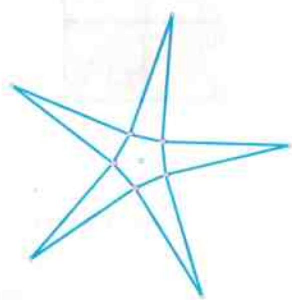
a) Dibujar en una hoja de dibujo una circunferencia.
b) Escoger un punto **P** sobre la circunferencia.
c) Construir con centro en **P** una rotación en 90 grados de la circunferencia.
d) Después hacer las rotaciones en múltiplos enteros de 90 grados de la circunferencia original; o bien, rotar cada imagen sucesivamente en 90 grados.

Así se obtiene la figura siguiente, que es una reproducción humana (abstracción) de la flor con cuatro pétalos congruentes que vimos en el Ejemplo 2 de la **Sesión 2**.



Cambiando el ángulo de rotación y/o la posición del centro de rotación puede lograrse figuras muy hermosas, las cuales pueden ser coloreadas para producir efectos estéticos novedosos.

Lo mismo se puede llevar a cabo con otras figuras; por ejemplo, las rotaciones de un triángulo isósceles en múltiplos de 72 grados producen una abstracción de la estrella de mar que vimos en la **Sesión 2**.



Más generalmente, se puede tomar cualquier figura y aplicarle este método, resultando cuadros estéticamente complicados y basados en la idea de aplicar rotaciones sucesivas a una misma figura con respecto a diferentes puntos.

Actividad 4

Objetivo: Pavimentar un patio con figuras congruentes y con muchas isometrías.

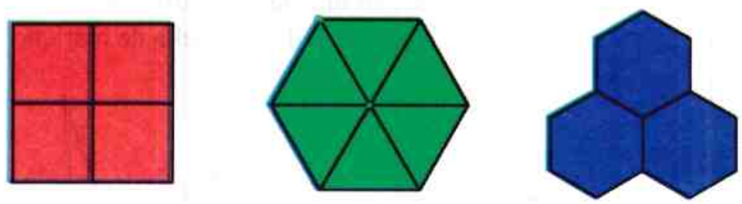
Materiales: Cartulina (o papel), regla, transportador, tijeras, lápiz.

Descripción: Con estos materiales construir plantillas de figuras geométricas regulares, que tengan muchas isometrías; por ejemplo, un grupo puede fabricar cuadrados congruentes entre sí, otro grupo triángulos equiláteros congruentes entre sí, otro pentágonos regulares congruentes entre sí, otro hexágonos regulares congruentes entre sí, etc.

La construcción es ya interesante, pues permite (o a veces requiere) descubrir cuánto mide un ángulo interior de cada uno de estos polígonos regulares.

Con las plantillas ya construidas, se pide tratar de pavimentar un pedazo de plano: la mesa de trabajo por ejemplo, donde pavimentar quiere decir cubrir con las figuras sin que queden espacios entre ellas y sin superponerlas.

El problema es determinar (geométricamente) con cuáles es posible y por qué con otras no lo será, aunque no hayan sido construidas.

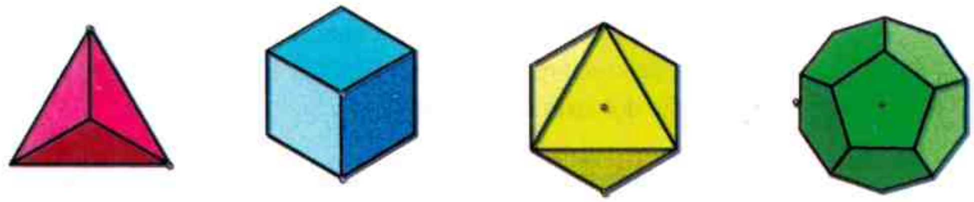


En la figura anterior vemos los tres tipos de pavimentaciones posibles; la meta es probar que no hay otras. Es decir, que no se puede pavimentar con pentágonos regulares, ni con octógonos regulares, etc.

La demostración no es difícil (¡pero hay que hacerla!). De hecho, lo que estas tres pavimentaciones tienen en común da la pista: el ángulo interior de un cuadrado mide 90 = 360/4 grados, el de un triángulo equilátero mide 60 = 360/6 grados y el de un hexágono regular mide 120 = 360/3 grados.

Con las mismas plantillas ya construidas se puede plantear otra actividad: construir sólidos regulares. Esto es, cuerpos espaciales en que cada cara es un polígono regular, todas las caras son congruentes entre sí, y todos los ángulos interiores son iguales.

Por ejemplo, con seis cuadrados se puede construir un cubo; con triángulos equiláteros se puede construir un tetraedro o un octaedro, etc.



En la figura anterior mostramos cuatro sólidos regulares, que como se ve admiten muchas isometrías (que ahora son espaciales). En total hay exactamente cinco sólidos regulares, los llamados *sólidos platónicos*. ¿Cuál es el que falta? ¿Por qué sólo hay cinco? ¿Puede encontrar todas las isometrías de cada uno de los cinco sólidos platónicos?

Otra actividad relacionada es la de pavimentar una esfera con figuras regulares congruentes entre sí. En este caso, la respuesta a la pregunta ¿de cuántas maneras distintas se puede hacer? es la misma anterior: de cinco maneras, que pueden obtenerse a partir de los sólidos platónicos. A modo de ejemplo incluimos la siguiente figura, que corresponde a la versión esférica del dodecaedro.

Los teoremas de congruencia de triángulos

Las isometrías nos permiten obtener fácilmente reglas para decidir cuándo dos triángulos son congruentes; es decir, cuando existe una isometría que lleva uno en el otro. Estas reglas son conocidas como los *teoremas de congruencia*, y se refieren a la cantidad mínima de datos que deben ser coincidentes en los dos triángulos para que éstos sean congruentes.

Intuitivamente, la idea geométrica detrás de los teoremas de congruencia es clara: ¿Qué datos debemos conocer sobre los dos triángulos para ser capaces de concluir que podemos poner uno exactamente sobre el otro sin estirarlo, doblarlo ni romperlo?

Sabemos ya que si dos triángulos (con respectivos vértices **A**, **B**, **C** y **A′**, **B′**, **C′**) son congruentes, digamos por una isometría que lleva **A** en **A′**, **B** en **B′** y **C** en **C′**, entonces se cumplen las condiciones siguientes.

C1: El lado **AB** mide lo mismo que el lado **A′B′**, el lado **BC** mide lo mismo que el lado **B′C′** y el lado **CA** mide lo mismo que el lado **C′A′**.

C2: El ángulo determinado por **ABC** mide lo mismo que el ángulo determinado por **A′B′C′**, el ángulo determinado por **BCA** mide lo mismo que el ángulo determinado por **B′C′A′** y el ángulo determinado por **CAB** mide lo mismo que el ángulo determinado por **C′A′B′**.

