Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

UCE

UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN

PROGRAMA DE ESTUDIO

MATEMÁTICA

EDUCACIÓN PARA PERSONAS JÓVENES Y ADULTAS

FORMACIÓN GENERAL

Nivel 1 de Educación Media

Unidad de Currículum y Evaluación

Marzo 2022

Programa de estudio Matemática de Educación para Personas Jóvenes y Adultas (EPJA)
Nivel 1 de Educación Media
Documento aprobado por el Consejo Nacional de Educación mediante el Acuerdo N°019/2022

Equipo de Desarrollo Curricular
Unidad de Currículum y Evaluación
Ministerio de Educación 2022

IMPORTANTE

En el presente documento, se utilizan de manera inclusiva términos como “el docente”, “el estudiante”, “el profesor”, “el niño”, “el compañero” y sus respectivos plurales (así como otras palabras equivalentes en el contexto educativo) para referirse a hombres y mujeres.

Esta opción obedece a que no existe acuerdo universal respecto de cómo aludir conjuntamente a ambos sexos en el idioma español, salvo usando “o/a”, “los/las” y otras similares, y ese tipo de fórmulas supone una saturación gráfica que puede dificultar la comprensión de la lectura.

ÍNDICE

Presentación 4

Nociones Básicas 5

Consideraciones generales 11

Propósitos formativos de la asignatura de Matemática 25

Enfoque de la asignatura 25

Estructura curricular Matemática 26

Objetivos de Aprendizaje 26

Orientaciones didácticas y pedagógicas 31

Visión panorámica Objetivos de Aprendizaje y conocimientos esenciales 37

Módulos obligatorios de la asignatura 39

Módulo obligatorio 1 40

Propósito del módulo obligatorio 1 41

Ruta de Aprendizaje del Módulo obligatorio 1 42

Actividad de desempeño 1 43

Actividad de desempeño 2 53

Actividad de desempeño 3 62

Actividad de desempeño 4 72

Módulo obligatorio 2 81

Propósito del módulo obligatorio 2 82

Ruta de Aprendizaje del Módulo obligatorio 2 83

Actividad de desempeño 1 84

Actividad de desempeño 2 94

Actividad de desempeño 3 103

Actividad de desempeño 4 112

Módulo obligatorio 3 123

Propósito del módulo obligatorio 3 124

Ruta de Aprendizaje del Módulo 3 125

Actividad de desempeño 1 126

Actividad de desempeño 2 134

Actividad de desempeño 3 142

Actividad de desempeño 4 151

Módulo 4 160
Propósito del módulo 4 161
Ruta de Aprendizaje del Módulo 4 162
Actividad de desempeño 1 163
Actividad de desempeño 2 171
Actividad de desempeño 3 178
Actividad de desempeño 4 187
Módulos electivos 195
Módulo Aprendizaje Basado en Proyecto 196
Módulo Aprendizaje Basado en Problemas 210

Presentación

Las Bases Curriculares para EPJA establecen Objetivos de Aprendizaje (OA) de habilidades y actitudes que se integran con conocimientos esenciales para la comprensión de grandes ideas consideradas relevantes en cada asignatura. El presente Programa de estudio es una propuesta de organización curricular que define y desarrolla actividades de desempeño para que los estudiantes construyan los aprendizajes establecidos para cada nivel de enseñanza.

Al Ministerio de Educación le corresponde la tarea de elaborar Programas de estudio que orienten la implementación de las Bases Curriculares para aquellos establecimientos que no han optado por la elaboración de programas propios. Estos programas constituyen un complemento coherente y alineado con las Bases Curriculares y son una herramienta para apoyar a los docentes en el logro de los Objetivos de Aprendizaje y propósitos formativos declarados en cada asignatura y nivel.

Los Programas de estudio constituyen una propuesta que los establecimientos pueden implementar, o ser un referente para aquellos establecimientos que deseen elaborar Programas de estudio propios. En este sentido, responden a las múltiples realidades educativas que se derivan de los distintos contextos en los cuales se imparte la modalidad, y que dan origen a una diversidad de aproximaciones didácticas, metodológicas y organizacionales, que se expresan en el desarrollo de distintos proyectos educativos, todos válidos mientras permitan el logro de los Objetivos de Aprendizaje.

Los Programas de estudio proponen al docente una organización de los Objetivos de Aprendizaje, conocimientos esenciales y grandes ideas de acuerdo con el tiempo disponible dentro del año escolar, y constituyen una orientación acerca de cómo desarrollar una comprensión profunda y significativa. Se trata de una estimación temporal aproximada y de carácter propositivo y que, por tanto, puede ser adaptada por los docentes de acuerdo a la realidad de sus estudiantes y de su establecimiento.

Para apoyar la implementación de las Bases, los Programas proporcionan orientaciones disciplinares, didácticas y criterios de evaluación formativa que pueden utilizarse como apoyo para las actividades de desempeño sugeridas. Las actividades de desempeño son actividades que permiten a los estudiantes poner en “uso” el conocimiento esencial; para esto, aplican los procedimientos que definen a las habilidades y actitudes declaradas en los Objetivos de aprendizaje. Las actividades de desempeño, en consecuencia, permiten construir aprendizajes y recoger evidencias de comprensión. Estas actividades se enriquecen con recomendaciones de recursos didácticos complementarios y bibliografía para profesores y estudiantes; se enmarcan en un modelo pedagógico cuyo enfoque es el de la comprensión, lo que implica establecer conexiones desde la experiencia del estudiante, al interior de cada disciplina y también con otras áreas del conocimiento. Las actividades de desempeño de los Programas ilustran un modelo para que cada docente, en su establecimiento, pueda construir nuevas actividades acordes con las diversas realidades.

Nociones Básicas

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DE HABILIDADES Y ACTITUDES NUCLEARES

Los Objetivos de Aprendizaje definen los aprendizajes terminales esperables para una asignatura determinada en cada nivel escolar, y evidencian de forma clara y precisa cuál es el aprendizaje que el estudiante debe lograr. Los Objetivos de Aprendizaje de estas Bases Curriculares refieren a las habilidades y actitudes fundamentales de cada asignatura, y se constituyen en el núcleo del aprendizaje.

Las habilidades son definidas como procesos estratégicos centrales para realizar tareas y para solucionar problemas con precisión y adaptabilidad. Favorecen la transferencia educativa, es decir, la capacidad para utilizar el conocimiento y aplicarlo a nuevos contextos.

Las actitudes, por su parte, son disposiciones frente a objetos, ideas o personas, que incluyen componentes afectivos, cognitivos y valorativos, y que inclinan a las personas a determinados tipos de acciones. Las actitudes que conforman los OA refieren a los cuatro ámbitos del marco de Habilidades para el siglo XXI, y su inclusión responde a criterios de pertinencia para ser trabajadas integradamente con las habilidades. En los niveles de Básica, se prioriza el desarrollo de actitudes que fomentan la autonomía y la proactividad, y en los niveles de Media actitudes que fomentan la responsabilidad personal y social de los estudiantes.

Las actitudes y las habilidades se integran en la construcción de los Objetivos de Aprendizaje nucleares, lo que evidencia su interdependencia y su importancia para una formación integral, que permita a los estudiantes contar con una combinación de valores, disposiciones, habilidades y conocimientos para enfrentar los desafíos del futuro[1].

CONOCIMIENTOS ESENCIALES

Los conocimientos esenciales refieren a una red conceptual coherente y rica en conexiones, que permite construir la comprensión sobre los fenómenos y el mundo. El conocimiento entendido como comprensión, permite a los estudiantes refinar, transformar o reemplazar ideas preexistentes que han adquirido en su experiencia vital y cotidiana, y moverse con flexibilidad entre visiones generales y detalles, generalizaciones y ejemplos sobre los fenómenos que estudian.
Los conocimientos esenciales son prioritarios e imprescindibles, pues constituyen una base que permite avanzar de manera progresiva en el aprendizaje de cada asignatura, y construir nuevos conocimientos.

[1] OECD (2020). Op. Cit., pág. 5.

PROPÓSITO FORMATIVO

Los propósitos formativos de cada asignatura definen las finalidades educativas que se busca desarrollar a partir de los Objetivos de Aprendizaje y conocimientos esenciales en cada nivel. Entregan el para qué del aprendizaje y buscan evidenciar cómo cada asignatura contribuye al logro de los Objetivos generales de la Educación Media, definidos en la Ley General de Educación.
En estas Bases Curriculares, las grandes ideas operan como propósito formativo de cada nivel, orientando la comprensión y la articulación de los Objetivos de Aprendizaje y los conocimientos esenciales.

ENFOQUE DE LA ASIGNATURA

Explican los principales principios, teorías y conceptos disciplinares desde los cuales se han construido los aprendizajes de la asignatura. Se presenta una visión actualizada de dichos elementos de acuerdo con el desarrollo de las disciplinas. En el enfoque de la asignatura se explicitan también los énfasis teóricos y perspectivas disciplinares desde las cuales se espera que los docentes y estudiantes aborden los conocimientos, habilidades y actitudes incluidos en los Objetivos de Aprendizaje. Asimismo, en esta sección se explican los enfoques didácticos que permiten orientar la implementación de la asignatura en el aula. Esto último se sustenta en los conceptos, teorías y principios pedagógicos de la enseñanza de cada disciplina.

HABILIDADES Y ACTITUDES PARA EL SIGLO XXI

La existencia y el uso de la tecnología en el mundo global, multicultural y en constante cambio ha determinado nuevos modos de acceso al conocimiento, de aplicación de los aprendizajes y de participación en la sociedad. Estas necesidades exigen competencias particulares, identificadas internacionalmente como Habilidades del siglo XXI, y responden a los diversos requerimientos del mundo actual, como el aprendizaje de nuevas maneras de pensar, de aprender, de relacionarse con los demás, de comunicarse, de usar la tecnología, de trabajar, de participar en la sociedad, de desarrollarse como persona y de desarrollar la creatividad, entre otros[2].

Las Habilidades para el siglo XXI corresponden al foco formativo central que propende a la formación integral de los estudiantes. Corresponden a un marco de habilidades y actitudes transversales a todas las asignaturas y a partir de las cuales cada una define sus propios aprendizajes disciplinares. Se presentan organizadas en torno a cuatro ámbitos: Maneras de pensar, Maneras de trabajar, Herramientas para trabajar y Maneras de vivir en el mundo.

---

[2] El conjunto de habilidades seleccionadas para las Bases Curriculares de EPJA corresponden a una adaptación de distintos modelos (Binkley et al., 2012; Fadel et al., 2016). Se han organizado en cuatro categorías: Maneras de pensar, Maneras de trabajar, Herramientas para trabajar y Maneras de vivir en el mundo.

MANERAS DE PENSAR

Desarrollo de la creatividad y la innovación

Las personas creativas poseen habilidades de pensamiento divergente, producción de ideas, fluidez, flexibilidad y originalidad. El pensamiento creativo implica abrirse a diferentes ideas, perspectivas y puntos de vista, ya sea en la exploración personal o en el trabajo en equipo. La enseñanza para la creatividad implica asumir que el pensamiento creativo puede desarrollarse en todas las instancias de aprendizaje y en varios niveles: imitación, variación, combinación, transformación y creación original. Por ello, es importante que los docentes consideren que, para lograr la creación original, es necesario haber desarrollado varias habilidades y que la creatividad también puede enseñarse mediante actividades más acotadas según los diferentes niveles.

Desarrollo del pensamiento crítico

El pensamiento crítico permite discriminar entre informaciones, declaraciones o argumentos, evaluando su contenido y pertinencia. Permite cuestionar la información, tomar decisiones y emitir juicios, como asimismo reflexionar críticamente acerca de diferentes puntos de vista, tanto de los propios como de los demás, ya sea para defenderlos o contradecirlos sobre la base de evidencias. Contribuye así, además, a la autorreflexión y corrección de errores, y favorece la capacidad de estar abierto a los cambios y de tomar decisiones razonadas. El principal desafío en la enseñanza del pensamiento crítico es la aplicación exitosa de estas habilidades en contextos diferentes de aquellos en que fueron aprendidas.

Desarrollo de la metacognición

Corresponde al concepto de "aprender a aprender". Se refiere a ser consciente del propio aprendizaje y de los procesos para lograrlo, lo que permite autogestionarlo con autonomía, adaptabilidad y flexibilidad. El proceso de pensar acerca del pensar involucra la reflexión propia sobre la posición actual, fijar los objetivos a futuro, diseñar acciones y estrategias potenciales, monitorear el proceso de aprendizaje y evaluar los resultados. Incluye tanto el conocimiento que se tiene sobre uno mismo como estudiante o pensador, como los factores que influyen en el rendimiento. La reflexión acerca del propio aprendizaje favorece su comunicación, por una parte, y la toma de conciencia de las propias capacidades y debilidades, por otra. Desde esta perspectiva, desarrolla la autoestima, la disciplina, la capacidad de perseverar y la tolerancia a la frustración.

Desarrollo de Actitudes

- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.
- Pensar con apertura a distintas perspectivas y contextos, asumiendo riesgos y responsabilidades.
- Pensar con consciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.
- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.
- Pensar con reflexión propia y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar.
- Pensar con consciencia de que los aprendizajes se desarrollan a lo largo de la vida y enriquecen la experiencia.
- Pensar con apertura hacia otros para valorar la comunicación como una forma de relacionarse con diversas personas y culturas, compartiendo ideas que favorezcan el desarrollo de la vida en sociedad.

MANERAS DE TRABAJAR

Desarrollo de la comunicación

La comunicación, ya sea escrita, oral o multimodal, requiere generar estrategias y herramientas que se adecuen a diversas situaciones, propósitos y contextos socioculturales, con el fin de transmitir lo que se desea de manera efectiva. La comunicación permite desarrollar la empatía, la autoconfianza, la valoración de la interculturalidad, así como la adaptabilidad, la creatividad y el rechazo a la discriminación.

Desarrollo de la colaboración

La colaboración entre personas con diferentes habilidades y perspectivas faculta al grupo para tomar mejores decisiones que las que se tomarían individualmente. Además, el trabajo colaborativo entre pares determina nuevas formas de aprender y de evaluarse a sí mismo y a los demás, lo que permite visibilizar los modos en que se aprende; esto conlleva nuevas maneras de relacionarse en torno al aprendizaje.

La colaboración implica, a su vez, actitudes clave para el aprendizaje en el siglo XXI, como la responsabilidad, la perseverancia, la apertura de mente hacia lo distinto, la aceptación y valoración de las diferencias, la autoestima, la tolerancia a la frustración, el liderazgo y la empatía.

Desarrollo de Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.
- Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.
- Trabajar con empatía y respeto en el contexto de la diversidad, eliminando toda expresión de prejuicio y discriminación.
- Trabajar con autonomía y proactividad en trabajos colaborativos e individuales para llevar a cabo eficazmente proyectos de diversa índole.

HERRAMIENTAS PARA TRABAJAR

Desarrollo de la alfabetización digital

Promueve el desarrollo del pensamiento computacional, la autonomía y el trabajo en equipo, la creatividad, la participación en redes de diversa índole, y el interés por ampliar los propios intereses y horizontes culturales, por medio del uso responsable de la tecnología para hacer frente a nuevos desafíos, como la ciberseguridad y el autocuidado. La utilización de la tecnología como herramienta de trabajo implica dominar las posibilidades que ofrece, como asimismo darle un uso creativo e innovador que, a la vez, promueva el pensamiento crítico. A partir de esto, la alfabetización digital apunta también a la resolución de problemas en el marco de la cultura digital que caracteriza al siglo XXI, aprovechando las herramientas que nos da la programación, el pensamiento computacional, la robótica e internet, entre otros, para desarrollar habilidades que permitan crear contenidos digitales, informarnos a partir de la tecnología y vincularnos con los demás utilizando la tecnología.

Desarrollo del uso de la información

Dice relación con la eficacia y eficiencia en la búsqueda, el acceso, el procesamiento, la clasificación, la integración, la gestión, la evaluación crítica, el uso creativo y ético, y la comunicación, de la información. Implica formular preguntas, indagar y generar estrategias para seleccionar, organizar y comunicar la información. Tiene además siempre en cuenta tanto los aspectos éticos y legales que la regulan, como el respeto a los demás y a su privacidad. Promueve también el acceso, uso responsable, aplicación eficaz y evaluación crítica de Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), y su uso creativo de acuerdo con distintos propósitos, atendiendo a las características y convenciones de diversos contextos multiculturales.

Desarrollo de Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.
- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.
- Valorar las TIC como una oportunidad para informarse, investigar, socializar, comunicarse y participar como ciudadano.
- Actuar responsablemente al gestionar el tiempo para llevar a cabo eficazmente los proyectos personales, académicos y laborales.
- Actuar de acuerdo con los principios de la ética en el uso de la información y de la tecnología, respetando la propiedad intelectual y la privacidad de las personas.

MANERAS DE VIVIR EN EL MUNDO

Desarrollo de la ciudadanía local y global

La ciudadanía se refiere a la participación del individuo en su contexto desde una perspectiva política, social, territorial, cultural, económica, medioambiental, entre otras dimensiones. Por ello, es necesaria la interacción eficaz con las instituciones públicas y la participación en iniciativas que apoyen la cohesión social. La participación también implica reflexionar y tener un juicio crítico acerca de los mensajes de los medios de comunicación masiva, de modo de adoptar una postura razonada ante ellos. La conciencia de ser ciudadano promueve el sentido de pertenencia y la valoración y ejercicio de los principios democráticos, como los derechos humanos y la igualdad, así como asumir sus responsabilidades como tal. En este sentido, el respeto a los demás, a su privacidad, y a las diferencias valóricas, religiosas y étnicas cobra gran relevancia; se relaciona directamente con una actitud empática, de mentalidad abierta y de adaptabilidad.

Desarrollo del plan de vida y carrera

La construcción y consolidación de un proyecto de vida y de una carrera, oficio u ocupación, requiere la capacidad de adaptarse a los cambios para poder desenvolverse en distintos roles y contextos. Para el logro de objetivos personales, es necesario establecer metas, crear estrategias para conseguirlas, desarrollar la autogestión, actuar con iniciativa y compromiso, ser autónomo para ampliar los aprendizajes, ser autocrítico, reflexionar críticamente y estar dispuesto a integrar las retroalimentaciones recibidas. Por otra parte, para lograr estas metas se requiere interactuar con los demás de manera flexible, con la capacidad de trabajar en equipo y negociar para la búsqueda de soluciones. Esto permite el desarrollo de liderazgo, responsabilidad, ejercicio ético del poder y el respeto a las diferencias en ideas y valores.

Desarrollo de responsabilidad personal y social

La responsabilidad personal y social se interrelacionan constantemente. En lo personal, el respeto por los demás y el rechazo a la discriminación, la conciencia acerca de la propia cultura y las relaciones de esta con las del mundo, el compromiso con la propia vida y el contexto inmediato, y el control de la agresión, la violencia y la autodestrucción permiten que las personas se desarrollen de una manera integral. Por otra parte, el compromiso con la propia persona se traduce, a su vez, en una manera sana y activa de relacionarse con los demás, generando confianza en los otros y comunicándose de una manera asertiva, empática, libre de prejuicios, que acepte los distintos puntos de vista y contribuyendo a mejorar la sociedad en la que vive. Estas habilidades apuntan a ser consciente de sí mismo y de los otros, y realizar acciones concretas que den cuenta de la responsabilidad que tiene el individuo con su vida y con su entorno.

Desarrollo de Actitudes

- Perseverar en torno a metas con miras a la construcción de proyectos de vida y al aporte a la sociedad y al país con autodeterminación, autoconfianza y respeto por uno mismo y por los demás.
- Participar asumiendo posturas razonadas en distintos ámbitos: cultural, social, político, medioambiental, entre otros.
- Tomar decisiones razonadas y que contribuyan al bien común, respetando los derechos humanos, la diversidad y la multiculturalidad.
- Actuar con honestidad, responsabilizándose por las propias acciones y decisiones con consciencia de las implicancias que estas tienen sobre uno mismo y los otros.

Consideraciones generales

Las consideraciones que se presentan a continuación son relevantes para una óptima implementación de los Programas de Estudio, se vinculan estrechamente con los enfoques curriculares, y permiten abordar de mejor manera los Objetivos de Aprendizaje de las Bases Curriculares.

El estudiante de Educación para Jóvenes y Adultos

PERFIL DE EGRESO

La formación habilita al estudiante para conducir su propia vida en forma autónoma, plena y responsable, de modo que pueda desarrollar planes de vida y proyectos personales, continuar su proceso educativo formal mediante la educación superior, o incorporarse a la vida laboral.

Los estudiantes que egresan de la modalidad de Jóvenes y Adultos han desarrollado los conocimientos, habilidades y actitudes definidas en el currículum nacional y transfieren sus aprendizajes a distintos ámbitos: social, cultural, cívico, laboral, intelectual y personal. A partir de dichos aprendizajes, son capaces de alcanzar sus metas académicas y laborales, y de construir un proyecto de vida de acuerdo con sus necesidades e intereses, actuando con autonomía, responsabilidad.

Considerando el marco de Habilidades del siglo XXI y los Objetivos generales de la Ley General de Educación, las Bases Curriculares para la EPJA definen un conjunto de diez competencias que reúnen habilidades, actitudes y conocimientos que los estudiantes han adquirido al finalizar el Segundo Nivel de Educación Media de la modalidad. Estas competencias se organizan según los ámbitos de las Habilidades del siglo XXI, y su relación de tributación con las habilidades y actitudes nucleares de los Objetivos de Aprendizaje. La competencia 1 se refiere al dominio disciplinar de las asignaturas que los estudiantes deberán dominar al finalizar la Educación Media.

Dominio disciplinar

1. Aplica conocimientos y habilidades disciplinares de las áreas del lenguaje, las matemáticas, las ciencias, la historia y la geografía y el idioma extranjero inglés en contextos que impliquen aprendizaje y desarrollo personal.

Maneras de pensar

2. Gestiona el proceso de aprendizaje personal por medio de habilidades de metacognición, reflexión y comunicación, demostrando autonomía, motivación y una sólida autoestima y confianza en las propias capacidades para mejorar y enriquecer su desarrollo personal y cognitivo.

3. Identifica problemas, elabora argumentos, considera nuevas ideas, y propone soluciones creativas e innovadoras ante los desafíos que enfrenta.

4. Piensa de manera crítica y elabora puntos de vista y opiniones propias, utilizando evidencia y con una actitud abierta, dispuesta a cuestionar los supuestos y a reconsiderar las propias visiones.

Maneras de trabajar

5. Trabaja de manera colaborativa con otros en la resolución de problemas y en el desarrollo de proyectos, demostrando habilidades interpersonales de comunicación, gestión y monitoreo del trabajo, y capacidad para asumir roles, reconocer fortalezas y aceptar debilidades, y una actitud perseverante para alcanzar los objetivos propuestos.

6. Se comunica efectivamente con otros en lengua materna y en una lengua extranjera, con diferentes propósitos y en diversos contextos, por medio de habilidades de comunicación oral, escrita y no verbal, demostrando capacidad de escuchar y comprender distintos mensajes, y una valoración positiva del lenguaje como fuente de enriquecimiento cultural y personal.

Herramientas para trabajar

7. Utiliza internet y las herramientas digitales de manera efectiva y eficiente, demostrando habilidades de búsqueda, selección, manejo y producción de información, y capacidad para resolver tareas, reconociendo los aspectos éticos y legales involucrados en el acceso y uso de la información en ambientes digitales.

8. Demuestra compromiso y capacidad de autogestionar el aprendizaje en las diversas instancias de formación que enfrenta, por medio de habilidades que le permitan desenvolverse en distintos roles y contextos y planificar un proyecto de vida personal y laboral en el tiempo, desarrollando una disposición favorable al aprendizaje a lo largo de la vida.

Maneras de vivir en el mundo

9. Se relaciona de manera respetuosa, empática y constructiva con otros en las diversas instancias de intercambio y colaboración que enfrenta, demostrando conciencia y reconocimiento de la propia cultura y la de los demás, y una actitud de rechazo a la violencia, a la agresión y a la discriminación.

10. Demuestra conciencia de los derechos y responsabilidades ciudadanas al relacionarse con sus pares, con la comunidad y con las instituciones públicas, practicando habilidades de interacción eficaz, de participación y toma de decisiones, mostrando un compromiso con el bien común, la cohesión social, los Derechos Humanos y los principios de la democracia, a nivel local y global.

CONTEXTUALIZACIÓN CURRICULAR

La contextualización curricular es el proceso de apropiación y desarrollo del currículum en una realidad educativa concreta. Este se lleva a cabo considerando las características particulares del contexto escolar (por ejemplo, el medio en que se sitúa el establecimiento educativo, la cultura, el proyecto educativo institucional de la escuela y la comunidad escolar, el tipo de formación diferenciada que se imparte - Humanístico-Científica o Técnico Profesional), lo que posibilita que el proceso educativo adquiera significatividad para los estudiantes desde sus propias realidades y facilita, así, el logro de los Objetivos de Aprendizaje.

El marco de Habilidades y Actitudes que define esta propuesta permite desarrollar actitudes y habilidades que facilitan formas de pensar, de vivir en el mundo, formas de trabajar y herramientas para trabajar que definen el perfil del estudiante EPJA y que pueden ser utilizados como estrategias para atender a las necesidades de contextualización las diferencias que se presenten en las aulas. Los Programas de estudio son una propuesta de diseño de clases, de actividades y de evaluaciones flexible, que pueden modificarse, ajustarse y transferirse a diferentes realidades y contextos, considerando, entre otros:

Diversidad etaria; debido a que la edad de los estudiantes de Educación para Jóvenes y Adulto puede variar de los 15 a más de 50 años de edad, las actividades propuestas se han diseñado desde un principio de flexibilidad que permita en las aulas ajustarse a las distintas necesidades y posibilidades de estudiantes que no han iniciado o interrumpido su trayectoria formativa por un corto o un largo período de tiempo.

Tipos de establecimientos: considerando las distintas posibilidades originadas por el tipo de establecimiento en las que se implementa la modalidad; Tercera jornada, Centros de Educación Integrada de Adultos, Establecimientos Educacionales al interior de Recintos Penitenciarios y al interior de Unidades Militares, la ilustración didáctica de las actividades propuestas en el programa sugiere el uso de recursos y procedimientos tanto análogos como virtuales.

Trayectorias formativas: considerando que por razones diversas las trayectorias formativas de los estudiantes EPJA se interrumpen, y en consecuencia, la progresión de aprendizajes de las asignaturas que forman parte del Plan de Formación General en sus distintos Niveles de Educación Básica y Educación Media: Lenguaje y Comunicación/Lengua y Literatura, Matemática, Ciencias e Historia, Geografía, Ciencias Sociales y Educación Ciudadana, pueden estar afectadas, de modo que para la implementación de los programas de estudio se necesite realizar procesos previos de nivelación que permitan a los estudiantes avanzar en su trayectoria formativa. La implementación del programa se ha diseñado en un tiempo estimativo que, de acuerdo al plan de estudio, puede ajustarse a las necesidades formativas de los estudiantes.

INCLUSIÓN Y DIVERSIDAD

En el trabajo pedagógico, es importante comprender que la diversidad se entiende en términos culturales, sociales, étnicos, religiosos, de género, de estilos de aprendizaje y de niveles de conocimiento y/o de trayectorias escolares. Esta diversidad enriquece los escenarios de aprendizaje y está asociada a los siguientes desafíos:

- Desarrollar aprendizajes significativos que se relacionen con el contexto y la realidad de los estudiantes.
- Generar oportunidades inclusivas para desarrollar el aprendizaje en todos los estudiantes.
- Favorecer y potenciar metodologías integradoras y colaborativas tales como Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) y Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas (ABRP).

Atender a la diversidad de estudiantes, en sus contextos, implica reconocer las necesidades educativas de los estudiantes para diseñar experiencias de aprendizaje considerando tiempos, recursos y estrategias para que cada estudiante logre un aprendizaje de calidad. La experiencia y conocimiento que tengan los docentes sobre su asignatura y las estrategias que promuevan un aprendizaje profundo, son herramientas para tomar decisiones pertinentes y oportunas respecto de las necesidades de sus alumnos.

Para los estudiantes con necesidades educativas especiales, el conocimiento de los profesores, el apoyo y las recomendaciones de los especialistas contribuyen a que todos desarrollen al máximo sus capacidades. Algunas orientaciones para considerar:

- Generar ambientes de aprendizaje inclusivos, lo que implica que cada estudiante debe sentir seguridad para participar, experimentar y contribuir de forma significativa a la clase. Se recomienda destacar positivamente las características particulares y rechazar toda forma de discriminación, agresividad o violencia.
- Proveer igualdad de oportunidades, asegurando que los estudiantes puedan participar por igual en todas las actividades, evitando asociar el trabajo de aula con estereotipos asociados a género, características físicas o cualquier otro tipo de sesgo que provoque discriminación.
- Utilizar diversos materiales, estrategias didácticas y actividades que se adecuen a las singularidades de los estudiantes y sus intereses.
- Promover un trabajo sistemático, con actividades variadas para diferentes estilos de aprendizaje y con ejercitación abundante, procurando que todos tengan acceso a oportunidades de aprendizaje enriquecidas.

Orientaciones pedagógicas Programas de estudio EPJA

Todas las actividades siguen los pasos que caracterizan el proceso de aprendizaje en los jóvenes y adultos: identificar la necesidad del aprendizaje; crear una estrategia y recursos para alcanzarlos; desarrollar la estrategia y evaluarla. Para aprender, necesitan saber cuál es el propósito de su aprendizaje, aplicar lo aprendido en la vida profesional; y ser agentes de su propio aprendizaje, utilizando su experiencia.

