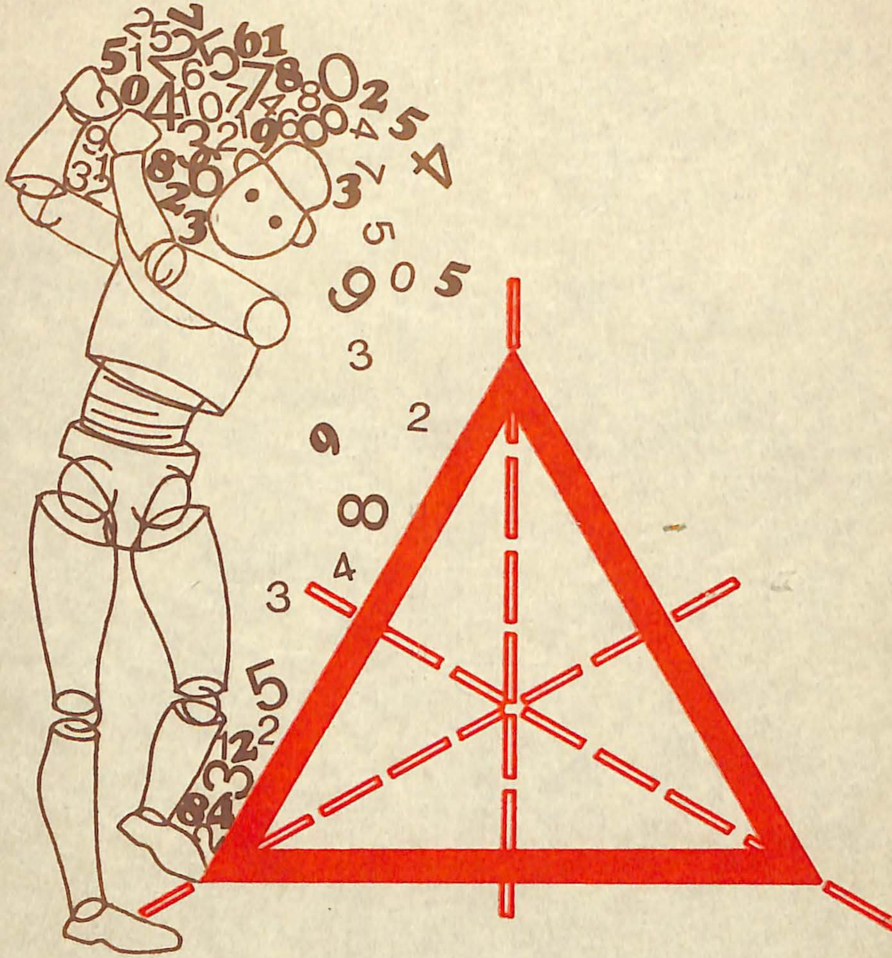
MINISTERIO DE EDUCACION. CENTRO DE PERFECCIONAMIENTO,
EXPERIMENTACION E INVESTIGACIONES PEDAGOGICAS.
Lo Barnechea. Julio de 1974. DEPARTAMENTO DE MATEMATICA .



R.B.B.

# ESTRUCTURA DE GRUPO

DISEÑO DE APRENDIZAJE

Prof. Teodoro Jarufe A.

MINISTERIO DE EDUCACION
Centro de Perfeccionamiento,
Experimentación e
Investigaciones Pedagógicas
Lo Barnechea, Enero de 1975
Departamento de Matemática

# *ESTRUCTURA DE GRUPO*

*DISEÑO DE APRENDIZAJE*

*Prof. Teodoro Jarufe A.*

# P R O L O G O

*La Educación es algo demasiado importante para que apenas los educadores cuiden de ella.*

*1. Todos conocemos la gran confiabilidad que poseen algunos modelos en la vida moderna; tal vez, hemos elaborado o, por lo menos, visto un árbol genealógico o un organigrama del funcionamiento de una empresa, donde las funciones de cada una de las personas están relacionadas con las otras, y éstas, a su vez con las demás. Esta complicada red de comunicaciones, ramificaciones y sub-ramificaciones permite alimentar a cada una de las funciones y conectarlas entre sí por muy secundarias que puedan ser.*

*Todo proceso supone metas bien claras y definidas, como también personas que las realicen. No se puede planificar ningún proceso, por simple que parezca, sin antes concretar los nexos que permitirán alcanzar esas metas u objetivos que actúan como puentes, los cuales irán inter-relacionándose hasta unificar la totalidad: desde las simples operaciones hasta estructuras complejas formando sistemas entre los cuales está el que denominaremos EDUCACION.*

*La escuela es, en cierta menera, un medio, un nexo del conjunto de elementos que conforman el proceso educativo. Como expresión de la educación formal, ella procura preponderantemente una formación sistemática a través de sus múltiples actividades, mediante la interacción profesor-alumno de acuerdo a un marco normativo determinado.*

*Las asignaturas son un medio y, al mismo tiempo, cada una es un objetivo. Pero es importante tener presente que en la mayoría de ellas, especialmente del área científica, los conocimientos se entrelazan unos a otros desde los más elementales a los más complejos, de modo que cada paso que se adelanta, supone tener vivencias previas de una cadena determinada de ellos.*

*En este sentido, el propósito nuestro consiste en ofrecer un instrumento que permita estructurar, de manera lógica y sistemática, un diseño de enseñanza-aprendizaje adecuado a cualquier currículo escolar.*

2. *Un diseño educacional es un instrumento pedagógico caracterizado por:*

2.1. *Un conjunto de situaciones de enseñanza-aprendizaje estructuradas;*

2.2. *Presentar carácter de totalidad en función del objetivo terminal propuesto;*

2.3. *Estar dirigido preferentemente al alumno, quien responde activamente cada situación, adquiriendo los conocimientos a través de sus propias vivencias;*

2.4. *Permitir que cada alumno trabaje a la velocidad que mejor se acomode a su propio ritmo;*

2.5. *Ser flexible, en el sentido que puede ser utilizado en cualquier currículo;*

2.6. *Ser adaptable a nivel regional y/o local;*

2.7. *Ser perfectible, tanto en el aspecto tecnológico educacional como en el aspecto de contenidos;*

2.8. *Expresar en términos operacionales los diferentes objetivos que lo conforman, para los efectos de su evaluación;*

2.9. *Jerarquizar los objetivos mediante una red que puede tener varios caminos alternativos;*

2.10. *Ofrecer la posibilidad de determinar la entrada a la red de objetivos a través de la aplicación de un test de diagnóstico inicial.*

3. *Por* Análisis de Tarea *se entiende el método de descomposición de una tarea compleja en otras más simples; o sea, se reconoce que toda tarea involucra la adquisición previa de otras más básicas. Por tarea se expresa toda actividad humana planificada tendiente a lograr una habilidad específica.*

*La estructuración de una jerarquía para estas tareas, lleva al concepto de Tarea Subordinada.*

*Una tarea es subordinada si presenta un alto grado de transferencia positiva para aprender otra habilidad, bien específica.*

*Al hablar de una* Jerarquía de Aprendizaje *aludimos al conjunto de capacidades intelectuales que tienen una relación ordenada entre sí; o también, la descripción de las relaciones de transferencias positivas entre habilidades intelectuales. Es decir, el conjunto de capacidades subordinadas a una tarea dada forma una JERARQUIA en el sentido que:*

i) cada capacidad subordinada tiene transferencia positiva respecto a la tarea siguiente;

ii) cada capacidad posee a su vez capacidades subordinadas.

(Por secuencia de Instrucción entenderemos el orden en que el alumno interactúa con el material de instrucción).

Es decir, una jerarquía de tareas establece un conjunto de conductas previas subordinadas a la tarea terminal. Según el esquema de R. Gagné, se organizan estos comportamientos en una secuencia que, terminando en el objetivo terminal, retrocede hasta comportamientos más básicos. Es decir, se parte del producto final u objetivo a alcanzar, y de ahí se van determinando las tareas inmediatas necesarias para lograrlo. Como producto de este análisis se obtiene una estructura que relaciona las tareas subordinadas y que denominamos RED de Objetivos o Tareas Intermedias.

Gagné habla preferentemente de la existencia de dos tipos de aprendizaje: de conocimientos verbales y de habilidades intelectuales (llamadas también capacidades o aptitudes). El conocimiento verbal se refiere a lo que una persona sabe o conoce. En cambio, las habilidades intelectuales están en relación con lo que una persona es capaz de hacer. Estas últimas constituyen la base de una jerarquía de aprendizaje.

Finalmente, y a modo de síntesis, puede decirse que el análisis de tarea "es una descripción cuidadosa de lo que una persona competente hace o se supone debe hacer al desempeñar una tarea. A base de esta descripción es posible derivar resultados que estén estrechamente ligados a la razón de la instrucción; por ejemplo, si la intención es capacitar a una persona para que actúe como neurocirujano, el análisis de la tarea requerirá la observación de cirujanos competentes en acción y la descripción detallada de cada paso observado e implicado en su actuación. Una vez que sepamos qué es lo que hace un neurocirujano competente cuando opera, nos será posible seleccionar las metas de instrucción que tengan las mayores posibilidades de satisfacer la razón de la enseñanza, o sea la formación de otro neurocirujano".

O sea, el análisis de la tarea facilita la determinación de aquellos requisitos que deben haber sido adquiridos previamente y señala los que deben ser enseñados.

4. En relación a evaluación, nuestro objetivo se logra en la medida que el alumno, a través de sus vivencias, adquiere una capacitación que le permita alcanzar el o los cambios conductuales esperados.

