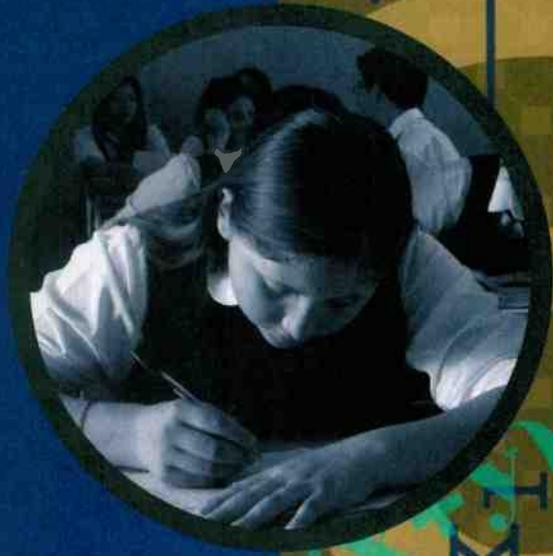


Nivelación Restitutiva

Álgebra

Grupo Nivel
2

2006



$$\begin{aligned}
 (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
 (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
 a^2-b^2 &= (a+b)(a-b) \\
 a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+b^2+ab) \\
 a^2+b^2 &= (a+b)(a^2+b^2-ab) \\
 a^3-b^3 &= (a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2) \\
 (a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc
 \end{aligned}$$

1
MEDIO

Matemática

Nivelación Restitutiva

Grupo
Nivel 2

2006

Matemática
Álgebra
1º Medio





Material elaborado por:
Facultad de Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile
Equipo Desarrollo Pedagógico - Programa Liceo Para Todos



Iniciándonos en el lenguaje algebraico

¿Sabías qué? El álgebra, es la rama de la Matemática en la que se usan **letras** para **representar diferentes relaciones aritméticas**. La historia del álgebra comenzó en el antiguo Egipto y Babilonia.

En la vida cotidiana realizamos una serie de operaciones matemáticas con la finalidad de resolver diferentes problemas. Por ejemplo: para calcular el valor de la compra de cierta cantidad de litros de leche es necesario saber el precio de un litro. Completa en la tabla el precio a pagar por la compra de: 4, 5 y 6 litros.



Litros de leche	Precio \$ 394 el litro
1	394
2	788
3	1.182
...	...

La variación proporcional que observas en la tabla permite concluir que el precio de seis litros se obtiene calculando: $394 \cdot 6$

¿Qué representa el número 394 en la expresión $394 \cdot 6$? R:

¿Y el 6? R:

¿Cuánto pagarías por la compra de: uno, dos, tres o más litros de leche a un precio **n** el litro? Ciertamente que **n** es un valor desconocido pero eso no impide saber el procedimiento que permitiría encontrar la respuesta.

Completa la siguiente tabla de acuerdo al trabajo anterior.

Litros de leche	Precio \$ n el litro
1	n
2	2n
3	...
...	...

En la expresión $6n$ ¿qué significa el 6? ¿y qué significa n? R:

Según la tabla anterior ¿la letra **n** tiene un valor **fijo** o **variable**? ¿Por qué? R:

Toma nota... En cursos anteriores aprendiste a calcular el valor de una expresión determinada, ahora estudiarás y escribirás diferentes expresiones al traducir palabras en símbolos matemáticos.

Como puedes ver en el problema anterior n representa cierto precio. Según esto, escribe en la tabla el precio a pagar por la compra de 10 litros según los posibles valores de n

Posibles precios n del litro	Precio a pagar por la compra de 10 litros.
$n = 395$	
$n = 399$	
$n = 412$	
$n = 429$	

Supón ahora que x representa el valor del precio a pagar por un producto alimenticio. Escribe en la tabla los casos en que el cliente paga el: doble, el triple, el cuádruplo, el quintuplo y el séxtuplo del precio inicial.

Precio a pagar.	Paga el:
$5x$ del precio inicial
$2x$ del precio inicial
$3x$ del precio inicial
$4x$ del precio inicial
$6x$ del precio inicial

El mismo producto fue cotizado en varios almacenes a un precio x diferente. Calcula, en cada caso, el valor a pagar por la compra:

Valores de x	Compra	Precio a pagar
$x = \$119$	$5x$	
$x = \$121$	$5x$	
$x = \$109$	$5x$	
$x = \$135$	$5x$	

Recuerda que....

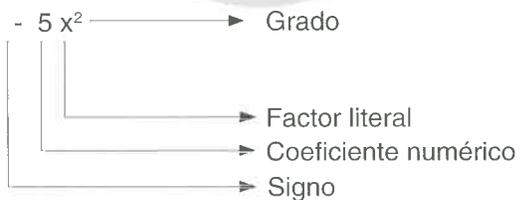
$$2x = 2 \cdot x$$

$$ab = a \cdot b$$

$$\frac{ab}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$$

Toma nota... Un término algebraico es el producto de una o más variables con una constante literal o numérica, ejemplo: $2x$, ab , $\frac{ab}{4}$, etc. En todo término algebraico se reconoce un: **coeficiente numérico (número)**, **factor literal (letra)** y **grado** que corresponde a la suma de los exponentes de su factor literal.

Partes de un término algebraico



Un factor literal puede estar compuesto por uno o más símbolos literales (letras).

El signo positivo al inicio de un término algebraico no se escribe.

Escribe un término algebraico que represente los siguientes enunciados. Por ejemplo:

El doble de un número “m” es: $2m$

Entonces,

El precio de 10 jugos que cuestan “k” pesos es:

La mitad de un número “y” es:

El triple de un sueldo “n” es:

El doble del producto de un número “a” y “b” es:

De acuerdo a la composición de un término algebraico, completa la siguiente tabla

Término algebraico	Signo	Coeficiente numérico	Factor literal
$2p$	+	2	p
$\frac{-3}{5} y$			
	+	3	$x^2 y$
	-	$\frac{1}{2}$	xy
$4b^3$			

Para resolver problemas de la vida diaria probablemente tendrás que traducir palabras o enunciados en expresiones algebraicas. De gran ayuda será conocer algunas palabras o enunciados que sugieren operaciones matemáticas conocidas. Observa la siguiente tabla y sus ejemplos:

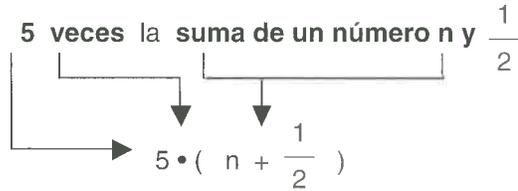
Operatoria	En un problema se puede plantear como	Ejemplo
Suma	Más que	"Cierta número aumentado en 10" $n + 10$
	Suma	
	Aumentado en	
	Ganancia de	
Resta	Menos	"500 menos un número c" $500 - c$
	Disminuido en	
	Diferencia	
	Menos que	
Multiplicación	Veces	"El doble de la suma de x y 5" $2(x + 5)$
	Producto	
	Duplicar, triplicar,....	
	Por	
División	Dividido entre	"La mitad de cierto número" $x : 2 \quad \text{ó} \quad \frac{x}{2}$
	Cociente	
	Mitad de	
	Un tercio, un cuarto,	

Ahora trabaja tú. Escribe una expresión algebraica para cada uno de los siguientes enunciados:

Ejemplo	Expresión algebraica
"Un tercio de cierto número"	$x : 3 \quad \text{ó} \quad x/3$
"Cuatro veces cierto número"	
"El triple de la diferencia de m y n"	
"Un número p aumentado en 1"	
"Un número p disminuido en 1"	
"El producto entre un número z y la diferencia de w y v"	
"2.000.000 más una cierta cantidad de UF"	
"Cierta precio t menos el 10% de t"	
"Cierta precio s aumentado el 5% de s"	
"El 25% de cierto número m"	
"12 veces el precio x de un CD"	

Toma nota... Una expresión algebraica es el resultado de combinar, mediante la adición, uno o más términos algebraicos, por ejemplo: $n + 5$, $2n - 1$ y $2(x + y)$ En estos ejemplos las variables son: n , x e y

El trabajo anterior permitió ejercitar la traducción de un enunciado verbal a una expresión algebraica, por ejemplo:



Para explicar sus inventos, los inventores por lo general emplean símbolos matemáticos en reemplazo de enunciados.

¿Qué te parece que ahora realices el proceso inverso?

Escribe un enunciado para cada una de las siguientes expresiones algebraicas.

Expresión algebraica	Enunciado
$3x + 5$	"El triple de cierto número aumentado en 5"
$12 - h$	
$n + 1$	
$n - 1$	
$a \cdot b$	
$\frac{m}{4 - 1}$	
$10(5 - p)$	
$3a + 4b$	
$a^2 - 100$	

Problema de aplicación

En un supermercado la bandeja de 30 huevos se vende a \$ 1.550. Escribe una expresión que describa:

El dinero reunido al vender n bandejas. R:

El dinero reunido por la venta de n bandejas menos el costo de 5 bandejas, devueltas por estar en mal estado.

R:



Trabaja con lo aprendido

Lee atentamente las siguientes situaciones y resuelve.

1. En carretera un camión alcanza una rapidez constante de $90 \frac{Km}{hr}$. Escribe una expresión algebraica que describa:



La distancia recorrida en x horas.

R:

2. En el año 1913 los estadounidenses emplearon cadenas de montaje en la industria del automóvil. En 1 hora salían 360 vehículos desde ellas. Escribe una expresión que describa:



- a) El número de vehículos que salían en n horas.

R:

- b) El número de vehículos en buen estado producidos en n horas si 15 de ellos se desechan por salir con defectos.

R:

3. En una experiencia de cultivo de árboles nativos, se plantó una araucaria de 10 cm. y creció en promedio 8 cm. por año. Escribe una expresión algebraica para calcular su altura al cabo de p años.

R:

4. Una casa se pone a la venta en q pesos. Al cabo de unos meses su valor tiene una rebaja del 5% del precio inicial. Escribe una expresión que describa el precio final.

R:

5. El precio de cierto tipo de CD es m . Por la compra de 10 unidades hay un cupón de descuento de \$ 500. Escribe una expresión que describa el precio a pagar por la compra de 10 CD



R:

Algunos números especiales en lenguaje algebraico

Otra situación que ocurre frecuentemente hoy en día es el siguiente:

En diferentes recintos o lugares que atienden público se ponen dispensadores para sacar un número que indica el orden en que uno será atendido.



En la fotografía se observa a Javier, quien saca **cierto número** del dispensador. Según esto, escribe una expresión que describa:

El número que retiran respectivamente: Pedro, María, Carlos y Luis que vienen a continuación de Javier. Para resolver este problema lo primero será considerar como **x** el número retirado por Javier, ahora continúa tú:

Personas	Expresión algebraica
Javier	x
Pedro	
María	
Carlos	
Luis	

¿Sabías qué?

La suma de tres números enteros consecutivos cualesquiera, uno a continuación del otro, forman siempre un número divisible por tres. Ej.:

¿Qué expresión describe los números que les correspondieron a cuatro personas diferentes atendidas antes que Javier? Designemos a estas personas como: P_1 , P_2 , P_3 y P_4

P_1	
P_2	
P_3	
P_4	
Javier	X

Supongamos que Javier sacó el número 63. Entonces, $x = 63$ ¿qué número retiraron respectivamente las personas atendidas antes y después de él? Completa la tabla:

P_4	P_3	P_2	P_1	Javier	Pedro	María	Carlos	Luis
				X				
				63				

Recuerda que... El antecesor y sucesor de un número **n** se puede expresar como: $n - 1$ y $n + 1$ respectivamente.