La etapa inicial del aprendizaje es de gran importancia, ya que, si bien el estudiante puede no estar siempre consciente de lo que necesita aprender, la motivación y el compromiso por el aprendizaje como un medio para adquirir autonomía y aprender a aprender, pueden operar como incentivos poderosos para encontrar un sentido al aprendizaje escolar. Asimismo, es relevante que los estudiantes participen en el proceso de diseño del aprendizaje. La literatura señala que, en los estudiantes adultos, compartir el control de las estrategias de aprendizaje lo hace más eficaz.[3] Hacer participar a los estudiantes adultos como agentes de su aprendizaje, satisface su necesidad de conocer y estimula su autoconcepto como alumnos independientes[4].

Organización modular del Programa de estudio

Los Programas de estudio para las Bases Curriculares de la Educación de Jóvenes y Adultos, proponen una estructura modular que organiza los Objetivos de Aprendizaje de habilidades y actitudes, los conocimientos esenciales y las grandes ideas de cada asignatura de acuerdo con las Bases Curriculares aprobadas para la modalidad.

---

[3] Knowles, M. S., Holton III, E. F., & Swanson, R. A. (2014). The adult learner: The definitive classic in adult education and human resource development. Routledge, pág. 148.
[4] Ibídem.

Los módulos se definen como bloques unitarios de aprendizaje que integran habilidades, actitudes y conocimientos requeridos para adquirir desempeños flexibles en una determinada área o asignatura.

Todas las asignaturas, tanto del plan de Formación General como de Formación Instrumental cuentan con Programas de estudio modulares para su implementación. En cuanto a la estructura, cada asignatura se organiza por nivel en cuatro módulos obligatorios y cuatro módulos electivos. Los módulos obligatorios organizan los Objetivos de Aprendizaje, conocimientos esenciales y grandes ideas de cada nivel, y los módulos electivos ofrecen oportunidades de profundizar en el desarrollo del OA y en la comprensión de las grandes ideas del nivel, por medio del desarrollo de proyectos o la resolución de problemas.

MÓDULOS OBLIGATORIOS:

En coherencia con las Bases Curriculares, los módulos obligatorios organizan los Objetivos de Aprendizaje, los conocimientos esenciales y las grandes ideas del nivel. Cada módulo presenta cuatro actividades de aprendizaje y evaluación que desarrollan, como foco principal, las habilidades y actitudes de los Objetivos de Aprendizaje del nivel. En las Bases Curriculares para EPJA, las habilidades son entendidas como conocimientos procedimentales que desarrollan destrezas de pensamiento y hábitos de mente que permiten pensar en los contenidos en profundidad. Desarrollar habilidades permite a los estudiantes aprender a pensar sobre el conocimiento, ponerlo "en movimiento para hacer conexiones y predicciones", darle forma "para crear nuevos productos y resultados creativos", como señala David Perkins[5].

Organización del aprendizaje en los Módulos obligatorios

Los módulos obligatorios organizan el aprendizaje en torno al desarrollo de una actividad de desempeño y actividades de evaluación que se integran. Los elementos que componen estos módulos son:

- **Visión panorámica del Módulo**

La visión panorámica de cada módulo se presenta la gran idea, los objetivos de aprendizaje y conocimientos esenciales que se necesitan desarrollar para cumplir el propósito formativo del módulo. Por último, se identifica el tiempo semanal y en horas de clase propuesto para abarcar su implementación.

- **Propósito del módulo**

El propósito del módulo responde a tres interrogantes: ¿qué se espera que los estudiantes comprendan?, ¿cómo se evidenciará que los estudiantes han comprendido? y ¿cómo tributa el módulo al marco formativo de las Habilidades y Actitudes del SXXI? Para responder a la primera interrogante se explica brevemente la gran idea que se pretende construir en el módulo. Luego se relacionan explicativamente las habilidades, actitudes y conocimientos esenciales que pondrá en uso el estudiante para finalmente detallar cómo estos se integran y tributan al marco de Habilidades y actitudes del SXXI.

- **Ruta de aprendizaje**

Secuencia de 4 actividades de desempeño que describen sintéticamente qué habilidades – procedimientos estratégicos- y actitudes desarrollará el estudiante para poner en uso los conocimientos esenciales declarados en el módulo. Cada desempeño se construye identificando qué hace el estudiante – habilidad o procedimiento

[5] Perkins, D. Prólogo a Swartz, R. et al. (2017). Op. Cit., pág. 8.

aplicado- y el conocimiento esencial que se moviliza. El conjunto de actividades de desempeño se integra coherentemente para dar cuenta del propósito formativo general declarado en el módulo.

- **Actividades de desempeño**

Para organizar el desarrollo de las actividades propuestas se utilizan criterios didácticos transversales que guíen flexiblemente a los docentes, de modo que puedan transferir la propuesta a sus diferentes contextos. Los criterios utilizados se distinguen por su función didáctica, es decir, la finalidad formativa que se persigue a través de ello:

- Situación experiencial, permite enmarcar de forma situada un determinado aprendizaje, activando y enganchando el conocimiento previo con el nuevo conocimiento para desarrollar un aprendizaje significativo.
- Construcción del conocimiento, permite ilustrar cómo mediar, a través de una propuesta de selección de recursos y estrategias la adquisición y organización de nuevos conocimientos.
- Práctica guiada, modela paso a paso la mediación que realiza el docente, a través de actividades individuales, plenarias o colaborativas que desarrollan los estudiantes, para profundizar en la comprensión de un determinado conocimiento.
- Práctica independiente, detalla las actividades individuales y/o colaborativas que desarrollan los estudiantes para realizar desempeños flexibles que permitan profundizar y evidenciar su comprensión. Permite al docente monitorear el proceso de aprendizaje.
- Integración, corresponde a una actividad de síntesis que realiza el estudiante individualmente para evidenciar la comprensión del propósito declarado para la actividad. Por ejemplo, mediante el uso de ticket de salida.
- Orientaciones al docente: en esta sección se aclaran y precisan conceptos disciplinares que se han movilizado a la largo del módulo. Se realizan sugerencias complementarias al docente sobre el trabajo con adultos y/o estrategias didácticas que puedan facilitar su labor. Se sugieren seleccionar estrategias para guiar la retroalimentación y la evaluación formativa compartiendo criterios, estrategias de retroalimentación y rúbricas.

MÓDULOS ELECTIVOS

Los módulos electivos ofrecen oportunidades de profundizar en el desarrollo de las habilidades y actitudes de los Objetivos de Aprendizaje del nivel y en la comprensión de las grandes ideas. Se desarrollan por medio de metodologías de Aprendizaje basado en Proyectos y Aprendizaje basado en Resolución de problemas; se organizan en torno a un tema que es planteado como problema o desafío y que permite ampliar el conocimiento esencial, profundizar en la comprensión de las grandes ideas y conectar con los intereses y experiencias de los estudiantes.

Los problemas y desafíos podrán ser adaptados a los contextos, intereses y experiencias vitales de los estudiantes.

Se sugiere considerar los Objetivos de Desarrollo Sostenible de la Agenda para el Desarrollo Sostenible de la UNESCO como foco para orientar los problemas y proyectos a desarrollar en los módulos electivos. Estos temas son[6]:

1. Fin de la pobreza
2. Hambre cero
3. Salud y Bienestar
4. Educación de calidad[7]
5. Igualdad de género
6. Agua limpia y saneamiento
7. Energía asequible y no contaminante
8. Trabajo decente y crecimiento económico
9. Industria, innovación e infraestructura
10. Reducción de las desigualdades
11. Ciudades y comunidades sostenibles
12. Producción y consumo responsables
13. Acción por el clima
14. Vida submarina
15. Vida de ecosistemas terrestres
16. Paz, justicias e instituciones sólidas
17. Alianzas para lograr los objetivos. Esta metodología debe permitir generar un compromiso activo del estudiante con el aprendizaje, lo cual se logrará si es que este aprendizaje: conecta con sus necesidades o inquietudes, y sabe de antemano cuál será este aprendizaje (*qué* aprender), lo considera importante (*por qué* aprender) y sabe *cómo* ocurrirá este aprendizaje (plan de trabajo) e idealmente participa en su planeamiento.

Estructura del aprendizaje en los Módulos electivos

En coherencia con lo que plantean las Bases Curriculares, los módulos electivos ofrecen oportunidades para el desarrollo de metodologías de trabajo colaborativo y que aborden desafíos cognitivos y del entorno. En particular, los Programas de estudio desarrollan las metodologías de Aprendizaje basado en Proyectos y Aprendizaje basado en la Resolución de Problemas como propuestas que permiten desarrollar habilidades y poner en uso el conocimiento, integrar aprendizajes y promover la curiosidad y la búsqueda activa y creativa de respuestas. Estas metodologías buscan que los estudiantes puedan transferir el conocimiento a distintas áreas y/o situaciones de la vida real, por medio de aprendizajes significativos y relevantes. En cada nivel se ilustran dos ejemplos, uno de ABP y otro de Resolución de problemas, que podrán servir de modelo para que los docentes puedan construir nuevos proyectos o problemas.

Tanto en la Resolución de problemas como en ABP se busca conectar los problemas y preguntas con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) de UNESCO, para reforzar su relevancia y transversalidad.

[6] Recuperado de: https://es.unesco.org/sdgs

[7] Las Bases Curriculares de EPJA se encuentran alineadas con este Objetivo N°4, en tanto apuntan al Aprendizaje a lo largo de la vida, y a una educación de calidad para todos.

Aprendizaje Basado en Proyectos

Consiste en la organización de los estudiantes en torno a una pregunta o desafío originado a partir de un problema real o que sea significativo para los estudiantes, que puede ser concreto o abstracto. En la medida que el problema es más complejo moviliza e integra diferentes áreas de conocimiento, promoviendo de esta manera la interdisciplinariedad. Para su desarrollo, es deseable que los docentes se organicen y planifiquen el trabajo de manera conjunta entre docentes de diferentes asignaturas.

Existe una serie de elementos que son requisitos para que el diseño de un proyecto permita maximizar el aprendizaje y la participación de los estudiantes, de manera que aprendan cómo aplicar el conocimiento al mundo real, cómo utilizarlo para resolver problemas, responder preguntas complejas y crear productos de alta calidad[8]. Estos elementos son:

- **Conocimiento esencial, comprensión y habilidades:**

El proyecto se enfoca en profundizar en la comprensión del conocimiento, ya que permite desarrollar a la vez los Objetivos de Aprendizaje y las habilidades del Siglo XXI que se requieren para realizar el proyecto.

Se basa en un problema significativo para resolver o una pregunta para responder, en el nivel adecuado de desafío para los alumnos, que se implementa mediante una pregunta de conducción abierta y atractiva.

- **Indagación sostenida:**

El proyecto implica un proceso activo y profundo a lo largo del tiempo, en el que los estudiantes generan preguntas, encuentran y utilizan recursos, hacen preguntas adicionales y desarrollan sus propias respuestas.

- **Autenticidad:**

El proyecto tiene un contexto del mundo real, utiliza procesos, herramientas y estándares de calidad del mundo real y tiene un impacto real, ya que creará algo que será utilizado o experimentado por otros, y/o está conectado a las propias preocupaciones, intereses e identidades de los estudiantes.

Es importante saber en qué contexto del mundo real puede encontrarse el problema como el planteado y por qué el proyecto puede ser significativo para los estudiantes.

- **Voz y elección del estudiante:**

El proyecto permite a los estudiantes tomar algunas decisiones sobre los productos que crean, cómo funcionan y cómo usan su tiempo, guiados por el docente.

- **Gestión y auto organización:**

El proyecto exige a los estudiantes desarrollar el trabajo en equipo, la comunicación y la resolución de problemas; tomar decisiones sobre el diseño y la implementación del proyecto en sus distintas etapas. Esto implica identificar las competencias y procedimientos que son necesarios para desarrollar un plan de trabajo adecuado al proyecto, y una exploración activa de los recursos y actividades con que cuentan para su

---

[8] Adaptación de: John Larmer, John Mergendoller, Suzie Boss (ASCD 2015). Setting the Standard for Project Based Learning: A Proven Approach to Rigorous Classroom Instruction.

desarrollo. Asimismo, reconocer las fortalezas y debilidades con que cuenta cada uno de los miembros para su desarrollo.

- **Evaluación y Retroalimentación:**

El proyecto brinda oportunidades para que los estudiantes reflexionen sobre qué y cómo están aprendiendo. Incluye procesos de evaluación formativa y retroalimentación para que los estudiantes den y reciban comentarios sobre su trabajo, con el fin de revisar sus ideas y productos o realizar una investigación adicional.

- **Producto público.**

El proyecto requiere que los alumnos demuestren lo que aprenden, creando un producto que se presenta u ofrece a personas que se encuentran más allá del aula.

Considerando estos elementos, los Programas proponen un diseño de ABP con la siguiente estructura:

Estructura	Descripción
Problema central:	Se describe el problema que origina el proyecto.
Propósito:	Refiere al propósito formativo del proyecto, es decir, qué se espera que aprendan los estudiantes gracias a la realización de este.
Objetivos de Aprendizaje:	Identifica y/o registra qué objetivos de Aprendizaje de la asignatura y de otras asignaturas del nivel del plan de estudio de EPJA se integran para el desarrollo del proyecto.
Preguntas:	Se proponen preguntas orientadoras, que servirán para diseñar las etapas del proyecto. Son preguntas centrales y generales.
Tipo de proyecto:	Identifica el tipo de proyecto de acuerdo a las asignaturas que participan: STEM, interdisciplinario, etc.
Producto:	identifica el producto que se espera construir colaborativamente en el proyecto para dar respuesta concreta al problema.
Habilidades y actitudes del siglo XXI:	Identifica cuáles son las habilidades y actitudes que se desarrollarán, y a qué ámbito pertenecen.
Etapas:	se realiza un cronograma con las distintas etapas del proyecto, identificando: características de cada etapa, qué hará el estudiante, cómo lo realizará. Se apoya con recursos y/o ilustraciones cada etapa.
Evaluación:	Se comparten criterios de evaluación y rúbricas que guíen y permitan monitorear el desarrollo de los aprendizajes durante la realización del proyecto. Los criterios y las rúbricas deben verificar los aprendizajes de los objetivos que se identificaron para el proyecto, de manera descriptiva y por nivel de logro.

Difusión final:	describir cómo se difundirá el producto, incluyendo a la comunidad escolar y/o local.
Recursos:	Nombra recursos, clasificándolos según su tipo.

Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas

El modelo de Aprendizaje basado en la Resolución de Problemas que presentan los Programas de estudio se organiza en torno a un problema o desafío cognitivo para el cual se busca encontrar una solución, por medio del uso del conocimiento y el desarrollo de habilidades. En los Programas, un problema se define por una situación o pregunta que presenta restricciones y cuya respuesta no es evidente.

Al resolver problemas, los estudiantes utilizan procesos y estrategias relacionadas con el análisis crítico, la investigación, la evaluación y la comunicación; planifican su trabajo y reflexionan sobre la solución que mejor responde a las restricciones que presenta el problema o desafío cognitivo. Como resultado, ponen en uso el conocimiento, lo amplían adquiriendo nuevos conceptos, principios e información, y desarrollan nuevas destrezas de pensamiento crítico y creativo[9].

La resolución de problemas permite motivar y despertar el interés del estudiante, desarrolla la autonomía y el trabajo en equipo; esto requiere que las situaciones o problemas sean significativos y relevantes, y que puedan visualizar las posibles soluciones. Esta metodología requiere que el docente adquiera un rol activo como guía para monitorear el desarrollo del proceso y orientar el trabajo de los estudiantes.

El modelo que proponen los Programas de estudio para el desarrollo del Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas se compone de los siguientes elementos:

Elementos de la estructura	Descripción
Título	Se plantea como una afirmación o pregunta que sintetiza el problema o desafío.
Propósito	Busca despertar el interés, predisponer al estudiante para el aprendizaje basado en problemas.
Preparación	Busca contextualizar a los estudiantes en la situación que se planteará y/o familiarizarlos con la resolución de problemas y su sistema de trabajo.
Presentación del problema	Se expone el problema, considerando la contextualización del mismo en una situación significativa. Se define con claridad y precisión cuál es el problema; se distinguen conceptos centrales y restricciones que constituyen el problema.
Posibles soluciones	Se describe cómo se mediará estratégicamente el trabajo colaborativo: el uso de estrategias para mediar disposiciones actitudinales positivas que les permitan a los estudiantes involucrarse con el problema y buscar soluciones (por ejemplo, la perseverancia), y estrategias de mediación para compartir las soluciones; se ilustran soluciones posibles que puede tener el problema.

[9] R. Swartz "El Aprendizaje basado en el Pensamiento. Cómo desarrollar en los alumnos las competencias del SXXI (2017). Edit. SM Figura 7-11. Pág. 232. Adaptación.

Investigación	Describe cómo mediar el trabajo de investigación y el desarrollo de habilidades de indagación y evaluación; se ilustran recursos que se puedan utilizar y conocimientos diciplinares que se movilizan en la solución del problema.
Evaluar la solución del problema:	Describe cómo mediar estratégicamente las soluciones propuestas al problema, considerando las habilidades y la evaluación de las posibles soluciones.
Comunicación	Describe cómo se mediará la comunicación individual y/o colaborativa del problema, según códigos de comunicación pertinentes y característicos de las disciplinas.

Orientaciones para evaluar los aprendizajes

La evaluación, como un aspecto intrínseco del proceso de enseñanza-aprendizaje, se plantea en estos programas con un foco formativo al servicio del aprendizaje de los estudiantes. Para que esto ocurra, se plantea recoger evidencias que permitan describir con precisión la diversidad existente en el aula para tomar decisiones pedagógicas y retroalimentar a los estudiantes. La evaluación desarrollada con foco pedagógico favorece la motivación de los estudiantes a seguir aprendiendo; asimismo, el desarrollo de la autonomía y la autorregulación potencia la reflexión de los docentes sobre su práctica y facilita la toma de decisiones pedagógicas pertinentes y oportunas que permitan apoyar de mejor manera los aprendizajes.

Para implementar una evaluación con un foco formativo, se requiere:

- Diseñar experiencias de evaluación que ayuden a los estudiantes a poner en práctica lo aprendido en situaciones que muestren la relevancia o utilidad de ese aprendizaje.
- Evaluar solamente aquello que los alumnos efectivamente han tenido la oportunidad de aprender mediante las experiencias de aprendizaje mediadas por el profesor.
- Procurar que se utilice diversas formas de evaluar, que consideren las distintas características, ritmos y formas de aprender, necesidades e intereses de los estudiantes, evitando posibles sesgos y problemas de accesibilidad para ellos.
- Promover que los alumnos tengan una activa participación en los procesos de evaluación; por ejemplo: al elegir temas sobre los cuales les interese realizar una actividad de evaluación o sugerir la forma en que presentarán a otros un producto; participar en proponer los criterios de evaluación; generar experiencias de auto y coevaluación que les permitan desarrollar su capacidad para reflexionar sobre sus procesos, progresos y logros de aprendizaje.
- Que las evaluaciones sean de la más alta calidad posible; es decir, deben representar de la forma más precisa posible los aprendizajes que se busca evaluar. Además, las evidencias que se levantan y fundamentan las interpretaciones respecto de los procesos, progresos o logros de aprendizajes de los estudiantes, deben ser suficientes como para sostener de forma consistente esas interpretaciones evaluativas.

El profesor puede utilizar diferentes métodos para evaluar los OA. Para esto, se sugiere emplear una variedad de medios y evidencias, como portafolios, registros anecdóticos, proyectos de investigación grupales e individuales, informes, presentaciones, entre otros. La forma en que se diseñe este tipo de evaluaciones y el modo en que se registre y comunique la información que se obtiene de ellas debe permitir que dichas evaluaciones integren lo formativo y sumativo para retroalimentar tanto la enseñanza como el aprendizaje.

El uso formativo de la evaluación debiera preponderar en las salas de clases, utilizándose de manera sistemática para reflexionar sobre el aprendizaje y la enseñanza, y para tomar decisiones pedagógicas pertinentes y oportunas que busquen promover el progreso del aprendizaje de todos los estudiantes, considerando la diversidad como un aspecto inherente a todas las aulas.

El proceso de evaluación formativa que se propone implica articular el proceso de enseñanza-aprendizaje en función de responder a las siguientes preguntas: **¿A dónde voy?** (qué objetivo de aprendizaje espero lograr), **¿Dónde estoy ahora?** (cuán cerca o lejos me encuentro de lograr ese aprendizaje) y **¿Qué estrategia o estrategias pueden ayudarme a llegar a donde tengo que ir?** (qué pasos tengo que dar para acercarme a ese aprendizaje). Este proceso continuo de establecer un objetivo de aprendizaje, evaluar los niveles actuales y luego trabajar estratégicamente para reducir la distancia entre los dos, es la esencia de la evaluación formativa. Una vez que se alcanza una meta de aprendizaje, se establece una nueva meta y el proceso continúa.

Para promover la motivación para aprender, el nivel de desafío y el nivel de apoyo deben ser los adecuados –en términos de Vygotsky (1978), estar en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes–, para lo cual se requiere que todas las decisiones que tomen los profesores y los propios estudiantes se basen en la información o evidencia sobre el aprendizaje recogidas continuamente[10].

Como parte de la evaluación formativa, los Programas proponen en cada actividad un conjunto de criterios que permiten evaluar el desempeño de los estudiantes en un determinado aprendizaje. Estos criterios permiten identificar el lugar en que se encuentran los estudiantes en el desarrollo de las habilidades y la construcción de conocimientos, entregando información que permita al docente tomar decisiones pedagógicas para avanzar hacia el logro de los aprendizajes propuestos[11].

Los criterios de evaluación describen el dominio de conceptos, de procedimientos y actitudes en los estudiantes. En su conjunto, permiten evaluar la comprensión y la disposición o inclinación a actuar de acuerdo al marco de Habilidades y actitudes del siglo XXI. Cuando se integran en el desarrollo de la clase, los criterios de evaluación permiten generar un mejoramiento continuo del aprendizaje[12].

---

[10] Mineduc (2017). *Presentación de Criterios de evaluación, calificación y promoción al Consejo Nacional de Educación*. Fundamentos a la propuesta de actualización de criterios y normas de Evaluación, Calificación y Promoción Escolar de estudiantes de Educación Regular presentada por la Unidad de Curriculo y Evaluación al Consejo Nacional de Educación. Santiago, pág. 74.

[11] Para la construcción de los criterios, se han tenido a la vista las orientaciones que plantea la Mesa Covid Universitaria y la normativa vigente para la atención a la diversidad, la inclusión y la flexibilidad en la repuesta educativa contenida en la ley 20.845 de inclusión escolar (Art. 1°, núm. i), y como referente los principios del Decretos 83 de 2015 y Decreto 67 de 2018.

[12] Propuestas Educación Mesa Social Covid-19 (2021). *Recomendación para una evaluación pertinente en tiempos de crisis. Santiago de Chile*. Santiago, pág. 65.

Referencias

John Larmer, John Mergendoller, Suzie Boss. *Setting the Standard for Project Based Learning: A Proven Approach to Rigorous Classroom Instruction*, (ASCD 2015).

Knowles, M. S., Holton III, E. F., & Swanson, R. A. (2014). The adult learner: The definitive classic in adult education and human resource development. Routledge.

Lemov, D. (2014). Teach like a champion 2.0: 62 techniques that put students on the path to college. John Wiley & Sons.

Mineduc (2017). *Presentación de Criterios de evaluación, calificación y promoción al Consejo Nacional de Educación*. Fundamentos a la propuesta de actualización de criterios y normas de Evaluación, Calificación y Promoción Escolar de estudiantes de Educación Regular presentada por la Unidad de Curriculo y Evaluación al Consejo Nacional de Educación. Santiago

Propuestas Educación Mesa Social Covid-19 (2021). *Recomendación para una evaluación pertinente en tiempos de crisis. Santiago de Chile*. Santiago, pág. 65

R. Swartz "El Aprendizaje basado en el Pensamiento. Cómo desarrollar en los alumnos las competencias del SXXI (2017). Edit. SM Figura 7-11. Pág. 232. Adaptación.

Universidad del Desarrollo, Centro de Innovación. Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). Recurso web disponible en: https://innovaciondocente.udd.cl/metodologias-activas/

UNESCO (2015). La Agenda para el Desarrollo Sostenible. https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/development-agenda/

Propósitos formativos de la asignatura de Matemática

Comprender las matemáticas y aplicar sus conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales es fundamental para los ciudadanos del siglo XXI. La necesidad de resolver e interpretar una cantidad cada vez mayor de problemas y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales, laborales, sociales y científicos, requiere comprender conceptos, desarrollar el razonamiento y aplicar destrezas matemáticas.

Un estudiante con conocimientos matemáticos reconoce el papel que las matemáticas juegan en el mundo para poder hacer juicios bien fundados y tomar las decisiones que necesitan los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos[13]. La educación matemática es fundamental para la formación de ciudadanos responsables, profesionales capaces y es la base para desarrollar la capacidad de estudio de otras materias[14]. La matemática es, además de una herramienta que se puede utilizar y aplicar, una fuente para el desarrollo del pensamiento, que promueve habilidades y actitudes para la vida.

Con este propósito, la asignatura Matemática para la Educación de Personas Jóvenes y Adultas busca desarrollar en los estudiantes habilidades que les permitan comprender las matemáticas y el papel que estas juegan en la cultura y en sus propias vidas, al proporcionar un lenguaje que permite comprender el mundo desde una perspectiva lógica, por medio de la capacidad de modelar la realidad, representarla y resolver problemas con precisión y adaptabilidad. La asignatura busca también desarrollar en los estudiantes un pensamiento autónomo y crítico que les permita desenvolverse activamente como ciudadanos, aprender en un mundo incierto y fortalecer el autoconcepto y confianza en su propio razonamiento.

Enfoque de la asignatura

La asignatura tiene un énfasis principal en la alfabetización matemática y en el desarrollo de la capacidad de razonamiento matemático y la resolución de problemas en diversos contextos. La alfabetización matemática se entiende como la capacidad de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en la vida, hacer juicios bien fundados y usar, en forma adecuada, tanto los conocimientos como las herramientas matemáticas para resolver problemas del ámbito personal, social y laboral. En el caso de la población Joven y Adulta, esto implica reconocer los aprendizajes previos que las personas puedan tener con los contenidos de la asignatura, evaluar y perfeccionar las

---

13 Organization for Economic Co-operation and Development (OECD) 2020, Mathematics performance (PISA) (indicator). doi: 10.1787/04711c74-en (Accessed on 14 August 2020).

14 Loos, A. y Ziegler, G.-M. (2015). Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik. En R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme y H.-G. Weigand (Eds.), Handbuch der Mathematikdidaktik, pp. 3-19. Berlin, Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-35119-8

formas de pensar matemáticamente y los procedimientos, desarrollar la capacidad de modelar y representar la realidad para entenderla.

El aprendizaje de la matemática implica tanto la aplicación de conocimientos y procedimientos, como la elaboración de estrategias. Con este fin, la resolución de problemas se presenta como una oportunidad de aprendizaje que está presente en todos los niveles de la asignatura, permitiendo a los estudiantes desarrollar de manera progresiva estrategias y la creatividad para buscar y poner a prueba distintas soluciones. Ello permitirá reconocer la utilidad que tienen las matemáticas en la vida real, desarrollar la capacidad de resolver problemas de mayor complejidad y transferir las habilidades matemáticas a otras disciplinas.

Por otro lado, la representación en matemática, el desarrollo de la transferencia entre diferentes representaciones y el transito flexible de conocimiento matemático entre los lenguajes hablados, visuales, táctiles, sonoros u otros, abre las puertas al trabajo con algunas de las necesidades educativas especiales permanentes y transitorias, en términos comunicacionales y de comprensión. Por esto, el trabajo con esta habilidad y su desarrollo para la comprensión matemática son fundamentales para el trabajo en clases.

Estructura curricular Matemática

Las Bases Curriculares de Matemática para EPJA se articulan en torno a Objetivos de Aprendizaje de Habilidades y Actitudes. Las actitudes se trabajan de manera transversal e integral con los OA; sin embargo, se intencionan ciertos ámbitos de las Habilidades del Siglo XXI dada su pertinencia para el trabajo específico con cada habilidad. De esta manera, se integra en cada Objetivo de Aprendizaje la habilidad con una actitud.

Los Objetivos de Aprendizaje de habilidad y actitud se integran con los conocimientos esenciales del ámbito de los números y operaciones; álgebra y funciones; geometría; estadística y probabilidades, para favorecer la comprensión de las grandes ideas de la asignatura. Las grandes ideas operan como propósito formativo de cada módulo y nivel, orientando la comprensión y la articulación de los Objetivos de Aprendizaje y los Conocimientos esenciales.

Objetivos de Aprendizaje

Los objetivos de habilidades y actitudes se organizan en 4 ejes e integran actitudes de los ámbitos que organizan las habilidades del siglo XXI, de acuerdo con un criterio de pertinencia para ser trabajadas integradamente con las habilidades. Estos ejes son:

- Representar
- Modelar
- Argumentar y Comunicar
- Resolver Problemas

Representar

La habilidad de representar se refiere a las formas de expresar conceptos, relaciones y objetos matemáticos provenientes de diferentes contextos. Las representaciones se pueden dar en tres niveles, de manera concreta, pictórica o simbólica. Esta habilidad incluye el crear relatos en base a una expresión matemática simple, ecuación o función, utilizar tablas o esquemas con lenguaje matemático, transferir una situación de un nivel de representación a otro. También incluye el uso de representaciones propias de la matemática, como la línea recta, el plano cartesiano, la tabla de datos para comprender y explicar tanto procesos como relaciones.