*La evaluación debe ser muy realista, es decir, adecuarse a los límites de capacitación, tiempo y otros que se puedan prever. Además, el profesor establecerá de antemano lo que el alumno debe rendir como mínimo aceptable, procurando el cumplimiento del nivel taxonómico pre-fijado.*

*Considerando que la evaluación es un proceso necesario y contínuo, cada uno de los objetivos involucrados en la red correspondiente deben ser evaluados en el momento oportuno.*

*Finalmente cabe señalar, que, como todo instrumento educacional, los diseños deben ser experimentados en el aula y, sobre la base de los resultados o experiencias recogidas, modificados en aquellos aspectos que sean pertinentes (validación del diseño).*

*5. Los esfuerzos destinados a elaborar DISEÑOS DE APRENDIZAJE tienen por finalidad experimentar con técnicas alternativas a la clase expositiva, sustentadas en una sólida concepción psicológica del aprendizaje de la matemática. Para ello es necesario atenuar el procedimiento vigente en que el profesor actúa desde una posición central de potencia, y sustituirlo por el aprendizaje individual o en pequeños grupos, a partir de un material concreto y de instrucciones escritas, de tal modo que la actuación del profesor sea la de guía y consejero. El material y los trabajos deben adaptarse a las etapas por las que pasan los educandos.*

*Lo expuesto anteriormente no significa que deba dejarse solo al alumno para que elija su propio camino, su propia metodología. Lo que sí debe tener es libertad para actuar dentro de una cierta situación de redescubrimiento. En relación al uso de material estructurado de tipo manipulativo, éste tiene carácter auxiliar y su objeto es facilitar la abstracción lógico-matemático y no sustituirla: son sólo el punto de partida y de apoyo para las operaciones de la razón.*

*Esperamos que el profesor se muestre sensible a estas nuevas condiciones.*

Diseño de Aprendizaje

# "ESTRUCTURA DE GRUPO"

DOCUMENTO DE TRABAJO
DEL PROFESOR

0. Test de diagnóstico comentado (optativo).
1. Introducción.
2. Objetivo terminal.
3. Jerarquía de Aprendizaje y Secuencia de Instrucción.
4. Antecedentes y Análisis de las actividades del alumno.
5. Evaluación final comentada.
6. Bibliografía.

# 1. INTRODUCCION

Los grupos matemáticos constituyen uno de los conceptos fundamentales de la Matemática actual. Su estudio nació en los inicios del siglo pasado, relacionado con la teoría de ecuaciones algebraicas. Dos jóvenes brillantes, a quienes la muerte segó prematuramente EVARISTE GALOIS (1811-1832) y NIELS ABEL (1802-1829), entrevieron la importantísima noción de GRUPO, que sin duda fue la piedra inaugural del Algebra Moderna. Sin embargo, hubo que esperar algunos años para que FELIX KLEIN (1849-1925) y otros, descubrieran que no sólo iluminaba toda el Algebra, sino que servía también de eslabón maestro para estructurar la Geometría general, incluídas las *"no euclidianas"* por el método de las transformaciones por traslación, rotación, simetrías, etc.

Los grupos aparecen en un sorprendente número de materias que aparentemente no están relacionadas entre sí. Así, no sólo se encuentran en la Geometría y en la Topología, en el Análisis y en el Algebra, sino también en la cristalografía, en la mecánica cuántica y aún en la Biología molecular.

Uno de los conceptos intuitivos más importantes en las ciencias es el de SIMETRIA y ésta puede ser descrita por los grupos. En realidad, muchos de los grupos que se encuentran en las ciencias son el producto del estudio de la simetría. (Como la palabra simetría no es lo suficientemente precisa para las necesidades de la Química y la Física, frecuentemente se habla de grupos de simetría).

Bajo la égida de la estructura abstracta de grupo, fortificada con el reflorecimiento del *"método axiomático"* (HILBERT, PEANO), y mediante la idea unificadora de *"CONJUNTO"* (G. CANTOR, 1845-1918) permitió fundar el Algebra Moderna.

A través de este diseño pretendemos la realización de actividades relacionadas con la estructura de grupo, y la reflexión que conducirá al alumno de la mano a extraer de los ejercicios propuestos, por vía de comparación, todo lo que tienen en común las experiencias efectuadas. Finalmente, abstraerá las ideas matemáticas subyacentes en el fondo de las situaciones planteadas. Es el estudio de estas actividades similares el que le permitirá comprender más ampliamente la estructura que nos preocupa. Cuando los niños ven que surgen las mismas estructuras en los distintos ejercicios, es cuando les resulta clara la naturaleza abstracta de estas estructuras. Como resultado de esta comparación se introduce una idea importante de la matemática: Dos o más sistemas matemáticos constituídos por elementos diferentes pueden ser estructuralmente iguales, en cuanto a la forma como sus elementos se combinan para dar otros elementos. Es el concepto de *"isomorfismo"*. Su estudio es una de las maneras más eficaces de enseñar las partes esenciales de una estructura abstracta.

Esencialmente, un grupo es un conjunto cuyos elementos pueden ser cualquier cosa, pero que deben estar ligados mediante una operación y ésta debe determinar un elemento particular del conjunto declarado como universo, al ser dados dos elementos cualesquiera del conjunto. Al par constituido por un conjunto no vacío G y una operación binaria * definida en G se le llama GRUPOIDE. Además, existen otras propiedades que debe cumplir un grupoide para ser denominado grupo matemático:

i) tener elemento neutro
ii) que todo elemento G tenga inverso o simétrico
iii) asociatividad.

NOTA: Un grupo (G, *) es ABELIANO si la operación * es conmutativa.

En muchas de las situaciones propuestas se trabaja con conjuntos finitos, donde cada una de ellas proporciona posibilidades de experimentación acerca de si se cumplen o no las propiedades enunciadas anteriormente.

No está demás destacar que si bien el Algebra es autónoma y por ello independiente de consideraciones numéricas, reconocemos que en sus estructuras más fundamentales sigue el modelo de las propiedades de los sistemas numéricos más importantes.

Es interesante que en cada una de las sucesivas estructuras algebraicas básicas asignadas al conjunto universo por vía axiomática, se deduzcan las reglas operatorias que guían el cálculo algebraico elemental. Estas reglas eran el objeto mismo del ramo en la enseñanza tradicional, sin otro fundamento que el de la justificación accidental en determinados ejemplos numéricos. Ahora, es importante que dichas reglas operatorias provengan lógicamente de una estructura algebraica previamente acordada para el conjunto de entes básicos que se maneja. Lo expresado es objeto de una etapa posterior.

La axiomática que se estipulará, después de efectuadas las diferentes experiencias, en un conjunto G en el que se ha establecido una sola operación binaria entre sus elementos tiende más que nada a asegurar la posibilidad de resolver, en todos los casos, el *problema inverso* de dicha operación. Tal es la importante estructura de grupo.

## 2. OBJETIVO TERMINAL.

Dados tres conjuntos finitos, distintos de vacío, de un número de elementos menor o igual que 6 y una operación diferente definida en cada uno de los conjuntos dados, los alumnos reconocerán aquellas que tengan o no estructura de grupo y/o grupo abeliano. Cada una de las situaciones planteadas, las realizarán en pequeños grupos, sin errores y en un tiempo t* (por fijar).

Nivel taxonómico: Un primer nivel de análisis.

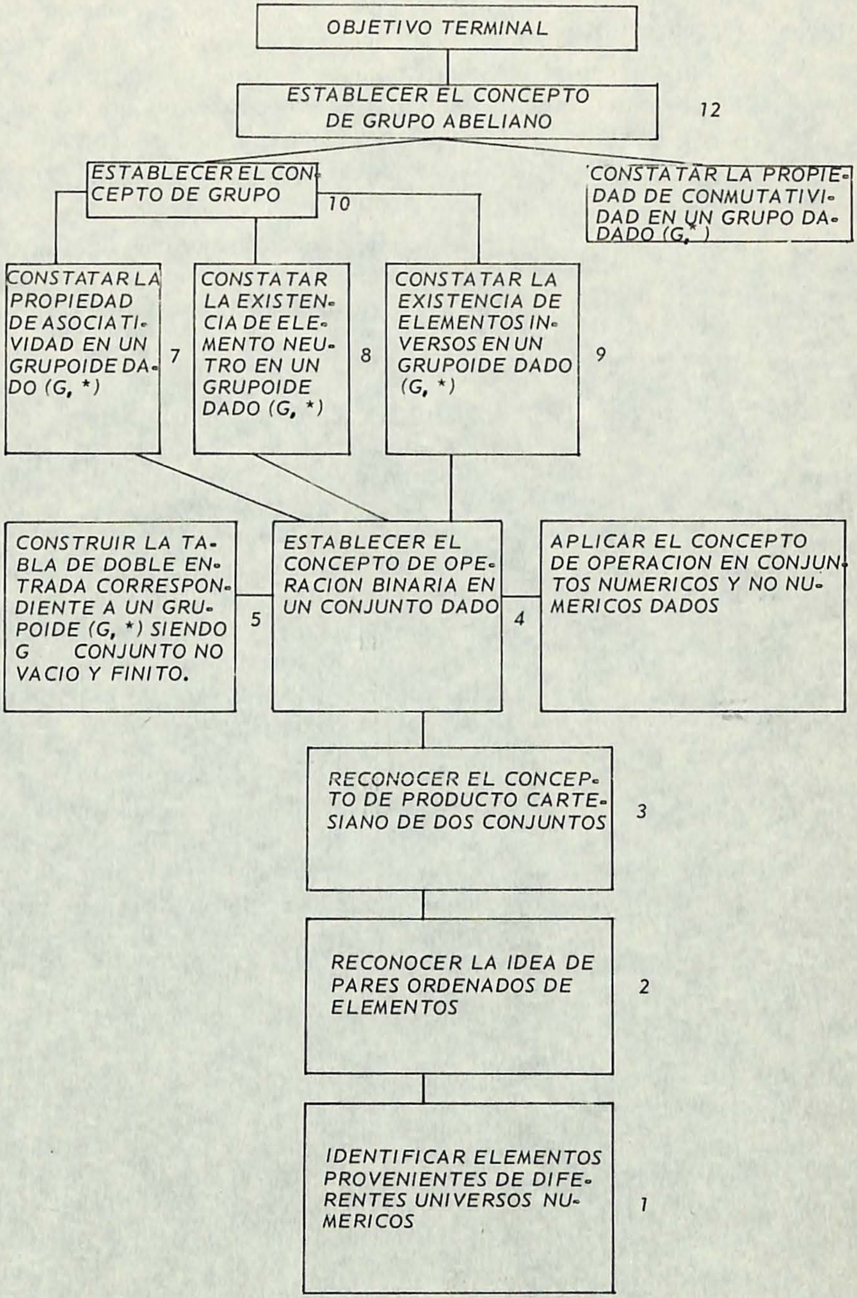
NOTA: El objetivo terminal de un Diseño de Aprendizaje es el objetivo de más alto nivel a alcanzar con un determinado tópico. Para su formulación sugerimos la técnica propuesta por R. Mager, quien distingue en el enunciado de un objetivo:

i) Las condiciones bajo las cuales se espera que el alumno demuestre el logro del objetivo: DADOS O LIMITACIONES;

ii) Un comportamiento observable y específico: CONDUCTA. Al respecto conviene utilizar VERBOS, que desde un punto de vista metodológico, no tengan interpretación ambigüa, o sea, presentar la acción mediante vocablos que tengan relación directa con la actividad concreta, y que sean de fácil medición. Algunos verbos que presentan dificultades de este tipo son: saber, aprender, apreciar, etc. . . los cuales se podrán utilizar solamente completando las frases descriptivas, de tal modo que no haya ninguna duda acerca de lo que se espera que el alumno haga.

iii) El criterio que se utilizará para juzgar el logro del objetivo; esto es, establecer el nivel de desempeño aceptable: CRITERIO DE EVALUACION. Concretamente en él, se informa el número y tipo de ejercicios como también el tiempo y otras características exigidas como nivel mínimo de rendimiento.