¡Te desafío a resolver! Un ingeniero en alimentación gana el doble del sueldo que recibía en su último trabajo un año atrás. Si su remuneración hace 1 año era p ¿qué expresión algebraica permitiría saber su actual sueldo? Explica tu respuesta.

La tarea anterior nos permite de algún modo establecer una relación de antecesor y sucesor, por ejemplo ¿qué significa la secuencia $x - 1$; x ; $x + 1$? Analicemos esto según el problema de la página anterior, donde Javier sacaba un número del dispensador. Veámoslo a partir del siguiente análisis:

$x - 1$	x	$x + 1$
↓	↓	↓
$63 - 1$	63	$63 + 1$
62	63	64

¿Sabías qué?

La letra que más utilizan los matemáticos para representar una variable es la x , pero también se puede emplear cualquier otra.

¡Fácil! ¿Verdad?, expresamos de forma algebraica la relación antecesor y sucesor de un número.

Trabaja con lo aprendido

Para la pregunta 4 de esta secuencia de trabajo utilizaremos el calendario que se presenta.

Febrero 2006						
L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

- Un día lunes n la señora Sara y su familia deciden salir por 5 días al campo. La partida la harán el mismo día, pero de la semana siguiente. Escribe una expresión algebraica que describa cada uno de los días que estarán de paseo.

R:

- Un grupo de amigos estuvo cuatro días en la playa. Regresaron de su viaje el día martes m . Escribe la expresión algebraica que describa los días de estadía en la playa.

R:

- Para un día x cualquiera del mes ¿qué representan las expresiones $x - 8$ y $x + 8$?

- Observa el calendario. Si llamamos p al primer martes del mes, responde:
 - ¿Qué representan las expresiones: p , $p + 7$, $p + 14$ y $p + 21$?

b) ¿Sería también **correcto**, escribir los días presentados en el problema anterior como: $2p$, $3p$ y $4p$? ¿Por qué?

c) Descubre con ayuda de tu profesor una expresión algebraica que permita describir los múltiplos de un número k natural cualquiera.

De similar manera podemos expresar otros tipos de números estudiados en cursos anteriores. Trabajemos los siguientes casos:

Observa la tabla y según los números asignados calcula el producto para la 2º y 3º columna.

Número	$2 \cdot \dots$	$2 \cdot \dots + 1$
0	$2 \cdot 0 = 0$	$2 \cdot 0 + 1 = 1$
1		
2		
3		
4		
5		
...		
n		

¿Qué tienen en común los números obtenidos en la 2º columna?

R:

¿Qué tienen en común los números obtenidos en la 3º columna?

R:

Según el trabajo anterior: escribe la expresión algebraica que representa al tipo de números obtenidos en la 2º y 3º columna ¿Cómo lo puedes probar experimentalmente?

R:

Ahora, se tú quien asigne valores positivos a n y luego completa la tabla.

n	$2n$	$2n + 2$

¿Qué observas de especial entre los números obtenidos en la 2º y 3º columna?

R:

¿Qué conjetura puedes formular respecto de la respuesta anterior?

R:

¡Te desafío a resolver! ¿Son iguales las expresiones $m + 10$ y $10 + m$? ¿ $s - 5$ y $5 - s$?

Explica tu respuesta.

Como pudiste observar la expresión $2n + 2$ permitió encontrar los números pares consecutivos a $2n$, si aún no estás convencido, prueba experimentalmente asignando otros valores a n

Si $2n$ representa un número par y con $2n + 2$ obtienes el par siguiente:

¿Qué representa la secuencia algebraica $2n; 2n + 2; 2n + 4; 2n + 6; 2n + 8; 2n + 10$ para $n=15$?

¿Cuál es el patrón de graduación de esta secuencia? ¿Cómo lo supiste?

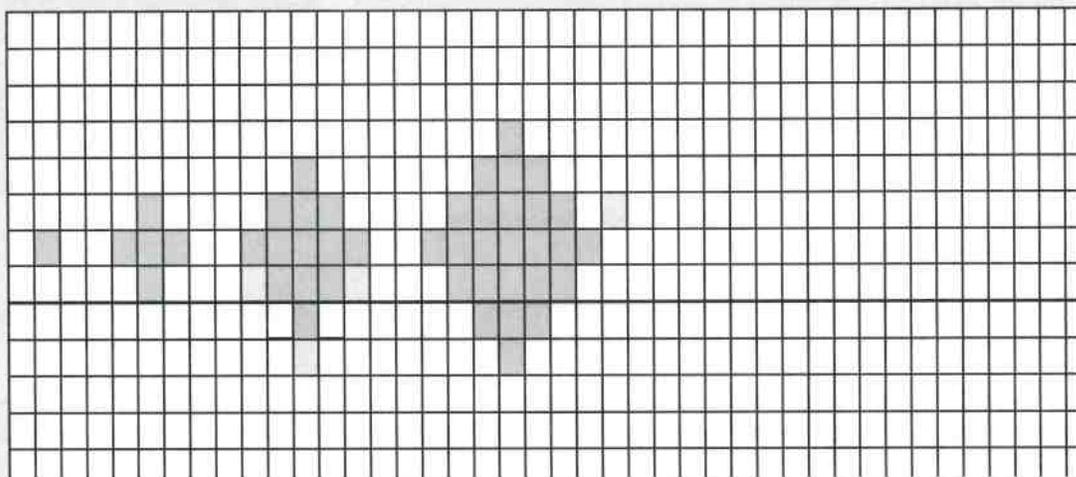
Si $2n + 1$ representa un número impar:

¿Qué representa la secuencia algebraica $2n + 1; 2n + 3; 2n + 5; 2n + 7; 2n + 9$ para $n = 15$?

¿Cuál es el patrón de graduación de esta secuencia? ¿Por qué?

¡Te desafío a resolver!

Observa la siguiente secuencia de figuras en el tablero:



Según el patrón ¿cuántos cuadraditos tienen: la quinta, octava y décima figura?

La expresión que permite calcular la cantidad de cuadraditos para **n** figuras es:
 $F_n = n^2 + (n - 1)^2$, con ayuda de tu profesor estudia su significado y calcula F_{20} y F_{40}

Toma nota... Una forma de confirmar la validez de las expresiones algebraicas es sustituyendo la variable por valores numéricos.

Variables y fórmulas

El trabajo realizado permite ir comprendiendo que el concepto de "número" en Álgebra es bastante más amplio o generalizado. La Aritmética trata con números específicos o expresiones numéricas, a diferencia del Álgebra, que trata con números no especificados (**incógnitas o variables**) representados por letras: **x, n, p, q, m** o expresiones algebraicas: **$2x + 1$** y **$p^2 - 5$**



A continuación estudiaremos algunos casos donde las **variables** serán parte de una fórmula.

Una de las carreras automovilísticas más famosas son las 500 millas de Indianápolis. Los competidores corren a velocidades promedio sorprendentes en comparación a lo habitual.

Si la fórmula para calcular el total de kilómetros (T) del circuito completo es $T = n \cdot l$ Encuentra el total de kilómetros si los autos dan 200 vueltas (n) donde una vuelta equivale a 4 kilómetros (l)

R:

En la fórmula $T = n \cdot l$ los valores para n y l ¿son fijos o variables? ¿Por qué?

R:

La fórmula para calcular la velocidad promedio es $V = \frac{d}{t}$ cuando se conoce la distancia recorrida (d) y el tiempo empleado (t). Calcula la velocidad promedio de tres automóviles A₁, A₂ y A₃ que tardaron respectivamente: 2,20; 2,50 y 2,15 horas en hacer el circuito completo en Indianápolis. ¿Qué auto obtuvo el mejor rendimiento?

En la fórmula $V = \frac{d}{t}$ los valores para d y t ¿son fijos o variables? ¿Por qué?

R:

¿Sabías qué?

En las carreras de perros galgos, por momentos, éstos alcanzan una velocidad promedio de hasta 64 Km./h.



Problema de aplicación:

El año 2006 se realizará en Alemania el Campeonato Mundial de Fútbol. El evento congregará selecciones de países de los cinco continentes. Su escenario principal será la cancha de fútbol, sin duda que en ella los jugadores se prodigarán al máximo en busca del triunfo.



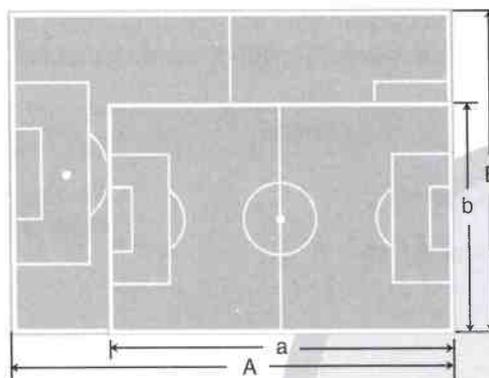
¿Sabes las medidas oficiales de un campo de fútbol profesional?

Las canchas pueden experimentar variaciones en sus dimensiones. De acuerdo a esta afirmación te proponemos trabajar lo siguiente:

Las fórmulas $p = 2a + 2b$ y $S = ab$ se pueden utilizar respectivamente para encontrar el **perímetro** y **área** de una cancha de fútbol ¿lo recuerdas?

El dibujo muestra las probables dimensiones de dos canchas de fútbol.

Recuerda que... $2a + 2b = 2(a + b)$, por la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.



1. ¿Qué expresión algebraica describe cuánto más, mide el largo de la cancha mayor que la menor?

R:

2. ¿Qué expresión algebraica describe cuánto más, mide el ancho de la cancha mayor que la menor?

R:

3. Escribe la expresión algebraica que permite saber cuánto más mide el área de la cancha mayor que la menor.

R:

De acuerdo a las expresiones algebraicas formuladas anteriormente y a las probables medidas del largo y ancho de una cancha de fútbol, valoriza cada una de las expresiones de las preguntas anteriores (1, 2 y 3) sabiendo que:

$$A = 119 \text{ m} \quad B = 91 \text{ m} \quad \text{y} \quad a = 91 \text{ m} \quad b = 46 \text{ m}$$

Con la ayuda de tu profesor consulta textos de matemática de años anteriores y haz una selección de fórmulas utilizadas frecuentemente (perímetro, área, volumen, entre otras). Pide ayuda a tu profesor para hacer la selección, considera también las que utilizarás este año en tus estudios.

Hecha la selección, escribe en la tabla y comenta brevemente la utilidad de cada una identificando las letras que intervienen como variables.

Fórmula	Utilidad	VARIABLES
Ejemplo: Área = $L \cdot A$	Permite calcular el área del un cuadrado o rectángulo	L = Largo A = Ancho

Trabajando con secuencias numéricas

Iniciaremos el estudio de las secuencias numéricas trabajando en primer lugar la identificación de patrones numéricos.

Revisemos el siguiente caso:

La siguiente tabla describe el crecimiento de un hongo observado durante un experimento de ciencias.