En el primer nivel se espera que los estudiantes puedan relacionar el conocimiento intuitivo con una explicación formal de las situaciones, pudiendo transitar de un nivel de representación a otro (concreta, pictórica y simbólica) para luego contrastar la información que ofrecen distintos niveles de representación. En la Educación Media podrán representar, de manera autónoma, un mismo contenido, transitando entre distintos niveles de representación. Esta progresión favorece el desarrollo de la transferencia, potencia la comprensión de las operaciones, relaciones y conceptos matemáticos y brinda un significado cercano a las expresiones matemáticas.

Se espera que, para realizar estas representaciones, los estudiantes extraigan información desde acciones concretas y elijan distintas formas de expresar esta información, por ejemplo, utilizando números, unidades de medidas estandarizadas, tablas, gráficos, diagramas, metáforas, símbolos matemáticos, rectas numéricas, entre otras representaciones. En particular, la habilidad del siglo XXI de las herramientas para trabajar contribuye al desarrollo de la habilidad de representar. Los momentos de aprendizaje priorizan el uso y la aplicación de diferentes herramientas visuales, sonoras, digitales tecnológicas o táctiles para trabajar, con el objetivo de representar ideas, objetos, procesos y relaciones en matemática. Incluyendo desde el uso de TIC hasta el uso apropiado de la regla, el uso de la calculadora, el uso de plataformas o programas.

Modelar

Modelar es una habilidad que permite encontrar un modelo que describe matemáticamente una situación del mundo real permitiendo hacer predicciones, valoraciones, ajustes y cambios, para eventualmente hacer cambios a la realidad o al modelo. Es decir, un modelo expresa acciones o situaciones reales, cotidianas con lenguaje matemático. El modelo construido debe capturar parte de las características de una realidad dinámica para poder estudiarla, modificarla y/o evaluarla. Asimismo, el modelo permite buscar soluciones, aplicarlas a otras realidades similares (objetos, fenómenos, situaciones), comparar impactos y encontrar nuevas relaciones de la realidad. Es importante señalar que la habilidad de organizar, componer, crear y ajustar desde la realidad con base en la matemática y viceversa, es la base de la habilidad de modelar. En el proceso de modelar hay algunas nociones de la habilidad de representar y por esto, se habla de habilidades que se complementan según el contexto.

La habilidad de modelar implica la capacidad de seleccionar, usar, ajustar y evaluar modelos que involucren operatoria, identificar regularidades y generalizar usando lenguaje matemático, traducir expresiones en lenguaje cotidiano a lenguaje matemático y viceversa. En los niveles de Educación Básica, los estudiantes aprenderán a seleccionar un modelo según su pertinencia a la situación real, para luego usarlo para comprender fenómenos diversos. En base a ello, podrán evaluar la pertinencia de los modelos utilizados en relación con el problema y considerando sus limitaciones. En los niveles de la Educación Media, podrán seleccionar y ajustar modelos matemáticos pudiendo representar patrones y fenómenos, y resolver problemas cotidianos.

En conjunto con esta habilidad matemática, se espera que los estudiantes desarrollen la manera de trabajar colaborativamente, con responsabilidad y liderazgo, lo cual requiere de propuestas de trabajo en proyectos y organización del tiempo y del trabajo en grupos. Además, se busca motivar la manipulación de herramientas para trabajar, valorando las TIC como una oportunidad para informarse, investigar y comunicarse, actuando de acuerdo con los principios de la ética. En esta actitud, los datos juegan un rol principal en la comprensión y presentación de la información.

La integración de la habilidad de modelar y con el ámbito de Maneras de vivir en el mundo permite dar un enfoque al momento de trabajar y evaluar la actitud, priorizando en este caso el modelamiento de situaciones reales. El modelamiento matemático de mi alrededor permite dar respuestas técnicas, resolver problemas logísticos, de presupuesto y organizacionales propios de la construcción de proyectos personales, de la sociedad o de la comunidad en la cual los estudiantes de EPJA están inmersos.

Argumentar y comunicar

La habilidad de argumentar implica comunicar resultados en lenguaje matemático, explicar el razonamiento utilizado para realizar procedimientos, y fundamentar conjeturas, comprobar reglas y propiedades y realizar deducciones. Esta es una habilidad que permite desarrollar la generalización, que es considerado uno de los procedimientos básicos en la producción del conocimiento de las disciplinas en general y de la disciplina matemática en particular.

Los objetivos de aprendizaje de este grupo de habilidades desarrollan la capacidad de identificar y luego explicar reglas, soluciones propias y procedimientos, entendiendo que el razonamiento matemático es la capacidad de argumentar y obtener conclusiones a partir de premisas o conjeturas. En el ámbito de la comunicación, por su parte, podrán expresar el razonamiento matemático utilizado en la elaboración de conjeturas, procedimientos y resultados, llegando a fundamentar las conjeturas, utilizando el lenguaje matemático, y realizar demostraciones simples de sus resultados, pudiendo identificar si en esta hay saltos o errores.

La integración de la habilidad de argumentar y comunicar con el ámbito de la Maneras de trabajar se focaliza en el logro y verificación de la comunicación en matemática. Se espera que los estudiantes de EPJA logren desarrollar tanto la habilidad de argumentar como la de comunicar, mostrando empatía y respeto por las posturas o errores del otro a la hora de desarrollar trabajos colaborativos y en situaciones de argumentación. En particular, en la habilidad de argumentar se espera un procedimiento honesto donde la matemática juega un rol en el razonamiento lógico en el proceso y logro de resultados de problemas abiertos o cerrados.

Resolver problemas

La habilidad de resolver problemas es tanto un medio como un fin en la adquisición de habilidades matemáticas. La habilidad implica desarrollar otras habilidades que permitan que la resolución se vaya acercando a procesos creativos de búsqueda de soluciones y transferencia de procedimientos hasta llegar a variar parámetros o condiciones.

Los Objetivos de Aprendizaje de estas bases progresan de manera que los estudiantes complejicen las estrategias utilizadas y especialmente, la capacidad de transferir los procedimientos y resultados a otras situaciones. En los niveles de la Educación Básica, los estudiantes tendrán que aplicar los procedimientos utilizados a otras situaciones idénticas a la original, y podrán transferirlos a nuevas situaciones. En la Educación Media, los estudiantes podrán resolver problemas variando parámetros o condiciones y observar cómo influye en los resultados obtenidos, evaluando el proceso y comparando los cambios.

La habilidad de resolver problemas se enriquece con el trabajo conjunto de las demás habilidades matemáticas como representar, modelar, argumentar y comunicar, incentivando el desarrollo de la creatividad, la capacidad de identificar nuevos problemas y explicarlos.

Aprender a resolver problemas es un proceso en el cual es recomendable incluir el trabajo colaborativo, ya que la ayuda y colaboración de otros en la búsqueda de soluciones promueve el aprendizaje entre pares. Dar una respuesta requiere de responsabilidad y honestidad, la cual puede facilitarse en las conversaciones entre pares y de forma colaborativa reconocer y mejorar el error para poder avanzar en conjunto. La resolución de problemas se facilita con el uso de las herramientas disponibles y un problema puede ser una meta que lograr o un desafío que da respuestas a la comunidad de mi entorno. Tomar una decisión responde, entre otras cosas, al resultado de una solución a un problema y una postura razonada puede producir cambios positivos en los diferentes ámbitos.

Si bien la habilidad de resolver problemas es una habilidad transversal, requiere también de una intencionalidad y de un acompañamiento para su correcto desarrollo. Se espera que esta habilidad sea trabajada integradamente con el ámbito de Formas de pensar, promoviendo la actitud de pensar con perseverancia y con flexibilidad para encontrar soluciones a los problemas. Además, se espera que el estudiante de EPJA sea reflexivo con sus procedimientos y autónomo en las elecciones de las estrategias involucradas en la resolución de problemas.

Objetivos de Aprendizaje

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. (Representar)

OA2. Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación, valorando las TIC como una oportunidad. (Representar)

OA3. Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. (Modelar)

OA4. Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones, asumiendo posturas razonadas. (Modelar)

OA5. Fundamentar conjeturas usando conocimientos matemáticos, trabajando colaborativamente. (Argumentar y comunicar)

OA6. Realizar demostraciones simples de resultados e identificar en una demostración, si hay saltos o errores, trabajando con empatía y respeto. (Argumentar y comunicar)

OA7. Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. (Resolver problemas)

OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. (Resolver problemas)

Conocimientos esenciales

- Operaciones con números racionales, potencias, raíces y sus propiedades.
- Productos notables.
- Sistemas de ecuaciones lineales (2x2).
- Función y ecuación cuadrática.
- Homotecias y teorema de Thales.
- Probabilidades, regla multiplicativa y regla aditiva.

Orientaciones didácticas y pedagógicas

Para promover el aprendizaje de la matemática se sugieren las siguientes orientaciones didácticas y pedagógicas:

- Aprender comprensivamente en matemática

Entendemos que una persona ha aprendido profundamente un contenido cuando es capaz de realizar una variedad de operaciones mentales sobre un mismo tópico (Beas, Manterola y Santa Cruz, 1998). Los objetivos de aprendizaje y las actividades de desempeño se presentan para lograr la comprensión profunda de la matemática, se espera que el estudiante dé explicaciones, que muestre evidencia y ejemplos, saque conclusiones, generalice, compare, aplique a nuevas situaciones, establezca analogías, presente la información de diferentes perspectivas, que utilice el conocimiento para resolver problemas y que avance en éste estableciendo relaciones.

Para esto es necesario guiar a los estudiantes mostrando posibles explicaciones, elaborando evidencias, ejemplificar la forma de transferir a otras situaciones. Se sugiere guiar la realización de las diferentes operaciones mentales que se pueden realizar sobre un mismo tópico, en particular, ampliar la memoria mecánica, ya que puede facilitar varios procesos de la resolución de problemas que la requieren. Dado que EPJA tiene varias modalidades y con diferentes accesos a las herramientas de trabajo, podría ser de gran ayuda la memoria mecánica, como también el uso hábil de las herramientas disponibles, en particular de la calculadora. Por lo tanto, saber de manera directa la operación que se debe utilizar o el conocimiento del procedimiento de varias operaciones puede ser un facilitador de la comprensión del tópico matemático que se esté trabajando. En este sentido, se sugiere utilizar una variada gama de estrategias visuales, auditivas o escritas en las prácticas guiadas que permitan incentivar las diferentes preferencias de los estilos de aprendizaje de los estudiantes.

- Nociones Básicas en matemática

Considerar las Nociones Básicas en Matemática significa tener presente las ideas, imágenes y acciones mentales previas de cada estudiante para construir y comprender conocimiento matemático. El docente desarrolla en las clases de matemática esta construcción de conocimiento desde las experiencias de los estudiantes hasta llegar a la abstracción y generalización, momento en el cual, el estudiante aplica el conocimiento y luego transfiere a nuevas situaciones que pueden ser similares o completamente diferentes. Esta caracterización de las Nociones Básicas en matemática (Vom Hofe y Reyes-Santander, 2021) incluyen la significación matemática del concepto, el establecimiento de representaciones que dejan de ser personales para ser comprendidas desde el lenguaje matemático y la transferencia al mundo real, por medio del desarrollo de la habilidad de modelar.

El trabajo con las Nociones Básicas en EPJA es fundamental para el desarrollo de habilidades matemáticas, dado que el joven y adulto ya tiene una noción de lo que podría significar algún conocimiento matemático, es necesario centrarse en cuáles son estas nociones adquiridas y en el cómo se llega a una noción normativa, que describe interpretaciones comprensibles de conceptos, definiciones y relaciones matemáticas. Para lo primero, el trabajo con las preguntas propuestas en las actividades de desempeño y las respuestas que dan los estudiantes, permiten hacer una estructura de las nociones básicas de la clase. Esta información en conjunto con el desarrollo de la construcción del conocimiento y la práctica guiada de la actividad de desempeño deberían permitir al estudiante hacer el recorrido para obtener una Noción Básica de un concepto matemático.

- Carácter progresivo de la asignatura

La educación matemática tiene un carácter progresivo y en espiral, esto significa que las clases se desarrollan volviendo siempre a los conceptos básicos en diferentes niveles y contextos. El principio en espiral da cuenta de los conocimientos matemáticos previos que se requieren para aprender de manera fluida, comenzando desde lo más sencillo hasta lo más complejo, volviendo al mismo tema, ampliando y profundizando cada vez más, hasta cerrar completamente el tema, así no se desplazan temas hasta que se tenga todo el conocimiento necesario, se puede empezar siempre con un nivel inicial, preparatorio. El principio en espiral se acompaña del principio de continuidad de la educación matemática, que es considerada como la selección y tratamiento de un tema para que sea posible luego con un nuevo tratamiento adicional y una continuación en el siguiente nivel educativo.

Este carácter progresivo, nos indica que la construcción del conocimiento tiene antecedentes del nivel anterior y consecuentes para el año siguiente. Se sugiere considerar, retomar para poder avanzar de un año a otro. En el caso del nivel 1 de Educación Básica y cada vez que se comience un tema que no tiene un antecedente, se sugiere considerar las nociones básicas intuitivas para construir un nuevo conocimiento. En este programa se pone a disposición del docente la sección del diagnóstico, la cual se basa en los conocimientos previos que se requieren para comenzar con la actividad. Además, se sugiere cada vez que sea necesario el considerar un módulo cero de nivelación o dedicar un tiempo para revisar y retomar para luego avanzar. En cada tema y su planificación anual, se sugiere utilizar el principio de esquematización progresiva, que comienza en pequeños pasos, aislando las dificultades para reducir la complejidad y lograr el nivel de abstracción que permite una comunicación matemática fluida y comprensiva.

- Ejercitar con sentido

Internalizar un concepto requiere de varias acciones, en matemática una de las acciones más reconocidas, como en la educación física, es la ejercitación. Aquí hablamos de ejercitar para lograr una meta, una ejercitación con sentido se refiere a que los ejercicios propuestos tienen una estructura que permite reconocer la ampliación y profundizar en el conocimiento y la habilidad. La ejercitación sirve y tiene sentido cuando nos lleva de manera directa a lograr un objetivo preciso y previamente declarado.

Para lograr una ejercitación con sentido se sugieren en la mayoría de las prácticas independientes, situaciones, problemas y ejercicios en los cuales se presentan variaciones de la instrucción para ejercitar un mismo tópico. En algunos casos, se presentan estrategias de clases o metodologías de trabajo como las estaciones, trabajo grupal, trabajo autónomo, juego de roles o trabajo de pares para llevar a cabo esta ejercitación. Según Leuders (2005) hay una enseñanza explícita que se consolida con ejercicios básicos directos, necesaria para la adquisición segura del conocimiento y para la ejercitación que requiere de nexos matemáticos más profundos.

Se sugiere considerar para la práctica independiente y la categorización de los diferentes tipos de ejercitación con sentido el siguiente listado:

- Ejercicios básicos directos.
- Ejercicios que combinan otras áreas del conocimiento.
- Ejercicios que requieren de una comprensión profunda y de elaborar conexiones matemáticas.
- Ejercicios que se basan en la proactividad y la experimentación concreta.
- Ejercicios que son una combinación de una conexión matemática con la experimentación concreta y que implica hacer inferencias sobre los resultados de un experimento que no están detallados previamente.
- Ejercicios creativos que consideran la modificación de las condiciones iniciales o intermedias o de la creación propia de ejercicios.

La ejercitación incluye el pensar en los diferentes grados de dificultad de los problemas presentados y en este sentido, se sugiere comenzar siempre con un nivel básico y de accesibilidad para todos, esto significa que todo el curso debería responder a este tipo de ejercitación. Un ejercicio puede ser al inicio un problema para el estudiante, esta mirada debe estar siempre desde el punto de vista del estudiante y no del docente, esto significa que se espera entonces que luego de una ejercitación, los problemas sean considerados por el estudiante como un ejercicio o como un problema rutinario. La ejercitación debe ser considerada como un facilitador para la resolución de problemas, más que un trabajo repetitivo y sin sentido.

- Los grupos etarios, la motivación y los contextos en matemática

El perfil de egreso de un estudiante de EPJA se va construyendo desde todas las asignaturas y a través de todos los años de duración de los estudios, este perfil incluye además las experiencias que vaya teniendo cada persona en su trayecto de vida. La Matemática contribuye como una asignatura que ofrece situaciones basadas en contextos que van desde situaciones familiares, del trabajo, profesionales o del ámbito de las ciencias, incluso ofrece contextos y oportunidades de aprendizaje que se desarrollan dentro de la matemática misma y con o sin necesidad de tener contextos.

En este sentido, el tener diferentes grupos etarios provee a la clase de una variedad de contextos que pueden ser trabajados y compartidos con los estudiantes, desarrollando principalmente la empatía y la comprensión de las situaciones y vivencias de otros. La motivación para aprender matemática es un gran desafío para el docente y por este motivo, el desarrollo de una situación experiencial cercana e idealmente vivenciada por algún integrante de la clase puede ser una fortaleza para enganchar a los estudiantes con el tema. También, la presentación y comunicación de la experiencia es clave para motivar a la clase, el desarrollo de las preguntas iniciales de la clase y escribir las respuestas iniciales de esta parte de la clase considerando todo como un aporte, puede hacer una gran diferencia a la motivación personal como grupal por aprender matemática.

- Diferenciación natural en matemática

En las clases de matemática de EPJA se encuentran diferentes formas de heterogeneidad, por nombrar algunas, de género, culturales o étnicas, edad, logros de los aprendizajes, tipo de establecimiento, condiciones de espacio, condiciones de libertad, deficiencias, y discapacidades intelectuales, de aprendizaje o físicas. Dentro de estas, el docente puede considerar la heterogeneidad como un problema, como un caso normal o como una oportunidad para la enseñanza o para el aprendizaje. Con todas estas posibilidades, el docente debe elegir según sus propias capacidades o intereses cuál de ellas puede trabajar de manera objetiva y responsable en sus clases.

En particular, desde la asignatura de matemática se puede considerar la heterogeneidad como una oportunidad de aprendizaje y con un centro natural en el nivel de logro de aprendizajes, ya sea para potenciar o nivelar rendimientos. Dentro de esta categoría, se sugieren las siguientes consideraciones que pueden ser incluidas en la práctica independiente como una categorización de los problemas, situaciones y ejercicios presentados:

- Cantidad de ejercicios, más o menos dependiendo de cada estudiante o clase.
- Grado de dificultad, proponer en categorías de 3 a 4 grados diferentes.
- Forma de la apropiación o internalización que tiene de preferencia cada estudiante, leyendo, escuchando, hablando o haciendo, para algunos basta con una vez de escuchar y para otros requieren escuchar varias veces, escribir y complementar en su casa.
- Forma de abordar y presentar los conocimientos conceptuales y procedimentales, incluyendo una variedad de representaciones visuales, auditivas, táctiles o corporales.
- Graduar la ayuda y mediaciones que recibe el estudiante, aunque se reconoce que hay estudiantes que necesitan mucha ayuda para comenzar o durante el trabajo, el desarrollo de la autonomía debe ser el objetivo transversal del docente.
- Variedad en las formas sociales de trabajo, individual, pares o en grupos.
- Graduación del tiempo concedido para un mismo trabajo.
- Dar a elegir entre uno o más ejercicios, problemas o situaciones a desarrollar.

- El trabajo con el error en matemática

La actitud del docente frente al error se puede presentar con la metáfora de los errores como una ventana hacia el pensamiento del estudiante. Los errores no se pueden ignorar porque así no es posible promover el aprendizaje, ya que estos son una fuente de información acerca del razonamiento del estudiante, que es el lugar en el cual el estudiante aplica y construye nuevos aprendizajes. Por otra parte, si el profesor solo castiga el error, tampoco se avanza, entonces se sugiere tomar el error y analizarlo para ver de qué manera es posible ayudar a ese estudiante a mejorar su comprensión sobre el tema (Larraín, 2016).

En relación con el manejo de errores frecuentes, es muy relevante que los docentes conozcan al menos los errores más usuales, porque esto ayuda a que sean capaces de percibir de manera más clara e inmediata los errores que se están cometiendo y puedan manejar hipótesis acerca de qué es lo que ha generado los errores y por tanto pueda reaccionar de mejor manera cuando estos ocurren. También es posible anticiparse a algunos errores frecuentes, presentarlos a nivel curso y pensar todos juntos, identificando qué es lo que no está bien. Así, la decisión acerca de cómo tratar un error y hacer un plan de acción, de qué hacer para corregir el error, depende de las dos fases anteriores: percibir o identificar el error y luego interpretarlo para elaborar hipótesis acerca de sus causas.

Referencias

Beas, J., Manterola, M., y Santa Cruz, J. (1998). Habilidades cognitivas y objetivos transversales: Un tema para pensar y actuar. *Pensamiento educativo, Revista De Investigación Latinoamericana* (PEL), 22(1), 175-192. Recuperado a partir de http://pensamientoeducativo.uc.cl/index.php/pel/article/view/24935.

Larraín, M. (2016). Comprensión del razonamiento matemático de los estudiantes: una práctica pedagógica inclusiva. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. 45: 152-161.

Leuders, T. (2005). Intelligentes Üben selbst gestalten! Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht. *Pädagogik* 57(11), 29 – 32.

Loos, A. y Ziegler, G.-M. (2015). Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik. En R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme y H.-G. Weigand (Eds.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*, pp. 3-19. Berlin, Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-35119-8

OECD, Organization for Economic Co-operation and Development (2020). *Mathematics performance*, PISA (indicator). doi: 10.1787/04711c74

Vom Hofe, R., y Reyes-Santander, P. (2021). Nociones Básicas: Un enfoque didáctico para promover la comprensión del contenido en clase de matemática. En R. vom Hofe y otros (eds.), *matemática enactiva: Aportes para la articulación entre teoría y práctica en la educación matemática*. Barcelona: Grao. 27 - 60.

Visión panorámica de los módulos del Nivel 2 EM para Matemática

Módulos obligatorio

M1 Nivel 1 EM

El trabajo con los números reales permite analizar información numérica de mayor complejidad y ampliar el ámbito de resolución de problemas.

M2 Nivel 1 EM

Las funciones, las expresiones algebraicas y procedimientos permiten construir modelos y encontrar soluciones a situaciones de cambio en diferentes ámbitos de nuestra realidad.

M3 Nivel 1 EM

Las propiedades y relaciones geométricas entre objetos y sus distancias permiten resolver problemas que involucran destrezas de visualización espacial

M4 Nivel 1 EM

La probabilidad permite interpretar, predecir fenómenos, caracterizar situaciones, simular posibilidades y estudiar situaciones de incerteza

Módulos electivos

ME1 Nivel 1 EM

ME2 Nivel 1 EM

¿Cómo construir modelos matemáticos de situaciones de nuestra realidad?

ME3 Nivel 1 EM

ME4 Nivel 1 EM

¿Cómo interpetar y predecir fenomenos de incerteza con la probabilidad?

Visión panorámica Objetivos de Aprendizaje y conocimientos esenciales

Matemática Nivel 2 Educación Media				
Módulos obligatorios	Módulo 1 Nivel 1 EM	Módulo 2 Nivel 1 EM	Módulo 3 Nivel 1 EM	Módulo 4 Nivel 1 EM
Gran idea	El trabajo con los números reales permite analizar información numérica de mayor complejidad y ampliar el ámbito de resolución de problemas.	Las funciones, las expresiones algebraicas y procedimientos permiten construir modelos y encontrar soluciones a situaciones de cambio en diferentes ámbitos de nuestra realidad.	Las propiedades y relaciones geométricas entre objetos y sus distancias permiten resolver problemas que involucran destrezas de visualización espacial.	La probabilidad permite interpretar, predecir fenómenos, caracterizar situaciones, simular posibilidades y estudiar situaciones de incerteza.
Objetivos de Aprendizaje	**OA1.** Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)** **OA3.** Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)** **OA5.** Fundamentar conjeturas usando conocimientos matemáticos, trabajando colaborativamente. **(Argumentar y comunicar)** **OA7.** Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios	**OA2.** Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación, valorando las TIC como una oportunidad. **(Representar)** **OA3.** Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)** **OA4.** Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones, asumiendo posturas razonadas. **(Modelar)** **OA7.** Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios	**OA1.** Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)** **OA3.** Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)** **OA6.** Realizar demostraciones simples de resultados e identificar en una demostración, si hay saltos o errores, trabajando con empatía y respeto. **(Argumentar y comunicar)** **OA7.** Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios	**OA1.** Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)** **OA7.** Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)** **OA8.** Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar.

	en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)** **OA8.** Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**	en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)** **OA8.** Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**	en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)** **OA8.** Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**	**(Resolver problemas)**
Conocimientos esenciales	Operaciones con números racionales, potencias, raíces y sus propiedades	• Productos notables. • Función y ecuación cuadrática.	• Sistemas de ecuaciones lineales (2x2). • Homotecias y teorema de Thales.	Probabilidades, regla multiplicativa y regla aditiva.
Tiempo estimado	6 semanas (24 horas)	6 semanas (24 horas)	6 semanas (24 horas)	6 semanas (24 horas)

Módulos electivos

	Módulo electivo 1 Nivel 1 EM	Módulo electivo 2 Nivel 1 EM	Módulo electivo 3 Nivel 1 EM	Módulo electivo 4 Nivel 1 EM
Tiempo estimado	6 semanas (24 horas)	6 semanas (24 horas)	6 semanas (24 horas)	6 semanas (24 horas)

Módulos obligatorios de la asignatura

Módulo obligatorio 1

Visión panorámica

Gran idea

El trabajo con los números reales permite analizar información numérica de mayor complejidad y ampliar el ámbito de resolución de problemas.

Objetivos de aprendizaje

OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles**. (Representar)**

OA3. Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

OA5. Fundamentar conjeturas usando conocimientos matemáticos, trabajando colaborativamente. **(Argumentar y comunicar)**

OA7. Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Operaciones con números racionales.
- Potencias y sus propiedades.
- Raíces y sus propiedades.

Tiempo estimado
6 semanas (24 horas)

Propósito del módulo obligatorio 1

En el módulo 1 de la asignatura de matemática del Nivel 1 de Educación Media, se espera que los estudiantes comprendan que el *trabajo con los números reales permite analizar información numérica de mayor complejidad y ampliar el ámbito de resolución de problemas.* El aprendizaje de las propiedades y de nuevos números o expresiones de varias operaciones, permite analizar información numérica de mayor complejidad y ampliar el ámbito numérico. La información numérica de mayor complejidad se relaciona con las actividades de trabajo específicas que se podrían dar en la vida laboral o en situaciones científicas, como también en la necesidad de ampliar el ámbito numérico para responder a las diferentes demandas en diferentes situaciones o problemas. Los estudiantes expresan ideas matemáticas utilizando representación simbólica, seleccionan modelos según la situación y fundamentan conjeturas sobre las propiedades de potencias y su relación con las raíces.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 1 desarrollan las habilidades que permiten comprender la nueva información y trabajar en contextos numéricos más amplios. Específicamente, en este nivel diremos que se comprende profundamente un tópico cuando se representan raíces y potencias de forma simbólica; cuando se expresan situaciones de grandes distancias, geométricas o relacionadas a las ciencias utilizando números adecuados; cuando se aplican las propiedades de raíces y potencias para resolver problemas en situaciones contextualizadas y cuando se transfieren procedimientos para conjeturar sobre los resultados numéricos o para hacer generalizaciones.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 1 desarrollan las actitudes del siglo XXI del ámbito de las Maneras de pensar, las Herramientas para trabajar y las Maneras de trabajar, promoviendo el aprovechar las oportunidades que ofrece la tecnología y las herramientas disponibles para calcular, representar, modelar y conjeturar. Asimismo, este módulo promueve una actitud proactiva en los estudiantes, relevando un método de trabajo y una inquietud e interés por aprender, explorar y describir numéricamente su propio medio o su entorno para comprender contextos locales o globales, personales, familiares, científicos, profesionales o lúdicos.

Ruta de Aprendizaje del Módulo obligatorio 1

El trabajo con los números reales permite analizar información numérica de mayor complejidad y ampliar el ámbito de resolución de problemas.

Actividad de desempeño 1: Representan raíces y sus propiedades de forma pictórica o simbólica para ampliar el ámbito numérico y expresar situaciones laborales específicas relacionadas con el teorema de Pitágoras o el orden de números irracionales.

Actividad de desempeño 2: Seleccionan y ajustan modelos que requieren de las raíces para su aplicación, variando parámetros y condiciones iniciales para comprar los cambios en los resultados obtenidos, en contextos de salud, como el índice de masa corporal o en contextos de diseño.

Actividad de desempeño 3: Representan grandes distancias y situaciones científicas utilizando potencias y la escritura científica para calcular de manera más directa y resolver problemas evaluando el proceso.

Actividad de desempeño 4: Fundamentan conjeturas utilizando los conocimientos de números racionales y de potencias para construir las propiedades de potencias y su relación con las raíces.

Actividad de desempeño 1

Propósito

Esta actividad busca representar raíces y sus propiedades para facilitar el cálculo con ellas, esto les permitirá describir situaciones relacionadas con la construcción o el diseño. Esta actividad comienza con el teorema de Pitágoras, para continuar con el orden de números y terminar con las propiedades más relevantes de las raíces.

Objetivos de Aprendizaje

OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

Conocimiento esencial

- Raíces.
- Propiedades de las raíces.

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que verifique los siguientes criterios:

- Determinar la medida del lado faltante de un triángulo rectángulo aplicando el teorema de Pitágoras.
- Utilizar la escuadra u otra herramienta para dibujar un ángulo recto.
- Aproximar decimales al décimo, centésimo o milésimo.
- Utilizar la recta numérica para ubicar números decimales.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes diferentes situaciones relacionadas con la construcción o el diseño de objetos, en las cuales se puede ver involucrado el teorema de Pitágoras y el cálculo de raíces.