3. JERARQUIA DE APRENDIZAJE Y SECUENCIA DE INSTRUCCION.



OBJETIVOS PARTICULARES

Estos objetivos toman también en cuenta el esquema o modelo de aprendizaje que se va a seguir. Además de servir de guía metodológica y de pauta de evaluación, ofrecen al profesor alternativas para construir una prueba de diagnóstico al comienzo del diseño, o en la elaboración de pruebas parciales y/o finales del proceso de aprendizaje.

A modo de ejemplo, formulamos algunos objetivos de este tipo que además de estar en estrecha relación con los objetivos que conforman la red de objetivos intermedios, los especifican aún más, inspirando las actividades que nos llevarán al logro de esos objetivos y por consiguiente, a nuestro objetivoterminal. En su redacción usaremos la técnica propuesta por R. MAGER.

| DADOS | CONDUCTA | CRITERIO DE EVALUACION |
|---|---|---|
| (define las condiciones bajo las cuales el comportamiento debe producirse) | (especifica el comportamiento terminal del alumno) | (patrón de rendimiento aceptable) |
| 1. Una lista de 8 elementos pertenecientes a los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, | el alumno debe IDENTIFICAR el universo al cual pertenecen | Sin error |
| 2. Dado un sistema ortogonal de coordenadas y diez pares ordenados de números enteros, de los cuales al menos uno es el origen, uno en cada cuadrante y uno en cada semi-eje. | el alumno debe UBICAR el punto correspondiente a cada par ordenado. | 9 de 10 |
| 3. Dado un sistema ortogonal de coordenadas y cinco puntos marcados en él. | el alumno debe ANOTAR el par ordenado asociado a cada punto dado. | 100% |
| 4. Dados dos conjuntos A y B, no vacíos, de menos de 5 elementos, | el alumno debe DESCRIBIR el conjunto $A \times B$ | Sin error |

| DADOS | CONDUCTA | CRITERIO DE EVALUACION |
|---|---|---|
| 5. Dados dos conjuntos A y B ($A \neq B$) de a lo menos dos elementos, | el alumno debe VERIFICAR que $A \times B \neq B \times A$ | Sin error |
| 6- Dado un conjunto no vacío K y una ley de composición $\star$ definida por $a \star b = a + b$ , | el alumno debe RECONOCER si es operación en K. | Sin error |
| 7. Dado un conjunto A, no vacío y finito, y una operación $\star$ definida en A, | el alumno debe CONSTRUIR la tabla de doble entrada correspondiente. | Sin error |
| 8. Dada una tabla de doble entrada, correspondiente al grupoide $(A, +)$, y A conjunto finito de no más de cinco elementos, | el alumno debe RECONOCER propiedades eventuales de una operación en un conjunto. | Sin error |
| 9. Dado un grupoide $(K, \star)$, K conjunto numérico y finito, | el alumno debe RECONOCER la estructura de grupo y/o grupo abeliano a que obedece. | Sin error |
| 10. Dado un grupoide $(K, \star)$, K conjunto no numérico y finito. | el alumno debe RECONOCER la estructura de grupo y/o grupo abeliano a que obedece. | Sin error |

## 4. ANTECEDENTES Y ANALISIS DE LAS ACTIVIDADES

### ACTIVIDAD 1.

El par ordenado (a,b) representa una identidad en la cual el *"orden"* en que están dados sus elementos es importante, es decir:

i) $a \neq b \implies (a,b) \neq (b,a)$

ii) $(a,b) = (c,d) \iff (a = c) \wedge (b = d)$

KURATOWSKI definió en 1921 el concepto de par ordenado de manera que satisface las exigencias anotadas:

DEF. $(a,b) \equiv \{\{a,b\}, \{a\}\}$

Razones de su adopción, ya que parece ser una definición artificial:

1. Define (a,b) como un conjunto
2. Puede probarse la propiedad ii)

Para nuestros fines, podemos decir que un par ordenado de elementos es un conjunto binarió $\{a,b\}$ en la cual interesa no sólo los elementos de que se trata sino especialmente el *orden* en que son mencionados. Se admite también la posibilidad de que los elementos del par sean idénticos. Además $(a,a) \neq \{a\}$, lo que puede probarse considerando la definición conjuntista de Kuratowski.

Que quede bien establecido que no es lo mismo el par (a,b) que el par (b,a). Sugerimos actividades lúdicas para consolidar el concepto de par ordenado.

### ACTIVIDAD 2.

Persigue que el alumno sea capaz de marcar el punto correspondiente a cada par ordenado y, por otra parte, escribir el par ordenado asociado a un punto del plano cartesiano.

Al punto A le corresponde el par (3,4);
Al punto B le corresponde el par (-3,1);
Al punto C le corresponde el par (-2,-3);
Al punto D le corresponde el par (5,-2);
Al punto E le corresponde el par (4,0);
Al punto F le corresponde el par (0,2);

### ACTIVIDAD 3.

Si consideramos los pares ordenados (a,b), cuyo antecedente a es sacado de cierto conjunto dado A, cuyo consecuente b se extrae de otro -o del mismo- conjunto B, la totalidad de los pares ordenados así constituídos forman a su vez un nuevo conjunto que se designa por A × B (se lee: *"A cruz B"*), y que se llama PRODUCTO CARTESIANO del conjunto A por el conjunto B (en ese orden).

Evidentemente, el producto cartesiano de conjuntos es en general no conmutativo:

$$A \times B \neq B \times A$$

$$A \times B = B \times A \iff (A = B)_{\vee} (A = \emptyset)_{\vee} (B = \emptyset)$$

En cambio, $\#(A \times B) = \#(B \times A)$

ACTIVIDAD 4.

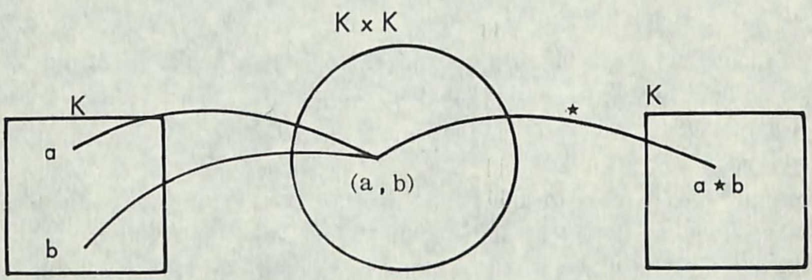
Para que una operación (binaria) esté bien definida en *un conjunto* (abstracto) dado K, debe ocurrir que a todo par ordenado de elementos en K × K le quede asociado un elemento *único* en K.

En lenguaje de conjuntos, se expresa diciendo que una operación $\star$ en un conjunto K es toda *correspondencia unívoca* del producto cartesiano K × K al propio conjunto K:

$$K \times K \xrightarrow{\star} K$$

Es decir, $\forall\, (a,b) \in K \times K, \quad \exists !\, (a \star b) \in K$

Esquemáticamente, la elección del par de elementos de K y la posterior combinación de ellos, puede representarse así:




Respuestas a algunas situaciones planteadas:

a) $\star$ no es operación en $A = \{-1, 0, 1\}$ , porque

$$(1,1) \xrightarrow{\star} 2 \notin A$$

b) La multiplicación ordinaria es una operación binaria sobre

$$S = \{1, -1\}$$

c) La multiplicación ordinaria no es una operación binaria sobre $T = \{1, 2\}$

d) $(\mathbb{Z}, +)$ grupoide; $(\mathbb{N}, -)$ no es grupoide; $a-b \notin \mathbb{N}$; $\forall\, a,b \in \mathbb{N}$. Luego, - no es una operación binaria en $\mathbb{N}$; $(\mathbb{Z}, -)$ grupoide, $a-b \in \mathbb{Z}$, $\forall\, a,b \in \mathbb{Z}$. Luego, - es una operación binaria en $\mathbb{Z}$, (I, +) no es grupoide, ya que la suma de dos impares es siempre par; ($\mathbb{Q}$, +) grupoide; ($\mathbb{Q}$, :) no es grupoide, porque a : 0 no está definido para ningún $a \in \mathbb{Q}$ y, por tanto, : no es una operación binaria en $\mathbb{Q}$ ; ($\mathbb{Q}^{\star}$, :) grupoide.

ACTIVIDAD 5.
No existe elemento neutro en el grupoide ($\mathbb{N}$, +)

ACTIVIDAD 6.
No existen elementos inversos en el grupoide ($\mathbb{N}$, +)
Elementos inversos: si para cada $a \in K$, $\exists a' \in K$ tal que $a \star a' = a' \star a = e$ (e=elemento neutro). a' se llama inverso de a.

ACTIVIDAD 7.

En el grupoide (A, $\star$), se verifica la asociatividad y la conmutatividad; 1 actúa como elemento neutro. El inverso de 1 es 1; el inverso de 2 es 2.

ACTIVIDAD 8.

i)

| ★ | △ | □ |
|---|---|---|
| △ | △ | □ |
| □ | △ | □ |

ii) No se cumple conmutatividad; se verifica la asociatividad; no hay elemento neutro (sólo lo hay por la izquierda); no cabe hablar de inversos, ya que no se cumple la propiedad del neutro.

El conjunto considerado destaca la entera arbitrariedad que existe para elegir las "*cosas*" con que se trabaja en Algebra.

NOTA: Como recurso general para observar rápidamente la conmutatividad en una tabla operacional de doble entrada, basta examinar si ésta presenta resultados simétricamente iguales con respecto a la diagonal que desciende desde el rincón superior hasta el inferior derecho.

ACTIVIDAD 9.

En (A, $\cdot$) se cumplen: conmutatividad, asociatividad; elemento neutro, a; elementos inversos.

En (A, $\star$) no se cumplen ni la conmutatividad ni la sociatividad; no hay elemento neutro y por consiguiente, ningún elemento de A tiene inverso.