Día	1	2	3	4	5	6
Masa (g)	2	5	11	23	47	95

El aumento de masa del hongo da muestra de su crecimiento. Este aumento es progresivo y obedece a un patrón ¿cuál es? ¿Logras deducirlo? El siguiente razonamiento te permitirá comprender la situación:

Analizaremos los valores de la tabla inicial incorporando una fila donde se muestra el aumento en gramos de un día a otro.

Día	1	2	3	4	5	6
Aumenta en		3 g	6 g	12 g	24 g	48 g
Masa (g)	2	5	11	23	47	95

Si observas bien cada día aumenta el doble de gramos del día anterior, por ejemplo al segundo día la masa aumento 3 g, el tercer día aumento 6 g, el cuarto 12 g y así sucesivamente ¿Hemos encontrado un patrón? ¿Cuál es? Efectivamente el patrón es sumar el doble del número sumado anteriormente. Según esto responde:

¿A los cuántos días el hongo pesará $\frac{1}{2}$ kilogramo?

R:

¿Cómo lo supiste? Explica.

R:

Otro procedimiento para encontrar un patrón es el siguiente:

Observa la tabla, ahora se ha incorporado una cuarta fila.

Día	1	2	3	4	5	6
Aumenta en		+3 g	+6 g	+12 g	+24 g	+48 g
Masa (g)	2	5	11	23	47	95
		$2 \cdot 2 + 1$	$5 \cdot 2 + 1$	$11 \cdot 2 + 1$	$23 \cdot 2 + 1$	$47 \cdot 2 + 1$

Comenta con tu profesor el patrón descrito en la última fila y discútelo en clase. ¿En qué se diferencia con el patrón descrito anteriormente (segunda fila)? ¿Son ambos válidos? ¿Por qué?

Estudiemos otros casos. En la carretera es frecuente ver los íconos que muestra la fotografía. Según esta información y la secuencia observada en el ejemplo:

Km	16
m	400

Km	16
m	300

Km	16
m	200

Km	16
m	100

Km	16
m	0



Responde:

¿La secuencia es ascendente o descendente?

R:

¿Cuál es su regla o patrón numérico?

R:

¿Qué señalética vendrá a continuación de la que ves en la fotografía? ¿Por qué?

R:

Volvamos al ejemplo anterior para ver forma de expresar la secuencia: 400, 300, 200, 100 y 0 mediante **un término general**. Si observamos bien una característica en común entre los números es que son divisibles por 5, por lo tanto, multiplicando 5 por ciertos valores a los cuales llamaremos **x** y luego restando la constante 100 al producto, nos permite obtener una expresión algebraica para esta secuencia, es decir:

$5x - 100$ para x natural múltiplo de 20 o igual que 100, es decir $x = 20, 40, 60, 80$ ó 100.

Valoriza la expresión obtenida completando la tabla:

Valor para x	$5x - 100$	Número obtenido

¿La expresión $5x - 100$ satisface la secuencia dada? ¿Por qué? R:

¿Habrá otra expresión algebraica que generalice esta secuencia de números dados? Comparte tus hallazgos.

R:

Trabaja con lo aprendido

1. El término general de una sucesión numérica es $5x + 10$ con x número natural ≤ 6 , es decir, para $x = 1, 2, 3, 4, 5$ ó 6 . Escribe la secuencia correspondiente valorando esta expresión según los valores asignados para la variable x .

R:

¿La secuencia es ascendente o descendente? ¿cuál es el mayor número? ¿cuál es el menor?

R:

¿Cuál es su regla o patrón de formación?

R:

2. ¿Qué secuencia representa $1 - 8x$ con $x = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \dots, 1$?

¿Cuál es el mayor número? ¿cuál es el menor?

R:

3. ¿Qué secuencia representa $2x \cdot 10^x$ para $x = -2, -1, \dots, 2$

Recuerda que...

$$a^1 = \frac{1}{a} \text{ por lo tanto:}$$

$$a^n = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a}$$

4. Dada la secuencia: 11, 21, 31, 41, 51, 28. Encuentra la forma de expresar esta secuencia por medio de un término general.

Toma nota... Llamamos secuencia numérica al conjunto de números que tienen un orden determinado y con una característica en común. Por lo general una expresión algebraica representa el término general que le corresponde a la secuencia. Entonces, **¿En qué debemos fijarnos para expresar una secuencia numérica como una sucesión?**

Descubriendo y generalizando regularidades

El trabajo desarrollado con las secuencias numéricas, de una forma u otra, ayudará también a resolver los siguientes problemas de carácter más lúdico, donde la búsqueda y generalización de regularidades se hará a partir de diferentes sucesiones de figuras.

Revisemos el siguiente ejemplo:

Escribir una expresión algebraica que describa la regla para los números de la secuencia 11, 12, 13, 14, 15, 16,...

Término k	1	2	3	4	5	k
	↓ +10	↓ +10	↓ +10	↓ +10	↓ +10		↓ +10
Nº de secuencia	11	12	13	14	15

La tabla describe una regla o patrón de formación de esta progresión. El patrón es sumar 10 al término numérico k. Por lo tanto, si queremos generalizar esta progresión para un término k cualquiera, esta se puede expresar como:

$$k + 10$$

Analizamos un segundo caso:

En ciertas especies tropicales de termitas la reina alcanza un tamaño enorme. Su abdomen aumenta a tal punto, por efecto de los huevos que contiene, la deja incapacitada para moverse. La siguiente tabla muestra la prodigiosa y sorprendente producción de huevos que pueden alcanzar algunas especies.



Días	1	2	3	4	5	6	7	8
Total	30.000	60.000	90.000	120.000

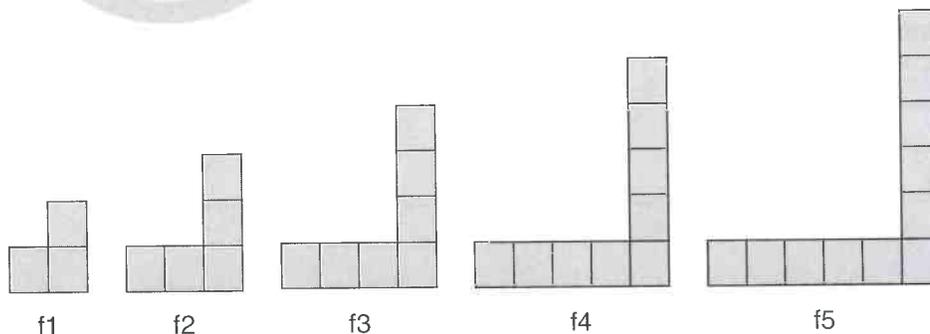
Mediante la tabla es fácil determinar una regla o patrón respecto de la producción de huevos. Existe un número patrón que es 30.000 y equivale a la producción diaria, por lo tanto, si generalizamos la producción de huevos para n días, tenemos:

$$30.000 n \quad \text{ó} \quad 3n \cdot 10.000$$

En este caso, n es la variable que representa el número de días por los cuales deberá multiplicarse la constante 3 y 10.000 respectivamente. Por ejemplo, para saber cuántos huevos puede depositar la termita reina en un año, vasta con valorar la expresión:

$$3n \cdot 10.000 = 3 \cdot 365 \cdot 10.000 = 10.957.500$$

Observa la siguiente secuencia de figuras y aplica lo aprendido.



Completa la tabla que muestra la relación entre figura y cantidad de cuadrados.

Figura	1	2	3	4	5	6	7	8	...	n
Cantidad de cuadrados	3	5	7							

¿Qué observas de especial en la secuencia de números obtenidos en la segunda fila?

R:

¿Cuál es una posible regla que describe esta secuencia? ¿Por qué?

R:

Según la generalización obtenida, calcula la cantidad de cuadrados que tendrán las figuras 20, 40 y 100

Toma nota... Efectivamente, una regla o patrón es: agregar 1 al doble del número de la figura. Si observas bien, cada figura que viene a continuación aumenta en dos cuadrados. Ahora, al generalizar el enunciado anterior, tenemos: $2n + 1$ ¡Fácil verdad!

Observa la siguiente situación:

La siguiente sucesión de figuras esta construida con palitos de igual longitud y bolitas de plasticina.

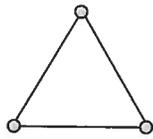


figura 1

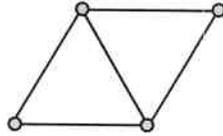


figura 2

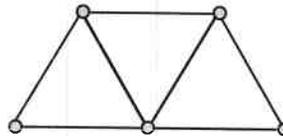
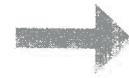


figura 3



Completa la tabla según número de palitos y bolitas utilizados para cada figura.

Nº de Triángulos	1	2	3	4	5					
Nº de vértices										
Nº de Palitos										
Nº de bolitas										

¿Cuántos palitos se necesitan para la décima figura y para la vigésima?

R:

¿Cómo lo supiste? Explica tu razonamiento.

R:

¿Cuántas bolitas de plasticina se necesitan para la décima figura y para la vigésima?

R:

¿Cómo lo supiste nuevamente? Explica tu razonamiento.

R:

El hallazgo de las regularidades del trabajo anterior permite formular una expresión que generalice la cantidad de palitos y también de bolitas de plastilina necesarias para la construcción de figuras con n triángulos.

Pide ayuda a tu profesor y encuentra una expresión algebraica que generalice la cantidad de palitos a utilizar en una figura formada por n triángulos.

R:

De similar forma que la tarea anterior, encuentra ahora, una expresión algebraica que generalice la cantidad de bolitas de plastilina a utilizar en una figura formada por n triángulos.

R:

¿Cómo puedes comprobar experimentalmente las expresiones algebraicas formuladas anteriormente? Explica en tu cuaderno mediante ejemplos.

Observa ahora, la siguiente secuencia de figuras:

Nuevamente, cada una de ellas esta construida con palitos y bolitas de plastilina.

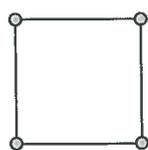


Figura 1

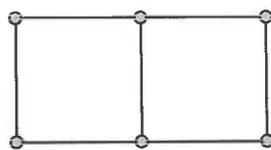


Figura 2

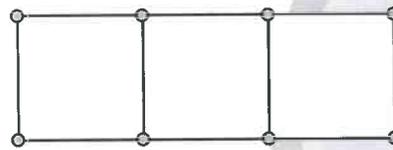


Figura 3

Completa la tabla según número de palitos y bolitas utilizados para cada figura.

Nº de Cuadrados	1	2	3	4	5					
Nº de Palitos										
Nº de bolitas										

Encuentra una **expresión algebraica** que generalice la cantidad de palitos y bolitas a utilizar en una figura formada por n cuadrados.

¿Cuánto has aprendido de lenguaje algebraico?

1. Completa la siguiente tabla escribiendo la expresión algebraica correspondiente.

Operatoria	Lenguaje cotidiano	Expresión algebraica
Suma	"he ganado \$10 más de lo que tenía"	
Resta	"la diferencia de edad es de 10 años menos con mi hermano menor"	
Multiplicación	"las diferencias de precios pueden llegar a ser el triple entre una tienda comercial y otra"	

2. Identifica en cada expresión algebraica el coeficiente numérico (número), el factor literal (letra) y grado que corresponde al factor literal.

Expresión algebraica	Coeficiente numérico	Factor literal	Grado del factor literal
$2n$			
		A	2
	2	x^4y	
$2m^5 + 3^2$			

3. Completa la siguiente tabla indicando la fórmula que permite calcular el perímetro y el área de cada figura geométrica. Además argumenta tu respuesta en el espacio que está debajo de la tabla.