El problema es ahora al revés: ¿Con cuántos de los seis datos que aparecen en **C1** y **C2** nos basta para asegurar que los dos triángulos sean congruentes?

Los resultados (teoremas) más populares al respecto son llamados **LLL**, **LAL** y **ALA**, donde **L** quiere decir lado y **A** quiere decir ángulo.

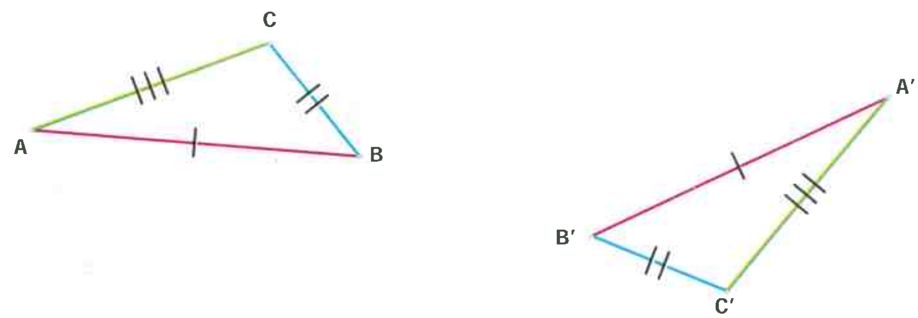
El primero (**LLL**) dice que si los dos triángulos tienen sus tres lados con la misma medida (si los tres datos de **C1** coinciden) entonces son congruentes. El segundo (**LAL**) dice que si dos lados y el ángulo entre ellos tienen la misma medida (si dos datos de **C1** y un dato de **C2** coinciden) entonces son congruentes. El tercero (**ALA**) se refiere a que si dos de los ángulos y el lado adyacente a ambos tienen la misma medida (si un dato de **C1** y dos datos de **C2** coinciden) entonces son congruentes.

Discutiremos enseguida estos tres resultados, de manera intuitiva.

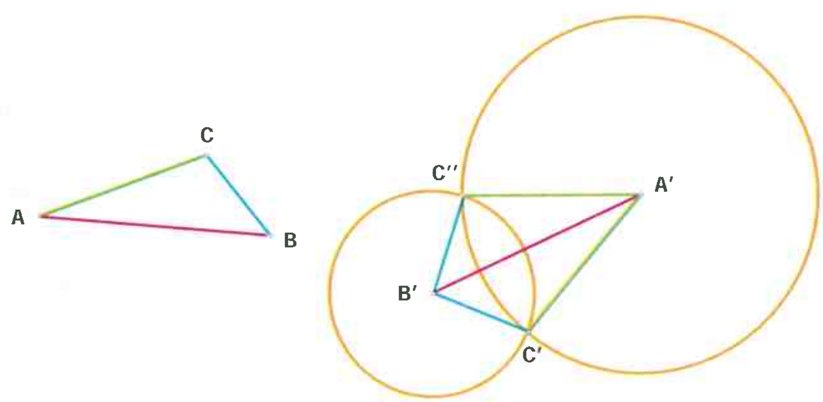
> **Experimentar**: Nótese que *no* hemos afirmado que haya resultados, por ejemplo, del tipo **LLA**, que diría si dos lados y un ángulo (cualquiera) tienen la misma medida entonces los triángulos son congruentes. Encuentre ejemplos donde esto no se cumpla. ¿Qué pasa con otras combinaciones, como **AAA**, **LAA**, etc.?

Teorema de congruencia LLL

Dos triángulos con respectivos vértices **A**, **B**, **C** y **A′**, **B′** y **C′** son congruentes si $d(A, B) = d(A', B')$, $d(B, C) = d(B', C')$ y $d(A, C) = d(A', C')$.



► *Idea geométrica de la demostración:* Como los lados **AB** y **A′B′** miden lo mismo, podemos encontrar una traslación **T** que lleve **A** en **A′** y una rotación **r** que fije a **A′** y que lleve a **T(B)** en **B′**. Así, la isometría producto **r • T** lleva al triángulo con vértices **A**, **B** y **C** en otro triángulo, con vértices **A′**, **B′** y **C″**; es decir, hemos movido el triángulo original sin doblarlo, romperlo ni estirarlo hasta hacer que uno de sus lados coincida con el correspondiente lado del segundo triángulo.



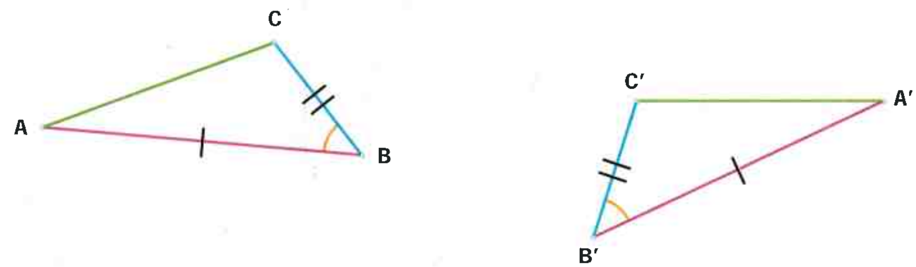
Ahora necesitamos otra isometría (otro movimiento) que nos permita hacer coincidir los terceros vértices. Como las distancias de **A′** a **C″** y de **A′** a **C′** son iguales, pues

$$d(A', C'') = d[r\ T(A),\ r\ T(C)] = d(A, C) = d(A', C')$$

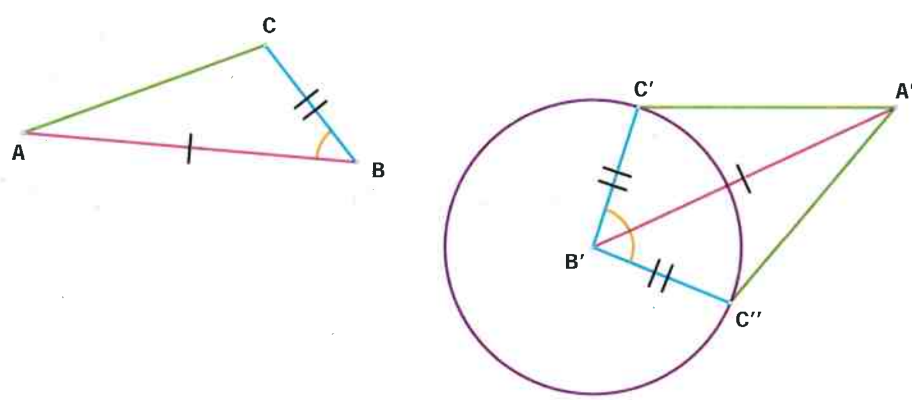
y las de **B′** a **C″** y de **B′** a **C′** también son iguales, hay dos posibilidades: o bien **C″ = C′**, y ya hemos encontrado la isometría **r • T** que lleva el primer triángulo en el segundo, o bien **C′** es la imagen de **C″** por la reflexión **R** en la recta por **A′** y **B′**, y en este caso la isometría que sirve es **R • r • T**.