ACTIVIDAD 10.

Aquí se introducen las nociones muy intuitivas de *Operador* y *Estado* ideas que pudieron haber sido introducidas más al comienzo. Desde el punto de vista psicológico son muy útiles, ya que resulta muy natural componer operadores, es decir, aplicarlos uno después de otro, uno al resultado del otro. Los estados son las posiciones particulares de los objetos y los *operadores* son los que tenemos que hacer para "*mover*" los objetos desde una posición a otra.

i)

| ⋆ | No | Si |
|---|---|---|
| No | No | Si |
| Si | Si | No |

⋆ es una operación en
E = { No, Si}

ii) Elemento neutro: No

iii) Se verifica la asociatividad

iv) Cada elemento de E tiene inverso: el inverso de No es No; el inverso de Si es Si.

ACTIVIDAD 11.

a)

| $\oplus$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

En esta actividad, las cifras no tienen propiamente un significado numérico, sino el de simples "*marcas*" que facilitan la operación a realizar con estos elementos.

b) $\oplus$ es operación en M = $\{0,1\}$ ; se cumple asociatividad; elemento neutro: 0; el inverso de 0 es 0; el inverso de 1 es 1.

c) Al comparar la tabla de la operación ⋆ del interruptor con la tabla de la operación $\oplus$ de la adición módulo dos, los alumnos descubrirán "*que es la misma*." Basta asociar el "*cero*" con el "*No*" y el "*uno*" con el "*Si*". La estructura de los dos grupoides es la misma, pero no se confunden: se dice que las estructuras de estos dos grupoides son "*isomorfas*" respecto de las propiedades operacionales.

En la parte del alumno hemos entregado el concepto de GRUPO y de GRUPO ABELIANO.

La denominación de "*abeliano*" da la oportunidad para que el profesor indique un interesante trabajo de biblioteca para los alumnos: investigar quién fue NIELS ABEL (1802 - 1829) y EVARISTE GALOIS (1811 - 1832), otro matemático de esa época a quien se debe la invención de los GRUPOS.

NOTA: Un GRUPOIDE es un par (G, ⋆) que consiste en un conjunto no vacío G, llamado conjunto fuente o subyacente, y una operación binaria ⋆ definida en G.

Si el grupoide es asociativo recibe el nombre de semigrupo. Por lo anterior, podemos definir un GRUPO como un semigrupo que posee elemento neutro y en el que todo elemento tiene su inverso.

Siempre que definimos un grupo, seguimos los pasos siguientes:

a) se define un conjunto G, distinto de vacío;
b) se define una operación binaria ⋆ en G;
c) se verifica que el grupoide (G, ⋆) tiene elemento neutro;
d) se verifica que el grupoide (G, ⋆) es un semigrupo;
e) se verifica que todo elemento de G tiene inverso respecto de ⋆ en G.

Así, pues, el *"grupo de los movimientos del interruptor"* es *"isomorfo"* al grupo de la *"adición módulo dos"*.

El momento de la conclusión, en el cual el alumno redescubre que estos ejercicios tienen el mismo conjunto de reglas o *"gramática"*, puede ofrecerle instantes de real satisfacción, así como los ejemplos siguientes, culminando de esta manera una interesante aventura mental.

ACTIVIDAD 12.

a) B; A; I; D ⋆ D = I

b) No influye

c) 9

d)

| ⋆ | N | D | I |
|---|---|---|---|
| N | N | D | I |
| D | D | I | N |
| I | I | N | D |

e) Es grupo abeliano.

ACTIVIDAD 13.

Se obtiene la siguiente tabla:

| ⊕ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 0 |

La disposición de los elementos es similar a la tabla de la actividad 12, pero ⊕ no es una operación en A = {1, 2, 3,} , porque, por ejemplo,

$$2 \oplus 1 = 0 \notin A.$$

En cambio, ⊕ es una operación en B = { 0, 1, 2}

Las estructuras de los grupoides (R, ⋆) y (B, ⊕) son isomorfas.

## 5. EVALUACION FINAL

Ejercicio 1

i) 16; ii)

| ⋆ | N | I | D | O |
|---|---|---|---|---|
| N | N | I | D | O |
| I | I | O | N | D |
| D | D | N | O | I |
| O | O | D | I | N |

iii) Es grupo Abeliano.

iv) Si, resulta la siguiente tabla:

| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

Ejercicio 2

Las simetrías axiales y rotacionales del triángulo equilátero determinan la siguiente tabla:

| $\star$ | $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_0$ | $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| $R_1$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_0$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_1$ |
| $R_2$ | $R_2$ | $R_0$ | $R_1$ | $S_3$ | $S_1$ | $S_2$ |
| $S_1$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $R_0$ | $R_2$ | $R_1$ |
| $S_2$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_1$ | $R_1$ | $R_0$ | $R_2$ |
| $S_3$ | $S_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $R_2$ | $R_1$ | $R_0$ |

i) El grupoide $(T, \star)$ es Grupo, pero no Abeliano.

ii) El grupoide $(R, \star)$ es grupo Abeliano.

Ejercicio 3

a)

| # | N | D | R | A | B | C |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N | N | D | R | A | B | C |
| D | D | R | N | C | A | B |
| R | R | N | D | B | C | A |
| A | A | B | C | N | D | R |
| B | B | C | A | R | N | D |
| C | C | A | B | D | R | N |

b) No hay diferencias en su estructura con respecto al ejercicio 2.

INFORMACION ADICIONAL

- *Metodología del Trabajo.* Organizar el curso en grupos de 4, 5 ó 6 niños, tomados al azar.

- *Motivación.* Se sugiere que el profesor de al curso las instrucciones básicas para el buen desarrollo y éxito del trabajo. Al mismo tiempo, estimule el interés de los educandos para conocer la actividad que realizarán a continuación.

- *Rol del profesor.* Guía y consejero del quehacer docente, papel insistentemente recomendado en los últimos tiempos. En esta modalidad de trabajo, el niño debe tener la necesaria libertad para actuar dentro de una cierta situación de redescubrimiento.

Como culminación del trabajo de los diferentes grupos, el profesor provocará una discusión final con el objeto de resolver situaciones que pudieran exigir aclaración, con participación preferente de los alumnos.

6. Bibligrafía de consulta.

Z.P.DIENES-E.W. GOLDING: *"Grupos y Coordenadas".* Barcelona, Edit Teide, 1970.

Z.P.DIENES-: *"Introducción al Algebra".* Barcelona, Edit. Teide, 1971.

Diseño de Aprendizaje

"ESTRUCTURA DE GRUPO"

DOCUMENTO DE TRABAJO
DEL ALUMNO

0. Test de Diagnóstico Inicial (optativo).
1. Introducción.
2. Materiales requeridos.
3. Actividades a realizar.
4. Evaluación final.
5. Bibliografía.

## 1. INTRODUCCION.

El propósito de este diseño es introducirlos en una primera estructura algebraica básica con el fin de fundamentar a continuación las reglas de cálculo algebraico ordinario. Se pretende no sólo reforzar el concepto de estructura por una parte, sino que fundamentalmente desarrollar un álgebra como existe hoy: como disciplina matemática abstracta que se ocupa de las operaciones a realizar con los elementos arbitrarios de un conjunto dado cualquiera. Esperamos que al término de este diseño pueda ser capaz de:

i) Reconocer variados modelos que presentan la estructura de Grupos y/o Grupo Abeliano.

- Descubriendo como se relacionan los elementos de un conjunto de acuerdo a las reglas de combinación definidas entre ellos;
- Identificando el elemento que combinado con otro cualquiera del conjunto no lo modifica (elemento neutro);
- Descubriendo pares de elementos que al ser combinados por medio de la operación definida en el conjunto, da como resultado el elemento neutro (elementos inversos o simétricos);
- Reconociendo la propiedad asociativa, que alude a la operación reiterada, practicada cada vez con tres elementos;
- Reconociendo la propiedad conmutativa, que alude a la operación practicada cada vez con dos elementos, cambiando el orden de ellos.

ii) Comparar actividades similares para determinar aquellas que, teniendo diferentes elementos, son estructuralmente iguales con respecto de las propiedades operacionales.

## 2. MATERIALES REQUERIDOS.

Cada grupo de trabajo debe disponer de:

- Un cuarto de pliego de cartulina.
- Un compás, regla (graduada), escuadra, cuaderno.
- Una tijera u hoja de afeitar.

## 3. ACTIVIDADES A REALIZAR.

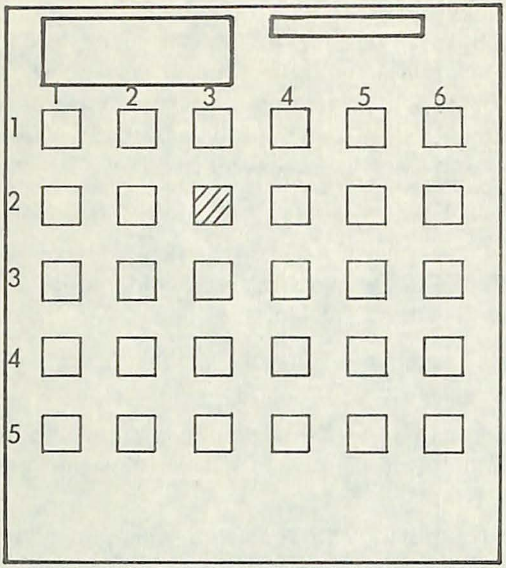
Actividad 1.

Considere el conjunto formado por los números naturales 2 y 3. Este conjunto, como bien sabes, puede ser representado por

$\{2,3\}$ o $\{3,2\}$ . Es decir, $\{2,3\} = \{3,2\}$.

Esto significa que *al nombrar los elementos de un conjunto, no importa el orden en que lo hagamos.*

Lo anterior no es siempre válido. Veamos un caso en que el orden de los elementos tiene especial importancia.




Supongamos que en su sala los bancos están arreglados como lo indica la figura, con las filas y columnas numeradas. Su asiento está señalado por la región sombreada.

Si le preguntan en qué lugar de la sala se sienta, ¿cómo respondería?

- *"Estoy sentado en la . . . fila y en la . . . columna ."*

¿Sería precisa su respuesta si sólo contestase que está sentado en la tercera columna?

¿Qué elementos determinan perfectamente su posición?

- El número de la . . . y el número de la . . .

A fin de evitar toda confusión con la anotación que hemos usado para conjuntos, representamos simbólicamente su posición por (2,3), donde: el primer número representa la fila y el segundo número representa la columna.