Les pide comentar y describir las situaciones, guiándose por las siguientes preguntas:

- ¿Qué se observa en las imágenes?
- ¿Qué objetos identificas?
- ¿Qué relación podrían tener estas situaciones con la matemática?
- ¿Qué recordamos del teorema de Pitágoras?

Conexión interdisciplinar
Emprendimiento y empleabilidad
OA3 Nivel 1 y 2 EM

Construcción de conocimiento

Para introducir el concepto de raíces y el cálculo de ellas, el docente podría guiar el proceso de aprendizaje por medio de la pregunta:

¿Cuáles serán las medidas más convenientes en la construcción?

Para guiar a los estudiantes en la elaboración de respuestas, se sugiere motivar su participación, a través de la ejemplificación de la construcción de un techo con un triángulo rectángulo con las medidas estandarizadas de las vigas, en este caso, de largo 2,7m. Luego solicitar a otra persona que ejemplifique con una viga de 2,5 m de largo, anotando en cada caso en la pizarra los datos que faltan.

Esquema	Medidas	Cálculos	Respuestas del maestro
	Viga de largo 2,7m	La viga debe ser la diagonal de un cuadrado de lado a. $a^2 + a^2 = 2{,}7^2$ $2a^2 = 7{,}29$ $a^2 = 3{,}645 \quad \vert\sqrt{\ }$ $\sqrt{a^2} = \sqrt{3{,}645}$ $a \cong 1{,}91$	Los listones del techo pueden ser de 1,9 m.
	Viga de largo 2,5m	La viga debe ser la diagonal de un cuadrado de lado a. $a^2 + a^2 = 2{,}5^2$ $2a^2 = 6{,}25$ $a^2 = 3{,}125 \quad \vert\sqrt{\ }$ $\sqrt{a^2} = \sqrt{3{,}125}$ $a \cong 1{,}77$	Los listones del techo pueden ser de 1,77 m.

También se pueden realizar cálculos para encontrar las medidas del pilar que va en el medio del triángulo, de los palos más pequeños que van en la mitad y que sostienen y dan firmeza a la construcción. Se sugiere formalizar el proceso de sacar raíz cuadrada como el proceso inverso de elevar al cuadrado, también se sugiere acompañar el cálculo con el uso de la calculadora.

Práctica guiada

Para guiar la expresión de ideas matemáticas mediante diferentes representaciones se sugiere utilizar la recta numérica para ordenar raíces y conjeturar sobre algunas de sus propiedades. Generalizar las propiedades según el contexto y ejemplificar hasta las raíces cubicas.

En la siguiente tabla se presenta un resumen de las posibles preguntas que orientan el proceso de aprendizaje guiado.

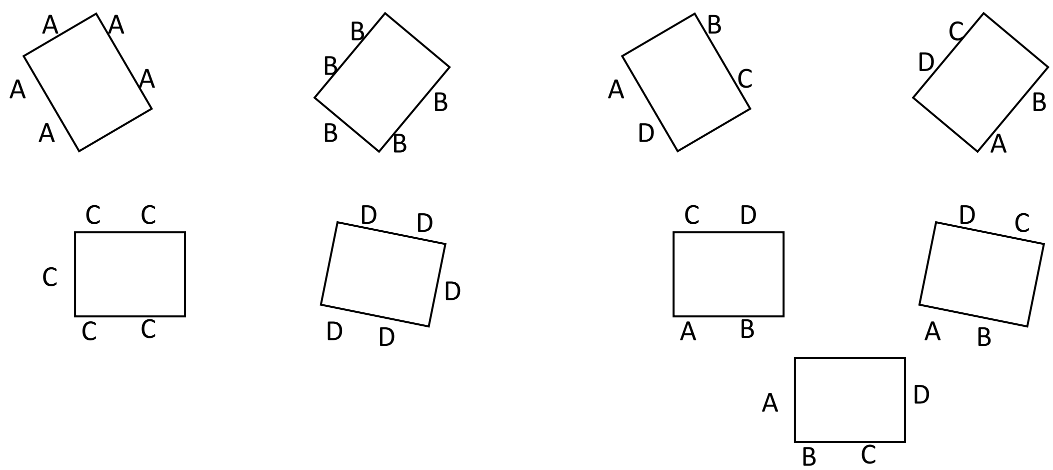
Propiedad	Ejemplificación numérica	Preguntas orientadoras
$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$	$\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{50}$ $\sqrt{50}\cong 7{,}07$	¿De qué otra manera puedo obtener el mismo resultado? ¿Qué otro ejemplo puedo dar? ¿Cómo se puede decir esto en palabras?
Aplicación directa en ejercicio numérico		
a) $\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=4\sqrt{2}$ $4\sqrt{2}\cong 5{,}66$		b) $7\sqrt{3}+\sqrt{75}=12\sqrt{3}$ $12\sqrt{3}\cong 20{,}78$
Propiedad	Ejemplificación numérica	Pregunta orientadora
$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[3]{\dfrac{15}{7}}$ $\sqrt[3]{\dfrac{15}{7}}\cong 1{,}29$	¿Cuál es la diferencia con la propiedad anterior?
Aplicación directa en ejercicio numérico		
$a)$ $\dfrac{\sqrt{42}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{42}{7}}=\sqrt{6}$ $\sqrt{6}\cong 2{,}45$	b) $\dfrac{\sqrt{72}}{2}=\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\dfrac{72}{4}}=\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=3\sqrt{2}$ $3\sqrt{2}\cong 4{,}24$	
Propiedad	Ejemplificación numérica	Pregunta orientadora
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$	$\sqrt[6]{729}=\sqrt[3]{\sqrt[2]{729}}=\sqrt[3]{27}=3$	¿En qué casos se utiliza esta propiedad?
Propiedad	Ejemplificación numérica	Pregunta orientadora
$\dfrac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{b}}}=\dfrac{\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{b}}}{\mathbf{b}}$	$\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$	¿De qué forma se puede obtener esta propiedad? ¿Sirve para todas las raíces n-ésimas? ¿Para qué se aplica esta propiedad?

Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo de puzle con diferentes ejercicios numéricos de aplicación de propiedades para resolver un problema de construcción o diseño de figuras. Una posible organización de los grupos podría ser en base al siguiente esquema:

Primera parte: formación de expertos en cada propiedad.

Segunda parte: explicar las propiedades a otros.



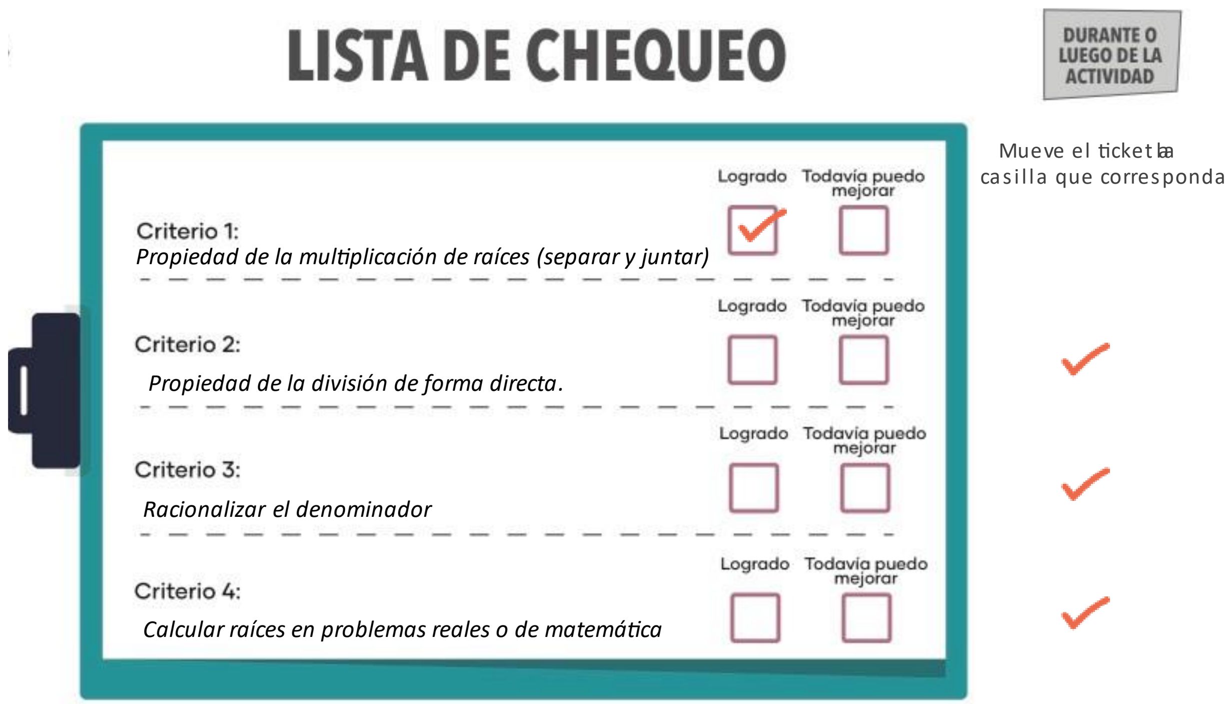
Cada grupo puede organizarse según las propiedades, por ejemplo:

<table>
<tr><th>Grupo</th><th>Propiedad</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td>A</td><td>$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$</td><td rowspan="4">Resolver ejercicios de aplicación directa de la propiedad, se sugiere responder a las preguntas orientadoras y crear al menos un ejercicio.

Se resuelve en forma grupal, pero cada miembro debe ser un experto de la propiedad para luego explicar en el siguiente grupo de expertos.</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$</td></tr>
<tr><td>D</td><td>$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$</td></tr>
<tr><td>A, B, C, D</td><td>Ejercicios que incluyan más de una propiedad.</td><td>El experto de cada propiedad debe explicar a los demás del grupo cómo y cuándo se utiliza la</td></tr>
</table>

		propiedad que el trabajo en la primera parte.

Para retroalimentar la actividad e integrar las distintas propiedades de las raíces con el cálculo de raíces para resolver problemas, se sugiere utilizar la lista de chequeo con los siguientes criterios:



https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Raíces y Propiedades	Aplica una propiedad.	Conoce y aplica las propiedades cometiendo algunos errores.	Conoce y aplica las propiedades de manera adecuada.
	Calcula raíces en ejercicios directos.	Calcula raíces en diferentes tipos de ejercicios numéricos.	Calcula raíces en diferentes tipos de ejercicios numéricos y contextualizados.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que representar las raíces es una manera de representar un número que no es entero, ni racional. Su representación simbólica corresponde a la medida de la diagonal de un cuadrado, mientras que su representación pictórica se relaciona con la construcción de estos cuadrados y de proyectar la diagonal sobre la recta numérica. La realización de este tipo de actividades de dibujar diagonales dependerá del contexto de cada grupo de estudiantes, se sugiere comenzar con la aplicación a los contextos de construcción y su relación con el teorema de Pitágoras, el cual forma parte de los contenidos del nivel 3 de Educación Básica de EPJA.

Se sugiere planificar un módulo cero que considere la operatoria con números naturales, enteros, decimales y fracciones. Enfocando este módulo introductorio a la estimación de resultados, al uso de la calculadora y a resolver problemas en diferentes contextos. Se sugiere utilizar la secuencia procedimental disponible en la ficha pedagógica de la habilidad propuesta en https://www.curriculumnacional.cl/docente/629/articles-248151_recurso_pdf.pdf, también se puede revisar la infografía de la habilidad de resolver problemas, que se encuentra disponible en https://www.curriculumnacional.cl/docente/629/articles-248152_recurso_pdf.pdf

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de utilizar las herramientas disponibles se sugiere el uso de la calculadora y las aproximaciones a la centésima para dar sentido numérico a la raíz. También, se sugiere utilizar herramientas propias de la construcción tales como escuadra de tacón o sombrero, escuadra de carpintero y la falsa escuadra.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo de puzle: se sugieren las siguientes preguntas para guiar la implementación del trabajo de puzle:

Anexo

Situación 1: Construcción de muebles inclinados

Camila es diseñadora de muebles y quiere hacer intencionalmente muebles inclinados ¿Cómo debe usar el teorema de Pitágoras para hacer el diseño?

Situación 2: Dibujo técnico

Javier estudia dibujo técnico y debe hacer una tarea con medidas precisas. Al revisar se da cuenta que las medidas de cuadrados y rectángulos no coinciden exactamente, es decir, no se forma un ángulo de 90° en las esquinas ¿Qué consejos le puedes dar a Javier para arreglar este problema?

Situación 3: Elaboración de puzles de madera

Luisa y Roberto elaboran puzles de madera y su idea requiere la construcción de piezas que pueden formar cuadrados o bien rectángulos ¿Cómo crees tú que podrían utilizar el conocimiento de las raíces para la elaboración de cada pieza?

Situación 4: Siempre derecho

Emilio trabaja en la construcción con aluminios y una de sus tareas más importantes es la nivelación de lo que se va construyendo, todo debe estar bien derecho. Si hay una desnivelación ¿cuáles son las medidas que debe hacer Emilio? ¿cuál es el triángulo rectángulo que está involucrado? y ¿de qué forma le ayuda el teorema de Pitágoras para nivelar?

Situación 5: Ubicación de las raíces en la recta numérica

Matea y Mateo han realizado ciertos cálculos a partir de las medidas de madera que tienen y para hacer cortes necesitan ordenar las siguientes raíces en la recta numérica $\sqrt{7}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$ ¿Cómo podrías ayudar si en esos momentos no tienes calculadora?

Situación 6: Sin clavos

Isabel es experta en hacer cortes de madera para hacer la construcción sin clavos ¿Por qué el conocimiento del teorema de Pitágoras y de las raíces podría ser importante para ella?

Actividad de desempeño 2

Propósito

En esta actividad los estudiantes representarán raíces y aprenderán sobre sus propiedades para facilitar el cálculo con ellas, esto les permitirá describir situaciones relacionadas con la construcción o el diseño. Esta actividad comienza con el teorema de Pitágoras, para continuar con el orden de números y terminar con las propiedades más relevantes de las raíces.

Objetivo de aprendizaje

OA3. Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

OA7. Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

Raíces y sus propiedades.

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

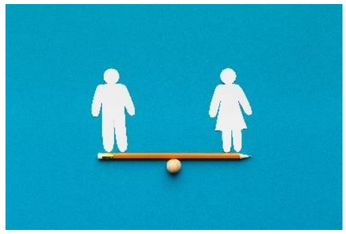
En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que verifique los siguientes criterios:

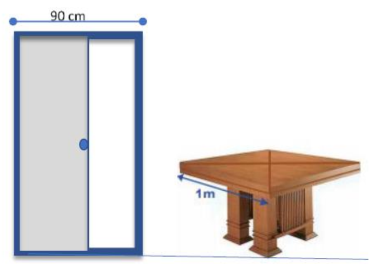
- Aplicar fórmulas de perímetro, área, volumen y velocidad, comprendiendo el contexto y reemplazando los datos según corresponda al problema.
- Resolver ecuaciones lineales sencillas comprendiendo el sentido de la igualdad al realizar la misma operación en ambos lados de la ecuación.
- Utilizar la calculadora para encontrar el valor de una raíz aproximando a la décima, centésima o milésima.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes diferentes situaciones en las que se debe calcular la raíz para resolver algún problema, ver algunas ideas en el anexo, ya sea variando los parámetros, las condiciones o aplicando una fórmula dada.





Algunas de las preguntas que pueden promover el levantamiento del problema y de sus posibles condiciones son:

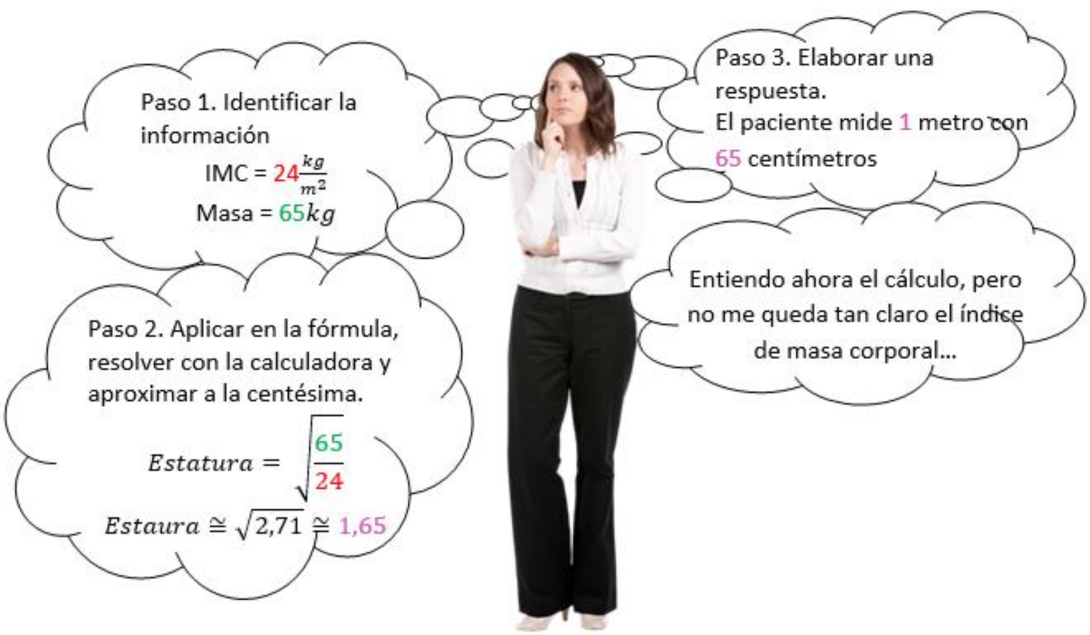
- ¿Cuál podría ser el problema?
- ¿Cuáles podrían ser las condiciones?
- ¿Cuáles son las variables en juego?
- ¿Habrá alguna fórmula o teorema que se pueda utilizar?

> **Conexión interdisciplinar**
> Emprendimiento y empleabilidad
> OA3 Nivel 1 y 2 EM

Construcción de conocimiento

Para construir el conocimiento sobre variar las condiciones y comparar los cambios en los resultados, se sugiere trabajar con un caso de aplicación de la fórmula de masa corporal como el que se describe a continuación: Mary Carmen estudia podología y el profesor le ha pedido calcular la altura de una persona utilizando el índice de masa corporal para hacerse una idea de lo que este índice describe.

El docente ejemplifica cómo determinar la altura de un paciente con su IMC y masa, por ejemplo, un hombre con un índice de masa corporal de 24 $\frac{kg}{m^2}$ y 65 kg. Se continúa con el pensamiento de Mary Carmen sobre el significado de este índice y del procedimiento utilizado.



Finalmente, el docente promueve la comparación de diferentes masas de personas, pero con igual índice de masa corporal, aplicando la fórmula, utilizando la calculadora y aproximando a la centésima. Para ello, el docente se puede apoyar de los casos de Mary Carmen que se presentan en la siguiente imagen:

¡Ahora sí!

Datos	Cálculo	Respuesta	Imagen mental
IMC = $24\frac{kg}{m^2}$ Masa = $72kg$	$E = \sqrt{\frac{72}{24}}$ $E \cong \sqrt{3} \cong 1{,}73$	La persona mide 1 metro con 73 centímetros	
IMC = $24\frac{kg}{m^2}$ Masa = $65kg$	$E = \sqrt{\frac{65}{24}}$ $E \cong \sqrt{2{,}71}$ $\cong 1{,}65$	La persona mide 1 metro con 65 centímetros	
IMC = $24\frac{kg}{m^2}$ Masa = $58kg$	$E = \sqrt{\frac{58}{24}}$ $E \cong \sqrt{2{,}42}$ $\cong 1{,}56$	La persona mide 1 metro con 55 centímetros	

Práctica guiada

Para guiar la comprensión de la aplicación de fórmulas se sugiere, en primer lugar, retomar el índice de masa corporal y su definición basándose en las respuestas a las siguientes preguntas:

- ¿Qué es el IMC?
- ¿Para qué se necesita la raíz cuadrada?
- ¿Cómo utilizamos la fórmula para saber la estatura de una persona que tiene un IMC de 25 $\frac{kg}{m^2}$y un peso de 75 kg?

En segundo lugar, se sugiere transferir los conocimientos de esta situación a otra completamente diferente, pero con un problema que incluya una fórmula que requiera el uso de la raíz cuadrada, por ejemplo, el cálculo de la velocidad[15] para evitar accidentes y la ubicación de señales de tránsito o de semáforos.

[15] El concepto de rapidez y velocidad son tratados desde la física de manera diferente. Se considera que la rapidez hace referencia a la distancia recorrida por un objeto en un determinado tiempo y la velocidad es el desplazamiento de un objeto en una dirección en un determinado tiempo, en este caso se considera una magnitud vectorial. El caso lineal que se produce en el desplazamiento de un auto o distancia recorrida coincide con la magnitud del vector y con la medida escalar y se puede decir que rapidez y velocidad son sinónimos. Se utilizará velocidad dado que en lo coloquial es el término que usa en contextos automovilísticos.

¡A unos 25 metros se encuentra una tortuga!

¿A qué velocidad debo ir para alcanzar a frenar?

$$Velocidad = \sqrt{Distancia \cdot 100}$$

La distancia está en metros y la velocidad se obtiene en $\frac{km}{h}$

Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo personal que incluya las impresiones de cada estudiante en un comic similar al desarrollado en el caso de Mary Carmen, pero para comprender la velocidad necesaria para evitar accidentes, comparando diferentes distancias y resultados. Un problema orientador podría ser el trabajo que hace la Sección de Investigación de Accidentes de Tránsito (SIAT) en el caso de accidentes de tránsito. Una posible organización de las partes del comic para este problema podría ser la siguiente:

Situación	Estructura del comic	
	Partes	Preguntas
En un accidente de tránsito se necesita calcular la velocidad de un auto conociendo la distancia de frenado para saber si el conductor excedió el límite de velocidad en el lugar del accidente. Calcule la velocidad de un auto que tenía una distancia de frenado de 225 metros y compare con otras distancias en las que pudo haber estado el letrero de tránsito o señales de advertencia.	Impresiones personales iniciales sobre la fórmula, los conceptos, los datos que son necesarios y la forma de proceder.	¿Qué significa la fórmula? ¿Qué es la velocidad? ¿Cuáles son los datos? ¿Qué se hace con los datos?
	Desarrollo del problema, identificación de los pasos, indicaciones sobre las partes que no se comprendieron o las que se consideran más fáciles de abordar.	¿Cuáles son los pasos? ¿Cómo organizo el trabajo? ¿Qué partes no comprendí bien? ¿Qué entendí a la perfección?
	Comparación con otras distancias de frenado y con la ubicación de señales de tránsito o señales de advertencia. Probar sistemáticamente con otras distancias de frenado para comparar con la velocidad del accidente obtenida.	¿Qué puedo hacer para comprender mejor? ¿Cómo organizo la comparación de los diferentes resultados? ¿Qué distancias de frenado puedo considerar?

Para retroalimentar la elaboración del comic en términos del aprendizaje de la aplicación de fórmulas y de la variación de parámetros para comparar los resultados obtenidos, se sugiere utilizar la mentalidad de crecimiento del estudiante a sí mismo:

https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Novato	Intermedio	Senior
Aplicación de la fórmula	Utiliza los datos en la fórmula sin relacionarlos.	Utiliza los datos en la fórmula identificando parámetros y variables.	Evalúa los datos en la formula según las necesidades de la situación identificando parámetros y variables.
Cálculo de la raíz	Calcula las raíces de manera directa en un solo caso.	Calcula raíces en diferentes casos.	Calcula raíces en diferentes casos y según las necesidades de la situación.
Aproximaciones	Escribe el número decimal con algunas cifras luego de la coma.	Aproxima el número decimal según las reglas de la aproximación.	Aproxima el número decimal según las reglas de la aproximación y según se indica a la décima, centésima o milésima.
Uso de unidades de medida	Reconoce las unidades de medida.	Utiliza las unidades de medida de manera indiferente.	Utiliza las unidades de medida según corresponda escribiéndolas en la respuesta.
Variación	Identifica la variable del problema.	Identifica la variable del problema y utiliza diferentes valores para evaluar en la fórmula.	Identifica el parámetro y la variable del problema y utiliza diferentes valores para evaluar en la fórmula y si es necesario cambia el parámetro según las condiciones de la situación.
Comparación	Escribe resultados de una y otra situación.	Elabora una tabla con los resultados de una y otra situación identifica algunas diferencias.	Compara los resultados obtenidos identificando las diferencias o similitudes.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que desarrollar la habilidad de resolver problemas implica varias etapas, entre ellas, la de aplicación de una fórmula para responder frente a situaciones que la requieren. El reconocer la variable y los parámetros de la fórmula es una etapa que requiere de la comprensión de la situación y la evaluación de diferentes valores, para luego, comparar diferentes resultados. La comparación requiere de una ejemplificación del cómo proceder y de lo que se espera como respuesta luego de comparar o probar con los diferentes valores en la fórmula. Se sugiere entregar la información con las unidades de medida que corresponden a la situación y que no requieran de ninguna transferencia a otras unidades de medida y solo dependiendo del contexto se sugiere incluir este paso de transferencia de unidades de medida.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de pensar con perseverancia y proactividad se sugiere estimular las preguntas que puedan hacer los estudiantes en la etapa de la práctica guiada, por ejemplo, ofreciendo la palabra según el orden en el listado del curso y esperando preguntas de los estudiantes tales como: ¿cómo se hace en este caso?, ¿qué ocurre si cambio esto? Si no hay preguntas de este tipo, entonces se sugiere comenzar las frases relevando las frases “en este caso se procede…”, “si cambio esto ocurre lo siguiente…”. También se sugiere dar tiempo a la etapa de la práctica independiente para que el estudiante sea perseverante en cumplir con el objetivo de la tarea, determine con anterioridad el tiempo que tomaría toda la actividad para dividir y cerrar las clases en momentos previamente establecidos.

Orientaciones para organizar e implementar la elaboración de comics en matemática: se sugieren las siguientes consideraciones para implementar la elaboración de comics en clases de matemática:

Motivación	¿Qué se puede hacer?
Tiene una gran representación visual del conocimiento.	Presente un modelo de comic y destaque el conocimiento que presenta.
Muestra lo esencial.	Marque las frases cortas y las expresiones de los personajes en el comic.
Es más fácil de recordar una secuencia grafica que contiene información clave.	Marque los momentos claves del comic y una vez que se ha realizado esta marcación presente el comic nuevamente y pregunte a los estudiantes por lo que se recuerdan de esta nueva lectura del comic.
Los estudiantes se involucran con su propia historia y su propio pensar de lo que están aprendiendo.	Se sugiere dar las ideas iniciales de lo que se espera, como también el contexto. No evalúe creatividad en esta asignatura.
Desarrolla la idea de diálogos o monólogos.	Si es necesario limite la cantidad de personajes que deben aparecer, por ejemplo, no más de dos en una primera etapa.
Ayuda a la organización de ideas y pensamientos.	Marque en el ejemplo las ideas centrales y la forma en que están organizadas, puede ser de manera secuencial en el tiempo.
El uso de imágenes transmite significado al tema.	Converse sobre los estados de ánimos que se quieren reflejar en el comic que se presenta como modelo.
Relaciona matemática con el desarrollo de habilidades de otras asignaturas.	Póngase de acuerdo con los colegas de artes visuales y lenguaje para el desarrollo del comic.
La secuenciación promueve la comprensión del contenido.	La historia y el desarrollo de fórmulas puede ser mejor comprendido al utilizar el comic, marque en el comic todas las fórmulas, ecuaciones y datos numéricos y marque también la forma en que se ella al modelo, marcando con color en el comic los procedimientos y algoritmos realizados.
Sirve como herramienta de valoración y evaluación.	Si hay una presentación o publicación de los comics elaborados, esto permitirá valorar el trabajo y evaluar la comprensión del tema.

Anexo

Se sugiere complementar con el apoyo de los siguientes recursos y considerando el contexto:

https://www.curriculumnacional.cl/docentes/Educacion-General/194511:IMC-vs-Peso

https://www.yoaprendomas.cl/docentes/Educacion-General/Ciencias-Naturales-8-basico/CN08-OA-06/89475:Comida-y-Ejercicio

Actividad de desempeño 3

Propósito

Esta actividad busca representar números de grandes y pequeños órdenes de magnitud transitando entre el lenguaje natural, la multiplicación y las potencias para el caso de las potencias de exponente positivo y en el caso de los exponentes negativos, en contextos de la astronomía, biología y la medicina homeopática. También, en esta actividad los estudiantes aprenderán a evaluar el proceso de la resolución de problemas abiertos, donde la estimación y la aplicación de la notación científica puede facilitar los cálculos y la comprensión de las grandes cantidades.

Objetivos de aprendizaje

OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

Potencias (Notación científica, potencias de exponente positivo, potencias de exponente negativo).