Teorema de congruencia LAL

Dos triángulos con respectivos vértices **A**, **B**, **C** y **A′**, **B′** y **C′** son congruentes si **d(A, B) = d(A′, B′)**, **d(B, C) = d(B′, C′)** y los ángulos determinados por **ABC** y **A′B′C′** miden lo mismo.



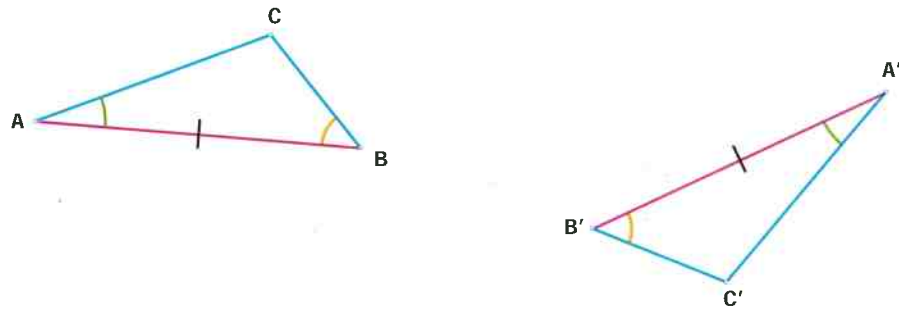
► ***Idea geométrica de la demostración:*** Al igual que en el caso anterior, utilizamos que los lados **AB** y **A′B′** miden lo mismo para encontrar una traslación **T** que lleve **A** en **A′** y una rotación **r** que fije a **A′** y que lleve a **T(B)** en **B′**. Así, la isometría producto **r • T** lleva al triángulo con vértices **A**, **B** y **C** en otro triángulo, con vértices **A′**, **B′** y **C″**; es decir, hemos movido el triángulo original sin doblarlo, romperlo ni estirarlo hasta hacer que uno de sus lados coincida con el correspondiente lado del segundo triángulo.



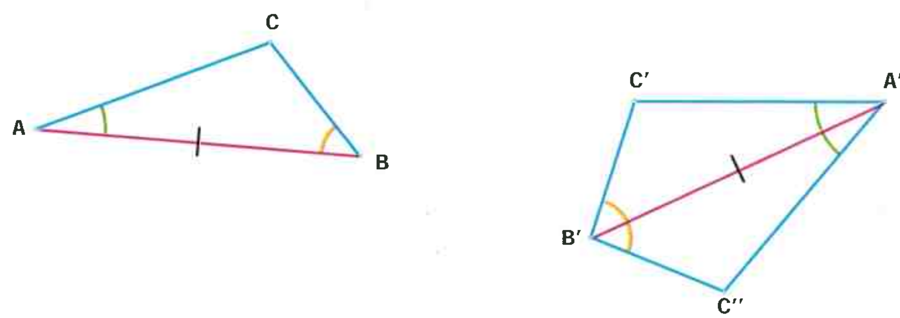
Como la distancia de **B′** a **C″** es igual a la distancia de **B′** a **C′** (pues hemos utilizado isometrías), nuevamente hay dos posibilidades: o bien **C″ = C′**, y **r • T** es la isometría que nos da el resultado, o debemos utilizar la reflexión **R** en la recta por **A′** y **B′**, en cuyo caso la isometría que sirve es **R • r • T**.

Teorema de congruencia ALA

Dos triángulos con respectivos vértices **A**, **B**, **C** y **A′**, **B′** y **C′** son congruentes si **d(A, B) = d(A′, B′)**, los ángulos determinados por **ABC** y **A′B′C′** miden lo mismo y los ángulos determinados por **CAB** y **C′A′B′** miden lo mismo.



► *Idea geométrica de la demostración:* Al igual que en los dos casos anteriores, utilizamos que los lados **AB** y **A′B′** miden lo mismo para encontrar una traslación **T** que lleve **A** en **A′** y una rotación **r** que fije a **A′** y que lleve a **T(B)** en **B′**. Así, la isometría producto **r • T** lleva al triángulo con vértices **A**, **B** y **C** en otro triángulo, con vértices **A′**, **B′** y **C″**; es decir, hemos movido el triángulo original sin doblarlo, romperlo ni estirarlo hasta hacer que uno de sus lados coincida con el correspondiente lado del segundo triángulo.