Si su amiga Vivian está sentada en la tercera fila y en la segunda columna,¿qué par de números representaría su posición?

Luego, $(2,3) \neq (3,2)$, ya que ambos están sentados en asientos diferentes.

Como puede observar, estas parejas de números tienen los mismos elementos, pero están escritos en un *orden* diferente.

Cada una de las posiciones que ocupan sus compañeros de curso pueden expresarse por una combinación de dos números.

A cada combinación la llamaremos PAR ORDENADO, por ser una relación entre dos elementos, en la cual interesa en especial el *orden* en que ellos se toman.

¿Qué queremos indicar con el par (4,4) en nuestra situación planteada?

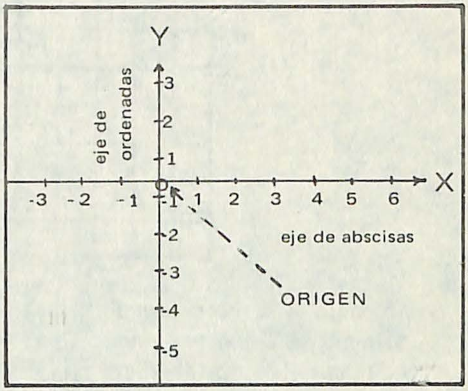
ACTIVIDAD 2.

2.1. En la recta numérica, represente gráficamente el número cardinal 3, rodeando con un pequeño círculo el punto correspondiente.

2.2. En la recta numérica, represente el conjunto de los cardinales menores que 7 y mayores que 3. Proceda en forma análoga a la actividad 2.1., rodeando con un pequeño círculo, sin rellenar, los números 3 y 7 y destacando mediante una línea más gruesa los elementos del conjunto pedido.

2.3. Represente gráficamente el par (2,3). ¿Puede hacerlo en la recta numérica? No, ¿verdad? Le ayudaremos.

En este caso se hace nenecesario emplear dos rectas numéricas. Por comodidad, estas dos rectas o ejes se eligen perpendiculares entre sí, y el conjunto recibe el nombre de SISTEMA DE COORDENADAS ORTOGONALES. El punto de intersección de estos ejes se llama ORIGEN del sistema.



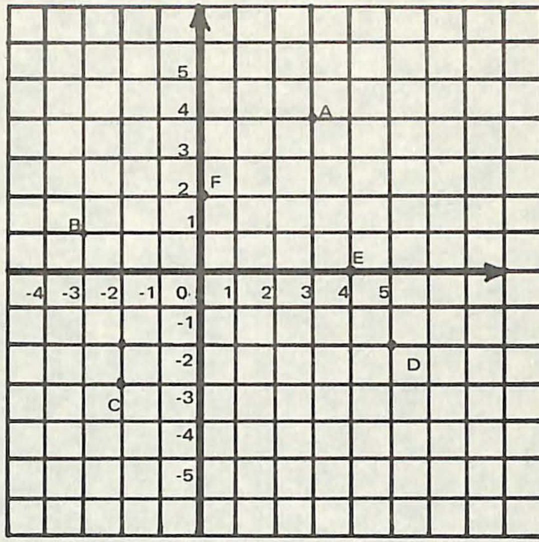

¿Se atreve ahora a ubicar el punto cuyas coordenadas son los elementos del par (2,3)?

¿Y la del par (3,2)?

¿Coinciden los puntos asociados a los pares (3,2) y (2,3)?

NOTA: Sea en general (a,b) un par ordenado. Al elemento a lo llamaremos *antecedente* o *"primera componente"* del par, y al elemento b, *consecuente* o *"segunda componente"* del par.

2.4. Escriba los pares ordenados representados por los puntos del gráfico dado.




Al punto A le corresponde el par ..................

Al punto B le corresponde el par ..................

Al punto C le corresponde el par ..................

Al punto D le corresponde el par ..................

Al punto E le corresponde el par ..................

Al punto F le corresponde el par ..................

ACTIVIDAD 3.

Considere los conjuntos siguientes:

S = { Aly, Martha, Victoria }

T = { Enrique, Hernán }

O sea, # S = 3 y # T = 2

(# indica la cardinalidad del conjunto, es decir, el número de elementos del conjunto).

Si las personas mencionadas en los dos conjuntos concurren a un baile, ¿cuántas parejas se pueden formar con los elementos de estos dos conjuntos? Observe que cada elemento de A puede combinarse con cada uno de los elementos de B.

El nuevo conjunto, constituido esta vez por pares ordenados, podemos representarlo en una tabla de doble entrada, o también llamada *"tabla pitagórica"*.

| S x T | E | H |
|---|---|---|
| A | (A,E) | (A,H) |
| M | (M,E) | (M,H) |
| V | (V,E) | (V,H) |

A este conjunto formado por todos los pares ordenados, con primer elemento en S y segundo elemento en T lo llamaremos PRODUCTO CARTESIANO y lo denotaremos S x T (léase: *"S cruz T"*). Luego,

S x T = {pares ordenados con primer elemento en S y segundo elemento en T}

Construya la tabla de doble entrada para T x S y compárela con la de S x T. ¿Es T x S = S x T? ¿En qué casos serán iguales?

¿Es # (S x T) = # (T x S) ?

NOTA: Convendremos que los elementos que encabezan las columnas son los consecuentes de cada par ordenado.

ACTIVIDAD 4.

Consideremos el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$, como conjunto universo, y la regla o ley de composición $\star$ definida por:

$a \star b = a + b, \ \forall\, a,b \in \mathbb{N}$

Escoja dos elementos cualesquiera de $\mathbb{N}$. ¿Está el resultado siempre en el conjunto $\mathbb{N}$?

Ahora, considere el conjunto A = $\{1,2,3\}$ y la misma ley de composición anterior; o sea, $a \star b = a + b$, para $a, b \in A$.

Complete la tabla de doble entrada correspondiente a A x A, asociándole a cada par ordenado el elemento correspondiente, de acuerdo a la regla dada.

¿Está el resultado, esta vez, siempre en el conjunto A? ¿Por qué?

| + | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | | | 4 |
| 2 | 3 | | |
| 3 | | 5 | |

Observe la siguiente tabla:

| ⋆ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 2 |

¿Le corresponde a cada par ordenado un elemento único en el conjunto dado C = {1,2 } por la regla de composición ⋆ ?

Las situaciones anteriores nos conducen a establecer el concepto de OPERACION o ley de composición interna:

> Para que una OPERACION binaria (considera dos elementos) esté bien definida en un conjunto K cualquiera, debe ocurrir que a todo par ordenado de elementos de K x K le quede asociado un elemento *único* en K.

¿Define, ahora, la siguiente tabla:

| ⋆ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 |

una operación binaria?

Lo que esencialmente exige la definición de OPERACION es que se de una regla (arbitraria) que permita asociar a cada par (a,b) elegido en K x K un elemento único en K.

En lo siguiente, al par constituido por un conjunto K cualquiera y una operación binaria ⋆ definida en K, lo llamaremos GRUPOIDE y lo anotaremos (K, ⋆ ).

a) Dado el conjunto A = { -1, 0, 1 }
¿Es ⋆ , definida por la tabla dada, operación en A?

| ⋆ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| -1 | -2 | -1 | 0 |
| 0 | -1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |

b) ¿Es la multiplicación ordinaria una operación binaria en

$S = \{1, -1\}$ ?

c) ¿Es la multiplicación ordinaria una operación binaria en

$T = \{1, 2\}$ ?

d) ¿Cuáles de los siguientes pares son grupoides? Fundamente su respuesta en cada caso:

$(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{N}, -)$ ; $(\mathbb{Z}, -)$ ; $(\mathbb{I}, +)$,

donde I es el conjunto de números enteros impares;

$(\mathbb{Q}, +)$ ; $(\mathbb{Q}, :)$ ; $(\mathbb{Q}^{\star}, :)$,

donde $\mathbb{Q}^{\star} = \mathbb{Q} - \{0\}$

ACTIVIDAD 5.

¿Cuáles de los siguientes grupoides poseen elementos neutros?

$(\mathbb{N}, +)$ ; $(\mathbb{Z}, +)$ ; $(\mathbb{N}, \cdot)$ ; $(\mathbb{Q}, +)$

ACTIVIDAD 6.

¿Cuáles son los elementos que, en cada uno de los grupoides anteriores, poseen inverso?

¿Cuándo decimos que un elemento dado de un conjunto, en el que se ha definido una operación, tiene inverso?

ACTIVIDAD 7.

La siguiente tabla define una operación binaria $\star$ en el conjunto $A = \{1,2\}$

- ¿Se verifica la asociatividad?
- ¿Se verifica la conmutatividad?
- ¿Hay elemento neutro?
- ¿Los elementos de A son invertibles, es decir, tienen inversos?

| $\star$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 |

ACTIVIDAD 8.

Considere el grupoide $(F, \star)$, donde $F = \{\triangle, \square\}$

Regla para "$\star$": $a \star b = b$, para $a, b \in F$; o sea, al operar dos elementos, quedarse con el último de los elementos elegidos.

i) Construya la tabla de doble entrada correspondiente.

ii) ¿Se cumple la conmutatividad? ¿Se cumple la asociatividad? ¿Hay elemento neutro? ¿Cada elemento de F tiene inverso?

ACTIVIDAD 9.

Dadas las tablas siguientes:

| • | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | b | c | d |
| b | b | c | d | a |
| c | c | d | a | b |
| d | d | a | b | c |

| ⋆ | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | d | a | c | b |
| b | a | c | b | d |
| c | b | d | a | c |
| d | c | b | d | a |

¿Cuáles de las siguientes propiedades: conmutatividad, asociatividad, elemento neutro, y elementos inversos, de las operaciones • y ⋆ definidas sobre $A = \{a, b, c, d\}$ se cumplen?

ACTIVIDAD 10.

Considere el interruptor de la ampolleta de una habitación. ¿Cuáles son las posiciones o estados posibles del interruptor?

Un interruptor tiene sólo dos estados: *"No"* y *"Si"*. Tenemos de esta manera un conjunto binario $E = \{No, Si\}$.

Definamos en este conjunto E una ley de composición ⋆.

Para $a, b \in E$, estableceremos la siguiente regla para $a \star b$: *"partiendo del estado* a *corresponde a* b *accionar el interruptor"*.

Como puede apreciarse, las palabras *"No"* y *"Si"* no sólo designan los estados del interruptor, sino que ayudarán a dar las órdenes al que acciona el interruptor. (A los movimientos que nos llevan de un estado a otro los llamaremos OPERADORES: son nuestras *"reglas del juego"*).