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que verifique los siguientes criterios:

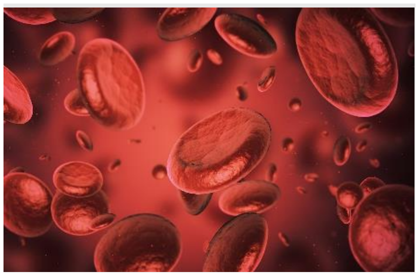
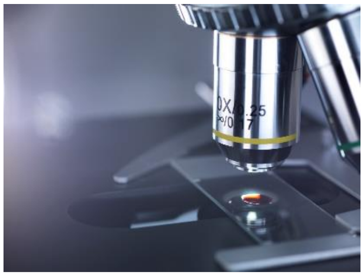
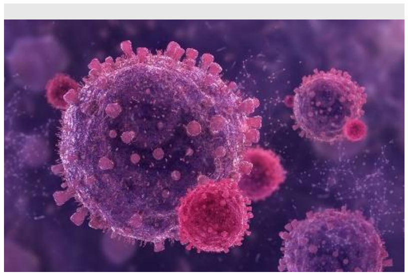
- Reconocer la propiedad de la conmutatividad de la multiplicación en ejemplos directos.
- Aplicar la distributividad en ejemplos directos.
- Multiplicar por múltiplos de 10.
- Relación entre fracciones con denominadores de múltiplos de 10 y los decimales.
- Operatoria básica con decimales.
- Reconocer el concepto de razones y el significado de 1 es a 3 en contextos sencillos.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes diferentes situaciones relacionadas con grandes distancias u objetos minúsculos, donde se usa la notación científica para motivar el tema.



Les pide también, comentar y describir las situaciones, guiándose por las siguientes preguntas:

- ¿Qué idea se puede relacionar a las imágenes?
- ¿Qué números crees que pueden estar relacionados a estas ideas?
- ¿Cómo podemos expresar estos números?
- ¿Qué relación podrían tener estas situaciones con la noción de potencia?

Conexión interdisciplinar
Ciencias naturales
OA3 Nivel 1 EM

Construcción de conocimiento

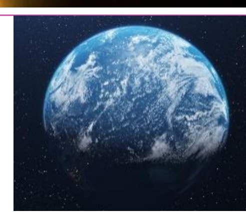
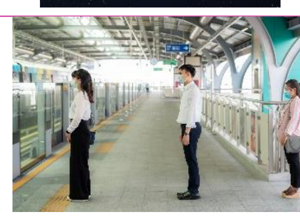
Para introducir el concepto de potencias y el cálculo de ellas, el docente podría guiar el proceso de aprendizaje por medio de las preguntas:

¿Cuál es la distancia desde la Tierra a Marte? ¿Como se podría escribir esta distancia de forma más corta?

A continuación, el docente explica la respuesta distinguiendo entre el mínimo de 56 millones de kilómetros, que se logra cada 16 años, y el máximo de aproximadamente 400 millones de kilómetros de distancia, relevando la importancia de la escritura de los números para hacer cálculos y comprender mejor nuestro sistema solar. Explicando el uso de la notación científica en los siguientes ejemplos:

- 56 millones de kilómetros → $56 \cdot 1\,000\,000$ → $5{,}6 \cdot 10\,000\,000$ → $5{,}6 \cdot 10^7$
- 400 millones de kilómetros → $400 \cdot 1\,000\,000$ → $4 \cdot 100\,000\,000$ → $4 \cdot 10^8$

A partir del ejemplo, el docente explica la multiplicación por 10 o múltiplos de 10 asociado a cada unidad de medida y que denominan múltiplos o divisiones del metro, entendiendo que el metro es una unidad basal y que las otras unidades de medidas se obtienen de multiplicar o dividir el metro. Se sugiere comenzar de mayor a menor hasta llegar al metro, asociando la cantidad de ceros con el exponente de la potencia y relevando la idea de la distancia que se puede trabajar con estas potencias de 10.

Unidad de medida	Escritura completa		Escritura abreviada: potencia	Mediciones concretas
Petámetro (aprox. 1 año luz)	$1\,000\,000\,000\,000\,000m$ aproximadamente		10^{15}	
Terametros	$1\,000\,000\,000\,000m$		10^{12}	
Gigametro	$1\,000\,000\,000m$		10^9	
Megametro	$1\,000\,000m$		10^6	
Kilómetro	$1\,000m$		$10 \cdot 10^2 = 10^3$	
Hectómetro	$100m$		$10 \cdot 10 = 10^2$	
Decámetro	10m		10^1	
Metro	1m		10^0	

Para ampliar el conocimiento e introducir el concepto de potencias con exponente negativo, el docente podría continuar con las siguientes preguntas:

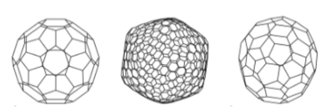
- ¿Cuál es la distancia utilizada diariamente?

- ¿Podrías medir la distancia de un sol a otro en kilómetros? ¿cómo harías los cálculos?
- ¿Qué pasa con las cantidades inferiores a un metro?
- ¿Qué te imaginas más pequeño que un centímetro?
- ¿Cómo anotamos las distancias menores a un metro?

El docente puede explicar la notación y las potencias por medio de la multiplicación y la división, relevando el uso de unidades de medidas de uso diario como el milímetro, centímetro, metro o el kilómetro. Explicando la cantidad de veces que se repite un metro en un kilómetro por medio de la frase un kilómetro son 1 000 metros, lo cual se puede escribir como 1km = 1 000m o en potencias como 1km = 10^3m.

En el caso de las grandes cantidades, se debe especificar que no es óptimo determinarla distancia del Sol a otra estrella en kilómetros, y que es preferible el uso de potencias como el megámetro, gigámetro o el año luz. Relevar que, para hacer los cálculos, los científicos utilizan las potencias, ya que es más fácil trabajar con potencias y se "ahorran ceros".

A continuación, el docente explica desde las grandes cantidades a las pequeñas distancias comenzando con el metro, hasta llegar a las medidas relacionadas con la nanotecnología. Esto dará sentido a la medida y al uso de las potencias al nivel científico.

Unidad de medida	Escritura completa	Escritura abreviada: potencia	Mediciones concretas
Metro	1	10^0	
Decímetro	0,1	$\frac{1}{10} = 10^{-1}$	
Centímetro	0,01	$\frac{1}{100} = 10^{-2}$	
Milímetro	0,001	$\frac{1}{1\,000} = 10^{-3}$	
Micrómetros	0,000001	$\frac{1}{1\,000\,000} = 10^{-6}$	
Nanómetro	0,000000001	$\frac{1}{1\,000\,000\,000} = 10^{-9}$	
Picómetro	0,00000000001	$\frac{1}{1\,000\,000\,000\,000} = 10^{-12}$	Estructura atómica de la materia 
Femtómetro	0,000000000000001	$\frac{1}{1\,000\,000\,000\,000\,000} = 10^{-15}$	
Attómetro	0,000000000000000001	$\frac{1}{1\,000\,000\,000\,000\,000\,000} = 10^{-18}$	

Relacionar las potencias de diez con las medidas de pequeños elementos relacionando la división con las potencias de enteros negativos. Luego, explicar la construcción del siguiente esquema para resumir lo que se ha visto hasta ahora sobre la representación de magnitudes por medio de potencias, decimales y fracciones.

$\mathbf{10^{12}}$ = 1 000 000 000 000	
$\mathbf{10^{9}}$ = 1 000 000 000	
$\mathbf{10^{6}}$ = 1 000 000	
$\mathbf{10^{3}}$ = 1 000	
$\mathbf{10^{2}}$ =100	
$\mathbf{10^{1}}$ = 10	
$\mathbf{10^{0}}$ = 1	
	0,1 = $\mathbf{10^{-1}}$
	0,01 = $\mathbf{10^{-2}}$
	0,001 = $\mathbf{10^{-3}}$
	0,000001 = $\mathbf{10^{-6}}$
	0,0000000001 = $\mathbf{10^{-9}}$

Práctica guiada

Para guiar la representación de la multiplicación y la división por múltiplos de 10 usando las potencias y la notación científica se sugiere resolver un problema asociado a los medicamentos homeopáticos de manera directa, por ejemplo:

¿Cuál es la cantidad de la sustancia activa en un medicamento homeopático?

¿Como se podría escribir en notación científica?

Los medicamentos homeopáticos vienen en diferentes denominaciones de potencias, las cuales tienen relación con la dilución y la agitación en el proceso de elaboración. Mientras mayor potencia tenga el medicamento, tiene una mayor dilución de la sustancia activa a nivel molecular. Por ejemplo, en las potencias homeopáticas D_{24} (donde "D" indica una escala de potencias de 10) o C_{12} (donde C indica una escala de potencias de 100) se alcanza una relación de dilución de $1\colon 10^{24}$, lo cual quiere decir que hay 1 parte de sustancia activa en 10^{24} partes de la solución; algo así como una gota de sustancia activa en una piscina olímpica. Así la sustancia activa de un medicamento homeopático depende de la potencia en la cual se ha clasificado el producto, por ejemplo, D_4 o C_2 alcanza una relación de $1{:}\,10^4$ lo cual significa que hay una parte de la sustancia activa en 10 000 partes de solución, en otras palabras, una gota de sustancia activa en medio litro de solución.

Para guiar la evaluación de procesos y la comprobación de resultados en la resolución de problemas se sugiere trabajar con problemas de estimación con números grandes. El objetivo no es representar números exactos, pero si potencias exactas, es decir, identificar y representar órdenes de magnitud. Para esto se consideran los problemas de Fermi y un trabajo sin calculadora para desarrollar la habilidad de estimar, el redondeo con sensatez y la rigurosidad en la escritura científica que permitirá comparar las magnitudes obtenidas.

¿Cuáles son las necesidades de mi ciudad?

Explicar con un caso particular:

La ciudad de Santiago tenía unos $5{,}6 \cdot 10^6$ de habitantes en el 2017, algo así como todos los habitantes de Dinamarca en el 2014.

- ¿Cuánto comen los santiaguinos al día? → Aproximadamente $0{,}4\ kg$
- ¿Cuántas toneladas de alimentos hay que llevar a la ciudad al día? → $0{,}4\ kg \cdot\ 5{,}6 \cdot 10^6$
- ¿Cuántos camiones hay que llevar? → en promedio un camión transporta 18 toneladas → $0{,}4\ kg \cdot (\ 5{,}6 \cdot 10^6){:}\,(1{,}8 \cdot 10^4 kg)$
- ¿Qué más le gustaría calcular?

Reflexionen en conjunto en cómo se ha trabajado el número de cifras de los números que necesitabas al calcular y desarrolle con la clase la pregunta ¿Cómo puedes determinar rápidamente el número de dígitos del resultado? Formulando una explicación que permita visualizar la suma o la resta de los exponentes de forma intuitiva.

Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo personal de desarrollo de un problema de Fermi que al terminar se presentará al curso, siguiendo las siguientes consideraciones:

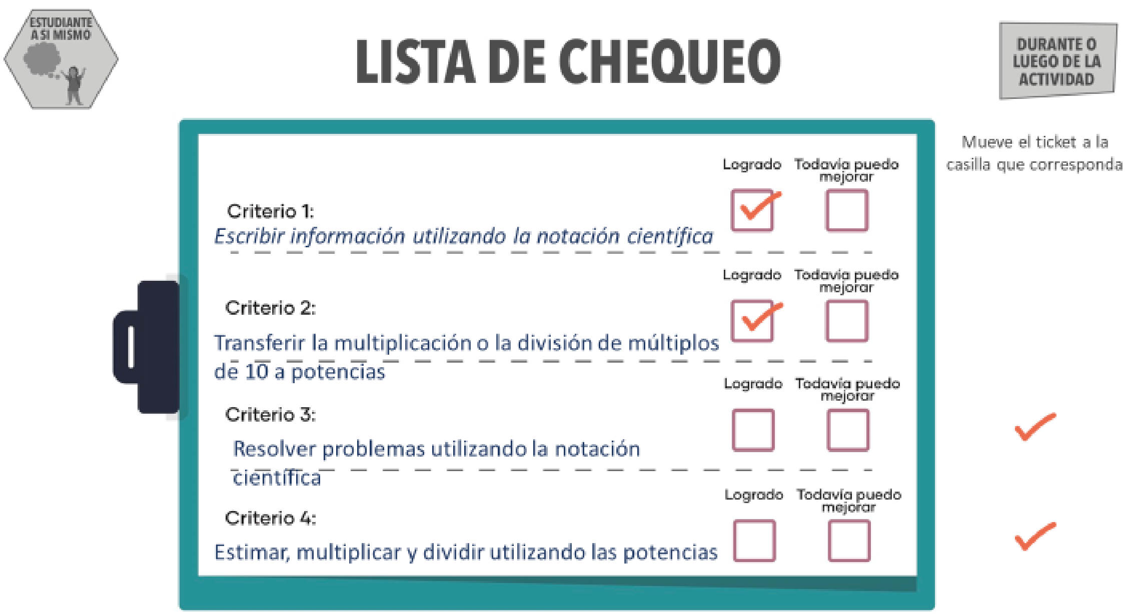
- Estimar algunos tamaños.
- Calcular sin calculadora y usando la notación científica.
- Utilizar Internet para la investigación.

- Prestar especial atención a la conversión correcta de las unidades de superficie y volumen.

Algunas ideas para desarrollar son:

- El lago de Ginebra tiene una superficie de 580 km^2 y tiene una profundidad media de 153 m. ¿De cuánto espacio dispondría cada habitante de Suiza si se para en el lago congelado?
- ¿Cuántas hojas hay en un bosque?
- ¿Cuánta agua necesitamos?
- ¿Cuántas cuerdas de guitarra habrá en Chile?
- ¿Cuántos metros de cables hay en mi ciudad?

Para retroalimentar la actividad y el aprendizaje de la representación y de resolver problemas relacionados con potencias, se sugiere utilizar la lista de chequeo con los siguientes criterios:



https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Representación	Escribe potencias.	Transfiere información a notación científica.	Transfiere información a notación científica, identificando el sentido de la potencia en base 10.
	Multiplica y divide por múltiplos de 10 usando la calculadora.	Identifica la multiplicación por múltiplos de 10 con la notación en potencias de base 10 y exponente positivo.	Relaciona la multiplicación por múltiplos de 10 con la notación en potencias de base 10 y exponente positivo y la división por múltiplos de 10 con la notación en potencias de base 10 y exponente negativo.
Resolver problemas	Describe la información entregada utilizando alguna potencia.	Trabaja la información utilizando las potencias y la notación científica.	Trabaja la información utilizando las potencias y la notación científica y da respuesta a la pregunta planteada.
	Estima situaciones entregando la información en palabras.	Estima situaciones entregando la información en notación científica.	Estima situaciones entregando la información inicial y la respuesta en notación científica.
Contextos	Reconoce similitudes en los contextos de las unidades de medida para la longitud	Reconoce similitudes en diferentes contextos y utiliza las nociones de grandes números.	Reconoce similitudes en diferentes contextos y transfiere según corresponda las nociones de grandes o pequeños números.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: para desarrollar la habilidad de representar el mismo contenido, en este caso las potencias, se sugiere comenzar con lo que ya saben los estudiantes, con multiplicar y dividir por 10, realizando un recorrido desde los grandes números a los más pequeños, utilizando en este caso las grandes o pequeñas distancias y sus unidades de medida. No es necesario que los estudiantes se aprendan estos nombres de memoria, o que hagan transferencia entre las unidades de medida, es importante que conozcan y reconozcan la manera que se utilizan las potencias y sus beneficios para hacer estimaciones en situaciones locales o globales. La notación en potencias incluye ampliar el lenguaje matemático incluyendo la base y el exponente como elementos que definen a la potencia.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de valorar las TIC como una oportunidad, se sugiere utilizar la calculadora en los que momentos que se indiquen, los cuales pueden ser al final de la práctica independiente y solo como medio para aclarar las comparaciones que se realizan luego de la estimación de las cantidades. Valorar el uso de la calculadora significa en esta actividad, verla como un apoyo para verificar las ideas y no como un medio para realizar los cálculos. Por otra parte, el investigar para obtener estimaciones en los problemas tipo Fermi significa valorar las TIC como medios para obtener información de lugares, personas y objetos. Para apoyar la actitud de pensar con flexibilidad para reelaborar las ideas, se sugiere promover la consulta en enciclopedias o internet que permitan mejorar las estimaciones realizadas en primera instancia.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo personal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo personal e independiente de otros:

Independencia

Pensandolas soluciones y los caminos para obtener soluciones por cuenta propia.

Confianza en lo que se sabe

Generar seguridad en lo que se hace en cada paso. La confianza como facilitador de explicaciones propias y para explicar a otros.

Trabajar a su propio nivel

En ciertos momentos es necesario saber dónde se está y trabajar al propio ritmo.

Practicar la autoregulación

Cada tarea requiere de concentracion y de regular en qué momento volverse a un compañero o maestro para pedir ayuda directa.

Anexo

Situación 1: Problemas de cálculo

Los siguientes problemas se pueden resolver sin necesidad de una calculadora. Sólo hay que sumar o restar los exponentes. Sin embargo, tiene sentido comprobarlo con una calculadora. Determina el resultado exactamente a un dígito.

- ¿Cuántos segundos hay en un año?
- ¿Cuántos corpúsculos contienen 6 litros de sangre si en promedio 1mm^3 contiene 5 millones corpúsculos?
- Si 12 g de carbono contienen $6{,}02 \cdot 10^{23}$ partículas. ¿Cuántas partículas contiene 1 kg de carbono?
- Una capa de aceite sobre agua tranquila tiene un grosor de unos $10^{-8}m$ ¿Qué superficie puede cubrir un litro de aceite?
- $3cm^3$ de agua contienen 10^{23} partículas ¿Cuántas partículas contiene un litro de agua?

Situación 2: Puntos de apoyo en lo concreto

- Haz una tabla con el siguiente contenido: Para cada longitud entre 0,1mm y 100 000km, encuentra un representante típico. Por ejemplo, el papel tiene un grosor de unos 0,1mm. Luego pregúntate ¿Qué objeto tiene un tamaño de 1mm? Y encuentras un representante, luego sigues con 1cm, y así sucesivamente.
- Haz una lista de las velocidades típicas.
- Haz una lista de volúmenes típicos.

Situación 3: La leyenda del ajedrez y las potencias de 2

Cuenta la leyenda que hace mucho tiempo reinaba en cierta parte de la India un rey llamado Sheram.

En una de las batallas en las que participó su ejército perdió a su hijo, y eso le dejó profundamente consternado. Nada de lo que le ofrecían sus súbditos lograba alegrarle.

Un buen día un tal Sissa se presentó en su corte y pidió audiencia. El rey la aceptó y Sissa le presentó un juego que, aseguró, conseguiría divertirle y alegrarle de nuevo: el ajedrez.

Después de explicarle las reglas y entregarle un tablero con sus piezas el rey comenzó a jugar y se sintió maravillado: jugó y jugó y su pena desapareció en gran parte. Sissa lo había conseguido. Sheram, agradecido por tan preciado regalo, le dijo a Sissa que como recompensa pidiera lo que deseara.

– Sissa, quiero recompensarte dignamente por el ingenioso juego que has inventado —dijo el rey.

El sabio contestó con una inclinación.

– Soy bastante rico como para poder cumplir tu deseo más elevado —continuó diciendo el rey—. Di la recompensa que te satisfaga y la recibirás.

Sissa continuó callado.

– No seas tímido —le animó el rey—. Expresa tu deseo. No escatimaré nada para satisfacerlo.

– Grande es tu magnanimidad, soberano. Pero concédeme un corto plazo para meditar la respuesta. Mañana, tras maduras reflexiones, te comunicaré mi petición.

Cuando al día siguiente Sissa se presentó de nuevo ante el trono, dejó maravillado al rey con su petición, sin precedente por su modestia.

– Soberano —dijo Sissa—, manda que me entreguen un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez.

– ¿Un simple grano de trigo? —contestó admirado el rey.

– Sí, soberano. Por la segunda casilla, ordena que me den dos granos; por la tercera, 4; por la cuarta, 8; por la quinta, 16; por la sexta, 32…

Luego de leer el cuento:

- calcula la cantidad y masa de trigo que se obtiene en la última casilla.
- calcula el largo del tren que tendría que cargar todo el trigo.
- compara el largo del tren con la circunferencia de la tierra.

Actividad de desempeño 4

Propósito

En esta actividad se busca que los estudiantes realicen una conjetura sobre la forma de escribir y encontrar un valor determinado utilizando las potencias, para luego encontrar fundamentos que validen o refuten la conjetura planteada. En este camino hacia la comprensión los estudiantes construyen nuevas propiedades y las aplican en problemas que tienen diferentes niveles. Se espera que la aplicación de propiedades se convierta en un procedimiento rutinario y que las propiedades sean utilizadas como fundamentos para futuras conjeturas.

Objetivo de aprendizaje

OA5. Fundamentar conjeturas usando conocimientos matemáticos, trabajando colaborativamente. **(Argumentar y comunicar)**

Conocimientos esenciales

- Potencias y sus propiedades.
- Raíces y potencias.

Tiempo estimado

6 horas

Conocimientos previos

Se sugiere realizar un diagnóstico previo para organizar la actividad y al grupo curso según sus diferentes niveles, para esto se puede utilizar los siguientes criterios para este nivel de EPJA:

- Reconocer la propiedad de la conmutatividad de la multiplicación en ejemplos directos.
- Aplicar la distributividad en ejemplos directos.
- Multiplicación y división de enteros.
- Operatoria básica con decimales.
- Potencias de base 10 con exponente entero.
- Notación científica.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes la situación de crecimiento de la levadura de hongos, indicando que las levaduras son organismos unicelulares que desempeñan un papel importante en la producción de alimentos y bebidas alcohólicas. En determinadas condiciones, las células de levadura de hongos se multiplican tan rápidamente que a la primera hora la masa duplica su volumen.

Conexión interdisciplinar
Ciencias naturales
OA1 Nivel 1 EM

El docente les pide conjeturar sobre la expresión matemática que permite determinar el volumen de la masa, transcurrida una media hora. Algunas preguntas que pueden apoyar la elaboración de una conjetura para este caso son:

- ¿Cuáles son las condiciones iniciales?
- ¿Qué significado tiene la base de la potencia?
- ¿Qué significado tiene el exponente de la potencia?
- ¿Cómo expresamos el crecimiento del volumen de la masa en dos horas?

Construcción de conocimiento

Para introducir la relación entre las potencias y raíces se sugiere encontrar fundamentos para la conjetura realizada anteriormente y que permite expresar el volumen de la masa cuando ha transcurrido una media hora. Para esto, comience con la base de la potencia, en este caso ya no es de base 10, es base 2 y diferencie con la cantidad inicial de masa, se sugiere considerar $9{,}6\text{mg}$ de masa para notar la diferencia entre la potencia, la variable, en este caso el tiempo en horas, y la constante.

La tabla que se presenta a continuación tiene un orden lineal. Se sugiere comenzar según las respuestas entregadas por la clase, deteniéndose en los conceptos nuevos, esto podría significar que se comience con la segunda o tercera fila.

Tiempo en horas	Masa	Escritura en potencias	Frases de apoyo a la construcción del conocimiento
0	$9{,}60mg$	$9{,}60 \cdot 2^0 = 9{,}60$	• Propiedad de $2^0 = 1$ • Base 2, se duplica • Exponente 0, no ha transcurrido el tiempo aún, inicio.
$\frac{1}{2}$	$13{,}55mg$	$9{,}60 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \approx 13{,}55$	• Propiedad de $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, en general definir $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ • Base 2, se duplica la masa. • Exponente $\frac{1}{2}$, ha transcurrido media hora.
1	$19{,}20mg$	$9{,}60 \cdot 2^1 = 19{,}20$	• Propiedad de $2^1 = 2$ • Base 2, se duplica la masa. • Exponente 1, ha transcurrido una hora.
2	$38{,}40mg$	$9{,}60 \cdot 2^1 \cdot 2^1$ $= 9{,}60 \cdot 4$ $= 9{,}6 \cdot 2^2 = 38{,}40$	• Propiedad de $2^1 = 2$ • Propiedad de $2^1 \cdot 2^1 = 2^2$ • Base 2, se duplica la masa, se cuadruplica luego de dos horas. • Exponente 2, han transcurrido dos horas.

Práctica guiada

Para desarrollar la elaboración de fundamentos y la comprensión en los estudiantes de estas ideas matemáticas se sugiere una explicación que siempre refiera a la definición de la potencia, es decir, indicando que el exponente indica cuántas veces se multiplica la base con ella misma y haciendo un énfasis en los casos de exponente negativo donde su significado será dividir según la base y especificando el caso especial de exponentes fraccionarios, donde se debe extraer raíz.

En la siguiente tabla se presenta un resumen de las posibles preguntas que orientan el proceso de aprendizaje guiado.

Propiedad 1	Ejemplificación numérica	Pregunta orientadora
$\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$	$3^6 \cdot 3^5 = 3^{6+5} = 3^{11}$	¿De qué forma se puede obtener esta propiedad? ¿Sirve para todos los exponentes? ¿Para qué se aplica esta propiedad?
Explicación detallada en un ejercicio numérico		
$\boldsymbol{4^3 \cdot 4^5 = 4^{3+5} = (4 \cdot 4 \cdot 4) \quad \cdot \quad (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^8}$		
Propiedad 2	Ejemplificación numérica	Pregunta orientadora
$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$	$(7^3)^2 = 7^{3 \cdot 2} = 7^6$	¿En qué casos se utiliza esta propiedad?
Propiedad 3	Ejemplificación numérica	Pregunta orientadora
$\boldsymbol{a^n \div a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$	$4^5 \div 4^7 = \frac{4^5}{4^7} = 4^{5-7} = 4^{-2}$ $\frac{4^5}{4^7} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}$ $= \frac{1}{4 \cdot 4} = 4^{-2}$	¿De qué otra manera se puede obtener esta propiedad? ¿Sirve para todos los exponentes? ¿Para qué se aplica esta propiedad?
Propiedad 4	Ejemplificación numérica	Preguntas orientadoras
$\boldsymbol{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$	$2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$ $= 1\ 000$	¿De qué otra manera puedo obtener el mismo resultado? ¿Qué otro ejemplo puedo dar? ¿Cómo se puede decir esto en palabras?
Propiedad 5	Ejemplificación numérica	Pregunta orientadora
$\boldsymbol{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$	$\frac{6^4}{3^4} = \left(\frac{6}{3}\right)^4 = 2^4 = 16$	¿Cuál es la diferencia con la propiedad anterior?
Aplicación directa en ejercicio numérico		
a) $\boldsymbol{\frac{4^3}{7^3} = \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{64}{343}}$ $\boldsymbol{\frac{64}{343} \cong 0,187}$	b) $\boldsymbol{\frac{15^5}{30^5} = \left(\frac{15}{30}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}}$ $\boldsymbol{\frac{1}{32} \cong 0,031}$	
Casos especiales:		
1 · 1 · 1 · .... · 1 = 1 por lo tanto: $\boldsymbol{1^n = 1}$		
0 · 0 · 0 · .... · 0 = 0 por lo tanto: $\boldsymbol{0^n = 0}$		
0^0 no **está** definido		
$\boldsymbol{a^1 = a}$ y $\boldsymbol{a^0 = 1}$ con $\boldsymbol{a \neq 0}$		

Práctica independiente

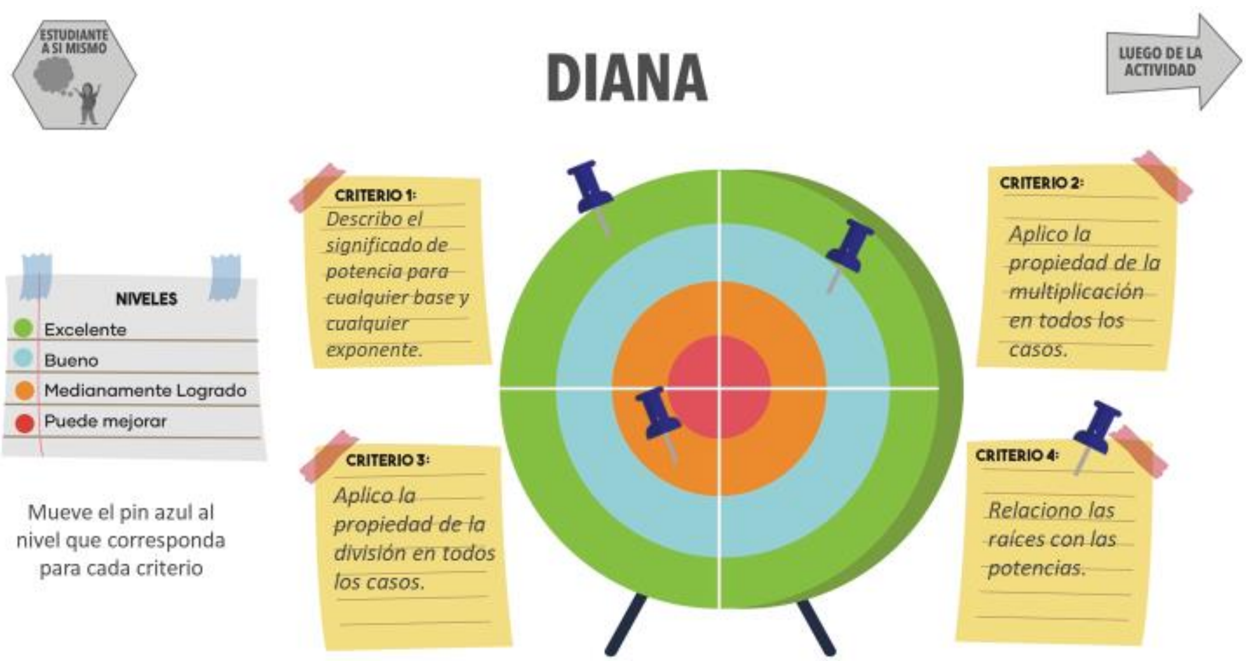
Se sugiere hacer estaciones para la comprensión de las propiedades aplicando a situaciones similares, describiendo con sus propias palabras y revisando las soluciones de manera autónoma. Algunas de las estaciones que se sugieren para esta actividad son:

Estación	Material	Instrucción	Organización
Definición de potencia con exponente positivo hasta 3.	Tarjetas con imágenes de figuras que representen longitudes, áreas y volúmenes.	Identifica la base, el exponente y da significado a la potencia.	Sobre la mesa hay diferentes tarjetas con imágenes y para cada estudiante hay una hoja de trabajo donde puede anotar sus respuestas.
Definición de potencia con exponente positivo.	Tarjetas con imágenes de situaciones que requieren de grandes números.	Identifica la base, el exponente y da significado a la potencia.	Sobre la mesa hay diferentes tarjetas con imágenes y para cada estudiante hay una hoja de trabajo donde puede anotar sus respuestas.
Propiedad 1 Multiplicación de potencias de igual base.	Hoja con la explicación de la propiedad y tres ejemplos resueltos de forma detallada en tres distintos niveles de dificultad.	Resuelve seis ejercicios y verifica tus resultados con la hoja de solución, busca tus errores y corrígelos utilizando otro color de lápiz.	Sobre la pared se encuentra pegada la hoja con la explicación (tipo infografía) de la propiedad y en la mesa se encuentra una hoja de trabajo con 9 ejercicios (3 de cada nivel), en otra parte de la pared se encuentran las soluciones.
Propiedad 2 Potencias de potencias.	Hoja con la explicación de la propiedad y tres ejemplos resueltos de forma detallada en tres distintos niveles de dificultad.	Resuelve seis ejercicios y verifica tus resultados con la hoja de solución, busca tus errores y corrígelos utilizando otro color de lápiz.	Sobre la pared se encuentra pegada la hoja con la explicación (tipo infografía) de la propiedad y en la mesa se encuentra una hoja de trabajo con 9 ejercicios (3 de cada nivel), en otra parte de la pared se encuentran las soluciones.
Propiedad 3 División de potencias de igual base.	Tres tarjetas cada una con el desarrollo de un ejercicio y de diferentes niveles de dificultad.	Describe con tus propias palabras la propiedad utilizada y relaciona con las potencias de exponente negativo.	Sobre la mesa se encuentran las tarjetas y además una hoja de trabajo para que el estudiante escriba su descripción de la propiedad y de un ejemplo de la relación que tiene con las potencias de base negativa.
Propiedad 4 Multiplicación de potencias de igual exponente.	Hoja con la explicación de la propiedad y tres ejemplos resueltos de forma detallada en tres distintos niveles de dificultad.	Resuelve seis ejercicios y verifica tus resultados con la hoja de solución, busca tus errores y corrígelos utilizando otro color de lápiz.	Sobre la pared se encuentra pegada la hoja con la explicación (tipo infografía) de la propiedad y en la mesa se encuentra una hoja de trabajo con 9 ejercicios (3 de cada nivel), en otra parte de la pared se encuentran las soluciones.
Propiedad 5 División de potencias de	Tres tarjetas cada una con el desarrollo de un ejercicio y de diferentes niveles de dificultad.	Describe con tus propias palabras la propiedad utilizada y relaciona con	Sobre la mesa se encuentran las tarjetas y además una hoja de trabajo para que el estudiante escriba su descripción de la propiedad y de un ejemplo de la relación

igual exponente.		las potencias de exponente negativo.	que tiene con las potencias de base negativa.
Ejercicios combinados	Hoja de trabajo con distintos ejercicios combinando las propiedades y en tres niveles de dificultad.	Identifica la propiedad utilizada para resolver seis ejercicios. Verifica tus resultados con la hoja de solución, busca tus errores y corrígelos utilizando otro color de lápiz.	Sobre la mesa se encuentra una hoja de trabajo con 9 ejercicios (3 de cada nivel) y en otra parte de la sala se encuentra la hoja con las soluciones en las cuales aparece el fundamento, propiedad utilizada, de cada paso para llegar a la respuesta.