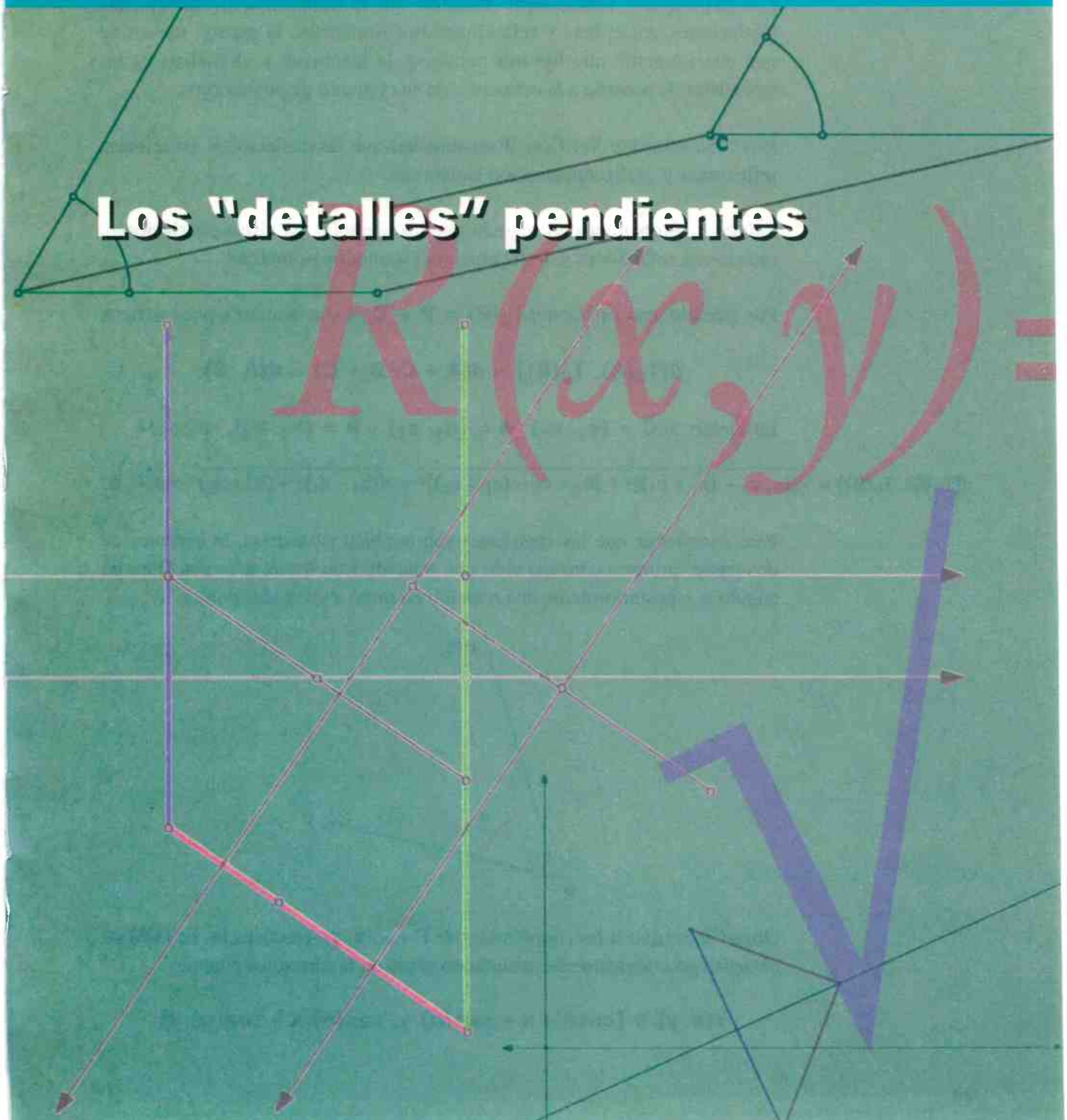
Como los ángulos **A′B′C′** y **A′B′C″** miden lo mismo, hay dos posibilidades: o la recta por **B′** y **C′** coincide con la recta por **B′** y **C″** o no. En el primer caso, como los ángulos **C′A′B′** y **C″A′B′** también miden lo mismo, tendremos que la recta por **A′** y **C′** coincide con la recta por **A′** y **C″**. Pero **C″** es el punto de intersección de la recta por **A′** y **C″** y de la recta por **B′** y **C″**, y **C′** es el punto de intersección de la recta por **A′** y **C′** y de la recta por

B′ y **C′**. Como las respectivas rectas coinciden, los puntos de intersección también deben coincidir, y tenemos **C″ = C′**. Por lo tanto, en este caso la isometría que sirve es **r • T**.

En el segundo caso, cuando las rectas por **B′** y **C′** y por **B′** y **C″** no coinciden, aplicamos la reflexión **R** con eje la recta por **A′** y **B′** para hacer coincidir la imagen de la recta por **B′** y **R(C″)** con la recta por **B′** y **C′**, y repetimos el razonamiento anterior. Así, la isometría que sirve en este caso es **R • r • T**.

Apéndice

Los "detalles" pendientes



En este Apéndice hemos coleccionado aquellos resultados que, por una parte, son esenciales para la comprensión de lo tratado en las sesiones, y que por otra parte, requieren demostraciones complejas y/o extensas que no estimamos conveniente incluir en su momento, pero que tampoco deben ser completamente excluidas. Recordemos que en cada caso se dio en su oportunidad la idea geométrica que en este apéndice se formalizará.

Los principales temas aquí tratados son la demostración de que las traslaciones, rotaciones y reflexiones son isometrías, la prueba formal de que una isometría que fija tres puntos es la identidad, y el análisis de las isometrías de acuerdo a la estructura de su conjunto de puntos fijos.

Ejercicio resuelto: Verificar (formalmente) que las traslaciones, rotaciones, reflexiones y deslizamientos son isometrías.

Solución: Probaremos en seguida que los ejemplos ya vistos (traslaciones, rotaciones, reflexiones y deslizamientos) son todos isometrías.

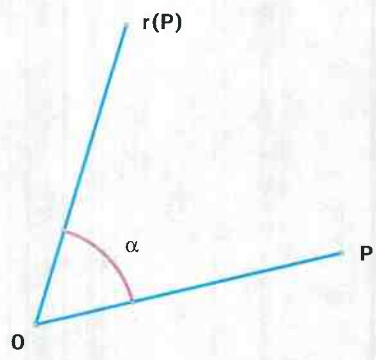
Por ejemplo, una *traslación* $\mathbf{T_C(P) = P + C}$ es una isometría pues se tiene

$$\mathbf{d[T_C(A),\ T_C(B)] = d(A + C,\ B + C) = d(A,\ B)}.$$

En efecto, si $\mathbf{C = (c_1,\ c_2)}$, $\mathbf{A = (a_1,\ a_2)}$ y $\mathbf{B = (b_1,\ b_2)}$, entonces

$$\mathbf{d[T_C(A),\ T_C(B)] = \sqrt{[b_1,\ c_1 - (a_1 + c_1)]^2 + [b_2 + c_2 - (a_2 + c_2)]^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 + a_2)^2} = d(A,\ B)}$$

Para comprobar que las *rotaciones* son también isometrías, lo haremos en dos pasos: primero considerando una rotación $\mathbf{r}$ en torno al *origen* $\mathbf{O}$ en un ángulo α y posteriormente una rotación en torno a cualquier punto.



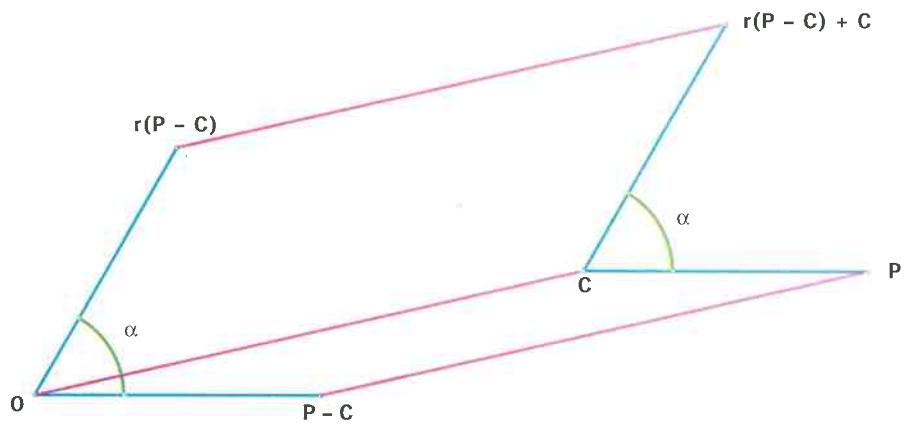
Observamos que si las coordenadas de $\mathbf{P}$ son $(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$, entonces las de $\mathbf{r(P)}$ se obtienen geométricamente, resultando como en la fórmula siguiente:

$$\mathbf{r(x,\ y) = [\cos(\alpha)\ x + sen(\alpha)\ y,\ \cos(\alpha)\ x - sen(\alpha)\ y]}$$

Con esta fórmula es fácil comprobar que $\mathbf{d[r(A), r(B)] = d(A, B)}$ para todo par de puntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en el plano, obteniendo así que las rotaciones con centro en el origen son isometrías.