Figura geométrica	Perímetro	Área
Cuadrado		
Rectángulo		
Diferencia entre cada expresión algebraica		

Tu argumentación:

4. Escribe una expresión algebraica para cada uno de los siguientes enunciados:

Enunciados	Expresión algebraica
“Un medio de cierta cantidad más tres”...	
“Siete veces un número más dos”.....	
“Cuatro veces la diferencia de W y Z”...	
“Un número p dividido en dos ”...	

5. Escribe un enunciado para cada una de las siguientes expresiones algebraicas.

Expresión algebraica	Enunciado
$7x - 2$	
$10 - 12h$	
$3(n + 7)$	
$\frac{(n - 1)}{5}$	

6. Si $2n$ representa un número par y $2n + 1$ representa un número impar ¿Qué representa la secuencia algebraica:

$2n + (2n + 1)$; $(2n + 2) + (2n + 3)$; $(2n + 4) + (2n + 5)$; $(2n + 6) + (2n + 7)$; $(2n + 8) + (2n + 9)$; $(2n + 10) + (2n + 11)$, para $n = 3$? Argumenta tu respuesta.

7. ¿Qué sucesión representa $1 - x$ con $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \dots$?

¡Matemática y juego!

¿Qué número pensaste?

Otro espacio de entretenimiento, en esta oportunidad tendrás que hacer cálculo mental o escrito y desafiar a tus compañeros. Esperamos que hagas matemática con gusto y demuestres tu pericia ¡Ánimo!

Material

Papel y lápiz.

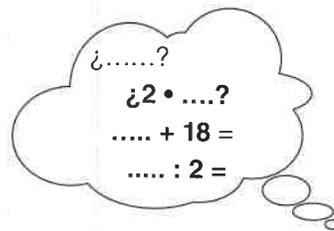
Jugadores

Dos o cuatro jugadores

Instrucciones

1º Pide a un compañero que piense un número y que a continuación realice los siguientes pasos:

- Calcula el doble del número pensado.
- Suma 18 al número obtenido.
- Calcula la mitad de la suma anterior.
- Ahora, dime el número que obtuviste.



Una vez que el compañero haya señalado el número final tú restas 9 a ese valor y el resultado será el número pensado ¡fácil verdad!

2º ¿Por qué es posible adivinar el número pensado aplicando estos pasos? Una vez que hayas desafiado a varios de tus compañeros preocúpate de encontrar con ellos la explicación que permite justificar y comprender lo ocurrido.



¿Quieres una pista que ayude a encontrar la explicación?
Usa el lenguaje algebraico
¡Inténtalo!



Generalización de Operaciones
Aritméticas, Operatoria Algebraica,
Conjeturas y Ecuaciones de Primer Grado



Generalización de Operaciones Aritméticas

¿Sabías que un CD regular está hecho de policarbonato plástico y metal? El plástico es comprimido en un molde con una capa de aluminio, para luego ser pulverizado y al final se le aplicará un barniz como la capa final.



¿Cuántos MB más de capacidad posee un “CD nmax” que un “CD axell”?

¿Cuántos MB más de capacidad posee un DVD (4700 MB) que un “CD nmax” y un “CD axell”?

Resuelve el siguiente problema: ¿Francisco podrá traspasar la información de su DVD de 4.700 MB de capacidad a varios “CD nmax” y a varios “CD axell”? ¿Cuántos CD max y CD axell necesita para traspasar la información? Argumenta tu respuesta.

Completa la siguiente tabla que muestra una forma de grabar la información del DVD en un CD "axell" más cuatro CD "nmax".

Si grabo primero parte de la información en 4 CD "nmax", ¿Cuánta información se graba en los CD "nmax" utilizados?	Si grabo primero parte de la información en 1 CD "axell" ¿Cuánta información se graba en los CD utilizados?
Si luego grabo el resto de la información en los CD "axell", ¿Cuánta información se graba en los CD "axell" utilizados?	Si luego grabo el resto de la información en los CD "nmax", ¿Cuánta información se graba en los CD "nmax" utilizados?
Calcula la adición del total de la información grabada	Calcula la adición del total de la información grabada
¿Qué conclusión respecto de la adición y la multiplicación puedes obtener de lo anterior? ¿Es conmutativa la adición y la multiplicación? Argumenta tu respuesta.	

Entonces si queremos hablar de los casos posibles para grabar la información del DVD en los "CD axell" más los "CD nmax", debemos realizar los pasos siguientes:

- Sea **IDVD**: Cantidad de información almacenada en el DVD
- Sea **ICD_n**: Cantidad de información almacenada en el CD nmax.
- Sea **ICD_p**: Cantidad de información almacenada en el CD axell.
- Sea **NCD_n**: Cantidad de CD nmax ocupados para grabar información.
- Sea **NCD_p**: Cantidad de CD axell ocupados para grabar información.

Entonces podemos expresar la situación planteada anteriormente de la siguiente forma:

$$\underbrace{\text{Grabar en los "CD nmax"}}_{\text{y luego}} + \underbrace{\text{en los "CD axell", se almacena toda}}_{\text{la información del DVD}} = \text{IDVD}$$

$$\text{NCD}_n \cdot \text{ICD}_n + \text{NCD}_p \cdot \text{ICD}_p = \text{IDVD}$$

Ahora completa:

$$\underbrace{\text{Grabar en los "CD axell"}}_{\text{y luego}} + \underbrace{\text{en los "CD nmax", se almacena toda}}_{\text{la información del DVD}} = \text{IDVD}$$

Tomar nota: Por lo tanto, podemos comprobar que se cumple la propiedad distributiva entre la adición y la multiplicación.

$$\text{NCD}_p \cdot \text{ICD}_p + \text{NCD}_n \cdot \text{ICD}_n = \text{IDVD}$$

¿Sabías que cuando se realizan conciertos musicales en el teatro Teletón, éste se divide en Platea, Palco y Galería?

Si para el concierto en vivo de Mario Guerrero el precio de las entradas era: Platea \$8.000, Palco \$15.000 y Galería \$5.000. ¿Cuál es la fórmula que permitiría calcular el dinero recaudado en este concierto?

Primer paso: Debemos determinar el número de personas que se encuentren en Platea, Palco y Galería. Recuerda utilizar solamente una letra del abecedario para designar el número de personas en Platea, Palco y Galería.

Ejemplo: Sea **T**: Cantidad total de dinero recaudado

Sea _____ : Cantidad de personas en Platea

Sea _____ : Cantidad de personas en Palco

Sea _____ : Cantidad de personas en Galería.

Segundo paso: Ahora debemos determinar la cantidad de dinero que se obtendrá por las personas en Platea, Palco y Galería.

Ejemplo: **M** • 5.000 = 5.000 M

_____ • 8.000 = _____ ; _____ • 15.000 = _____

Tercer paso: ¿De cuántas maneras distintas se puede sumar las tres cantidades? *Recuerda utilizar paréntesis cada vez que sumes dos cantidades.*

Primera forma	$T = \text{_____} + (\text{_____} + \text{_____})$
Segunda forma	$T = \text{_____} + (\text{_____} + \text{_____})$
Tercera forma	$T = \text{_____} + (\text{_____} + \text{_____})$

Cuarto paso: Generalizar mediante una fórmula la propiedad asociativa de la adición.

$(\text{_____} + \text{_____}) + \text{_____} = \text{_____} + (\text{_____} + \text{_____})$

Las actividades anteriores permitieron recordar y generalizar dos importantes propiedades: la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición y la propiedad asociativa de la adición. Observa la siguiente situación:

José compró 2 estuches con capacidad para guardar n CD en cada uno de ellos y 2 que pueden guardar 10 CD cada uno. Según esto ¿qué expresión algebraica representa la cantidad total de CD que pueden guardar los estuches?



Dos estuches pueden guardar n CD cada uno y los otros dos, 10 CD cada uno. Es decir:
 $2 \cdot n + 2 \cdot 10$



José compra 2 estuches de cada tipo, para guardar n y 10 CD en cada uno respectivamente, es decir:
 $2 \cdot (n + 10)$

Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:

1. ¿Qué procedimiento emplea cada uno? Explica.
2. ¿Son correctos ambos procedimientos? ¿Por qué?
3. Al relacionar ambas estrategias ¿qué propiedad reconoces? ¿Por qué?

Desarrolla en tu cuaderno las siguientes expresiones aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

a) $11 \cdot (m + 3)$

b) $5 \cdot (p + q)$

c) $n \cdot (a + b)$

Observa el siguiente desarrollo ¿A cuál de las expresiones escritas a la derecha es equivalente?

$4n + 20$

$4 \cdot (n + 20)$

$4 \cdot (n - 5)$

$4 \cdot (n + 5)$

Recuerda que...

$5 \cdot n = 5n$

$7 \cdot (p - 4) = 7(p - 4)$

Trabajo en grupo: Reúnete con tus compañeros de grupo y completen las siguientes tablas. No olviden argumentar sus respuestas con ejemplos de la vida diaria y explicando el procedimiento realizado.

¿Se cumple la propiedad conmutativa en la multiplicación?	¿Se cumple la propiedad asociativa en la multiplicación?
Problema de la vida diaria:	Problema de la vida diaria:
Procedimiento y argumentación:	Procedimiento y argumentación:
Generalización de la propiedad conmutativa en la multiplicación:	Generalización de la propiedad asociativa en la multiplicación:
Escribe lo que entienden por propiedad conmutativa y asociativa:	

¿Sabías que hasta antes del partido de Chile con Colombia, que terminó 1-1 por las eliminatorias del mundial 2006, sólo se habían vendido 800 boletos para el partido final entre Chile y Ecuador. Luego, la venta de boletos el día antes de, partido fue de 13.000 ¿Cuántos boletos se vendieron el día del partido si asistió un total de 50.000 personas?

Primer paso: ¿Cuáles son los datos relevantes del problema? Marca con una X los datos que nos permitirán saber la cantidad de entradas vendidas el día del partido.

La cantidad 5.000, precio de las entradas que corresponden a galería.	
La cantidad 60.000, capacidad total de personas que caben en el estadio.	
La cantidad 800, ya que es la venta de boletos antes del empate 1-1.	
La cantidad 13.000, ya que es la venta de boletos del día antes del partido.	
La cantidad 50.000, ya que es el número de personas que fue al partido.	

Segundo paso: ¿Cuáles son las posibles formas de obtener la cantidad de boletos vendidos el mismo día del partido?

Ejemplo: Al total de personas que asistieron le resto los 800 boletos, y luego le resto los 13.000 boletos vendidos el día anterior, es decir, **una forma de escribirlo** es:
(50.000 – 800) – 13.000

Resultado: $50.000 - 800 = \underline{\hspace{2cm}}$. Luego, $\underline{\hspace{2cm}} - 13.000 = \underline{\hspace{2cm}}$

Segunda forma	
Resultado:	

Tercer paso: Utilizando la propiedad asociativa de la adición y la sustracción, podemos concluir que:

$$50.000 - 800 - 13.000 = (50.000 - 800) - 13.000 = 50.000 - (800 + 13.000)$$

Tomar nota: Recuerda que al haber paréntesis en una operación aritmética, siempre se debe resolver, en primer lugar, las operaciones que se encuentran al interior del paréntesis. Por otra parte, recuerda que si hay un signo “-” (menos) delante de un paréntesis, se cambian los signos de las cantidades que hay al interior del paréntesis.