Investigue cómo se combinan los movimientos del interruptor, partiendo de uno de sus estados.

¿A qué movimiento único equivale accionar el interruptor dos veces seguidas?

Para cada par de movimientos sucesivos, ¿existe siempre un movimiento único que los pueda reemplazar?

Registre sus resultados en una tabla de doble entrada, como la siguiente:

| ⋆ | No | Si |
|---|---|---|
| No | | |
| Si | | |

i) ¿Estuvo el resultado siempre dentro del conjunto E? Es decir, ¿es ⋆ una operación en E?

ii) ¿Hay un movimiento que no influye en los otros? ¿Cuál? (elemento neutro).

iii) ¿Se obtiene el mismo resultado accionando el interruptor 3 veces y en distinto orden? (asociatividad).

iv) Observe la tabla y anote las combinaciones que dan como resultado el elemento neutro. ¿Cada elemento de E tiene inverso?

ACTIVIDAD 11.

Construya en un trozo de cartulina un reloj con un solo puntero y con sólo dos marcas, 0 y 1.

Se tiene el conjunto binario M = { 0, 1 }

Definiremos en este conjunto una ley de composición, mediante el operador ⊕. Regla para a ⊕ b: *"partiendo de la marca* a *mueva el puntero (en el sentido ordinario) en* b *lugares:*

a) Complete esta curiosa tabla de *"sumar":*

| ⊕ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 1 | | |

NOTA: En Aritmética, esta curiosa manera de sumar con sólo dos números se llama Adición Módulo dos.

b) Conteste para esta situación, las preguntas i), ii), iii) y iv) de la actividad 10.

Compare esta tabla con la de la operación ⋆ del interruptor.

c) ¿Existe algún parecido en la disposición de sus elementos?

¿Qué elementos de ambas tablas pueden ser asociados?
Los grupoides, en este caso (E, ⋆) y (M, ⊕) cumplen las propiedades de: a) Asociatividad, b) existencia de elemento neutro y c) existencia de elementos inversos .

Un grupoide que satisface las propiedades a), b) y c), enunciadas anteriormente, se dice que tiene ESTRUCTURA DE GRUPO. Por esto, los grupoides $(E, \star)$ y $(M, \oplus)$, son matemáticamente equivalentes por tener la misma estructura, pero no se confunden, y se dice que son "*isomorfos*" respecto de las propiedades operacionales.

Por lo expuesto, estamos en condiciones de establecer la siguiente *definición:*

Un grupo $(G, \star)$ es un conjunto no vacío G con una operación binaria $\star$ sobre G tal que cumple los siguientes axiomas:

$G_1$ : la operación $\star$ es asociativa.

$G_2$ $\exists e \in G$ tal que: $e \star a = a \star e = a, \forall a \in G$ (e se llama IDENTIDAD, o elemento neutro, o elemento unidad, o módulo).

$G_3$ : Para cada $a \in G$, $\exists a' \in G$ tal que:

$$a \star a' = a' \star a = e$$

(a' se llama INVERSO de a)

DEFINICION: Un grupo $(G, \star)$ es ABELIANO si la operación $\star$ es CONMUTATIVA.

Revise las actividades 4), 5), 7), 8) y 9) y constate cuáles de los grupoides considerados tienen estructura de grupo y/o grupo Abeliano.

ACTIVIDAD 12.

Dibuje en su cuaderno un triángulo. A sus vértices desígnelos por A, B y C. En este ejercicio habrán tres estados, ya que se puede estar en A, en B o en C. Definiremos tres movimientos:

N: quedarse en el mismo sitio;

D: desplazarse al vértice inmediato en el sentido del movimiento de los punteros del reloj;

I: desplazarse al vértice inmediato en el sentido opuesto al movimiento de los punteros del reloj.

Luego, nuestro universo es $R = \{N, D, I\}$ y definiremos en este conjunto una ley de composición, mediante el operador $\star$ .

Regla para $a \star b$, $(\forall\ a, b \in R)$: "*a partir de una posición inicial, efectúe sucesivamente los dos movimientos indicados*".

a) Suponga, por ejemplo, que se encuentra en C. Efectúe el movimiento D. ¿Dónde está ahora? Si vuelve a hacer el movimiento D. ¿Dónde está ahora?. Si quiere pasar de C a A con un movimiento único, qué movimiento debe efectuar?. Luego, $D \star D$ = ......................

b) Investigue qué ocurre cuando toma como punto de partida, un punto distinto de C.

c) ¿Cuántas maneras hay de componer estos movimientos de a dos?

d) Encuentre en cada caso el movimiento único equivalente. Registre estos resultados en una tabla de doble entrada, como la siguiente:

| * | N | D | I |
|---|---|---|---|
| N | | | |
| D | | | |
| I | | | |

e) ¿Es un grupo el grupoide resultante?
¿Es grupo abeliano?

ACTIVIDAD 13.

Considere dos cualesquiera de los tres números del siguiente conjunto A = {1, 2, 3} , y súmelos. También le está permitido sumar un número consigo mismo.

Una vez sumados los dos números, divida el resultado por 3, y registre el resto o resíduo obtenido en una tabla de doble entrada.

Ejemplos: i) 2 + 3 = 5
5 : 3 = 1, resto 2

ii) 1 + 1 = 2
2 : 3 = 0, resto 2

i) Investigue los restos para los otros pares de números. Registre cada vez los restos correspondientes en la tabla de doble entrada.

ii) Compare la tabla obtenida con la correspondiente a la actividad 12. ¿Qué observa? ¿Tiene algún parecido con respecto a la disposición de sus elementos?

¿Es "+" una operación en A?

Modifique su conjunto universo. Sea esta vez B ={0, 1, 2.}
Proceda en forma análoga a los puntos anteriores, completando la correspondiente tabla de doble entrada. Compárela ahora con la de la actividad 12.

¿Son las estructuras de estos grupoides *"isomorfas"* ?

## 4. EVALUACION FINAL.

EJERCICIO 1.

Consideremos los siguientes cuatro estados: una persona puede encontrarse mirando hacia uno de los 4 puntos cardinales. Hay igualmente cuatro movimientos:

N : quedarse en el mismo sitio;
I : giró en 90º a la izquierda;
D : giró en 90º a la derecha;
O : giró en 180º (posición opuesta a la que tiene).

O sea, nuestro conjunto base es M ={N, I, D, O.}Definiremos en este conjunto una ley de composición mediante el operador ★. Regla para a ★ b: *"practicar sucesivamente los dos movimientos indicados"*. Por ejemplo, I ★ D = N.

i) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse de a dos estos cuatro movimientos?

ii) Para cada uno de estos casos, encuentre el movimiento único equivalente y registre los resultados en la tabla de doble entrada correspondiente.

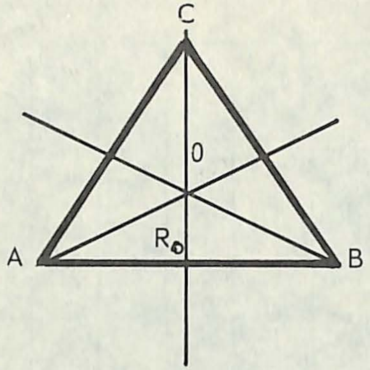
iii) ¿Es un grupo el grupoide resultante?
¿Es grupo Abeliano?

iv) ¿Puede la estructura del grupoide (M, ★) ser representada considerando un reloj de sólo cuatro marcas, dadas por el conjunto A = { 0, 1, 2, 3} y un operador ⊕, con la siguiente regla de composición para a ⊕ b: *"partiendo de la marca* a *mover el puntero en el sentido ordinario en* b *lugares"* ?

Construya la tabla de doble entrada correspondiente.

EJERCICIO 2.

Dibuje un triángulo equilátero y designe a sus vértices con las letras A, B y C. Luego dibuje sus alturas. Sea 0 su punto de intersección. Definiremos seis movimientos, tres alrededor del punto 0, que lleva al triángulo a mantener una posición similar a la inicial y tres respecto a los ejes de simetría A0, B0, y C0.




Sean:

| | | |
|---|---|---|
| $R_0$ : | rotación en 0º (0 en 360º) | $\left\{\begin{array}{l} A \longrightarrow A \\ B \longrightarrow B \\ C \longrightarrow C \end{array}\right.$ |
| $R_1$ : | rotación en 120º en sentido de las agujas de un reloj | $\left\{\begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ B \longrightarrow C \\ C \longrightarrow A \end{array}\right.$ |
| $R_2$ : | rotación en 120º en sentido contrario de las agujas del reloj | $\left\{\begin{array}{l} A \longrightarrow C \\ B \longrightarrow A \\ C \longrightarrow B \end{array}\right.$ |
| $S_1$ : | Simetría respecto al eje A0 | $\left\{\begin{array}{l} A \longrightarrow A \\ B \longrightarrow C \\ C \longrightarrow B \end{array}\right.$ |
| $S_2$ : | Simetría respecto al eje B0 | $\left\{\begin{array}{l} A \longrightarrow C \\ B \longrightarrow B \\ C \longrightarrow A \end{array}\right.$ |
| $S_3$ : | Simetría respecto al eje C0 | $\left\{\begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ B \longrightarrow A \\ C \longrightarrow C \end{array}\right.$ |

(Estos movimientos se llaman transformaciones geométricas).

O sea, nuestro conjunto es $T = \{ R_0, R_1, R_2, S_1, S_2, S_3 \}$

Definimos en este conjunto una ley de composición mediante el operador $\star$. Regla para $a \star b$: *"practicar sucesivamente las dos simetrías indicadas, a partir de una posición inicial"*.

Por ejemplo, $R_2 \star S_3 = S_1$; o también, utilizando la notación siguiente: $(R_2, S_3) \longrightarrow S_1$

Complete la tabla siguiente

Indicación:
Anote al reverso del triángulo dibujado, las mismas letras que designan los vértices del triángulo.

| $\star$ | $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_0$ | | | | | | |
| $R_1$ | | | | | | |
| $R_2$ | | | | | | $S_2$ |
| $S_1$ | | | | | | |
| $S_2$ | | | | | | |
| $S_3$ | | | | | | |

1. ¿Es el grupoide $(T, \star)$ un grupo?
   ¿Es grupo Abeliano?

2. Investigue el subconjunto R de las rotaciones:
   $R = \{ R_0, R_1, R_2 \}$

   ¿Qué puede afirmar del grupoide $(R, \star)$?
   ¿Es un grupo Abeliano?