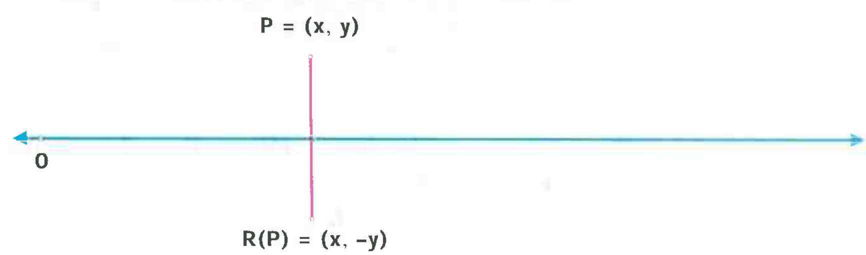
Si tenemos una rotación $\mathbf{r_C}$ con centro un punto $\mathbf{C}$ cualquiera y ángulo α, entonces, en lugar de escribir su (complicada) fórmula para probar que es isometría, utilizaremos que ya hemos probado que las traslaciones y las rotaciones con centro en el origen son isometrías. Esta es una muestra del conocido método matemático de resolver un problema indirectamente, reduciéndolo a un caso ya conocido.

En efecto, si consideramos la rotación $\mathbf{r}$ con centro en el *origen* y *ángulo* α, la traslación $\mathbf{T_C}$ que lleva el origen $\mathbf{O}$ a $\mathbf{C}$ y su inversa $\mathbf{(T_C)^{-1} = T_{-C}}$ tenemos tres isometrías ya comprobadas. Además, como ya sabemos que el producto de isometrías es una isometría, obtenemos que el producto $\mathbf{r_C = T_C \bullet r \bullet T_{-C}}$ (es decir, $\mathbf{r_C(P) = T_C \bullet r \bullet T_{-C}(P) = r(P - C) + C}$) es también una isometría (ver figura siguiente).



Para las *reflexiones*: de nuevo lo haremos primero para el caso de una reflexión muy simple, y después para cualquiera utilizando lo que ya sabemos.

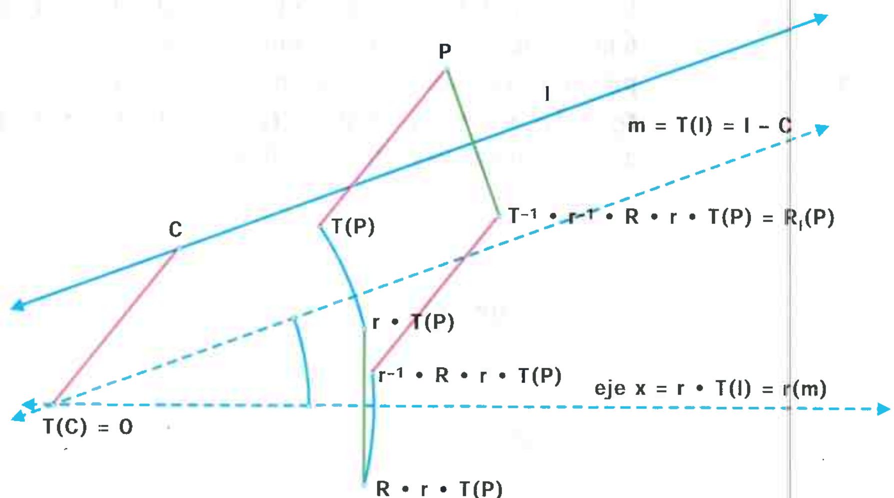
Una reflexión con fórmula simple es la que tiene como espejo al eje $\mathbf{x}$; lo que en coordenadas es $\mathbf{R(x, y) = (x, -y)}$.



Es muy fácil comprobar en coordenadas que esta reflexión es una isometría (inténtelo).

Si ahora consideramos una reflexión $\mathbf{R_l}$ con espejo en una recta **l** cualquiera, podemos encontrar una traslación **T** que lleve un punto de la recta **l** al origen; esta traslación llevará a la recta **l** a otra recta **m** que pasa por el origen (¿por qué?). Enseguida encontramos una rotación **r** en torno al origen que lleve la recta **m** al eje **x**; observamos que el producto **r • T** lleva la recta original **l** al eje **x**.

Además se tiene que la reflexión **R • l** se puede escribir como el producto de isometrías $\mathbf{R_l = (r \bullet T)^{-1} \bullet R \bullet (r \bullet T)}$, y por lo tanto es una isometría.



El último caso que nos queda son los *deslizamientos*: pero un deslizamiento es el producto de una traslación y una reflexión (en recta paralela a la traslación); ya hemos probado que ambas son isometrías, y sabemos que el producto de isometrías resulta ser una isometría.

A continuación demostraremos la **Proposición 1**.

Proposición 1: Si **f** es una isometría del plano euclideano tal que **f(A) = A**, **f(B) = B** y **f(C) = C**, para **A**, **B** y **C** tres puntos no colineales del plano, entonces **f(P) = P** para todo punto **P** del plano.

Demostración: Sea $\mathbf{T_A(P) = P + A}$ la traslación que lleva el origen **O** al punto **A**. Entonces su inversa es la traslación $\mathbf{T_{-A}(P) = P - A}$, que lleva el punto **A** al origen **O**.

Utilizando estas dos traslaciones y **f**, formamos una nueva isometría, que llamaremos **h**, haciendo el producto de $\mathbf{T_{-A}}$, **f** y $\mathbf{T_A}$. Es decir, $\mathbf{h = T_{-A} \bullet f \bullet T_A}$, o equivalentemente $\mathbf{h(P) = f(P + A) - A}$ para todo punto **P** en el plano.

Esta isometría **h** satisface lo siguiente:
$\mathbf{h(O) = f(A) - A = O}$, $\mathbf{h(B - A) = f(B) - A = B - A}$, y $\mathbf{h(C - A) = f(C) - A = C - A}$; vale decir, **h** fija el origen y otros dos puntos del plano: $\mathbf{B - A}$ y $\mathbf{C - A}$. Probaremos ahora que en realidad **h** fija a todos los puntos del plano, y de esto se concluirá que entonces **f** fija a todos los puntos del plano, como queremos.