Ejemplos: a) $-(40 + 50) = - 40 - 50 = - 90$ b) $- 5 \cdot (10 + 30 - 15) = - 5 \cdot (25) = - 125$

Planteemos el problema anterior por medio de una expresión algebraica y con signos de agrupación (paréntesis). Para esto designaremos a:

$t = 50.000$ (cantidad total de boletos vendidos)

$p = 800$ (cantidad de boletos vendidos inicialmente para el partido Chile – Ecuador)

$q = 13.000$ (cantidad de boletos vendidos un día antes del partido).

¿Qué posibles procedimientos operatorios permitirán obtener la cantidad de boletos vendidos el día del partido?

1 ^{er} Procedimiento	2 ^o Procedimiento	3 ^{er} Procedimiento
$t - p - q$	$(t - p) - q$	$t - (p + q)$

De acuerdo a lo descrito en la tabla, responde:

¿Cómo debes resolver en el 1^o caso? ¿Por qué?

R:

¿Qué significado tiene la aplicación del paréntesis en el 2^o caso? ¿Qué lo diferencia del primero? Explica.

R:

¿Qué significado tiene la aplicación del paréntesis en el 3^o caso? ¿Qué lo diferencia del 2^o caso? Explica.

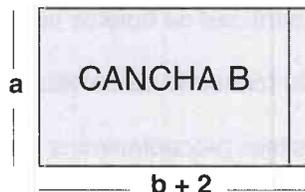
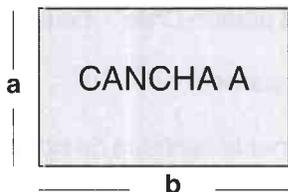
R:

Toma nota... El resultado de valorizar una expresión algebraica como: $t - p - q$; $(t - p) - q$ y $t - (p + q)$ depende del orden en el cual se resuelven las operaciones. Para señalar el orden que se debe seguir, en variadas oportunidades se necesita emplear símbolos de agrupación.

Sabías que.. Llamamos términos semejantes de una expresión algebraica a todos aquellos términos que tienen igual factor literal (letra). Por ejemplo, en la expresión: $c + 2b + 3c$ podemos agrupar de la siguiente manera $(c + 3c) + 2b = 4c + 2b$

Analicemos el siguiente caso:

A propósito de partido de fútbol, las siguientes figuras representan dos canchas que tienen por ancho y largo las medidas que se describen a continuación.



¿Cuál es el perímetro de la cancha A y B respectivamente? Veamos los procedimientos posibles de aplicar para responder a esta pregunta.

1 ^{er} Procedimiento	2 ^o Procedimiento	3 ^{er} Procedimiento	
Cancha A	$a + b + a + b$	$2 a + 2 b$	$2 (a + b)$
Cancha B	$a + (b+2) + a + (b+2)$	$2 a + 2 (b + 2)$	$2 [a + (b+2)]$

¿Cómo se plantea el 1^o procedimiento? Explica.

R:

¿Estás de acuerdo en que el 2^o procedimiento consideró la agrupación de términos algebraicos semejantes? ¿Por qué?

R:

¿Qué utilidad tiene el uso de paréntesis en la agrupación o reducción de los términos semejantes?

R:

Observa la siguiente igualdad de expresiones:

$$a + b + a + b = (a + a) + (b + b) = 2 a + 2 b = 2 (a + b)$$

¿Qué propiedades reconoces en esta secuencia? Explica en tu cuaderno.

Te desafío a resolver: Completa la siguiente tabla con la información dada y argumenta cada una de tus respuestas.

La siguiente información corresponde a los resultados finales de la temporada 2003 de básquetbol profesional en Chile. Información para completar la tabla:

- Deportes Valdivia terminó la temporada con dos puntos menos que P. Llanquihue.
- P. Llanquihue anotó 251 puntos más que U. Católica y Dep. Valdivia anotó 198 puntos menos que P. Llanquihue.
- U. Católica recibió la misma cantidad de puntos en contra que Dep. Valdivia y P. Llanquihue recibió 186 puntos más en contra que U. Católica.
- UC anotó 1.629 puntos.

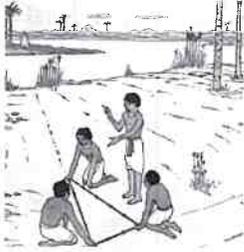
¿Cuáles son las posibles formas de obtener la cantidad de puntos anotados a favor por el equipo Dep. Valdivia?

Primera forma de escribirlo	
Procedimiento:	

Segunda forma de escribirlo	
Procedimiento:	

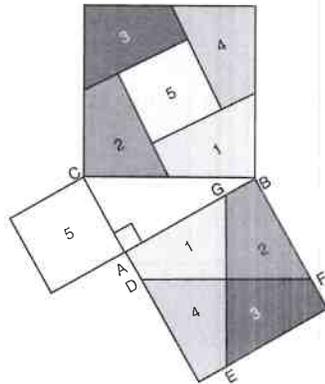
Completa la Tabla con los datos que faltan:

Equipo	Puntaje obtenido	Puntos anotados a favor	Puntos en contra
P. Llanquihue	35		
U. Católica		1.629	
Dep. Valdivia			1.553



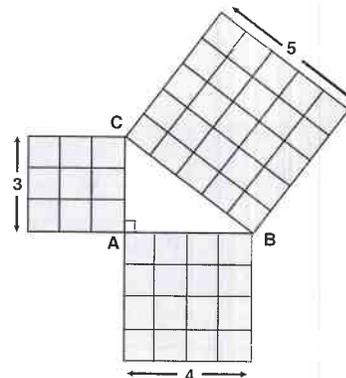
¿Sabías que el gran matemático griego Pitágoras descubrió una relación matemática entre un triángulo rectángulo y sus lados?

Observa la siguiente imagen, que te ayudará a comprender cuál fue la relación matemática que Pitágoras demostró.



A partir del teorema de Pitágoras se pueden encontrar las diferentes medidas de los lados de un triángulo rectángulo que cumplen con la relación siguiente:

Sea “a”, “b” y “c” la medida de los lados de un triángulo rectángulo se cumple que: $a^2 + b^2 = c^2$, en donde “c” siempre es la medida del lado mayor del triángulo rectángulo.



Según la representación gráfica, el trío 3, 4 y 5 ¿cumple con la relación matemática $a^2 + b^2 = c^2$?
¿Por qué?

R:

Ahora trabajarás con los denominados tríos pitagóricos, los cuales son tríos de números que cumplen con la relación matemática $a^2 + b^2 = c^2$. Completa la tabla cuando corresponda y argumenta cada una de tus respuestas.

Trío Pitagórico	Relación matemática pitagórica	Factor común entre los datos
6, 8 y 10	$6^2 + 8^2 = 10^2$ $36 + 64 = 100$	$6^2 + 8^2 = 10^2$ $4 \cdot 9 + 4 \cdot 16 = 4 \cdot 25$ $4 \cdot (9 + 16) = 4 \cdot 25$ $9 + 16 = 25$ $3^2 + 4^2 = 5^2$
9, 12 y 15	$9^2 + 12^2 = 15^2$ $81 + 144 = 225$	$9^2 + 12^2 = 15^2$ $9 \cdot 9 + 9 \cdot 16 = 9 \cdot 25$

Trío Pitagórico	Relación matemática pitagórica	Factor común entre los datos
12, 16 y 20		
15, 20 y 25		

Ahora responde las siguientes preguntas:

Trío pitagórico	Descomposición multiplicativa y factor común
6, 8 y 10	$2 \cdot 3$, $2 \cdot 4$, $2 \cdot 5$
9, 12 y 15	$_ \cdot 3$, $_ \cdot 4$, $_ \cdot 5$
12, 16 y 20	$_ \cdot 3$, $_ \cdot 4$, $_ \cdot 5$
15, 20 y 25	$_ \cdot 3$, $_ \cdot 4$, $_ \cdot 5$

¿Qué relación matemática hay entre el trío pitagórico 3, 4 y 5, el trío 6, 8 y 10, el trío 12, 16 y 20, y el trío 15, 20 y 25?

Evalúa experimentalmente si los siguientes tríos de números son pitagóricos o no.

a) 18, 22 y 30

b) 21, 28 y 40

c) 45, 60 y 75

Encuentra dos tríos de números pitagóricos a partir de la descomposición:

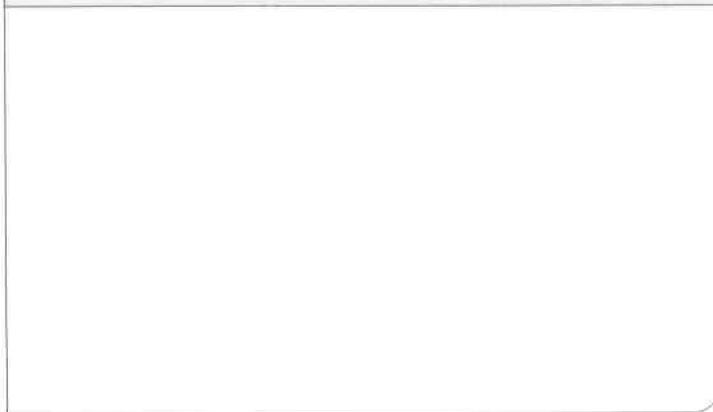
$_ \cdot 3$, $_ \cdot 4$, $_ \cdot 5$ trabajada anteriormente.

Operatoria algebraica

¿Sabías que las medidas de las pistas o canchas de baloncesto difieren levemente según los países; en cualquier caso, es un área rectangular con unas dimensiones que oscilan entre los 22 m de largo por 13 m de ancho, hasta los 29 m de largo por 15 m de ancho?



Dibuja una cancha de básquetbol según las medidas reglamentarias.



Observa a continuación las canchas de básquetbol con medidas reglamentarias.



Si observamos con atención, la cancha A ha sido agrandada en 2 metros cada lado. Ahora identificaremos con símbolos los datos de la cancha A de básquetbol.

- Sea "**a**" el ancho de la cancha. Entonces podemos escribir **a: 16 metros**
- Sea "**b**" el largo de la cancha. Entonces podemos escribir **b: _____ metros**
- Si 22 m "es mayor que" 14 m. Entonces el largo de la cancha es mayor que el ancho, lo cual implica que **$a < b$ ó $b \text{ _____ } a$**
- Recuerda que *la superficie ocupada por la cancha se calcula multiplicando el largo por el ancho*: $14 \text{ m} \cdot 22 \text{ m} = \text{_____ } \text{m}^2$. Por lo tanto **$a \cdot b = \text{_____ } \text{m}^2$** .
- Ahora observa las dos canchas con medidas oficiales, de las cuales la segunda se ha construido a partir de las medidas de la cancha A.



Si *la superficie de la cancha A es $a \cdot b$* , esto implica que *la superficie de la cancha B es $a(b + 2) = a \cdot (b + 2) = a \cdot b + a \cdot 2 = a \cdot b + 2 \cdot a$*

Completa las siguientes tablas y responde las preguntas a partir de la información entregada en las siguientes canchas de básquetbol.