Se sugiere hacer variaciones de estas estaciones relacionadas con el tipo de exponente, comenzando con exponentes enteros positivos, continuando con enteros negativos y luego exponentes fraccionarios.

Para retroalimentar la actividad y desarrollar la búsqueda de fundamentos se sugiere utilizar la diana:



https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas

Evaluación formativa

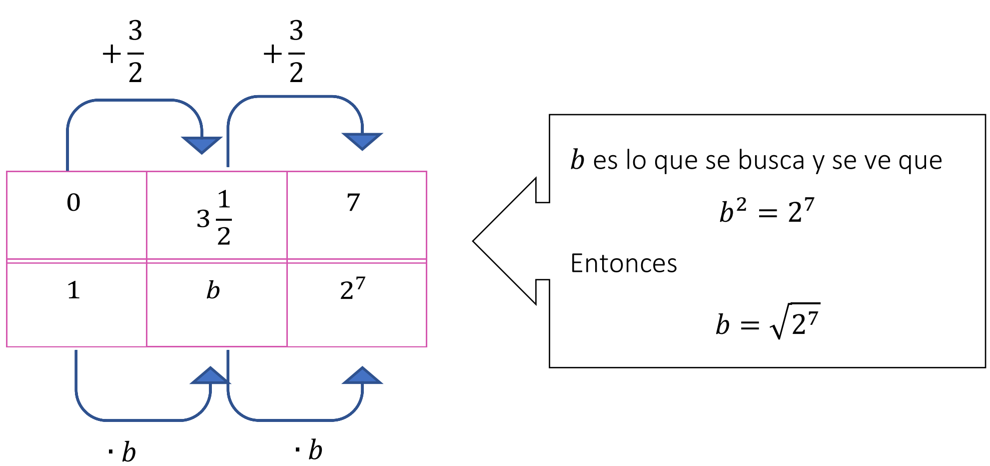
Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Potencias y sus propiedades	Aplica una propiedad.	Conoce y aplica las propiedades cometiendo algunos errores.	Conoce y aplica las propiedades de manera adecuada en diferentes niveles de dificultad.
	Calcula potencias en ejercicios variados aplicando las propiedades.	Calcula potencias en diferentes tipos de ejercicios numéricos.	Calcula potencias en diferentes tipos de ejercicios numéricos y contextualizados.
Raíz y potencia	Transfiere de potencia a raíz en algunos casos.	Transfiere de potencia a raíz y de raíz a potencias en algunos casos.	Transfiere de potencia a raíz y de raíz a potencias en todos los casos que sea necesario.
Contextos	Relaciona situaciones asociadas a exponentes positivos.	Relaciona situaciones asociadas a exponentes positivos y negativos.	Relaciona situaciones asociadas a exponentes positivos, negativos y racional.

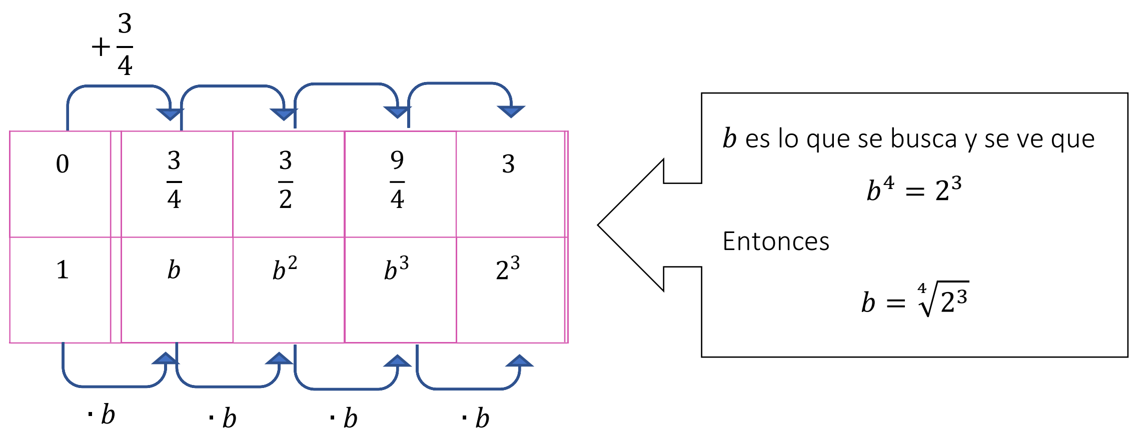
Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que la habilidad de argumentar requiere de varios procesos previos, entre ellos la búsqueda de fundamentos para validar o refutar una conjetura, en este caso la actividad busca presentar y utilizar las propiedades como fundamentos para validar una conjetura inicial. La aplicación de las propiedades en diferentes problemas permitiría comprenderlas para luego utilizarlas en la resolución de problemas o en las explicaciones y luego en procesos más complejos como lo es la argumentación.

Se sugiere transferir la situación del crecimiento de media hora de la levadura de hongos a una situación más compleja, preguntando qué pasaría luego de $3\frac{1}{2}$ horas y comenzando con un volumen de 1 cm^3, utilizando potencias conocidas, como se ve en el esquema para responder que después de 3 horas y media el tamaño de la levadura es de aproximadamente 11,31 cm^3

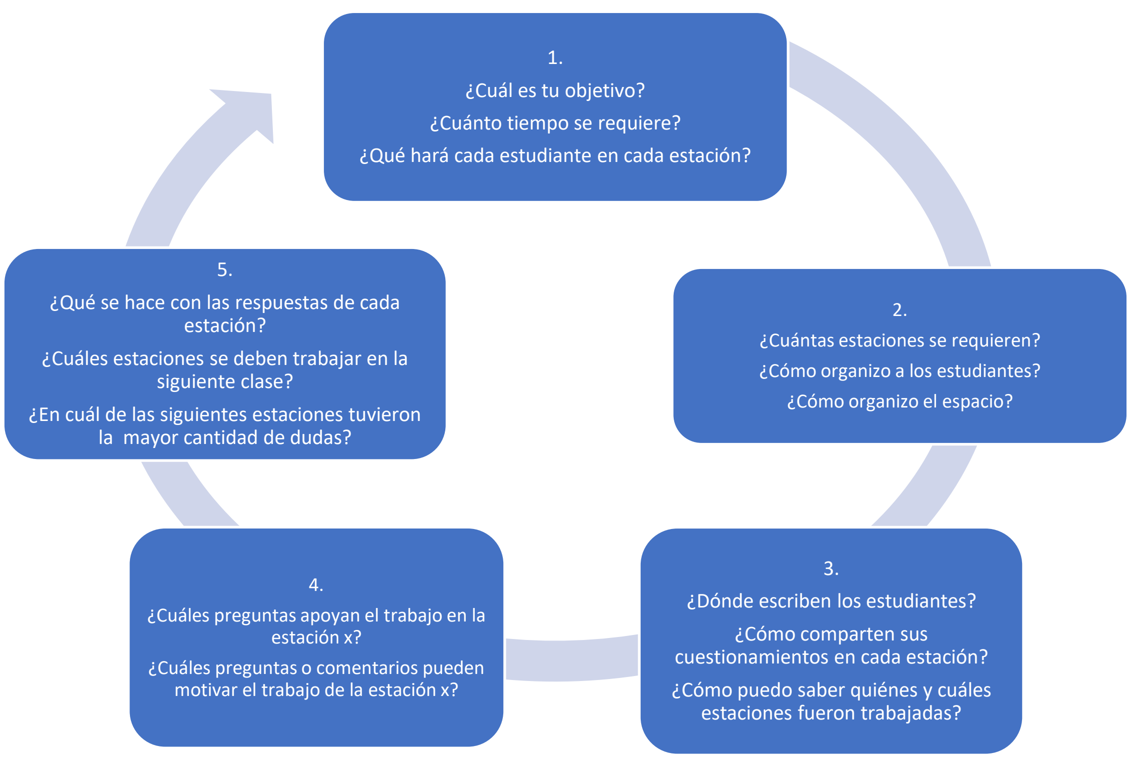


En la misma dirección se sugiere explicar la transferencia a otras potencias fraccionarias, tales como $\frac{3}{4}$, utilizando el mismo ejemplo de la levadura.



Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de trabajo colaborativo se sugiere considerar, luego del trabajo personal, el compartir los resultados y ofrecer momentos en los cuales se pueden explicar entre ellos la forma de abordar los problemas de las estaciones.

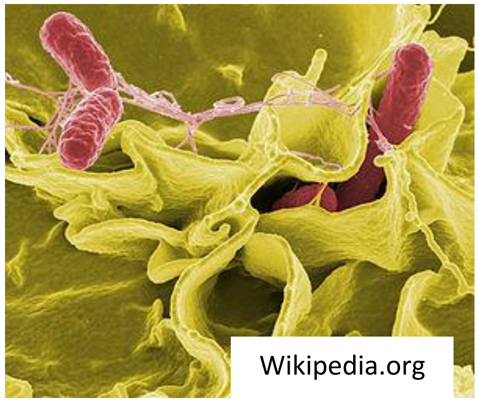
Orientaciones para organizar e implementar el trabajo en estaciones: se sugieren las siguientes preguntas para guiar la implementación de las estaciones.



Anexo

Situación: La salmonela

Por la mañana, Juan había comido una hamburguesa en la ciudad. Por la noche se sintió muy débil. A la mañana siguiente tenía diarrea, vómitos y fiebre. El médico al que llamaron diagnosticó una intoxicación alimentaria. La carne picada se había contaminado con bacterias. Era salmonela (Salmonella).



Wikipedia.org

La salmonela sólo se elimina con una cocción o fritura prolongada. Por lo tanto, existe un riesgo de infección cuando se comen huevos y productos cárnicos crudos o calentados brevemente. Es especialmente arriesgado si los alimentos que contienen salmonela se dejan en una habitación caliente. Dado que el número de bacterias se duplica cada hora, diez bacterias pueden convertirse en diez millones de bacterias en pocas horas, una cantidad que puede ser mortal.

Utiliza las potencias para encontrar la cantidad de bacterias salmonela luego de $5\frac{3}{4}$ hrs. considerando que al inicio hay una sola bacteria.

Módulo obligatorio 2

Visión panorámica

Gran idea

Las funciones, las expresiones algebraicas y procedimientos permiten construir modelos y encontrar soluciones a situaciones de cambio en diferentes ámbitos de nuestra realidad.

Objetivos de aprendizaje

OA2. Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación, valorando las TIC como una oportunidad. **(Representar)**

OA3. Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

OA4. Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones, asumiendo posturas razonadas. **(Modelar)**

OA7. Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad**. (Resolver problemas)**

OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Productos notables.
- Función cuadrática.
- Ecuación cuadrática.

Tiempo estimado
6 semanas (24 horas)

Propósito del módulo obligatorio 2

En el módulo 2 de la asignatura de matemática del Nivel 1 de Educación Media, se espera que los estudiantes comprendan que las *funciones, las expresiones algebraicas y los procedimientos permiten construir modelos y encontrar soluciones a situaciones de cambios en diferentes ámbitos de nuestra realidad*. Los estudiantes describen el mundo con sus propias palabras y complementan para precisar, objetivar y predecir fenómenos y comportamientos cercanos con modelos y soluciones obtenidas por medio de la matemática.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 2 desarrollan las habilidades de representar, modelar y resolver problemas. En particular, los estudiantes seleccionan y ajustan modelos de función cuadrática según el fenómeno y la situación, además, evalúan la pertinencia del modelo, comparándolos con otros y con la realidad, determinando limitaciones o bien para realizar ajustes razonados. Los estudiantes varían parámetros de la función cuadrática y de expresiones algebraicas, tales como los productos notables para comparar los cambios en los resultados obtenidos, como para encontrar soluciones de ecuaciones cuadráticas. La habilidad de representar se desarrolla al realizar los cambios de registros que van desde la expresión algebraica a la gráfica o a la tabla y viceversa. También, los estudiantes resuelven problemas utilizando la fórmula de la ecuación cuadrática, evalúan el proceso utilizado y comprueban resultados y soluciones al problema.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 2 desarrollan las actitudes del siglo XXI del ámbito de las Maneras de pensar y las herramientas para trabajar, promoviendo la perseverancia en torno a metas individuales o grupales, la postura razonada y relacionada con el sentido de realidad para ajustar o evaluar modelos y regresando siempre a la situación real para dar una respuesta. Este módulo desarrolla en los estudiantes el pensamiento proactivo, especialmente para enfrentar lo nuevo, como también, el pensar con flexibilidad para reelaborar las ideas propias o las de otros. Este módulo promueve la valoración de las TIC como un medio para obtener información y trabajar la información para obtener nuevas representaciones, imágenes visuales del comportamiento de las situaciones y fenómenos de la realidad. De esta forma, el estudiante aprenderá, explorará y describirá el mundo funcionalmente para comprender contextos locales o globales, personales, familiares, científicos, profesionales o lúdicos.

Ruta de Aprendizaje del Módulo obligatorio 2

Las funciones, las expresiones algebraicas y procedimientos permiten construir modelos y encontrar soluciones a situaciones de cambio en diferentes ámbitos de nuestra realidad.

Actividad de desempeño 1: Seleccionan y ajustan modelos asociados a la función cuadrática según diferentes fenómenos, transitando entre los diferentes niveles de representación.

Actividad de desempeño 2: Varían los parámetros de la función cuadrática, amplificando ax^2, sumando una constante $ax^2 + c$ o bien $(x+b)^2$; $(x-b)^2$ para visualizar los efectos gráficamente y evaluar los modelos según la situación.

Actividad de desempeño 3: Representan y evalúan modelos comparándolos entre sí para resolver problemas y determinar soluciones utilizando los productos notables.

Actividad de desempeño 4: Resuelven problemas evaluando el proceso de ecuaciones cuadráticas y comprobando resultados.

Actividad de desempeño 1

Propósito

Esta actividad busca que los estudiantes modelen una situación utilizando la función cuadrática y así comprendan la relación entre la expresión algebraica, su gráfico y la situación. La actividad también considera la aplicación a situaciones similares, geométricas o sin contexto para dar seguridad en la transferencia del nuevo conocimiento. Esta actividad comienza con la situación de una caída libre con aceleración, como la de un clavadista y sin aceleración como el de los paracaidistas, para continuar con contextos geométricos.

Objetivo de Aprendizaje

OA2. Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación, valorando las TIC como una oportunidad. **(Representar)**

OA3. Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

Conocimiento esencial

Función cuadrática (Expresiones del tipo $f(x) = x^2$ y $f(x) = a \cdot x^2$)

Tiempo estimado

6 horas

Conocimientos previos

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Multiplicar racionales negativos.
- Elaborar tablas de valores a partir de la expresión algebraica de la función lineal y viceversa.
- Describir las características de la función lineal, pendiente e intersecciones con el eje x e y.
- Resolver ecuaciones lineales sencillas comprendiendo la relación con el grafico de la función.
- Utilizar la calculadora para encontrar el valor de una potencia.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes la situación de caída libre con aceleración con la cual se puede construir la función cuadrática y contrastarla con la función lineal de caída libre sin aceleración.

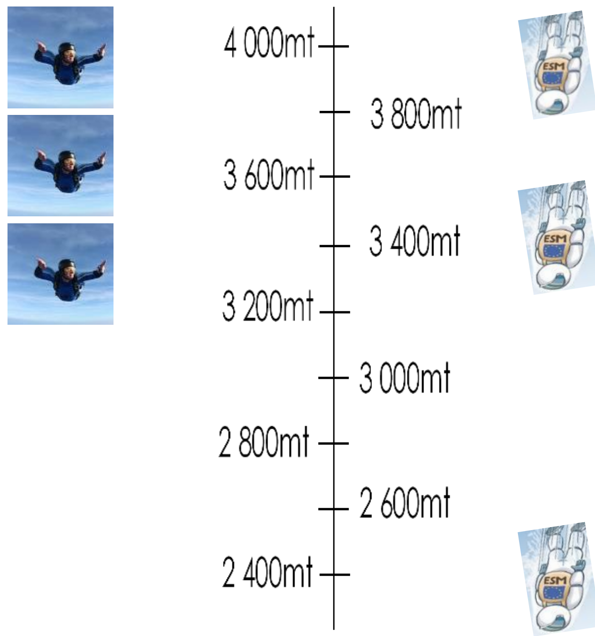
Conexión interdisciplinar
Ciencias naturales
OA1 Nivel 1 EM

Algunas de las preguntas que pueden promover el levantamiento del problema y de sus posibles condiciones son:

- ¿Qué diferencias hay en las imágenes?
- ¿Podemos describir la caída con una función lineal?
- ¿Cómo tendríamos que elegir la pendiente y la intersección con el eje y?
- ¿De qué otra manera podríamos representar la caída?

Construcción de conocimiento

Para construir el conocimiento, se sugiere comparar las situaciones lineales y cuadráticas por medio de los valores y características que hagan notar que, por ejemplo, el cambio de posición es constante cuando la caída es sin aceleración, y es creciente cuando la caída es con aceleración, relevando que la linealidad se relaciona con lo proporcional y lo cuadrático responde a una multiplicación por la misma variable. Por ejemplo, en el esquema, a la izquierda se ve un paracaidista en la fase de velocidad constante, sin aceleración, y a la derecha se ve un paracaidista que, debido a su posición corporal, aumenta la velocidad, desciende con aceleración. La secuencia de fotos en columnas muestra posibles posiciones de la caída en iguales lapsos de tiempo.



Explicar la primera columna como un movimiento rectilíneo uniforme (MRU), donde en tiempos iguales el paracaidista caería distancias iguales. Este movimiento se modela con una función lineal. La segunda columna muestra un movimiento rectilíneo uniforme acelerado (MRUA), donde en tiempos iguales la velocidad aumenta en cantidades iguales, por lo que las distancias recorridas aumentan cuadráticamente. Este movimiento se modela con una función nueva, denominada cuadrática.

Función lineal:

x	10	20	30
y	200 metros recorridos	400 metros recorridos	600 metros recorridos
$f(t) = 20 \cdot t$			

Función cuadrática:

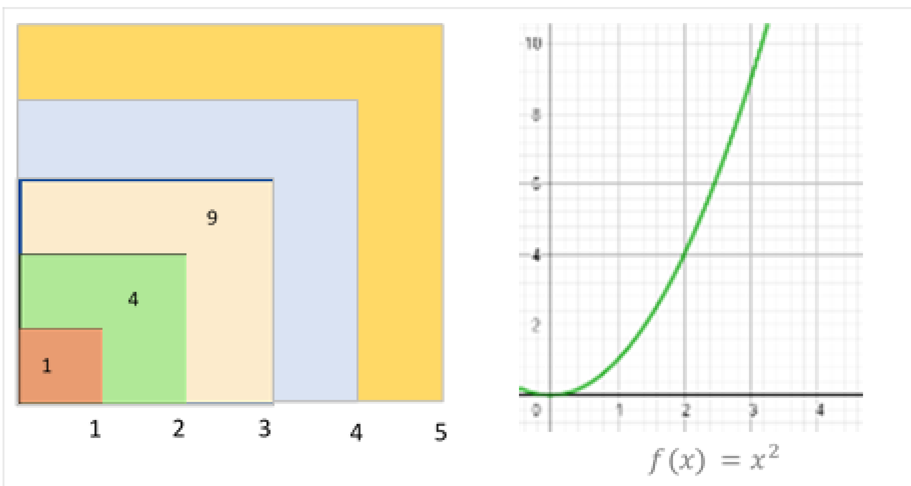
x	10	20	30
y	200 metros recorridos	800 metros recorridos	1 800 metros recorridos
$f(t) = 2 \cdot t^2$			

Relevar las simplificaciones que se han realizado a ambos modelos, indicando que responde a partes de una verdadera caída y a deportes que tienen diferentes características físicas de vuelo. Se sugiere graficar ambos modelos en un mismo gráfico para hacer notar las diferencias entre lo lineal y lo cuadrático. También, se sugiere explicar el factor 2 y 20 en cada una de las expresiones algebraicas que definen la función.

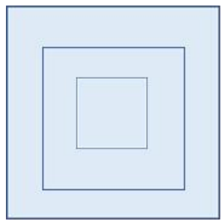
Práctica guiada

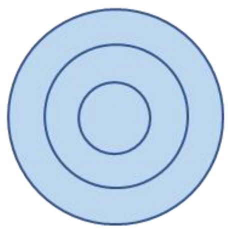
Se sugiere dividir la práctica guiada en dos partes, la primera para ejemplificar la función cuadrática sencilla $f(x) = x^2$ y la segunda parte para explicar el factor que podría acompañar la expresión algebraica de la función $h(x) = a \cdot x^2$. Se sugiere relacionar el origen de la función con el vértice de la parábola y relacionar el área de los cuadrados según su lado para tener una situación cercana y conocida por los estudiantes para elaborar tabla y gráfico de la función $f(x) = x^2$.

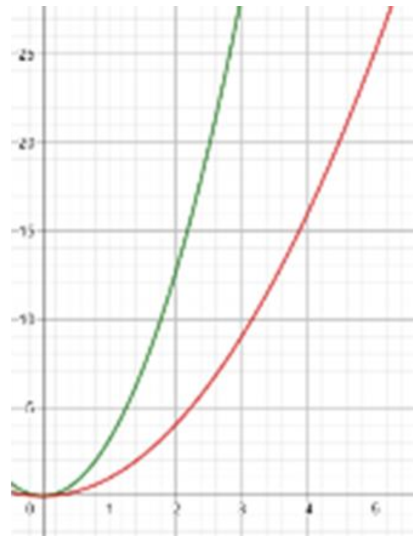
x	1	2	3	4	5	0,5	1,2	2,2
$f(x)$	1	4	9	16	25	0,25	1,44	4,84



En la segunda parte, se sugiere explicar las funciones cuadráticas del tipo $h(x) = ax^2$ presentando el gráfico de dos funciones f y h del área de un cuadrado en dependencia de su lado x y el área de un círculo en dependencia del radio x.







Se sugiere elaborar la tabla de la función f verificando que corresponde al área del cuadrado, explicando la relación con la expresión simbólica $f(x) = x^2$ de esta función. Trabajar en el intervalo $[0,4]$ y en tramos de 0,5 unidades. Explicar el gráfico rojo como la representación de la función f del área del cuadrado porque se pueden registrar los puntos $(0 \mid 0), (1 \mid 1), (2 \mid 4), (3 \mid 9), (4 \mid 16)$ y puntos intermedios, como $(2{,}5 \mid 6{,}25)$.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16

Se sugiere elaborar la tabla de la función h verificando que corresponde al área del círculo, explicando la relación con la expresión simbólica de esta función. Trabajar en el intervalo $[0,4]$ en tramos de 0,5 unidades y una aproximación de $\pi = 3$.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$h(x)$	0	0,75	3	6,75	12	18,75	27	36,75	48
$h(x) = \pi x^2$									

Se sugiere explicar y comparar la elaboración de las funciones cuadráticas a partir de las tablas, teniendo presente que la expresión x^2 siempre está presente en las funciones cuadráticas.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	36	16	4	0	4	16	36

- $g(x) = 4 \cdot x^2$
- $g(1) = 4 = 4 \cdot 1^2$ para los demás valores de x se tiene la misma regularidad.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

- $h(x) = -1 \cdot x^2$

- $h(1) = -1 = -1 \cdot 1^2$ para los demás valores de x se tiene la misma regularidad.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$l(x)$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

- $l(x) = 0{,}5 \cdot x^2$
- $l(1) = 0{,}5 = 0{,}5 \cdot 1^2$. Para los demás valores de x se tiene la misma regularidad.

x	-4	-2	0	2	4
$m(x)$	24	6	0	6	24

- $m(x) = 1{,}5 \cdot x^2$
- $m(2) = 6 = 1{,}5 \cdot 2^2$. Para los demás valores de x se tiene la misma regularidad.