Notemos que como **h** es una isometría, entonces satisface
$\mathbf{d(O, P) = d[h(O), h(P)] = d[O, h(P)]}$, $\mathbf{d(B - A, P) = d[h(B - A), h(P)] = d[B - A, h(P)]}$ y $\mathbf{d(C - A, P) = d[h(C - A), h(P)] = d[C - A, h(P)]}$ para todo punto **P** del plano.

La primera igualdad nos dice que la distancia de **P** al origen es igual a la distancia de **h(P)** al origen; en coordenadas, si
$\mathbf{P = (x_1, x_2)}$ y $\mathbf{h(P) = (y_1, y_2)}$, esto se escribe

$$x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2$$

Lo que queremos probar es que $\mathbf{h(P) = P}$, es decir necesitamos probar que $\mathbf{y_1 = x_1}$ e $\mathbf{y_2 = x_2}$

La segunda y tercera igualdad de distancias se pueden escribir similarmente, en términos de las coordenadas de $\mathbf{B - A\ (m_1, m_2)}$ y de $\mathbf{C - A\ (n_1, n_2)}$, como

$$(m_1 - x_1)^2 + (m_2 - x_2)^2 = (m_1 - y_1)^2 + (m_2 - y_2)^2$$

$$(n_1 - x_1)^2 + (n_2 - x_2)^2 = (n_1 - y_1)^2 + (n_2 - y_2)^2$$

Desarrollando la penúltima igualdad y reemplazando en ella la anterior, obtenemos la siguiente expresión:

$$m_1\, x_1 + m_2\, x_2 = m_1\, y_1 + m_2\, y_2$$

Similarmente, desarrollando la tercera igualdad y reemplazando en ella la primera, obtenemos la siguiente expresión:

$$n_1\, x_1 + n_2\, x_2 = n_1\, y_1 + n_2\, y_2$$

Ahora es cuando utilizamos que los tres puntos **A**, **B** y **C** no son colineales: esto significa que $\mathbf{B - A}$ y $\mathbf{C - A}$ no son múltiplos uno del otro; en estas condiciones, las dos últimas ecuaciones son independientes, y tienen como única solución $\mathbf{y_1 = x_1}$ e $\mathbf{y_2 = x_2}$.

Así hemos demostrado que $h(P) = P$, para todo P en el plano. Pero como habíamos definido $h(P) = T_{-A} \bullet f \bullet T_A (P)$, despejando obtenemos $f(P) = T_A \bullet h \bullet T_{-A}(P) = P$ para todo P punto del plano, concluyendo así la demostración de la **Proposición 1**.

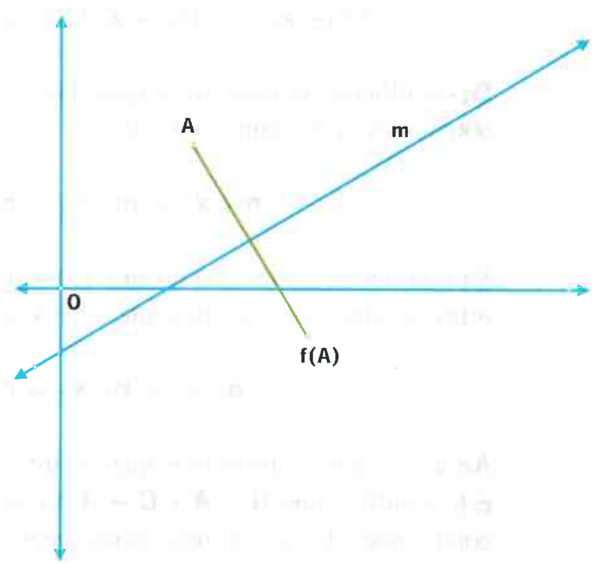
En la **Sesión 3** dejamos pendiente un análisis de las isometrías con respecto a su conjunto de puntos fijos. Ahora lo abordaremos.

Recordemos en primer lugar el resultado (probado en la **Sesión 3**) que clasifica la estructura del conjunto de puntos fijos.

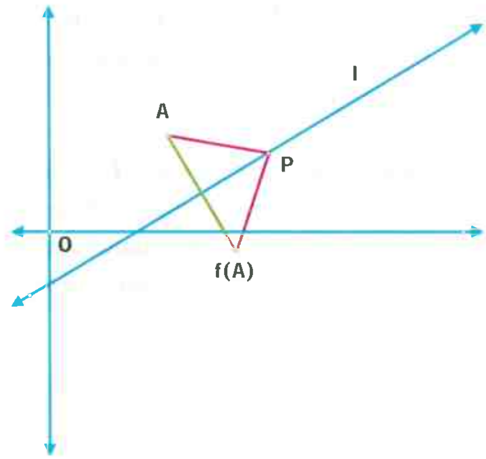
Proposición 2: Si **f** es una isometría del plano euclideano distinta de la identidad, entonces su conjunto de puntos fijos es vacío o consta de un punto o es una recta.

Analizaremos a continuación qué pasa en cada posibilidad: el **caso I** corresponde a una recta de puntos fijos, el **caso II** a un único punto fijo y el **caso III** a la ausencia de puntos fijos.

Supondremos que **f** no es la identidad, es decir que existe al menos un punto **A** del plano tal que **f(A)** es distinto de **A**; en todos los casos será relevante la recta **m** que es bisectriz del segmento que une a **A** y **f(A)** y la reflexión R_m con espejo **m**.

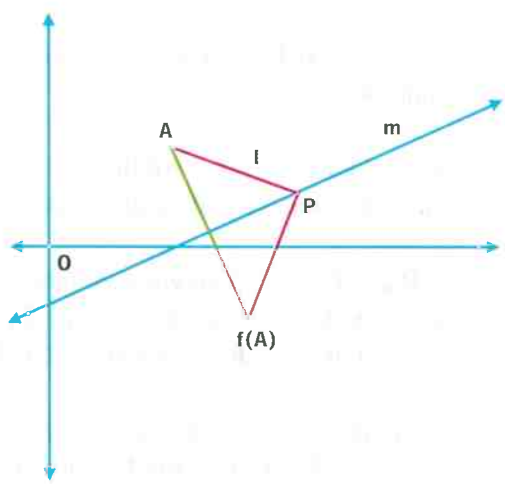


Caso I: Si $\mathbf{f}$ es una isometría con *una recta* $\mathbf{l}$ *de puntos fijos*, entonces, como la distancia de cualquier punto $\mathbf{P}$ de la recta $\mathbf{l}$ a $\mathbf{A}$ es igual a la distancia del mismo punto $\mathbf{P} = \mathbf{f(P)}$ a $\mathbf{f(A)}$ (pues $\mathbf{f}$ es isometría y fija a todos los puntos de la recta $\mathbf{l}$),



se tiene que $\mathbf{m} = \mathbf{l}$ (es decir, las rectas $\mathbf{m}$ y $\mathbf{l}$ coinciden). Además, la reflexión en esta recta y $\mathbf{f}$ son dos isometrías que producen el mismo efecto sobre tres puntos no colineales ($\mathbf{A}$ y dos puntos cualquiera de la misma recta $\mathbf{m}$); por el **Corolario 1**, $\mathbf{f}$ debe coincidir con la reflexión en la recta $\mathbf{m}$; es decir, $\mathbf{f} = \mathbf{R_m}$.