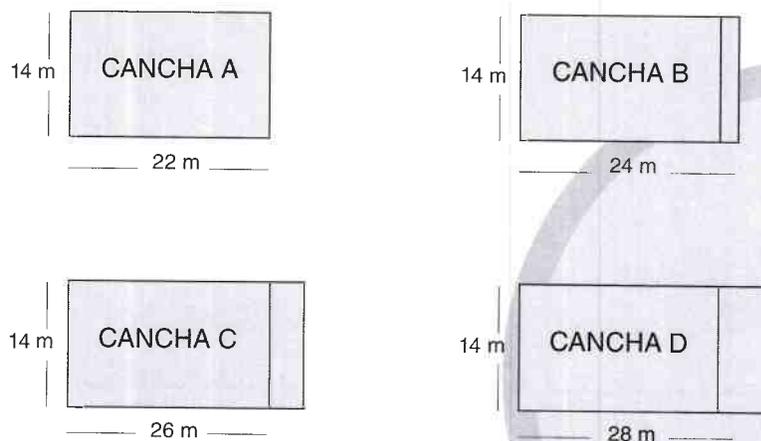


Tabla N° 1

Cancha	Ancho de la cancha	Largo de la cancha	Superficie de la cancha
Cancha A	14 metros	22 metros	308 m ²
Cancha B			
Cancha C			
Cancha D			

Cuánta superficie más tiene: ¿La cancha B que la cancha A? ¿La cancha C que la cancha A? y ¿la cancha D que la cancha A? Argumenta tu respuesta.

- Completa la tabla expresando cada medida con el término algebraico correspondiente.

Tabla N° 2

Cancha	Ancho de la cancha	Largo de la cancha	Superficie de la cancha
Cancha A	a	b	ab m ²
Cancha B	a	b + 2	
Cancha C			
Cancha D			

Completa la siguiente tabla a partir de la información anterior.

A) ¿Qué característica tienen los lados opuestos de la cancha?	B) ¿Qué característica tienen los lados de la cancha respecto del ángulo que forman?	C) Marca con una X la(s) afirmación(es) que representa la respuesta de la pregunta realizada en B)
		<p>“a > b” indica que un lado es mayor que el otro</p> <p>“a = b” indica que ambos lados tienen igual medida</p> <p>“a < b” indica que un lado es menor que el otro.</p>

Si “a y b” representan los lados de la cancha que forman las esquinas. ¿Qué representa la relación entre “a” y “b” en las siguientes afirmación simbólica?	
“ a < b “	“ a > b “

¿Sabías que las medidas de una cancha de fútbol no miden más de 119 m por 91 m y tampoco menos de 91 m por 46 m?



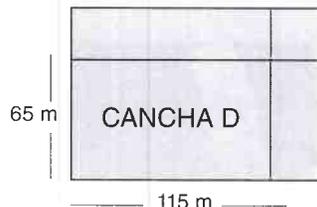
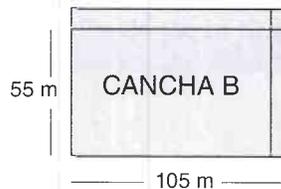
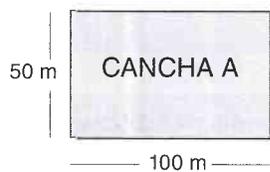
Dibuja una cancha de fútbol según las medidas permitidas.

- Sea “a” el _____ de la cancha. Entonces podemos escribir **a**: _____ **metros**
- Sea “b” el _____ de la cancha. Entonces podemos escribir **b**: _____ **metros**
- Entonces el largo de la cancha es _____ que el ancho, lo cual implica que
a _____ **b** ó **b** _____ **a**
- Recuerda que *la superficie ocupada por la cancha se calcula multiplicando el largo por el ancho*. Por ejemplo si la cancha mide $100\text{ m} \cdot 50\text{ m} =$ _____ m^2 . Por lo tanto
a • b = _____ **m²**.

Completa la siguiente tabla con la información de las tablas anteriores.

¿Qué característica tienen los lados de la cancha?	B) Marca con una X la(s) afirmación(es) que representa la respuesta de la pregunta realizada en A)	Argumenta tu respuesta cada vez que marques con una X.
	<p style="text-align: center;">“a > b”</p> <p style="text-align: center;">“a = b”</p> <p style="text-align: center;">“a < b”</p>	

Responde las preguntas a partir de la información entregada en las siguientes canchas de fútbol.



¿Cuánta superficie más tiene la cancha B que la cancha A? Argumenta tu respuesta.

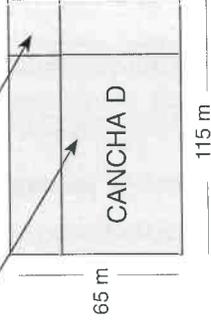
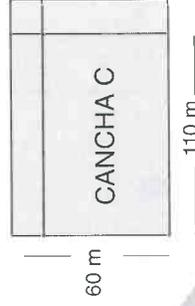
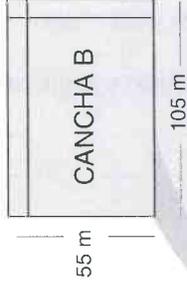
¿Cuánta superficie más tiene la cancha C que la cancha A? Argumenta tu respuesta.

¿Cuánta superficie más tiene la cancha D que la cancha A? Argumenta tu respuesta.

Observemos nuevamente las diferentes canchas de fútbol y aprendamos a expresar algebraicamente las diferencias de superficies entre una cancha y otra.

Tomemos la primera cancha (A) como referencia: Si llamamos "a" al largo de la cancha y "b" al ancho, se tienen que:

Cancha	Largo de la cancha	Ancho de la cancha	Superficie de la cancha	Superficie de la cancha	¿Qué significa cada expresión en la columna anterior?
Cancha A	a	b			
Cancha B					
Cancha C	a + 10	b + 10			
Cancha D	a + 15	b + 15	$(a + 15)(b + 15)$	$ab + 15a + 15b + 225$	



Completa la tabla anteriormente presentada con las expresiones algebraicas que permiten establecer las diferencias de superficie entre las diferentes canchas de fútbol.

Conjeturas y Proposiciones Matemáticas

¿Sabías que en matemática los juegos son muy conocidos por que presentan grandes misterios que sorprenden a la humanidad, ya sea por su simpleza o por su creatividad?

¡Te invito a resolver un desafío!

A continuación te invitamos a trabajar en un juego donde deberás descubrir un patrón geométrico. Observa la serie de figuras, ellas se forman a partir de la repetición de una regla o patrón.

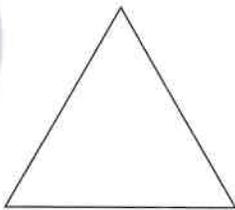


Fig. 1

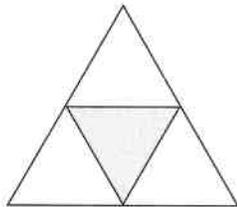


Fig. 2

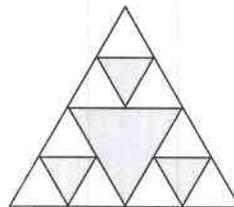


Fig. 3

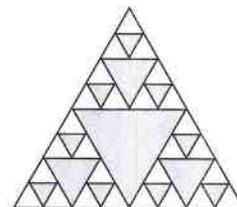


Fig. 4

Completa la tabla.

Triángulos	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6
T. Oscuros	0	1	4			
T. Blancos	1	3				

Según la tabla, responde:

¿Cuál es el patrón o regla de formación de estas figuras? Explica.

R:

Describe los patrones para los números que corresponden a los triángulos oscuros y los triángulos blancos.

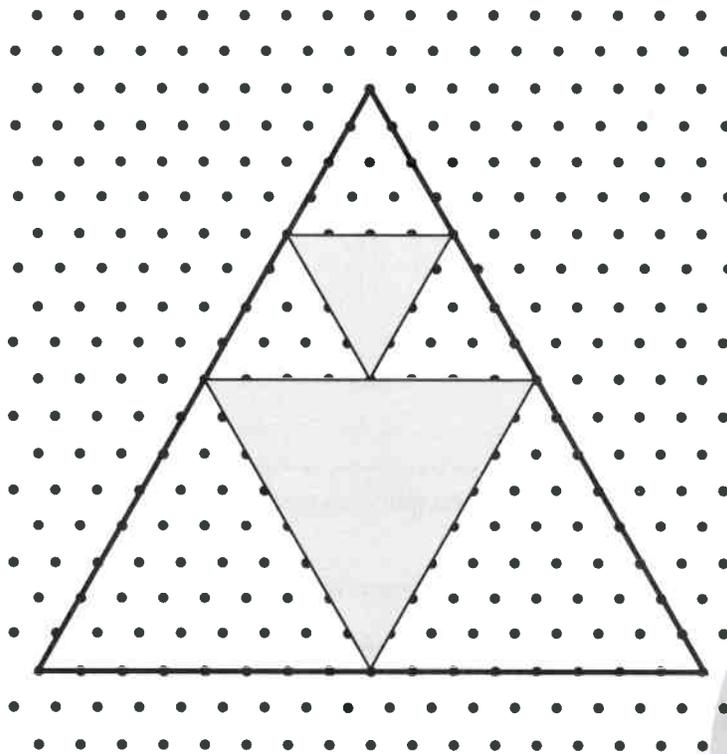
Patrón observado para los triángulos oscuros:

R:

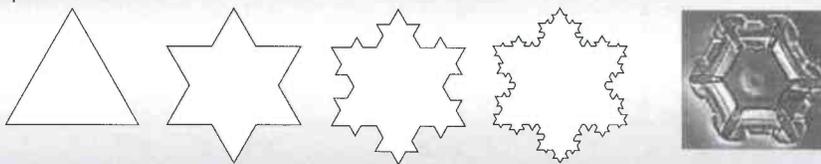
Patrón observado para los triángulos blancos:

R:

Con ayuda de la siguiente trama de puntos dibuja la figura 5 y comprueba experimentalmente si la cantidad de triángulos oscuros y blancos corresponden según el patrón encontrado.



Sabías que...La geometría fractal es un área nueva de la investigación matemática. Los fractales son **autosemejantes**, es decir, tienen la propiedad de que una pequeña sección de un fractal es vista como una réplica a menor escala de todo el fractal. Un ejemplo de fractal es el “copo de nieve”.



¿Qué tipo de triángulos reconoces en la formación de este fractal?

¿Sabías que dos números primos se denominan números primos gemelos si uno de ellos es igual al otro más dos unidades?

Así pues, los números primos 3 y 5 forman una pareja de primos gemelos. Ahora busca pares de números primos gemelos.

Busca entre 10 y 20	Busca entre 25 y 35
Argumenta tu respuesta.	Argumenta tu respuesta.

Toma nota: La conjetura de los primos gemelos postula la existencia de infinitos pares de primos gemelos.

Conjetura: Existe un número infinito de primos "p" tales que "p" + 2 también es primo.

Lo anterior es una **conjetura matemática, ya que todavía está sin demostrar.**

Completa la siguiente tabla y argumenta tu respuesta cuando corresponda.

Número	Número expresado como adición entre dos números	¿Qué tipo de números son los sumandos?
4	2 + 2	
6	3 + 3	
8	5 + 3	
10	7 + 3	

Completa la siguiente conjetura:

Sabías que esta Conjetura ha sido verificada hasta 100.000.000.000.000, pero todavía no se ha encontrado una demostración matemática para todo número par.