EJERCICIO 3.

Consideremos tres compañeros de su grupo de trabajo, puestos de pie en fila, delante del resto del grupo. Sean estas personas Mabel, Martha y Victoria. ¿De cuántas maneras posibles se pueden ubicar estas tres personas en una fila?. Anote todos los casos posibles.

¿Cómo formular las reglas de tal manera que el movimiento de una persona dependiera del lugar que ocupa (en el momento que debe realizar el movimiento) y no por su nombre?

Designemos por A, B y C los 3 vértices del triángulo en las que pueden estar las personas entre dos movimientos; o sea, las letras representan los *lugares* que las personas ocupan entre dos movimientos y no a personas.

Definamos los siguientes movimientos:

N: Nadie se mueve;

D: Cada uno se mueve hacia el vértice más próximo, en el sentido del movimiento de las agujas del reloj.

R: Cada uno se mueve hacia el vértice más próximo, en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj;

A: B y C intercambian sus puestos; A se queda quieto; (la persona que esté ocupando el lugar B, intercambia su puesto con la persona que esté ocupando el lugar C, en el momento que deba realizarse el movimiento).

B: C y A intercambian sus puestos; B se queda quieto;

C: A y B intercambian sus puestos; C se queda quieto.

Nuestro conjunto base es, por lo tanto, P ={N, D, R, A, B, C} y tenemos como operador # .

Regla para a # b: *"practicar sucesivamente los dos movimientos indicados"*. Por ejemplo; D # R = N.

a) Complete la tabla de doble entrada correspondiente.

b) Comparar la tabla obtenida con la del ejercicio 2). ¿Hay diferencias en su estructura?

## 5. BIBLIOGRAFIA

DIENES, Zoltan P. GOLDING, E. W.: *"Grupos y Coordenadas"*. Edit. Teide, Barcelona, 1970.

‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡‡

El *"diseño"* presentado no ha sido validado a nivel de sala de clases. Es un *"candidato"* a DISEÑO DE APRENDIZAJE. Tienen la palabra los interesados, de quienes aguardamos de muy buen grado los comentarios y observaciones que se formulen al respecto. Gracias.

# A P E N D I C E

Una Taxonomía de Objetivos en el Aprendizaje de la Matemática:

## ESQUEMA TAXONOMICO DE AVITAL - SHETTLEWORTH

## 1. INTRODUCCION.

Uno de los instrumentos curriculares de mayor incidencia en el aprendizaje de la matemática, es el programa de estudio correspondiente. A su vez, la formulación de los fines generales, y con mayor intensidad aún los específicos, deben orientar la elección de los contenidos a incluir en los programas.

Por otro lado, y con carácter preferencial para la matemática, esta formulación de fines está íntimamente unida a la EVALUACION. Debe existir una relación consecutiva entre lo que se enseña y el resultado alcanzado, sin caer en el error de dar más importancia a las conductas tangibles y fáciles de controlar. En ningún momento el profesor puede conformarse con meras MEMORIZACIONES y COMPRENSIONES, tan de moda con el advenimiento de abundantes conceptos nuevos de la matemática moderna. No se vería mucha *"dinámica generativa"* en los alumnos, si hacen consistir la matemática en utilizar SIGNOS, SIMBOLOS, y TERMINOLOGIA nuevos. En matemática, como criterio de COMPRENSION, se juzga el grado de habilidad para aplicar los conocimientos adquiridos a situaciones nuevas.

Según las propias afirmaciones de los profesores, todos ellos enseñan para que los alumnos puedan *"comprender"*, y no simplemente *"memorizar"*. Esto nos hace sospechar que existen distintos grados de comprensión, dejando ambigüedad en el término *"comprender"*.

De allí, surge la necesidad de un *"MODELO"* o *"esquema"* de los niveles de alcances intelectuales. La existencia de tal esquema ayudará al profesor a identificar los niveles alcanzados y a planificar según las posibilidades del material humano que tiene a su cargo.

Encontramos este *"modelo"* en la obra de B.S.Bloom y sus colaboradores: *"Taxonomy of Educational Objectives"* (1956). Esta taxonomía pretende ser una clasificación de los objetivos o fines educacionales, dividiéndolos en seis categorías o niveles:

1) CONOCIMIENTO - Es el proceso mental que implica el recuerdo de nociones aprendidas anteriormente.

2) COMPRENSION - Es el proceso mental a través de la cual se revela la *"captación"* del material que se ha recibido a través de una comunicación, sin relacionarlo con otro material.

3) APLICACION - Es el uso de abstracciones (teorías, leyes, fórmulas) a situaciones especiales y concretas, parcialmente nuevas.

4) ANALISIS - Es la descomposición de una comunicación en sus elementos constitutivos de tal manera que se vea

clara la jerarquía de ideas y las interrelaciones entre ellos.

5) SINTESIS - Es la unión de los elementos o partes de una comunicación para formar un patrón nuevo que antes no estaba definido con suficiente claridad.

6) EVALUACION - Es la producción de juicios, cualitativos y cuantitativos, sobre el grado en que los materiales y métodos utilizados satisfacen los criterios.

Estos niveles se establecen en orden secuencial, de tal manera que quien domina en un orden superior, ya posee lo inferior.

Los autores de esta obra, describen las principales categorías de su Taxonomía en términos muy generales, ofreciendo un amplio grupo de medios, de medición para cada categoría. Su idea es que ellas se adaptan a cualquier disciplina, y pueden actuar como guías en la elección de fines de cualquier ramo escolar. Pero aún así, la Taxonomía presenta muy pocos ejemplos relacionados con la matemática. Por lo tanto, nos parece que una ADAPTACION EN ESTE SENTIDO, ACRECENTARIA SU POTENCIALIDAD INSTRUMENTAL PARA PROFESORES DE MATEMATICA.

Esta parte del presente trabajo, describe una manera de clasificar los fines de la enseñanza de la matemática, basada en las grandes categorías de la Taxonomía, pero adaptadas más bien a REALIZACIONES y su MEDICION.

## 2. NIVELES DEL PENSAMIENTO MATEMATICO.

Siendo nuestra META delinear una taxonomía de los objetivos de la enseñanza de la matemática, nuestro primer paso consistirá a identificar los niveles del PENSAMIENTO MATEMATICO.

Parece que podemos reconocer tres de estos niveles, que serían, en orden creciente:

1) RECONOCIMIENTO de la materia estudiada anteriormente; es decir, habilidad de repetir algo que ha sido enseñado explícitamente.

2) PENSAMIENTO ALGORITMICO, es decir, generalización o transferencia a materias similares; y

3) BUSQUEDA ABIERTA, como culminación del quehacer matemático.

Expliquemos brevemente cada nivel por el momento, ya que se profundizará cada uno más adelante.

El primer nivel, RECONOCIMIENTO, comprende el mero recuerdo de nociones enseñadas y aprendidas de alguna manera.

El segundo nivel, PENSAMIENTO ALGORITMICO, es aquel en que el estudiante utiliza procesos bien definidos y relaciones mentales, (ALGORITMOS), para resolver problemas matemáticos planteados, que contienen cierta similitud con lo aprendido. El nivel crece a medida que disminuye esa similitud.

En fin, el tercer grado de complejidad en comprensión matemática, BUSQUEDA ABIERTA, sicológicamente difícil de describir, y al cual los teóricos dan una gran variedad de tratamientos, consiste en reestructurar partes del problema, encontrar relaciones nuevas e insospechadas, y hasta soluciones inéditas. Llega a ser como una *iluminación*, una aparición súbita en la mente de una solución, como fase delicada en el pensamiento matemático superior. A modo de ejemplo, este nivel lo alcanzaría un niño que descubre, sin ayuda exterior ninguna, que los cuadrados de los Naturales no terminan nunca en 2, 3, 7, u 8.

## 3. RELACION ENTRE EL ESQUEMA TAXONOMICO DE AVITAL-SHETTLEWORTH Y LAS CATEGORIAS DEL DOMINIO COGNOSCITIVO DE BLOOM Y COL.

| PROCESOS DEL PENSAMIENTO (Avital y Shettleworth) | NIVELES TAXONOMICOS (Bloom) |
|---|---|
| 1. RECONOCIMIENTO - - - - - - - - - - - - - - - | a) conocimiento |
| 2. PENSAMIENTO ALGORITMICO - - - - - - - | b) comprensión |
| | c) aplicación |
| 3. BUSQUEDA ABIERTA - - - - - - - - - - - - | d) análisis |
| | e) síntesis |
| | f) evaluación |

Las páginas que vienen a continuación, describirán las realizaciones correspondientes a cada categoría, como también presentarán un esquema de los objetivos matemáticos incluídos en cada categoría.

Como podemos apreciar, la EVALUACION como sexta categoría en la Taxonomía, determina el nivel más complejo de realización. Pero, para el caso concreto de la Matemática, no se contempla la evaluación sicológicamente distinta de las categorías ANALISIS y SINTESIS.

## 4. NIVELES TAXONOMICOS.

### 4.1. Conocimiento

La categoría inferior del pensamiento matemático, es el CONOCIMIENTO (saber al primer grado), que consiste en el recuerdo o repetición de la materia en la misma forma en que fue presentada. Por lo tanto, podemos catalogar en esta categoría, la memorización de datos y definiciones, las reglas, procedimientos y teorías, que intervienen en alguna actividad matemática. Si el alumno introduce cambios y transformaciones para contestar o solucionar un problema planteado, demuestra una capacidad de mayor categoría.

Es fácil comprender que no se puede pasar a niveles superiores sin franquear primero la fase inferior. Por eso, al apreciar realizaciones a un nivel superior, admitimos tácitamente el control de lo inferior. Por otra parte, puede presentarse el caso de una persona que se desenvuelve cómodamente en niveles superiores sin poder expresar con claridad el conocimiento que tiene. Una cosa es CONOCER y otra EXPRESARLO.

4.2. Comprensión.

El proceso del pensamiento matemático, después del RECONOCIMIENTO, pasa al grado PENSAMIENTO ALGORITMICO. Los niveles correspondientes de este segundo proceso son: COMPRENSION y APLICACION, constituyendo aquellas categorías en que los conceptos matemáticos requieren un proceso sicológico de *generalización* o de *transferencia* simple. La diferencia entre estas dos categorías corresponde al menor o mayor grado de transferencia que se debe aportar con relación a lo que se ha estudiado.