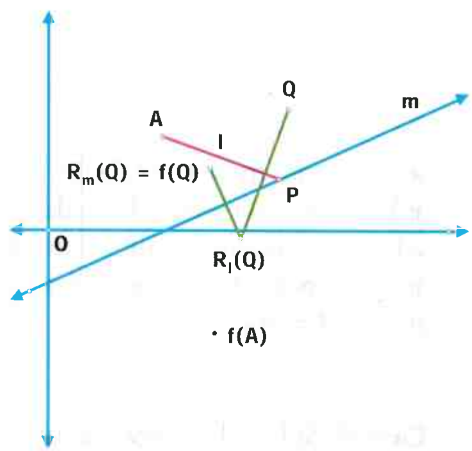
Caso II: Si $\mathbf{f}$ es una isometría con *un único punto fijo* $\mathbf{P}$.



Entonces $\mathbf{P}$ pertenece a $\mathbf{m}$, pues nuevamente, como $\mathbf{f}$ es isometría, se tiene que la distancia de $\mathbf{P}$ a $\mathbf{A}$ es igual a la distancia de $\mathbf{P} = \mathbf{f(P)}$ a $\mathbf{f(A)}$. Pero entonces la isometría dada por el producto de la reflexión $\mathbf{R_m}$ con espejo **m** y **f**, esto es $\mathbf{R_m \bullet f}$, fija a los puntos **P** y **A**. Pero entonces la isometría $\mathbf{R_m \bullet f}$ fija a todos los puntos de la recta **l** que contiene a **P** y a **A** (¿por qué?) y, por el caso anterior, debe ser la reflexión $\mathbf{R_l}$.

Despejando **f** de $\mathbf{R_m \bullet f = R_l}$, obtenemos $\mathbf{f = R_m \bullet R_l}$; es decir, **f** es el producto de dos reflexiones cuyos espejos **l** y **m** se intersectan en el único punto fijo de **f**.

Nótese que en este caso, **f** es una rotación con centro **P** y ángulo igual al doble del ángulo que forman los dos espejos (ver figura siguiente). Observamos que una cualquiera de las dos rectas **m** y **l** puede escogerse como cualquier recta pasando por el punto **P**; la otra queda entonces determinada.

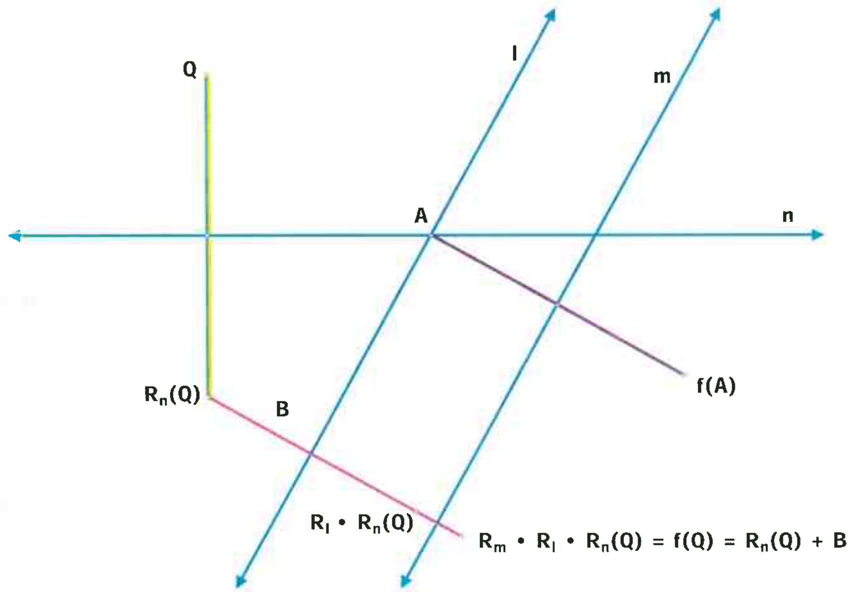


Caso III: Si **f** *no tiene puntos fijos*, entonces la isometría $\mathbf{R_m \bullet f}$ fija al punto **A**.

Aquí obtenemos dos posibilidades: o bien $\mathbf{R_m \bullet f}$ fija sólo al punto **A** o bien fija más puntos. Estudiaremos cada subcaso por separado.

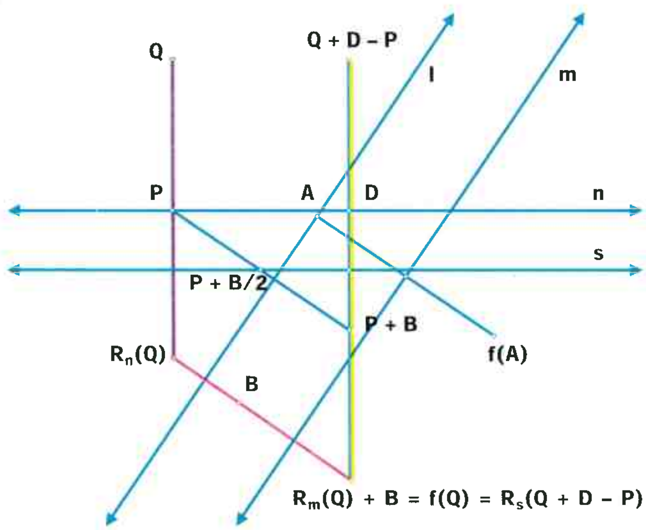
Si $\mathbf{R_m \bullet f}$ *no fija a ningún otro punto*, entonces, por el caso II, $\mathbf{R_m \bullet f}$ debe ser el producto de dos reflexiones $\mathbf{R_1}$ y $\mathbf{R_n}$ cuyos respectivos espejos **l** y **n** pasan ambos por **A**, y obtenemos $\mathbf{f = R_m \bullet R_1 \bullet R_n}$.