Completa la siguiente tabla y responde según corresponda.

Número primo: son números divisibles por 1 y por sí mismo.	Número expresado como sustracción entre dos números	Número expresado como sustracción de potencias
3	$4 - 1$	$2^2 - 1^2$
5	$9 - 4$	$3^2 - 2^2$
7		
9		
11		
13		
15		

Argumenta cuál de las siguientes afirmaciones (relacionadas con la actividad anterior) son verdaderas y cuáles son falsas. Debes justificar en ambos casos.

Proposición matemática	Verdadera o Falsa	Argumentación
Todo número impar se puede escribir como la diferencia entre un número par e impar		
Todo número impar se puede escribir como la diferencia entre dos potencias distintas de base 2		
Todo número impar se puede escribir como la diferencia entre dos potencias distintas de exponente 3, 2 y 1.		

Toma nota: Una proposición o enunciado es una oración que puede ser falsa o verdadera, pero no ambas a la vez. Y las falsas se pueden demostrar mediante un contraejemplo.

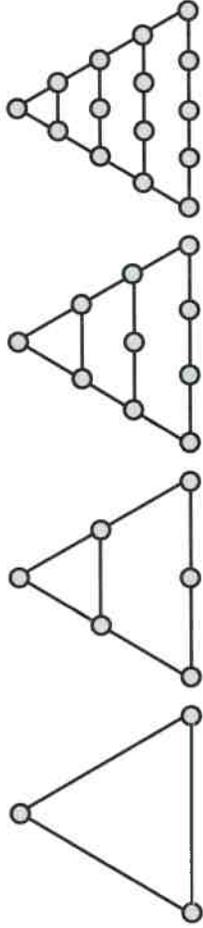
Indica si las siguientes afirmaciones son proposiciones matemáticas, y en el caso de las afirmaciones que son proposiciones indicar si son verdaderas o falsas. Argumenta todas tus respuestas.

Afirmación	¿Es proposición? ¿Sí o No? ¿Por qué?	¿Es verdadero o falso? ¿Por qué?
“La suma de dos números pares es siempre un número par”		
“La suma de dos números impares es siempre un número impar”		
“x es mayor que y”		
“Los números pares terminan siempre en 0, 2, 4, 6 o 8”		
“Todo número impar es un número primo”		
“Todo número primo es un número impar”		
“Si $ab > 0$, significa que ambos números son positivos”		

A continuación redacta dos proposiciones matemáticas y argumenta si son verdaderas o falsas según corresponda.

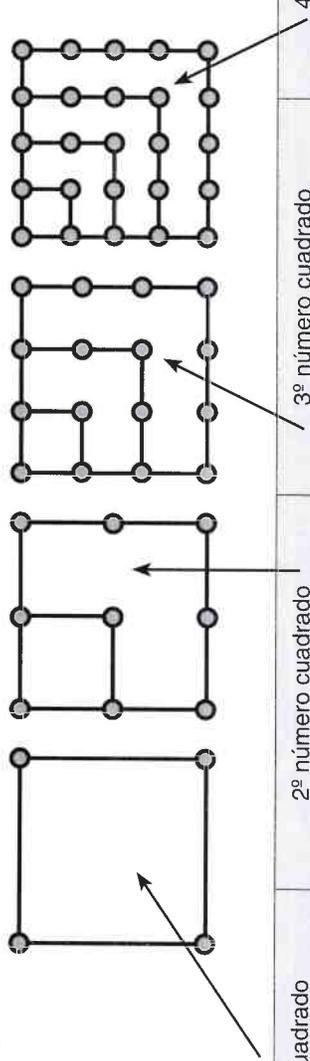
1. _____
2. _____

Observa las siguientes imágenes y completa las tablas para encontrar la fórmula, según corresponda.



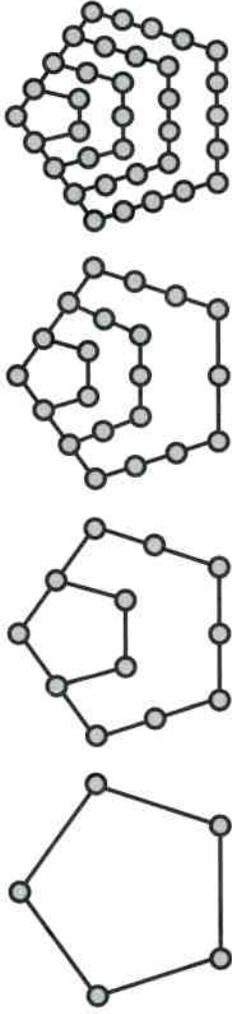
1º número triangular	2º número triangular	3º número triangular	4º número triangular
$1 + 2 = 3$			
$3 = 3^1$		$10 = 5 \cdot 2 = 5^1 \cdot 2^1$	
Suma inicial	¿Qué número se agregó a la segunda suma?	¿Qué número se agregó a la tercera suma?	¿Qué número se agregó a la cuarta suma?
¿Qué proposición matemática puedes plantear respecto de lo anterior?			

A continuación se ha dibujado inicialmente un cuadrado y se han señalado sus 4 vértices con los 4 puntos que tú puedes observar en la figura.



1º número cuadrado	2º número cuadrado	3º número cuadrado	4º número cuadrado
$1 + 3 = 4$	$1 + 3 + 5 = 9$	$1 + 3 + 5 + 7 = 16$	
$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$	$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$	$16 = 4 \cdot 4 = \dots$	
Suma inicial	¿Qué número se agregó a la segunda suma?	¿Qué número se agregó a la tercera suma?	¿Qué número se agregó a la cuarta suma?
$1 + 3$			
¿Qué proposición matemática puedes plantear respecto de lo anterior?			

Ahora completa la siguiente tabla teniendo como referente la actividad anterior.



1º número pentagonal	2º número pentagonal	3º número pentagonal	4º número pentagonal
	$12 = 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^1$		
Suma inicial	¿Qué número se agregó a la segunda suma?	¿Qué número se agregó a la tercera suma?	¿Qué número se agregó a la cuarta suma?
¿Qué proposición matemática puedes plantear respecto de lo anterior?			

Realizadas las actividades anteriores, aprendamos a formular expresiones algebraicas que permiten dar cuenta de todos los casos posibles de números cuadrados, triangulares y pentagonales. Para comenzar argumenta si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

Números cuadrados	Números triangulares	Números pentagonales
Son números que se forman a partir de la suma de números impares.	Son números que se forman a partir de la suma consecutiva de números naturales.	Son números que se forman a partir de la secuencia cuyo primer elemento es 1 y se suma constantemente 3.
¿Es verdadero o falso?	¿Es verdadero o falso?	¿Es verdadero o falso?

Observa la siguiente tabla en que se construye una fórmula a través de una expresión simbólica.

Nombre	Secuencia	Expresión simbólica	Formula
Nº triangulares	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \dots$	La expresión simbólica "n" representa los números naturales, si y solo si, "n" es un número natural ($n \in \mathbb{N}$)	¿Cómo calcular el valor de la suma de los primeros "n" números naturales?

Para dar respuesta a la pregunta planteada, te invitamos a observar como encontrar un camino distinto para sumar los primeros "n" números naturales.

1	+	2	+	3	+	...	+	(n-2)	+	(n-1)	+	n	Es la suma ascendente de los números naturales
n	+	(n-1)	+	(n-2)	+	...	+	3	+	2	+	1	Es la suma descendente de los números naturales
(n+1)	+	(n+1)	+	(n+1)	+	...	+	(n+1)	+	(n+1)	+	(n+1)	Podemos observar que siempre se obtiene (n+1)

Entonces se tiene lo siguiente:

Dos veces la suma, $(1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n)$, es igual a, “n” veces $(n+1)$, lo cual expresado simbólicamente es:

$2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n) = n \cdot (n+1)$, pero si multiplicamos por $\frac{1}{2}$ a ambos lados de la igualdad se obtiene lo siguiente:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

$$(1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Por lo tanto, la suma de los “n” números naturales se puede calcular a través de la fórmula $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Ejemplo: Si quiere saber cuánto suman los primeros 15 números naturales, debemos remplazar en la expresión simbólica o fórmula de la siguiente manera:

Si $n = 15$, entonces se tiene que: $\frac{15 \cdot (15+1)}{2} = 120$. Por lo tanto, la suma de los primeros 15 números naturales es 120.

Completa la siguiente tabla utilizando la fórmula que permite calcular la suma de los “n” primeros números naturales.

Enunciado	Procedimiento	Resultado y respuesta
La suma de los 9 primeros números naturales es...		
La suma de los 99 primeros números naturales es...		
La suma de los 999 primeros números naturales es...		
La suma de los 9.999 primeros números naturales es...		

¿Qué conclusión puedes obtener en cuanto al procedimiento, al encontrar la suma de los primeros 9, 99, 999 y 9.999 números naturales?

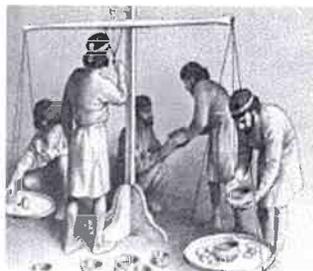
¿Propón por lo menos dos caminos distintos para calcular la suma de los primeros 99.999 números naturales?

CAMINO 1	CAMINO 2

Ecuaciones de Primer Grado

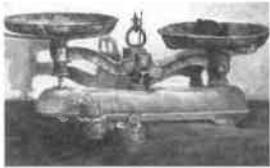
Sabías que... el comercio nació bajo la forma del trueque, en un acto de mutua conveniencia que permitía a dos personas obtener lo que les hacía falta a cambio de lo que poseían en abundancia. Desde los primeros tiempos, todas las culturas se han manejado con algún tipo de organización o intercambio de bienes.

A continuación observa la siguiente imagen en que se muestra una forma de realizar un trueque.



Como puedes observar, se utilizaba la balanza para realizar el trueque entre alimentos. Cabe señalar además que la idea era que hubiera el mismo “peso” en ambos “platos” de la balanza.

Completa la siguiente tabla indicando cuánto peso se debe incluir en el “plato de la balanza” (según corresponda) para que ésta se encuentre en equilibrio (ambos platos con el mismo peso).

Situación	Lo que debo agregar es...	Igualdad representada simbólicamente
<p>Hay seis kilos de manzanas en un plato y diez kilos de plátanos en el otro plato.</p> 	<p>Lo que se debe agregar son _____ kilos de _____ para que la balanza esté equilibrada</p>	<p>Datos: - 6 kilos de manzanas - 10 kilos de plátanos. La igualdad se representa: 6 kg. + _____ = 10 kg.</p>
<p>Hay 50 kilos de papas en un plato y 12 kilos de tomates en el otro plato.</p> 	<p>Lo que se debe agregar son _____ _____ _____</p>	<p>Datos: _____ _____ La igualdad se representa: _____ = _____ + _____</p>

Trabaja con lo aprendido: Completa la siguiente tabla creando situaciones que puedas representar y solucionar a través del equilibrio (ambos platos con el mismo peso) de una balanza.

Situación	Lo que debo agregar es...	Igualdad representada simbólicamente
	<p>Lo que se debe agregar es _____ de _____ para que la balanza esté equilibrada</p>	<p>Datos: _____ _____ La igualdad se representa:</p>

Sabías que la palabra **ecuación** significa "igualación". Esta palabra proviene del latín *aequāre*, que quiere decir "igualar", derivado del adjetivo *aequus*, "igual".