Práctica independiente

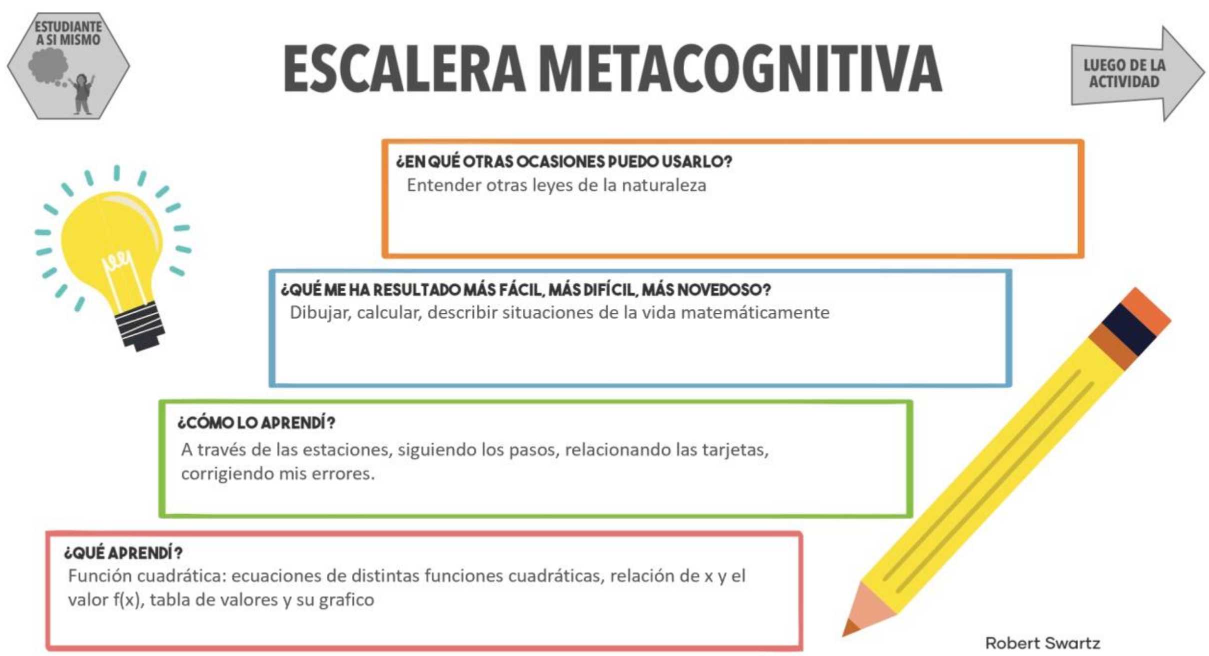
Se sugiere hacer un trabajo de estaciones para profundizar la comprensión de las relaciones entre la función en sí, la tabla de los valores de x con $f(x)$ y el gráfico. Algunas de las estaciones que se sugieren para esta actividad son:

Estación	Material	Instrucción	Organización
Definición de la función cuadrática, distinguir de una relación, función lineal y otros.	Tarjetas con imágenes de funciones que representen funciones cuadráticas, lineales y otros que no sean función ni funciones de otro tipo.	Identifica si es función, marca el máximo el mínimo, si hay una simetría u otros elementos que te llamen la atención.	Sobre la mesa hay diferentes tarjetas con imágenes y para cada estudiante hay una hoja de trabajo donde puede anotar sus respuestas. Para cada estación el profesor tiene hojas con las respuestas correctas y se les pasa para corregir, una vez que el estudiante le muestra que terminó con la estación.
Relación entre la tabla, la expresión algebraica de la función y los valores x y $f(x)$.	Tarjetas con tablas de funciones con unos 10 valores con algunas celdas vacías y otras tarjetas con las expresiones algebraicas de las funciones.	Relaciona la tabla con una función y completa la tabla.	Sobre la mesa hay diferentes tarjetas con tablas y otras con expresiones algebraicas de funciones para cada estudiante hay una hoja de trabajo donde puede anotar sus respuestas.
Relación entre la tabla y el gráfico de algunas funciones cuadráticas.	Tarjetas con tablas de funciones con unos 10 valores con algunas celdas vacías y otras tarjetas con gráficos de funciones.	Relaciona la tabla con un gráfico de una función y estima con el grafico los valores que faltan, verifica calculando.	Sobre la mesa hay diferentes tarjetas con tablas y otras con los gráficos de las funciones, para cada estudiante hay una hoja de trabajo donde puede anotar sus respuestas.
Relación entre tabla y la expresión algebraica de la función cuadrática.	Tarjetas con expresiones algebraicas de distintas funciones cuadráticas y otras tarjetas con los gráficos de las funciones.	Relaciona cada expresión funcional con un gráfico de una función, estima con el gráfico tres valores y comprueba calculando.	Sobre la mesa hay diferentes tarjetas con expresiones funcionales de distintas funciones cuadráticas y otras con los gráficos de las funciones, para cada estudiante hay una hoja de trabajo donde puede anotar sus respuestas.

Graficar a partir de funciones y tablas.	Tarjetas con expresiones funcionales y tablas de distintas funciones cuadráticas.	Grafica en un sistema de coordenadas los pares ordenados de la tabla y de la expresión funcional.	Sobre la mesa hay diferentes tarjetas con tablas y expresiones funcionales cuadráticas, para cada estudiante hay una hoja de trabajo con tablas y sistemas de coordenadas donde pueda dibujar y entregar sus respuestas.

Se sugiere hacer variaciones de estas estaciones relacionadas con los valores x dados en las tablas, comenzando con enteros positivos, continuando con enteros negativos y luego valores fraccionarios.

Para retroalimentar la actividad personal en las estaciones, se sugiere utilizar la retroalimentación escalera metacognitiva:



https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Gráficos	Reconoce el gráfico de funciones lineales.	Distingue funciones lineales de cuadráticas.	Distingue funciones lineales de cuadráticas e identifica las cuadráticas de otras funciones no lineales.
Función cuadrática	Reemplaza valores en una función cuadrática $f(x)$, dando valores a x y reemplazando por otro valor en la expresión algebraica.	Calcula el valor $f(x)$ de una función cuadrática dada, dando valores a x y reemplazando a x por este valor.	Calcula el valor $f(x)$ de una función cuadrática cualquiera, dando valores a x y reemplazando a x por este valor y viceversa.
Tabla, gráfico y función.	Reconoce la relación entre tabla y gráfico o de algunos casos particulares.	Reconoce la relación entre tabla, gráfico y expresión algebraica, en la mayoría de los casos.	Transita entre expresión funcional, tabla y gráfico para cualquier función cuadrática.
Contextos	Relaciona situaciones asociadas a factores positivos.	Relaciona situaciones asociadas a factores positivos y negativos.	Relaciona situaciones asociadas a factores positivos, negativos y racional.

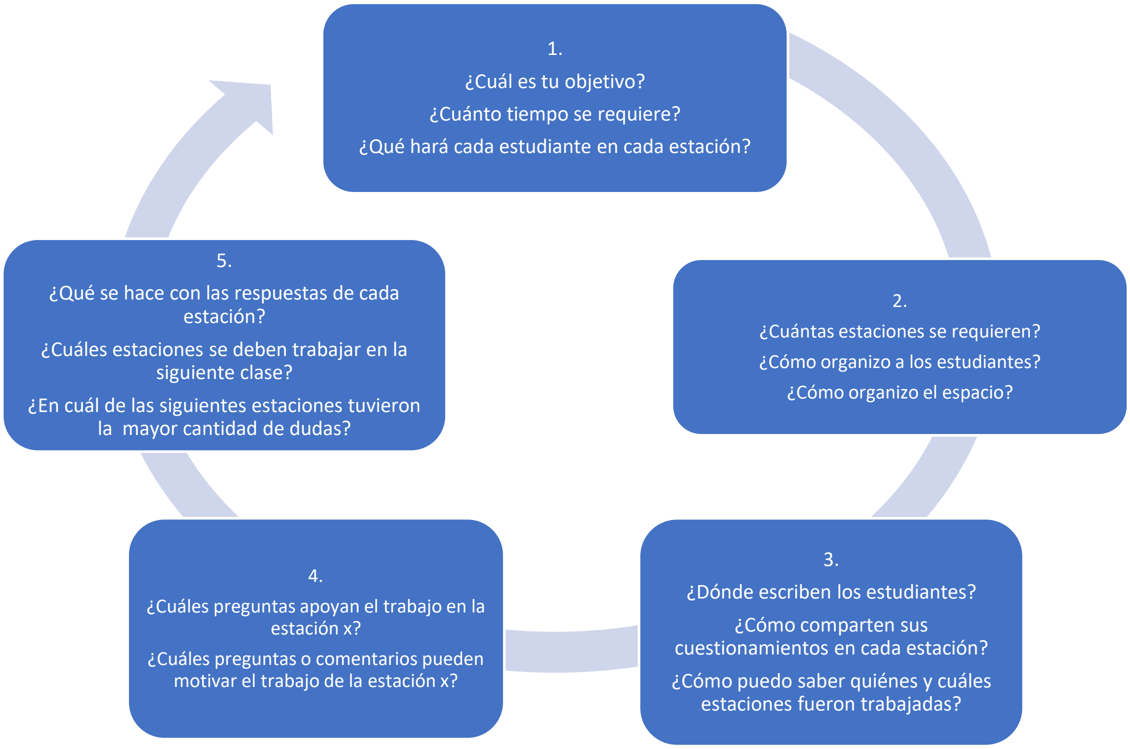
Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que representar una función significa transitar desde un registro tabular a un registro gráfico y viceversa, como también transitar desde la expresión funcional al gráfico, con o sin elaborar una tabla y transitar desde la tabla a la expresión funcional y viceversa, entendiendo que hay algunos pasajes que son más difíciles de acceder por los estudiantes que otros. La comprensión del entorno utilizando las funciones cuadráticas es un paso que se debe construir desde lo que ya se sabe, en este caso, la comparación con la función lineal y las nociones básicas de asignación, de cambio y de objeto matemático.

Se sugiere planificar un módulo cero que considere la operatoria con naturales, fracciones y decimales de los módulos anteriores, teniendo como foco la identificación de datos dentro de un problema. También se sugiere incluir las proporciones directas y la función lineal que fueron trabajadas en el módulo 2 del Nivel 3 de Educación Básica, enfocándose principalmente en representar los datos y en modelar diferentes situaciones.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de valorar las TIC como una oportunidad, se sugiere utilizar las herramientas disponibles como graficadores online, calculadora y la información disponible para completar conocimientos relacionados a la función cuadrática. Para desarrollar la perseveración en torno a metas, se sugiere elaborar tablas y gráficos de forma manual como usando medios tecnológicos, usando papel milimetrado y retroalimentando la prolijidad del trabajo manual.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo en estaciones: se sugieren las siguientes preguntas para guiar la implementación de las estaciones.



Anexo

Situación: ¿usar o no usar paréntesis?

¿Cuáles expresiones representan la misma función?

- $f(x) = -x^2$
- $g(x) = (-x)^2$
- $h(x) = x^2$

Conversa con tu compañero sobre el uso de paréntesis y el significado que tienen al elevar el cuadrado.

¿Será cierto que las expresiones $g(x) = (-x)^2$ y $h(x) = x^2$ representan la misma función porque $(-x)^2 = x^2$ y que esto se tiende a olvidar con facilidad?

Actividad de desempeño 2

Propósito

Esta actividad busca que los estudiantes modelen situaciones cuadráticas y evalúen los modelos obtenidos comparándolos entre sí, como también variar parámetros, condiciones iniciales y de los valores obtenidos por la función para comparar gráficamente los resultados. Esta actividad comienza con la aceleración de diferentes automóviles y la forma en que se describe el recorrido de ellos en una posible carretera, la forma en que influyen las condiciones iniciales en la expresión funcional como en la gráfica de la función cuadrática.

Objetivo de aprendizaje

OA4. Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones, asumiendo posturas razonadas. **(Modelar)**

OA7. Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad**. (Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

Función cuadrática (Expresiones del tipo $f(x) = a \cdot x^2$; $f(x) = x^2 + c$ y $f(x) = (x + b)^2$)

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Orden de las operaciones con números racionales y las potencias de ellos.
- Uso de paréntesis en operatoria combinada y con potencias.
- Elaboración de tablas de valores y gráfico de funciones lineales.
- Elaboración de tablas de valores y gráfico de pares ordenados asociados a funciones cuadráticas simples.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes la situación de aceleración de automóviles y la descripción de la distancia recorrida según una función cuadrática, entendiendo que el factor de velocidad se obtiene dividiendo en dos el factor de la función cuadrática. Se sugiere un apoyo de imágenes y de preguntas para sondear sobre los conocimientos intuitivos que se tienen sobre la aceleración.





Algunas de las preguntas que pueden ayudar a la construcción del conocimiento podrían ser:

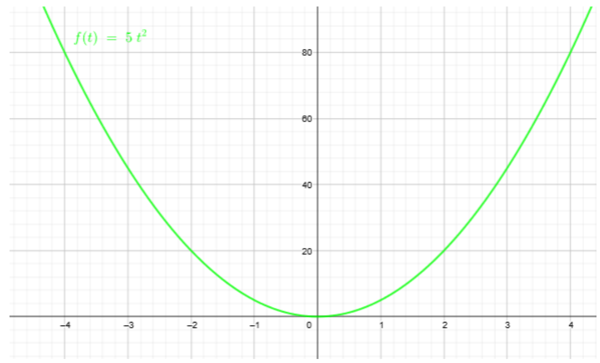
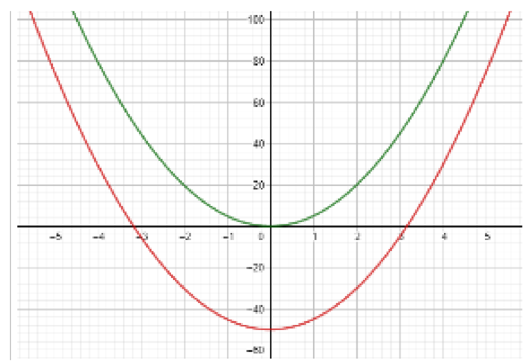
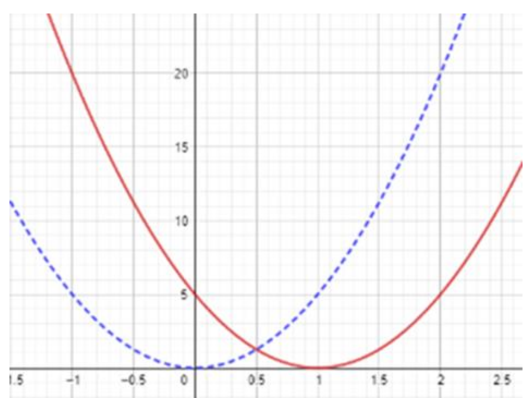
- ¿Qué ocurre cuando aceleramos?
- ¿Qué tanto podemos acelerar con estos medios de transporte?
- ¿Cómo afecta la aceleración a la distancia que se recorre?
- ¿Cómo podríamos describir la relación entre aceleramiento y distancia?

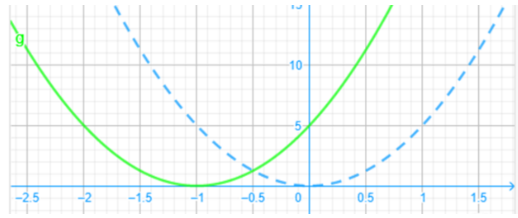
Conexión interdisciplinar
Ciencias naturales
OA1 Nivel 1 EM

Construcción de conocimiento

Para introducir la evaluación de modelos de función cuadrática, se sugiere explicar la elaboración de gráficos y explicar el significado del cambio de parámetros en la función, en el gráfico y en el contexto. En particular, se sugiere continuar con la aceleración según el tipo de auto y dentro de un rango aceptable de tiempo, en este caso se sugiere no pasar de los 10 segundos, además considerar que la función que describe la distancia recorrida en términos del tiempo $f(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ implica que el auto inicie su movimiento desde el reposo, se verifica que para $t = 0$ se tiene $f(0) = 0$. Según el caso de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA), la aceleración a se mantiene si se excluye la resistencia del aire. En estas situaciones y para facilitar la comprensión, se sugiere entregar un factor de la parábola que ya incluya la aceleración del auto, según cada modelo del auto, esto permite trabajar las funciones sin incluir otros términos, como 0,5 de la fórmula de la aceleración.

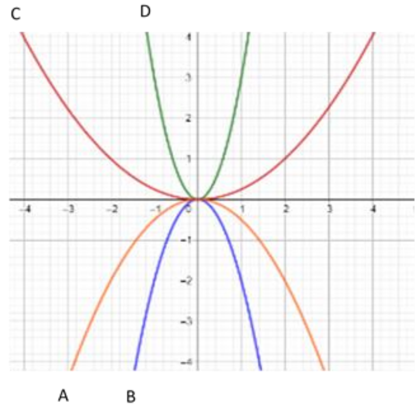
Se sugiere simplificar el modelo de frenado por el roce con el aire y el estado de equilibrio que se alcanza luego de acelerar por un tiempo o las consideraciones del camino, como tipo de material del camino, asfalto o nieve, como tampoco considerar la forma del camino, curva o recto, subida o bajada.

Situación	Modelo	Gráfico de la función
Auto de carrera en la línea de partida 	$f(t) = 5t^2$ t es el tiempo transcurrido. $f(t)$ es la distancia recorrida. 5 es el factor que incluye la aceleración del auto.	 Condiciones de la función: valores positivos.
Auto de carrera 50 metros más atrás de la línea de partida con fines de entrenamiento.	$g(t) = 5t^2 - 50$ t es el tiempo transcurrido. $g(t)$ es la distancia recorrida. 5 es el factor de aceleración del auto. -50 es la posición inicial, es decir, partir 50 metros más atrás de la línea de partida.	 Condiciones de la función: valores positivos.
Dos autos de carreras del mismo modelo, uno parte un segundo después que el otro.	$f(t) = 5t^2$ t es el tiempo transcurrido. $f(t)$ es la distancia recorrida. $h(t) = 5(\mathrm{t} - 1)^2$ t es el tiempo transcurrido. $h(t)$ es la distancia recorrida. -1 ha comenzado un segundo después que el otro.	 Los efectos que se dan previos al momento de partida no son significativos en la situación.

	5 es el factor de aceleración de ambos autos.	
Dos autos de carreras del mismo modelo, uno parte un segundo ante que el otro.	$f(t) = 5t^2$ t es el tiempo transcurrido. $f(t)$ es la distancia recorrida. $l(t) = 5(\mathrm{t}+1)^2$ t es el tiempo transcurrido. $l(t)$ es la distancia recorrida. $+1$ ha comenzado un segundo ante que el otro. 5 es el factor de aceleración de ambos autos.	
Comparar		
Cambios en las condiciones iniciales, comenzar detrás de la línea de partida.	Efectos en la expresión funcional, tiene una constante negativa.	Movimientos del gráfico, traslación en sentido vertical, el vértice se desplaza 50 unidades, en este caso, 50 metros, hacia abajo por el eje y, se obtiene $g(t)$. Traslación del eje en sentido horizontal de la función $f(t)$ que está relacionado con el tiempo de partida, de 1 segundo hacia la derecha o izquierda en el eje x, se obtiene la función $h(t)$ o $l(t)$.

Práctica guiada

Se sugiere guiar el conocimiento de evaluar modelos trabajando en esta parte de manera abstracta, explicando diferentes problemas de variación de parámetros, en los cuales la constante es positiva o negativa, teniendo de referencia la función $f(x) = x^2$. Para esto, se sugiere considerar en el plano cartesiano los gráficos A, B, C y D de cuatro funciones cuadráticas y asignar las expresiones funcionales que correspondan.



$$f(x) = 3 \cdot x^2$$
$$g(x) = -0{,}5 \cdot x^2$$
$$h(x) = -2 \cdot x^2$$
$$k(x) = 0{,}25 \cdot x^2$$

Explicar la asociación refiriéndose a la función $f(x) = x^2$ y ejemplificando las justificaciones del tipo:

- El gráfico A representa la función g con $g(x) = -0{,}5 \cdot x^2$ porque es cóncavo hacia abajo tiene un factor a negativo. Se elige el factor $a = -0{,}5$, porque el gráfico es menos estrecho hacia la dirección negativa del eje y.
- El gráfico B representa la función h con $h(x) = -2 \cdot x^2$, porque es cóncavo hacia abajo tiene un factor a negativo. Se elige el factor $a = -2$, porque el gráfico es más estrecho hacia la dirección negativa del eje y.
- El gráfico C representa la función k con $k(x) = 0{,}25x^2$, porque es cóncavo hacia arriba tiene un factor a positivo. Se elige el factor $a = 0{,}25$, porque el gráfico es menos estrecho hacia la dirección positiva del eje y.
- El gráfico D representa la función f con $f(x) = 3x^2$, porque es cóncavo hacia arriba tiene un factor a positivo. Se elige el factor $a = 3$, porque el gráfico es más estrecho hacia la dirección positiva del eje y.

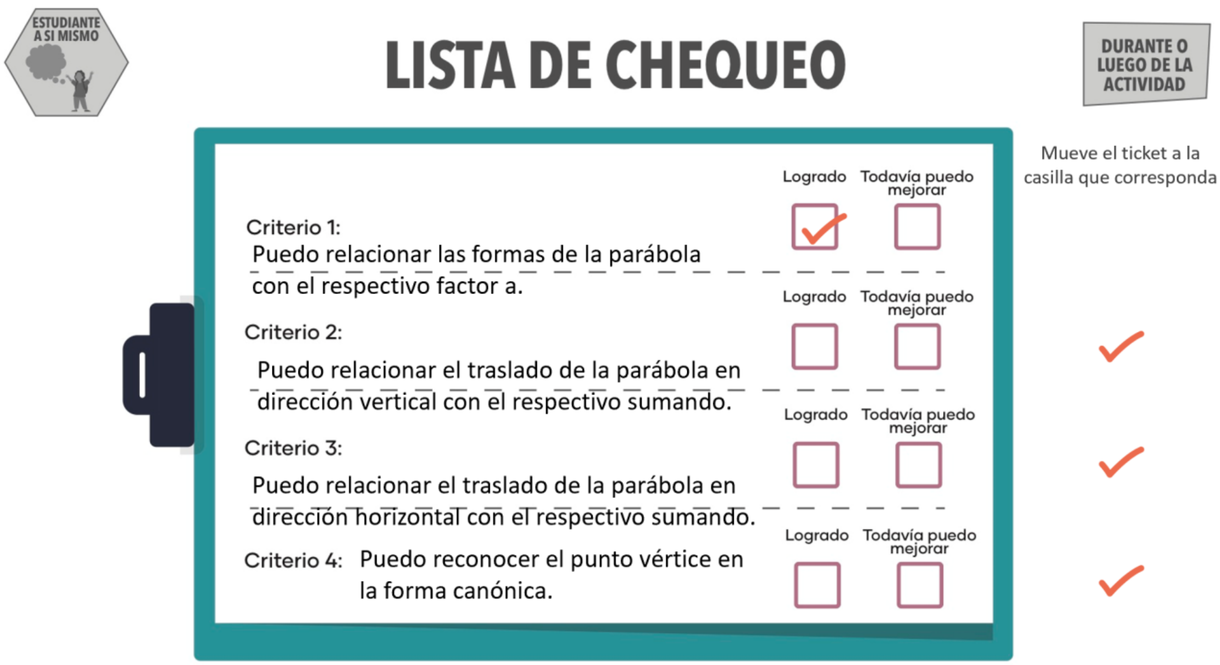
Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo personal de desarrollo de la tabla de comparación presentada en la construcción del conocimiento, describiendo en cada caso los modelos y graficando para describir lo que ha ocurrido con la gráfica inicial. Un posible listado de funciones que se pueden considerar es:

Medio de transporte	Modelo funcional
	$f(t) = 5{,}6t^2$ t es el tiempo transcurrido. $f(t)$ es la distancia recorrida. Dar sentido a $k(t)$ que se obtiene al trasladar $f(t)$ en 3 unidades en el eje x $k(t) = 5{,}6(t-3)^2$

	$f(t) = 4{,}8t^2$ t es el tiempo transcurrido. $f(t)$ es la distancia recorrida. Dar sentido a $k(t)$ que se obtiene al trasladar $f(t)$ en -2 unidades en el eje x $k(t) = 4{,}8(t + 2)^2$
	$f(t) = 10t^2$ t es el tiempo transcurrido. $f(t)$ es la distancia recorrida. Dar sentido a $k(t)$ que se obtiene al trasladar $f(t)$ en 0,5 unidad en el eje x $k(t) = 10(t - 0{,}5)^2$
	$f(t) = 2t^2$ t es el tiempo transcurrido. $f(t)$ es la distancia recorrida. Dar sentido a $k(t)$ que se obtiene al trasladar $f(t)$ en -200 unidades en el eje y $k(t) = 6{,}5t^2 - 200$
	$f(t) = 6{,}5t^2$ t es el tiempo transcurrido. $f(t)$ es la distancia recorrida. Dar sentido a $k(t)$ que se obtiene al trasladar $f(t)$ en 5 unidades en el eje y $k(t) = 6{,}5t^2 + 5$

Para retroalimentar la actividad y el aprendizaje de la evaluación de modelos relacionados con funciones cuadráticas, se sugiere utilizar la lista de chequeo con los siguientes criterios:



https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Modelo	Escriben una función que incluye sin relación alguna los elementos de tiempo, factor y exponente.	Escriben una función que relaciona los elementos de tiempo, factor y exponente según la situación.	Escriben una función que relaciona los elementos de tiempo, factor y exponente según la situación y las modificaciones que se hacen a las condiciones iniciales.
Gráfico	Grafican puntos o curvas en el plano cartesiano.	Grafican la función cuadrática en el plano cartesiano.	Grafican la función cuadrática en el plano cartesiano y trasladan horizontal o verticalmente para obtener nuevos gráficos según las nuevas condiciones de la situación.
Contextos	Identifican datos del contexto.	Dan sentido a los datos según el contexto y encuentran	Dan sentido a los datos según el contexto, encuentran limitaciones del gráfico y relacionan la

		limitaciones del gráfico.	expresión funcional y el gráfico con el contexto.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: para desarrollar la habilidad de modelar con el mismo contenido, en este caso las funciones cuadráticas, se sugiere comenzar con lo que ya saben los estudiantes sobre graficar para ampliar el tipo de modelos cuadráticos que se pueden tener según la situación. Se sugiere profundizar en los términos vértice y simetría de la parábola, lo cual puede ser abordado desde las limitaciones que tiene el modelo según la realidad, para esto se puede marcar el vértice y la línea de simetría de la parábola en el plano cartesiano.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de asumir posturas razonadas se sugiere la presentación de algunos trabajos personales en los cuales se explicitan los límites del modelo según la situación y se dan argumentos basados en la situación real.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo personal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo personal e independiente de otros:

Independencia

Pensandolas soluciones y los caminos para obtener soluciones por cuenta propia.

Confianza en lo que se sabe

Generar seguridad en lo que se hace en cada paso. La confianza como facilitador de explicaciones propias y para explicar a otros.

Trabajar a su propio nivel

En ciertos momentos es necesario saber dónde se está y trabajar al propio ritmo.

Practicar la autoregulación

Cada tarea requiere de concentración y de regular en qué momento volverse a un compañero o maestro para pedir ayuda directa.

Actividad de desempeño 3

Propósito

Esta actividad busca desarrollar los productos notables como una posibilidad que facilita la solución de ecuaciones cuadráticas. Para esto, se desarrolla la habilidad de representar los productos notables por medio de figuras geométricas y de funciones cuadráticas que representan el área, comenzando con una situación habitual de marcado de terreno.

Objetivo de Aprendizaje

OA2. Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación, valorando las TIC como una oportunidad. **(Representar)**

OA4. Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones y tomando decisiones razonadas que contribuyan al bien común. **(Modelar)**

OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. (**Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

- Productos notables.
- Función cuadrática.

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Desarrollo de la propiedad distributiva $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- Factorizar utilizando la propiedad distributiva $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$
- Multiplicación de números enteros y monomios.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes una situación de marcado de terreno y la eventualidad de agregar un poco más de metros por lado al terreno.

Me vendieron un terreno cuadrado y no sé si agregar un metro más.
¿Cuánto aumenta la superficie?

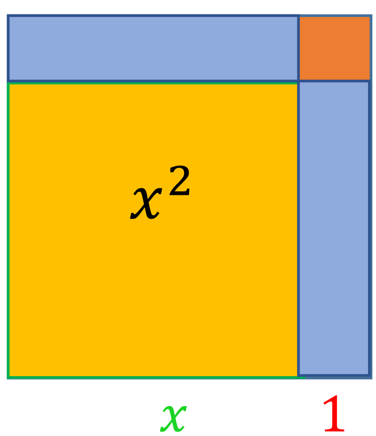
Algunas de las preguntas que pueden orientar la necesidad de construir nuevo conocimiento son:

- ¿Por qué podría ser importante saber en cuánto aumenta la superficie?
- ¿Qué datos nos están entregando?
- ¿Cómo podemos modelar matemáticamente la situación?

Conexión interdisciplinar
Emprendimiento y empleabilidad
OA3 Nivel 1 y 2 EM

Construcción de conocimiento

Para construir el conocimiento se sugiere identificar la variable, lo que se quiere agregar y cómo esto afecta a la superficie, relacionando esto último con la función cuadrática. Se sugiere, trabajar sin contexto para representar la situación de manera geométrica y luego con una tabla de valores.

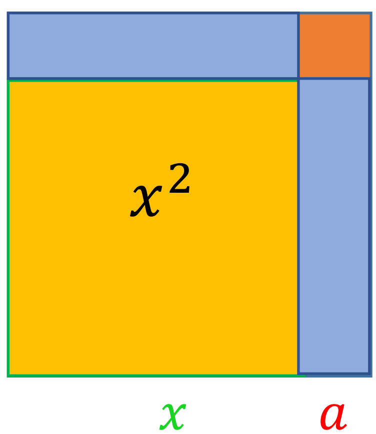


$$(x+1)^2 = ¿?$$

Motivar la representación del binomio del cuadrado con la función cuadrática en la cual se ve el área en función del lado, utilizando la imagen y variando ambos sumandos del paréntesis para reforzar la construcción de la fórmula del cuadrado del binomio.

x	x^2	x	$(x+1)^2$
10	100	10	$(10+1)^2 = 121$
20	400	20	$(20+1)^2 = 441$
30	900	30	$(30+1)^2 = 961$
50	2 500	50	$(50+1)^2 = 2\ 601$
100	10 000	100	$(100+1)^2 = 10\ 201$
200	40 000	200	$(x+1)^2 = 40\ 401$

Se sugiere generalizar la situación proponiendo una nueva situación dónde no se sabe ni cuántos metros se van a comprar, ni cuántos metros se quieren agregar, relevando que la estructura de la imagen se mantiene y encontrando una nueva forma de expresar el término al cuadrado.



$$(x+a)^2 = ¿?$$

A partir de la imagen se sugiere determinar la medida de la superficie de los rectángulos y del cuadrado más pequeño para dar sentido a la expresión generalizada.