Como podemos escoger uno de los espejos **l** o **n** arbitrariamente mientras pase por **A**, escogemos **l** como paralela a **m**. Entonces la isometría producto $\mathbf{R_m \bullet R_1}$ es una traslación $\mathbf{T_B}$, en un vector **OB** perpendicular a **m** y **l**, de magnitud igual a dos veces la distancia entre **l** y **m**. Así obtenemos $\mathbf{f = T_B \bullet R_n}$.



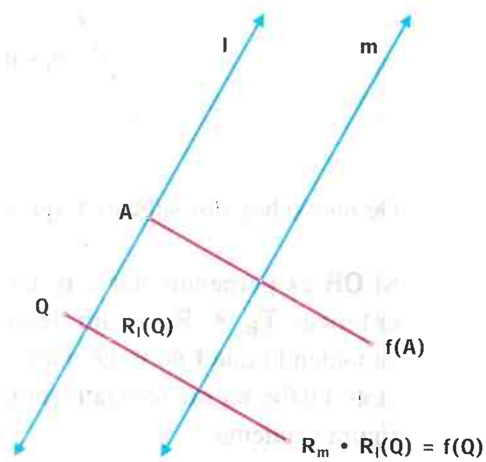
De nuevo hay dos subcasos: que el vector **OB** sea perpendicular a **n** o no.

Si **OB** es perpendicular a **n**, entonces $\mathbf{T_B} \bullet \mathbf{R_n}$ es una reflexión; si no, entonces $\mathbf{T_B} \bullet \mathbf{R_n}$ es un deslizamiento (pruebe esto). Como estamos suponiendo que **f** no tiene puntos fijos, no puede ser una reflexión y por lo tanto **f** debe ser un deslizamiento; de hecho se tiene $\mathbf{f} = \mathbf{R_S} \bullet \mathbf{T_{D-P}}$ (ver la figura siguiente).



Si $\mathbf{R_m} \bullet \mathbf{f}$ *fija a otro punto* distinto de **A**, entonces fija la recta por **A** y ese punto, y de acuerdo al resultado del **caso I**, $\mathbf{R_m} \bullet \mathbf{f}$ debe ser la identidad o una reflexión $\mathbf{R_1}$ con espejo **l**. No puede ser la identidad, pues entonces **f** sería igual a la reflexión $\mathbf{R_m}$ y tendría puntos fijos. Así, $\mathbf{f} = \mathbf{R_m} \bullet \mathbf{R_1}$.

Observemos que en este caso las rectas **l** y **m** deben ser paralelas, ya que si se intersectaran en algún punto, ese punto sería punto fijo de **f** (y estamos suponiendo que **f** no tiene puntos fijos). Como hemos visto, el producto de dos reflexiones en espejos paralelos es una traslación, y así concluimos que en este caso **f** es una traslación, en el vector perpendicular a los dos espejos y de magnitud el doble de la distancia entre ellos (ver la figura siguiente).



Bibliografía

Hay mucho material de referencia disponible en estos temas, ya sea impreso o virtual (a través de Internet); hemos tratado de seleccionar aquellos elementos que, además de ser claros en su exposición, contienen abundantes citas a otros para permitir una amplia búsqueda por parte de los interesados.

Lecturas relacionadas

1. Montesinos José, *Classical Tessellations and Three–manifold*, Universitext, Springer–Verlag, Berlin 1987.
2. Armstrong M.A., *Groups and Symmetry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, New York, 1988.
3. Weyl Hermann, *Symmetry*, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1989.
4. Holden Alan, *Shapes, Space and Symmetry*, Dover, New York, 1991.
5. Hilbert and Cohn–Vossen, *Geometry and the Imagination*, Chelsea Publishing Co., 1952.
6. M. van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, The Parabolic Press, Stanford, California, 1982.

Páginas electrónicas relacionadas

1. http://www.arch.usyd.edu.au/~wyatt_c/vitruv.html
2. http://hyperion.advanced.org/3044/
3. http://www.geom.umn.edu/
4. http://www.worldofescher.com/store/books.html#educator

Módulos Didácticos Publicado

Subsector: Lengua Castellana y Comunicación

- *Lenguaje y comunicación.*
  Oriana Martínez, Gloria Salazar.
- *Vicente Huidobro en la modernidad.*
  Ana Pizarro.
- *La poesía, como experiencia de lenguaje y libertad creadora.*
  Sergio Mansilla.
- *La ciudad, un espacio vivencial, estético y comunicacional.*
  Cristián Cisternas.
- *Noticias de prensa: de la lectura al análisis crítico.*
  Domingo Román.

Subsector: Idioma Extranjero

- *Helping learners to develop reading and listening skills in English.*
  Adriana Pineda.

Sector: Matemática

- *Reflexiones didácticas en torno a fracciones, razones y proporciones.*
  Leonora Díaz.
- *La Matemática en el aula: contexto y evaluación.*
  Fidel Oteíza, Patricio Moreno.
- *Imaginando congruencias.*
  Rubí Rodríguez, Víctor Cortés.

Sector: Historia y Ciencias Sociales

- *Historia local.*
  María Angélica Oliva.
- *La región: un enfoque desde el estudio de la Geografía.*
  Ana M. Errázuriz, Pilar Cereceda, Jorge Galaz.
- *La edad y sus implicancias legales: derechos y obligaciones.*
  Luis Bates, M. Paz Garáfulic.

Sector: Filosofía y Psicología

- *La Filosofía como experiencia intelectual.*
  Edison Otero Bello.

Sector: Ciencias Naturales

- *Crecimiento poblacional.*
  Patricio Cámus, Ramiro Bustamante.
- *La enseñanza de la Ecología en el entorno cotidiano.*
  Ricardo Rozzi, Peter Feinsinger, Roxana Riveros.
- *Estilos de vida y conducta alimentaria del adolescente.*
  Margarita Andrade, Isabel Zacarías.
- *Evolución Biológica: síntesis histórica y evidencias.*
  Viviane Jerez, Patricio Cámus.
- *Una ventana a la actualidad científica y tecnológica, en el área de la Física.*
  Luis Braga.
- *El concepto de energía.*
  Héctor Muñoz.
- *Recursos naturales en Chile: una visión desde la Química.*
  Juan Carlos Vega de Kuyper, Rafael Gana Ostornol.

Sector: Educación Artística

- *La realidad: un haz de posibilidades.*
  Luz María Villarroel.
- *Seis formas de ver...*
  Virginia Errázuriz, Paula Carvajal.

Sector: Educación Física

- *Educación Física, un camino de recreación hacia el encuentro.*
  Gladys Jiménez, Lylian González.
- *Estilos de vida y conducta alimentaria del adolescente.*
  Margarita Andrade, Isabel Zacarías.

Módulo Transversal

- *Los jóvenes y el liceo.*
  Omar Jara, Luz María Pérez.