Ahora aprenderás a representar las situaciones anteriores por medio lo que en matemática se denominan **ecuaciones**, y aprenderás a resolver este tipo de problemas.

Problema: Un equipo reproductor de mp3 cuesta \$25.900 si se compra en la tienda, pero cuesta \$2.000 menos si la radio es comprada por Internet. ¿Cuánto cuesta la radio si se compra por Internet? Completa la tabla luego de haberla leído detenidamente.

Datos del problema	Representación simbólica del problema propuesto.	Operación aritmética que permite resolver el problema	¿Cuál es la respuesta al problema?
<p>\$25.990 cuesta la radio en la tienda.</p> <p>\$2.000 menos cuesta si se compra por Internet.</p> <p>X: sea el precio de la radio por Internet.</p>	<p>X: siempre representa el dato que no conocemos en el problema. Por lo tanto, la ecuación se puede escribir como:</p> $X + 2.000 = 25.990$	<p>La operación aritmética que permite resolver la ecuación es la suma del inverso aditivo de 2000 a ambos lados de la igualdad.</p> <p>Inverso aditivo de 2.000 es -2.000.</p> $(X + 2.000) - 2.000 = 25.990 - 2.000$ $X + (2.000 - 2.000) = 25.990 - 2.000$ $X + 0 = 23.990$ $X = 23990$	

El ejemplo anterior muestra el procedimiento a seguir y como a partir de los datos puedes plantear la ecuación que permite encontrar la respuesta al problema. Veamos otros ejemplos:

Luis y Carmen tienen entre los dos \$ 3.700 para ir al cine. Carmen tiene \$ 950 más que Luis, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

Cierto es, que este problema puede resolverse por distintos procedimientos, pero lo importante es trabajar el planteo de la ecuación que satisface la solución del problema. Primero escogeremos una variable, en esta ocasión será X, entonces:

Sea X = el dinero de Luis y

$X + 950$ = el dinero reunido por Carmen. Puesto que ella tiene \$ 950 más de lo que posee Luis.

\$ 3.700 = dinero reunido entre ambos.

Hasta aquí, tenemos los datos que permitirán plantear la ecuación: el dinero de Luis más el de Carmen suman \$ 3.700, es decir:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & + & (X + 950) & = & \$ 3.700 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Dinero de} & & \text{Dinero de} & & \text{Dinero reunido} \\
 \text{Luis} & & \text{Carmen} & & \text{entre ambos}
 \end{array}$$

Ahora, si observas bien podemos reducir términos semejantes y luego aplicar el inverso aditivo de 950 para despejar a X, es decir:

$$2X + 950 = 3.700$$

$$2X + (950 - 950) = 3.700 - 950$$

$$2X + 0 = 2.750$$

$$\frac{2}{2} x = \frac{2.750}{2}$$

$$X = 1.375$$

Aquí redujimos $X + X = 2X$

Ahora aplicamos el inverso aditivo de 950

Multiplicamos la igualdad por el inverso multiplicativo de 2 que es para despejar la incógnita X y nos queda:

Responde:

¿Qué representa el valor de X? ¿Por qué?

R:

¿Cuánto dinero tiene Carmen? ¿Cómo lo supiste?

R:

Como puedes ver, el enunciado del problema anterior se traduce en el planteo de la ecuación:
 $X + (X + 950) = 3.700$.

Ahora ¿cómo podemos comprobar si el resultado de X para este caso es el correcto? Recuerda que en el capítulo anterior trabajaste la valoración de expresiones algebraicas, pues bien, el empleo de esta técnica nos permitirá hacer la comprobación correspondiente.

La variable en este caso es $X = 1.375$

Al sustituir su valor en la ecuación original tenemos:

$$\begin{array}{rcccl} X + (X + 950) & = & 3.700 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 1.375 + (1.375 + 950) & = & 3.700 & & \\ & & 3.700 & = & 3.700 \end{array}$$

Trabaja con lo aprendido

Dados los siguientes problemas plantea la ecuación que satisface la solución y luego resuelve. Para estos tres primeros casos comprueba el planteo y solución de la ecuación.

1. El triple de un número aumentado en 20 es 110 ¿Cuál es el número?

2. Tres números consecutivos suman 15 ¿cuáles son los números? Pista: llamemos X al primer número y $X + 1$ al segundo.

3. Dos rectángulos tienen un área de 25 cm^2 ¿Cuál es el ancho de cada uno si el largo de uno de ellos es 4 cm y el del otro 6 cm?

Trabaja los siguientes problemas, aplicando los procedimientos y representaciones trabajadas.

1. Un equipo musical cuesta \$64.990 por Internet y se debe pagar \$3.000 más si se compra en la tienda. ¿Cuál es el precio del equipo musical si se compra en la tienda comercial?

Datos del problema	Representación simbólica del problema propuesto.	Operación aritmética que permite resolver el problema	¿Cuál es la respuesta al problema?

2. Si el mouse más barato cuesta \$5.900 y el más caro vale \$22.000 más que el mouse anterior. ¿Cuánto cuesta el mouse más caro?

Datos del problema	Representación simbólica del problema propuesto.	Operación aritmética que permite resolver el problema	¿Cuál es la respuesta al problema?

3. Una impresora de inyección a tinta cuesta en promedio \$37.000, en cambio una impresora láser puede llegar a costar \$172.990 más que una impresora de inyección a tinta. ¿Cuánto puede llegar a costar una de la impresora láser?

Datos del problema	Representación simbólica del problema propuesto.	Operación aritmética que permite resolver el problema	¿Cuál es la respuesta al problema?

4. Si la diferencia en el precio de las Web-Cam es de \$51.090. ¿Cuál es el precio de la cámara web más barata, si la más cara cuesta \$58.990?

Datos del problema	Representación simbólica del problema propuesto.	Operación aritmética que permite resolver el problema	¿Cuál es la respuesta al problema?

¿Cuánto has aprendido?

1. Si para el concierto en vivo de María José Quintanilla el precio de las entradas era: Platea \$5.000 y Palco \$10.000. ¿Cuál es la fórmula que permitiría calcular el dinero recaudado en este concierto?

Primer paso: Debemos determinar la cantidad de dinero y el número de personas que se encuentren en Platea y Palco.

Sea _____ : Cantidad total de dinero recaudado

Sea _____ : Cantidad de personas en Platea

Sea _____ : Cantidad de personas en Palco

Segundo paso: Ahora debes determinar la cantidad de dinero que se obtendrá por las personas en Platea y Palco por separado.

$$\text{_____} \cdot 5.000 = \text{_____} ; \text{_____} \cdot 10.000 = \text{_____}$$

Tercer paso: ¿De cuántas maneras distintas se puede sumar las dos cantidades? *Recuerda utilizar paréntesis cada vez que sumes dos cantidades.*

Primera forma	$T = \text{_____} + (\text{_____} + \text{_____})$
Segunda forma	$T = \text{_____} + (\text{_____} + \text{_____})$

Cuarto paso: Generalizar mediante una fórmula la propiedad conmutativa de la adición.

$$(\text{_____} + \text{_____}) = (\text{_____} + \text{_____})$$

2. Si una cancha de básquetbol mide 25 metros de largo y 13 metros de ancho. Completa las siguientes afirmaciones y calcula según corresponda.

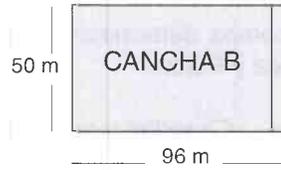
- Sea “**a**” el ancho de la cancha. Entonces podemos escribir **a**: _____

- Sea “**b**” el largo de la cancha. Entonces podemos escribir **b**: _____

- Si 25 m “es _____ que” 13 m. Entonces el largo de la cancha es _____ que el ancho, lo cual implica que **a** _____ **b** ó **b** _____ **a**

- La superficie ocupada por la cancha se calcula multiplicando _____
 _____ : $25\text{ m} \cdot 13\text{ m} =$ _____ m^2 . Por lo tanto $a \cdot b =$ _____ m^2 .

3. Completa las siguientes tablas y responde las preguntas a partir de la información entregada en las siguientes canchas de fútbol.



¿ Cuánta superficie más tiene la cancha B que la cancha A? ¿Y la cancha C respecto a la cancha A?
 ¿Y la cancha D que la cancha A? Argumenta tu respuesta.

Tabla N° 1

Cancha	Largo de la cancha	Ancho de la cancha	Superficie de la cancha
Cancha A			
Cancha B			
Cancha C			
Cancha D			

Tabla N° 2

Cancha	Largo de la cancha	Ancho de la cancha	Superficie de la cancha
Cancha A	b	a	$ab \text{ m}^2$
Cancha B			
Cancha C			
Cancha D			

4. Indica si las siguientes afirmaciones son proposiciones matemáticas, y en el caso de las afirmaciones que son proposiciones indicar si son verdaderas o falsas. Argumenta todas tus respuestas.

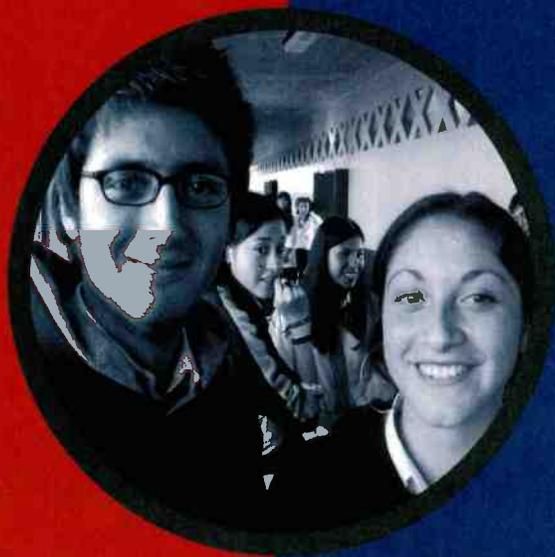
Afirmación	¿Es proposición? ¿Sí o No? ¿Por qué?	¿Es verdadero o falso? ¿Por qué?
“La multiplicación de dos números primos es siempre otro número primo”		
“Todo número multiplicado por si mismo es siempre un número par”		
“Todo número multiplicado por si mismo es un número positivo”		

5. Una cámara digital último modelo puede llegar a costar \$450.000, pero hay cámaras digitales de alta resolución cuestan aproximadamente \$135.990. ¿Cuánto más se tendría que pagar por una cámara digital último modelo?

Datos del problema	Representación simbólica del problema propuesto.	Operación aritmética que permite resolver el problema	¿Cuál es la respuesta al problema?

6. Hoy en día un celular con funciones básicas puede costar \$35.900, en cambio un celular de la más alta tecnología puede llegar a costar \$265.090 pesos más. ¿Cuánto cuesta un celular de alta tecnología?

Datos del problema	Representación simbólica del problema propuesto.	Operación aritmética que permite resolver el problema	¿Cuál es la respuesta al problema?



EDUCACION
**Nuestra
Riqueza**



GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

Nivelación Restitutiva
Matemática 1º Medio • 2006

Ministerio de Educación
Fono: 390 4072 - Fax: 380 0303 • www.mineduc.cl/lpt
Teatinos 20, of. 53, Santiago-Chile

liceo para todos

M