Pasemos a profundizar ahora, la categoría COMPRENSION. Se consideran como casos de *comprensión*, en actividades matemáticas, la facilidad imaginativa para ilustrar concretamente problemas abstractos, la agilidad para pasar de las palabras a sus correspondientes símbolos (y vice-versa), y el uso de algoritmos apropiados en construcciones matemáticas. Naturalmente, no hay *comprensión* si previamente no hubo *conocimiento*.

De particular importancia en matemática, es la sub-categoría que establece Bloom de la *comprensión* , y la denomina: *"traslación"*. En matemática, se recurre con mucha frecuencia al símbolo *"secundario"*, escrito o hablado, tales como *"raíz"*, la variable "x", etc. . . los cuales tienen un papel fundamental en la gimnasia mental que exige la matemática. Es muy posible que estos símbolos no respondan adecuadamente a lo que representan. Por ejemplo, si el par ordenado (4,4) indica al alumno el Racional 4 coma 4, o que el cuociente trigonométrico sen $\pi$/sen 2 $\pi$ da el resultado $\frac{1}{2}$ , ya que los $\pi$ y los sen se simplificaron, no se ha asegurado el uso correcto de simbolización, dejando sin cumplir una de las tareas de la COMPRENSION.

4.3. Aplicación.

Antes de entrar a una mayor explicación sobre la categoría APLICACION, conviene recalcar que se debe tener presente que la clasificación de los objetivos educacionales según la Taxonomía de Bloom, acusa siempre relación estrecha entre lo que puede rendir el alumno, y lo que le fue enseñado.

No es fácil establecer la diferencia entre COMPRENSION y APLICACION, ya que el mismo proceso sicológico (generalización y transferencia) aparece en ambas categorías. De allí surge la dificultad en formular un criterio objetivo para distinguir entre ambas. La mayor diferencia parece consistir en el grado de elaboración manifestado al realizar una tarea matemática determinada.

No obstante, existen varios rasgos característicos que dan a conocer si un problema es de la categoría APLICACION. Los planteamientos *"prefabricados"* de ciertos problemas, en que se exige que el alumno aplique principios dados a situaciones reales de la vida diaria, son generalmente de esta categoría, entendiéndose que el estudiante no aprendió esos principios de esta manera.

Quizás, para el caso del problema prefabricado, un rasgo que lo coloca definitivamente en la categoría APLICACION, sería el hecho de que se necesita normalmente por lo menos dos pasos para lograr su resolución:
i) formulación simbólica del problema, y
ii) transformación del simbolismo por medio de cierto algoritmo previo.

Si el material dado es suficientemente distinto de lo que el alumno aprendió, se consideran como casos de APLICACION; las situaciones en que el estudiante debe realizar varios pasos para lograr la solución, o utilizar varios algoritmos sucesivos cuya relación entre sí no le fue enseñada, corresponden a esta categoría.

La manera de describir los objetivos toma normalmente la forma siguiente: *"Utilizando el principio dado, el alumno debe ser capaz de resolver problemas de carácter científico, como también ejemplos sacados de otras esferas del saber humano".*

El profesor, además, puede desarrollar más objetivos específicos de APLICACION, relacionando tópicos en una disciplina con otras áreas científicas, o nuevas áreas dentro de la matemática.

4.4. Búsqueda Abierta.

El proceso del pensamiento de más alto nivel, se denomina BUSQUEDA ABIERTA, y consiste primordialmente en desarrollar actitudes de la inteligencia que conducen a solucionar problemas de mayor jerarquía.

Si un estudiante provisto de conocimientos bien asimilados, compuestos esencialmente de procesos, algoritmos y antecedentes en forma de palabras o símbolos, no consigue una solución satisfactoria y completa, no ha alcanzado todavía el nivel de la BUSQUEDA ABIERTA.

Existen varios criterios que permiten distinguir entre el proceso PENSAMIENTO ALGORITMICO y la BUSQUEDA ABIERTA. Entre otros se consideran: a) la cantidad de principios o antecedentes aplicados; b) el grado de diferencia que existen entre los datos formulados y los de problemas modelos; y c) la riqueza intelectual demostrada en la elección de combinaciones de procesos y disciplinas al margen de toda rutina de la materia asimilada. Pero, la diferencia esencial entre estos dos procesos del pensamiento, es la que existe entre el pensamiento, REPETITIVO y el pensamiento PRODUCTIVO.

En fin, para aportar mayor claridad en reconocer la BUSQUEDA ABIERTA como proceso del pensamiento, conviene estudiar un poco los dos niveles correspondientes de la Taxonomía de Bloom: ANALISIS y SINTESIS.

Análisis.

Por medio del esquema establecido en la página 41 , sabemos que ANALISIS es el nivel taxonómico inferior en el proceso mayor del pensamiento. Aparece justamente cuando no existe solución algorítmica útil para resolver un problema dado.

El nivel ANALISIS, que requiere comprensión tanto del contenido como de la estructura del material, es sinónimo de habilidad para subdividir un planteamiento o problema en sus elementos y partes constitutivas, dejando en evidencia la jerarquía de las ideas y explicitando las relaciones entre ellas.

Los objetivos en la categoría ANALISIS, tienen la forma: *"El alumno debe ser capaz de analizar la información conveniente en un problema dado y establecer una relación correcta entre las partes fundamentales de esa información para llegar a la solución"*

Síntesis.

Dentro de ese mismo proceso del pensamiento, a saber BUSQUEDA ABIERTA, existe otro nivel que es como la culminación para la inteligencia: la SINTESIS. Este nivel máximo consiste en la destreza y habilidad para juntar partes y elementos que deben constituir un todo novedoso con sentido *creador.* Puede involucrar entre otras cosas, un plan de operaciones o una investigación, como también un conjunto de relaciones abstractas que conducen a clasificar informaciones adecuadas.

Todo lo anterior nos hace descubrir el comportamiento eminentemente *creador* de este nivel taxonómico. De allí surge como dilema, la capacidad de parte del alumno en elegir principios que a primera vista pueden aparecer sin relación con el problema planteado.

Debemos hacer notar que, en parte, para calificar el nivel taxonómico alcanzado, hay que aplicar un criterio subjetivo. Si para un especialista una materia no es completamente nueva, exigiendo un mero pensamiento reproductivo, para el alumno lo es, e implica un pensamiento productivo desde el punto de vista educacional.

## 5. REALIZACIONES PRACTICAS.

### 5.1. Metas Pedagógicas.

Las páginas anteriores son una invitación insistente a renovar y mejorar nuestra pedagogía en la enseñanza de la matemática. Todo profesor debe considerar al *educando* como principal inspirador del proceso educacional. Hay que observar al niño para conocerlo y proporcionarle situaciones de aprendizaje de gran riqueza, a fin de que pueda desarrollar todo su potencial humano. Nada más dañino para un alumno que un educador que sólo mira el Programa y sobre esa base, organiza y realiza su clase.

Consecuentemente, la tarea de un profesor de Matemática no puede consistir exclusivamente en enseñar una colección de conocimiento, y desarrollar todo un equipo de procedimiento para resolver problemas. No debemos perder de vista nunca que un motivo fundamental para incluir la Matemática en el currículo escolar, en su valor intrínseco.

### 5.2. Ideal para alcanzar.

Cuando un profesor de Matemática enseña a sus alumnos cómo resolver un problema dado, exigiéndoles su reproducción o el mismo procedimiento para obtener la solución de un problema similar, el nivel taxonómico se reduce a CONOCIMIENTO, COMPRENSION y hasta APLICACION. Esta enseñanza no deja de ser meritoria, pero no debe consistir en un ideal. Hay que esforzarse por llegar al nivel superior. Para tal efecto, conviene realizar ejercicios de ANALISIS.

Este procedimiento desarrollado por Gagné (1963), consiste básicamente en dividir un problema complejo en sub-ejercicios componentes, estableciendo relaciones válidas entre ellos. Una ejercitación adecuada con los sub-ejercicios debe preceder todo intento de solución del problema completo.

No existe un método standard para inducir la solución de problemas a nivel superior. La capacidad e inteligencia del profesor encuentra aquí un vasto campo de actividades. Los primeros pasos en este sentido son especialmente inseguros y desoladores, pero la perseverancia conduce a un resultado óptimo.

## 6. Bibliografía.


6.1. AVITAL, Samuel - SHETTLEWORTH, Sara J.: Objectives for Mathematics Learning. Some Ideas for the Teacher. The Ontario Institute for Studies in the Education, 1969.

6.2. BLOOM, B. S. y COL.: *"Taxonomía de los Objetivos de la Educación"*. El Ateneo, Bs. Aires, 1972.

## BIBLIOGRAFIA GENERAL


1. MAGER, Robert F.: *"Objetivos para la enseñanza efectiva"*. Edit. Salesiana, Caracas, 1972.

2. MAGER, Robert F.: *"Análisis de Metas"*. Edit. Trillas, México, 1973.

3. GAGNE, Robert M.: *"Learning Hierarchies"*, Educational Psychologist, Vol. 6, Nº 1. Nov. 1968.

4. POPHAM - BACKER: *"Planeamiento de la Enseñanza"*, Edit. Paidos, *Bs. Aires, 1972.*

5. POPHAM - BACKER: *"Los Objetivos de la Enseñanza"*, Edit. Paidos, Bs. Aires, 1972.

6. Seminario-Memoria de Educación, parte II: *"Una contribución al quehacer docente"*. Prof.-Guía: T. Jarufe A. Escuela Educación U. C. 1972.

7. GAGNE, Robert M.: *"Las Condiciones del Aprendizaje"*. Edit. Aguilar, Madrid, 1971.

# INDICE GENERAL

En este trabajo intervinieron las siguientes personas:
Coordinador de Imprenta: Miguel Monserrat Vilches. Jefe Técnico del Sistema Offset: Ernesto Quintana Gutiérrez. Dibujo, diseño y diagramación: Ricardo Barrios Bañares. Composición: Clara Niñez Escobar, Adriana Aravena Valenzuela, Angélica Stack Siles. Fotomecánica: Eduardo Quintana Contreras, Asistente: Jorge González Muñoz. Montaje: Ernesto Quintana Contreras. Impresión: Carlos Olguín Olave, Juan Contreras Valenzuela, Alfonso Orellana Vargas. Encuadernación: Hernán Contreras C. y Equipo del C.P.E.I.P.

Lo Barnechea, 1975
CHILE

Propiedad del Estado
1975

00146

Impresos C.P.E.I.P.—CHI-29 Lo Barnechea