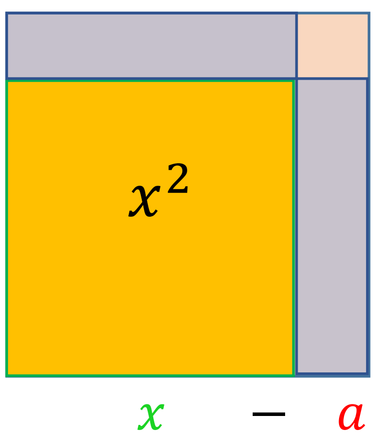
x	x^2	a	$(x+a)^2 = (x+a)\cdot(x+a)$
10	100	1	$(10+1)\cdot(10+1) = 100+10+10+1 = 121$
20	400	2	$(20+2)\cdot(20+2) = 400+40+40+4 = 484$
30	900	3	$(30+3)\cdot(30+3) = 900+90+90+9 = 1\,089$
50	2 500	4	$(50+4)\cdot(50+4) = 2\,500+200+200+16 = 2\,916$
100	10 000	5	$(100+5)\cdot(100+5) = 10\,000+500+500+25 = 11\,025$
200	40 000	6	$(200+6)\cdot(200+6) = 40\,000+1\,200+1\,200+36 = 42\,436$

Complementar el desarrollo de las tablas y lo que se ha descubierto en el dibujo con la propiedad distributiva:

$$(x+a)\cdot(x+a) = x^2 + x\cdot a + x\cdot a + a^2$$
$$(x+a)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot a + a^2$$

Construir el conocimiento

Variar las condiciones iniciales de la situación, suponiendo ahora que al terreno le han quitado un metro y deducir lo que se debe quitar o agregar.



$$(x-a)^2 = ¿?$$

Las preguntas que orientan la construcción del cuadrado de la diferencia de un binomio podrían ser:

- ¿Cuánto miden los lados del cuadrado inicial?
- ¿Cuánto miden los rectángulos que han sido eliminados?
- ¿Hay partes que se repiten?
- ¿Cómo podemos relacionar la medida del área del cuadrado inicial y del obtenido por recortes?

- ¿Qué diferencia hay entre el cuadrado de la suma de un binomio?
- ¿Qué pasa cuando olvidamos las medidas y queremos expresar el área de ambos cuadrados?
- ¿Cuántos cuadrados es posible ver en la figura completa?

Aplicar la regularidad de los productos notables, comenzando con lo conocido y agregando un pequeño grado de dificultad cada vez, desarrollando el cuadrado de la diferencia de un binomio al cuadrado o indicando que es una transformación de productos a expresiones en sumas.

- $(x-1)^2$
- $(p-q)^2$
- $(3r-s)^2$
- $(4u-3w)^2$

Explicar el desarrollo del cuadrado de una diferencia de un binomio sugerido a continuación, refiriéndose a la ley básica de distributividad y explicitando en lenguaje natural o en expresiones generales su desarrollo, como por ejemplo “Todas las sumas tienen dos cuadrados, uno de la primera variable y otro de la segunda variable, tiene un menos que corresponde a menos dos veces el producto del primero por el segundo término”.

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = \big(a+(-b)\big)\cdot\big(a+(-b)\big)$$
$$= \big(\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{-b})\big)\cdot a + \big(a+(-b)\big)\cdot(-b)$$
$$= \boldsymbol{a}\cdot a + (-\boldsymbol{b})\cdot a + a\cdot(-b) + (-b)\cdot(-b)$$
$$= \boldsymbol{a}\cdot a - \boldsymbol{b}\cdot a - a\cdot b + b\cdot b$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

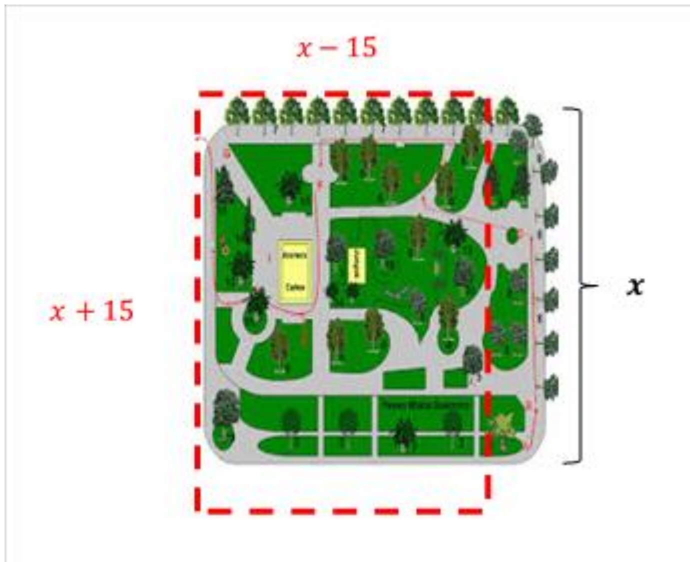
Práctica guiada

Explicar el desarrollo de un problema de urbanización, por ejemplo: Una plaza tiene la forma de un cuadrado. Debido a un proyecto de tránsito, se quita una franja de 15 metros de un lado y se agranda el rectángulo resultante por 15 metros.

- Confeccionar un bosquejo de la modificación.

- Elaborar dos expresiones algebraicas equivalentes que representan el área de la plaza modificada. La plaza original tiene el lado x.
- Verificar si la plaza modificada tiene el mismo contenido de área o no.

Explicar el bosquejo indicando las expresiones algebraicas de las nuevas medidas en conjunto con el rectángulo punteado que tiene la forma de la plaza modificada.



Explicar la expresión algebraica $(x + 15) \cdot (x - 15)$ y las formas de obtener el resultado, ya sea multiplicando término a término o bien aplicando un producto notable para obtener $x^2 - 225$

Elaborar la respuesta considerando lo que había antes y la pregunta: la nueva plaza tiene $225m^2$ menos que la plaza original.

Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo de estaciones para memorizar los productos notables. Algunas de las estaciones que se sugieren para esta actividad son:

Estación	Material	Instrucción	Organización
Ejercicios relacionados con $(a+b)^2$	Hoja con ejercicios y hoja con las soluciones.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotarlo, solucionar y corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 20 ejercicios colgado en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgado en otra parte de la sala.
Ejercicios relacionados con $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}}$	Hoja con ejercicios y hoja con las soluciones.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotarlo, soluciona y corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 20 ejercicios colgado en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgado en otra parte de la sala.
Ejercicios relacionados con $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$	Hoja con ejercicios y hoja con las soluciones.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotarlo, soluciona y corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 20 ejercicios colgado en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgado en otra parte de la sala.
Ejercicios variados relacionados con los dos productos notables	Hoja con ejercicios y hoja con las soluciones. Calculo mental, por ejemplo, $26^2=(20+6)^2$ o $(30-4)^2$ utilizando la formula.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotarlo, soluciona y corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 20 ejercicios colgado en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgado en otra parte de la sala.
Ejercicios variados relacionados con los tres productos notables	Hoja con ejercicios y hoja con las soluciones de problemas de aplicación.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotarlo, soluciona y corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 20 ejercicios colgado en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgado en otra parte de la sala.

Se sugiere hacer variaciones de estas estaciones relacionadas con los valores a/b dados en los productos notables, comenzando con enteros positivos, continuando con enteros negativos y luego valores fraccionarios También se sugiere variar las potencias de la variable o la combinación de variables con sus respectivas potencias que queda en el producto notable.

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

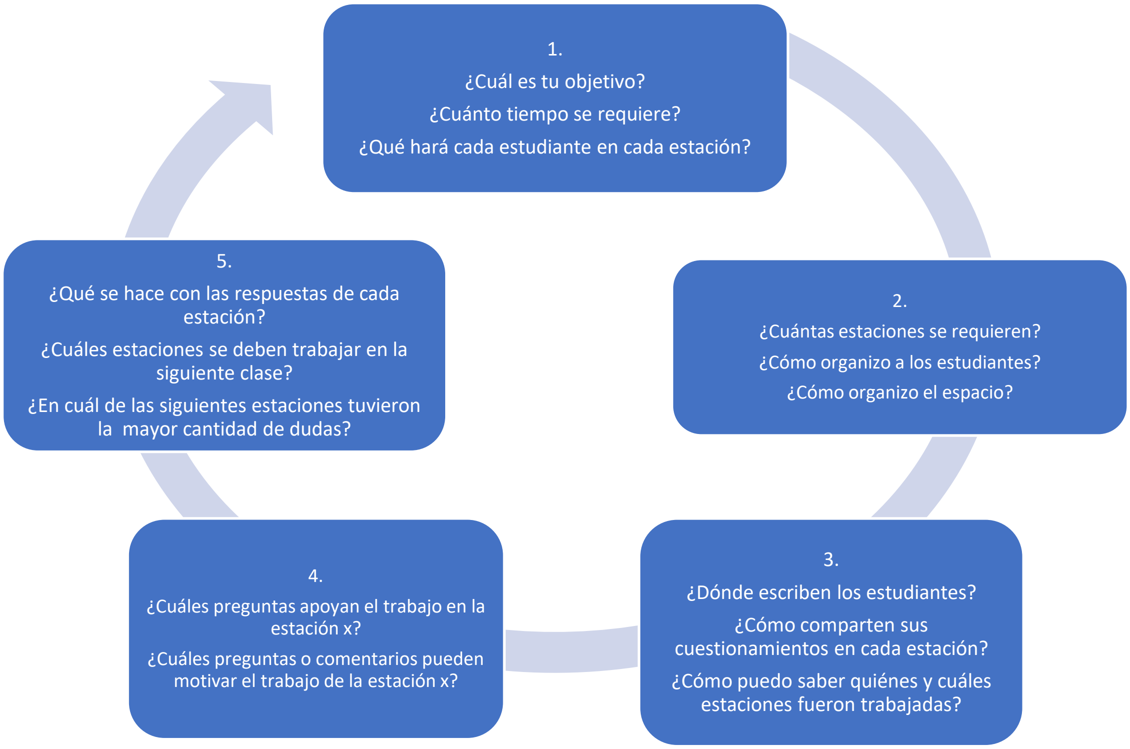
Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Producto notable $(a+b)^2$	Reconoce que se debería aplicar el producto notable.	Aplica el producto notable de forma correcta.	Reconoce, aplica y varia en ambos sentidos el producto notable.
Producto notable $(a-b)^2$	Reconoce que se debería aplicar el producto notable.	Aplica el producto notable de forma correcta.	Reconoce, aplica y varia en ambos sentidos el producto notable.
Producto notable $(a+b)(a-b)$	Reconoce que se debería aplicar el producto notable.	Aplica el producto notable de forma correcta.	Reconoce, aplica y varia en ambos sentidos el producto notable.
Productos notables	Reconoce cuál de los productos en cual situación.	Aplica el producto notable correcto y de forma correcta.	Reconoce cual es el producto notable, aplica el correcto y varia en ambos sentidos.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que representar en este caso es transitar desde un nivel concreto a un nivel pictórico y luego simbólico. Para esto, se utiliza la noción de función y de variabilidad de los elementos que están involucrados para generalizar los posibles valores de la superficie que se quiere comprar, mostrada en la situación experiencial inicial. La correspondencia como función se deja de lado en el momento que se hace la variación del segundo sumando, en este momento se trata de generalizar y trabajar con los productos notables conocidos.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de valorar las TIC como una oportunidad, se sugiere permitir el uso de la calculadora en la elaboración de las tablas, para facilitar los descubrimientos y poder generalizar los productos notables. Se sugiere una conversación sobre lo que significa tener un metro más por lado en el terreno y la importancia que esto tiene al momento de marcar el terreno, resaltando la labor del topógrafo y la matemática que permite una toma de decisiones razonadas y que contribuyan al bien común de mis vecinos en el terreno. Se sugiere desarrollar la actitud de pensar flexiblemente para reelaborar las ideas, promoviendo la elaboración de tablas y en los cambios de las condiciones iniciales del terreno.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo en estaciones: se sugieren las siguientes preguntas para guiar la implementación de las estaciones.



Actividad de desempeño 4

Propósito

Esta actividad busca resolver problemas de ecuaciones cuadráticas, variando parámetros y condiciones para comparar los diferentes resultados. Se comienza con el lanzamiento de la bala, se trata el tema de ganancias y pérdidas en la producción, se ven los casos de la ecuación, la intersección con el eje x, las rectas que son paralela al eje x y su intersección con la función cuadrática, para terminar con la fórmula que resuelve cualquier ecuación cuadrática.

Objetivo de Aprendizaje

OA7. Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

- Función cuadrática.
- Ecuación cuadrática.

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Graficar la función cuadrática.
- Aplicar los productos notables.
- Resolver ecuaciones lineales.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

Motivar la resolución de problemas con la ecuación de segundo grado por medio de situaciones del lanzamiento de la bala y la necesidad de incluir términos técnicos para dar respuestas a la técnica propia del deporte.

Conexión interdisciplinar
Educación Física y Salud
OA1 Nivel 1 y 2 EM

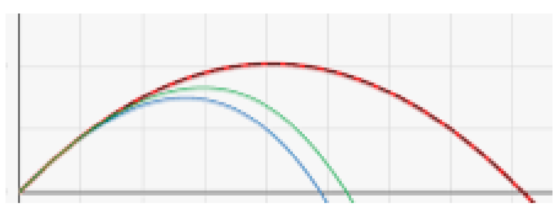
Algunas de las preguntas que pueden motivar el conocimiento de este deporte son:

- ¿Cuáles son las condiciones del lanzamiento de la bala?
- ¿Con qué función podemos describir la distancia horizontal con la altura vertical de la trayectoria de la bala?
- ¿Cómo se decide quién gana?

Construcción de conocimiento

Se sugiere construir el conocimiento de representar y variar parámetros en una ecuación cuadrática, presentando una situación de tres trayectorias de un lanzamiento de balas. El punto de partida es la mano del atleta en el instante cuando la bala sale de la mano.

¿Qué características tiene el lanzamiento que gana?



Algunas otras preguntas que inician la elaboración de una ecuación son:

- ¿Qué tienen las tres trayectorias en común?
- ¿En qué se difieren?
- ¿Cuál es el punto más interesante de la trayectoria?
- ¿Qué relación existe entre el vértice de la parábola y el largo del lanzamiento?

Explicar el lanzamiento de la bala desde lo común, indicando que los competidores tienen un punto de partida común y se diferencian según el ángulo con el cual se inicia el lanzamiento, concluyendo que todas las trayectorias son parábolas.

Relacionar la trayectoria con una función cuadrática y su vértice con los ceros que determinan el largo del lanzamiento. En el sentido deportivo, el punto más interesante de la trayectoria es el segundo cero, ya que este determina quién gana. Una conjetura que los estudiantes pueden formular es que mientras más alto esté el vértice, tanto más largo es el lanzamiento.

A continuación, los estudiantes resuelven una ecuación cuadrática en un contexto deportivo:

En un certamen regional de atletismo la trayectoria del lanzamiento de la ganadora, con 11 metros de distancia, fue captada por una cámara lenta con estroboscopio. Mediante un programa se convirtieron los puntos de la trayectoria en una función cuadrática del tipo:

$$f(x) = -0{,}09x^2 + 0{,}81x$$

¿Por qué el factor a del término cuadrático es negativo?

El docente releva las respuestas y su relación con el gráfico, destacando que se debe tener un factor a negativo dado que la concavidad del lanzamiento es en dirección negativa del eje y.

Determinar gráficamente las intersecciones de la curva con el eje x a partir de la gráfica adjunta denominando estos como los “ceros de la función” y verificar algebraicamente los resultados provenientes del gráfico, como se muestra a continuación:

$$-0{,}09x^2 + 0{,}81x = 0 \Leftrightarrow x(-0{,}09x + 0{,}81) = 0$$

De aquí se tiene que $x = 0$ o bien $(-0{,}09x + 0{,}81) = 0$ de donde se obtiene que $x = \frac{0{,}81}{009} = 9$

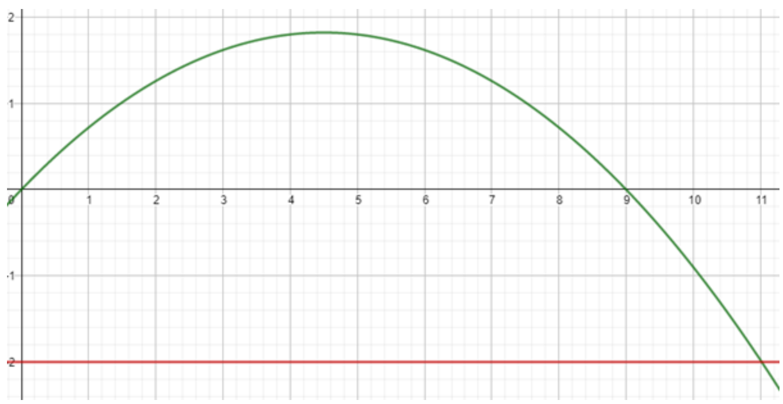
A partir de lo que se obtuvo, se concluye que el primer cero se tiene en (0|0) y el segundo en (9|0). En base a esta solución, los estudiantes reflexionan de acuerdo con la pregunta:

¿Por qué el segundo cero no coincide con la distancia del lanzamiento de 11m?

El docente releva las respuestas que indican que el punto de partida no está a la altura del suelo $(h = 0)$ dado que la bala sigue la trayectoria hasta tocar el suelo. Realizado este análisis, el docente agrega una nueva pregunta:

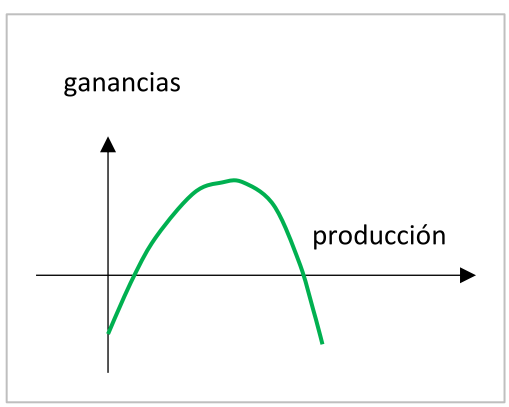
¿Cómo se puede determinar gráficamente el largo del lanzamiento considerando una altura de $h = 2\ m$ (brazo estirado de la atleta sobre el suelo)?

Se espera que los estudiantes concluyan que se requiere un gráfico con una paralela horizontal de $2\ m$ debajo de la altura de partida, como se ilustra a continuación:



Práctica guiada

Motivar la resolución de problemas relacionados con otras situaciones diferentes a los lanzamientos, por ejemplo, las situaciones de ganancias y de producción. Explicando el gráfico que muestra en forma esquemática la relación que puede existir entre las ganancias generadas por la producción de una mercadería en dependencia de la cantidad producida.

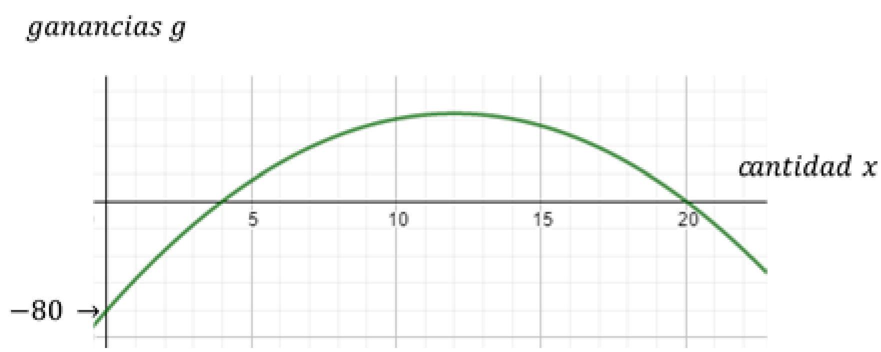


Algunas de las preguntas que pueden motivar la resolución de este tipo de problemas son:

- ¿Cómo se puede describir el gráfico?
- ¿Cómo se interpreta la situación en la cual todavía no se ha producido nada?
- ¿Qué indica el vértice en este tipo de situaciones?

Explicar la forma del gráfico de las ganancias como una función cuadrática cuyo gráfico tiene una concavidad en dirección negativa del eje y. Cuando no se produce nada las ganancias son negativas que significan pérdidas. La función tiene un valor máximo que significan ganancias máximas, luego las ganancias siguen bajando, llegan a cero y se convierten en pérdidas.

Explicar el gráfico de una función que modela las ganancias de un producto en dependencia de la cantidad x producida.



Se sugiere guiar el desarrollo del problema por medio de preguntas y respuestas, considerando que muchas de estas respuestas solo las conoce el docente y que la modelación en este caso de respuestas es parte del aprendizaje.

- ¿Qué significa que el gráfico siga debajo el eje x?

Las ganancias son negativas porque quedan costos y hay pérdidas.

- ¿En qué intervalo de la cantidad producida hay ganancias?

En el intervalo $]4, 20[$ el gráfico está por encima del eje x.

- Verificar que la función g con $g(x) = -x^2 + 24x - 80$ modela las ganancias.

Se basa en la coincidencia de 3 puntos especiales

$$P(0, -80)\ g(0) = -80$$

$$Q(4,0)\ g(4)=0,\ R(20,0)$$

$$g(20)=0\ o\ el\ vértice\ S(12,64)g(12)=64$$

Para determinar los ceros se procede desde lo conocido para obtener una fórmula general. Lo conocido en este caso es despejar la x.

Procedimiento	Ecuación
Despejar la ecuación en una parte con la variable x y otra parte sin esta variable.	$ax^2+bx+c=0$ $ax^2+bx=-c$
Multiplicar la ecuación con $4a$ para evitar la división por a y poder completar mejor el cuadrado.	$4a^2x^2+4abx=-4ac$
Completar la parte izquierda al cuadrado de una suma (producto notable).	$(2ax)^2+2\cdot 2abx=-4ac$
Se suma b^2 en ambos lados.	$(2ax)^2+2\cdot 2abx+b^2=-4ac+b^2$
Se escribe la parte izquierda como producto notable.	$(2ax+b)^2=b^2-4ac$
Se saca la raíz cuadrada de ambas partes.	$\sqrt{(2ax+b)^2}=\sqrt{b^2-4ac}$
Se considera el primer caso positivo.	$(2ax+b)=\sqrt{b^2-4ac}$ $2ax=-b+\sqrt{b^2-4ac}$
Se dividen ambos lados por $2a$.	$x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Se representa la solución con subíndice.	$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Se considera el segundo caso negativo.	$-(2ax+b)=\sqrt{b^2-4ac}$ $(2ax+b)=\sqrt{b^2-4ac}$ $2ax=-b-\sqrt{b^2-4ac}$
Se dividen ambos lados por $2a$.	$x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Se representa la solución con subíndice.	$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Se sugiere explicar que es posible proceder con los pasos presentados anteriormente o aprenderse de memoria la fórmula:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Explicar la aplicación de la fórmula en el caso particular de la función de la ganancia $g(x) = -x^2 + 24x - 80$, identificando los parámetros a, b y c. Con $a = -1$, $b = -24$, $c = -80$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-24)+\sqrt{(-24)^2+4\cdot(-1)\cdot 80}}{2\cdot(-1)} = 20$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-24)-\sqrt{(-24)^2+4\cdot(-1)\cdot 80}}{2\cdot(-1)} = 4$$

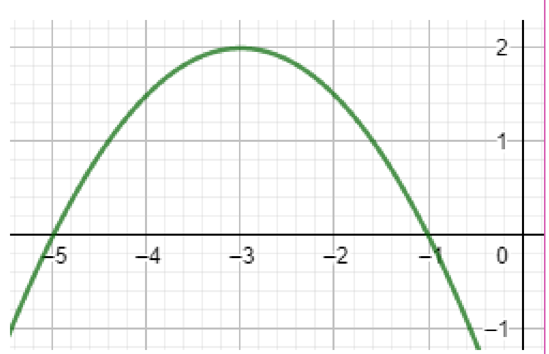
Agregar una función lineal que representa costos adicionales por cantidad de productos producidos a la función mencionada anteriormente, mostrar entonces que los puntos de intersección pasan a ser las intersecciones con el eje x, aplicando una transformación equivalente y que solamente cambian los valores de las variables.

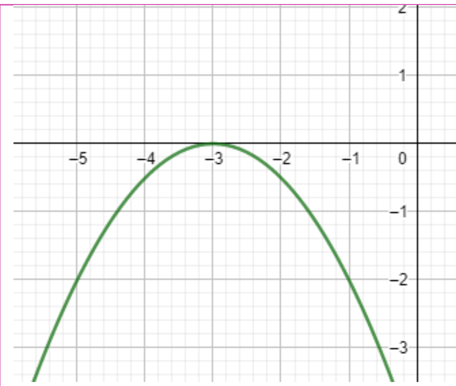
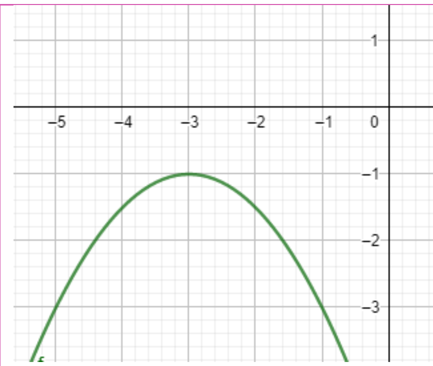
$$-x^2 + 24x - 80 = 5\text{x}$$

$$\Longleftrightarrow \quad -x^2 + 24x - 5x - 80 = 5\text{x} - 5\text{x}$$

$$\Longleftrightarrow \quad -x^2 + 19x - 80 = 0$$

Se sugiere explicar la resolución de problemas rutinarios apoyándose con la elaboración del gráfico para representar y verificar los cálculos en los siguientes tres casos:

Ecuación	Ceros	Gráfico de la función asociada
$-0{,}5x^2 - 3x$ $- 2{,}5 = 0$	$a = -0{,}5,\ b = -3,\ c = -2{,}5$ $x_1 = \frac{3+\sqrt{9-4\cdot 1{,}25}}{-1}$ $= \frac{3+\sqrt{4}}{-1}$ $= \frac{3+2}{-1} = -5$ $x_2 = \frac{3-2}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$	
Dos soluciones diferentes.		

$-0{,}5x^2 - 3x - 4{,}5 = 0$	$a = -0{,}5,\ b = -3,\ c = -3{,}5$ $x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{9 - 4 \cdot 2{,}25}}{-1} = \dfrac{3 + 0}{-1} = -3$	
Una solución o dos soluciones iguales.		
$-0{,}5x^2 - 3x - 5{,}5 = 0$	$a = -0{,}5,\ b = -3,\ c = -5{,}5$ $x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{9 - 4 \cdot 2{,}75}}{-1} = \dfrac{3 + \sqrt{-2}}{-1}$ $\sqrt{-2}$ no es número real	
Sin soluciones reales, el gráfico no se intersecta con el eje X.		

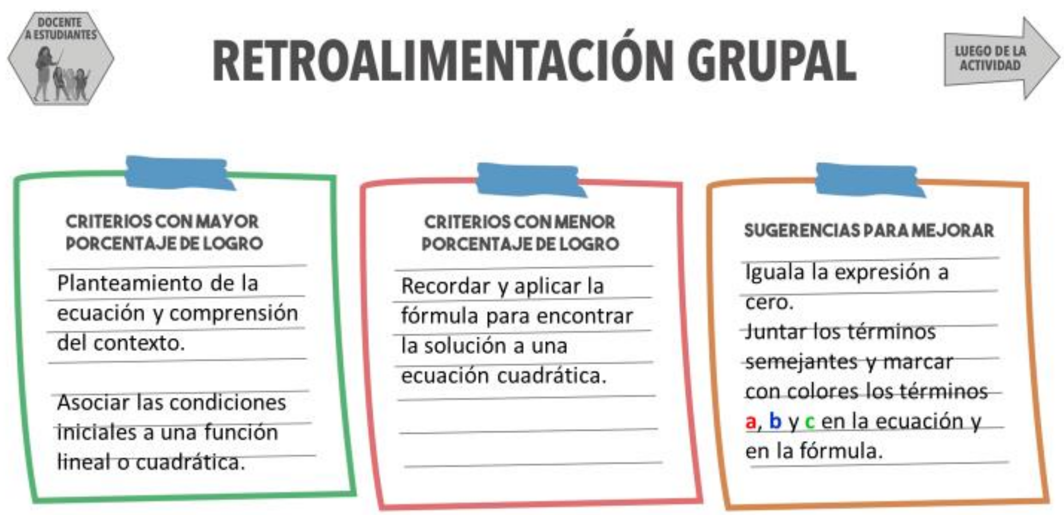
Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo de estaciones retomando la intersección de dos rectas y aumentando el nivel de dificultad pasando por lo aprendido anteriormente y llegando a la intersección de dos parábolas. Algunas de las estaciones que se sugieren para esta actividad son:

Estación	Material	Instrucción	Organización
Intersección de dos rectas	Cuarteto del gráfico de dos funciones, sus respectivas tablas, sus ecuaciones y la solución. (punto de intersección)	Juntar en parejas o grupos pequeños las cuatro cartas que van juntos – juntarlos en la mesa y cuando están seguros jugar al cuarteto.	Tener un código de verificación en las cartas para que los estudiantes pueden verificar fácilmente si los “adversarios” juntaron las cartas correctas.
Intersección parábola – eje X	Hoja con ejercicios (con un ejemplo dado al inicio) y hoja con las soluciones.	Sigue los pasos del ejemplo dado arriba, encuentre las intersecciones – corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 20 ejercicios que pueden sacar de la estación y otra hoja con las soluciones que da el profesor una vez que reviso que el estudiante hizo su trabajo.

Intersección parábola – recta	Hoja con ejercicios (con un ejemplo dado al inicio) y hoja con las soluciones.	Sigue los pasos del ejemplo dado arriba, encuentre las intersecciones – corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 20 ejercicios que pueden sacar de la estación y otra hoja con las soluciones que da el profesor una vez que reviso que el estudiante hizo su trabajo.
Intersección parábola - parábola	Cuarteto del gráfico de dos funciones, sus respectivas tablas, sus ecuaciones y la solución (puntos de intersección).	Juntar en parejas o grupos pequeños las cuatro cartas que van juntos – juntarlos en la mesa y cuando están seguros jugar al cuarteto de forma normal.	Tener un código de verificación en las cartas para que los estudiantes pueden verificar fácilmente si los “adversarios” juntaron las cartas correctas.

Para retroalimentar la actividad y el aprendizaje de la aplicación de la fórmula de segundo grado, se sugiere utilizar la retroalimentación grupal:



https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

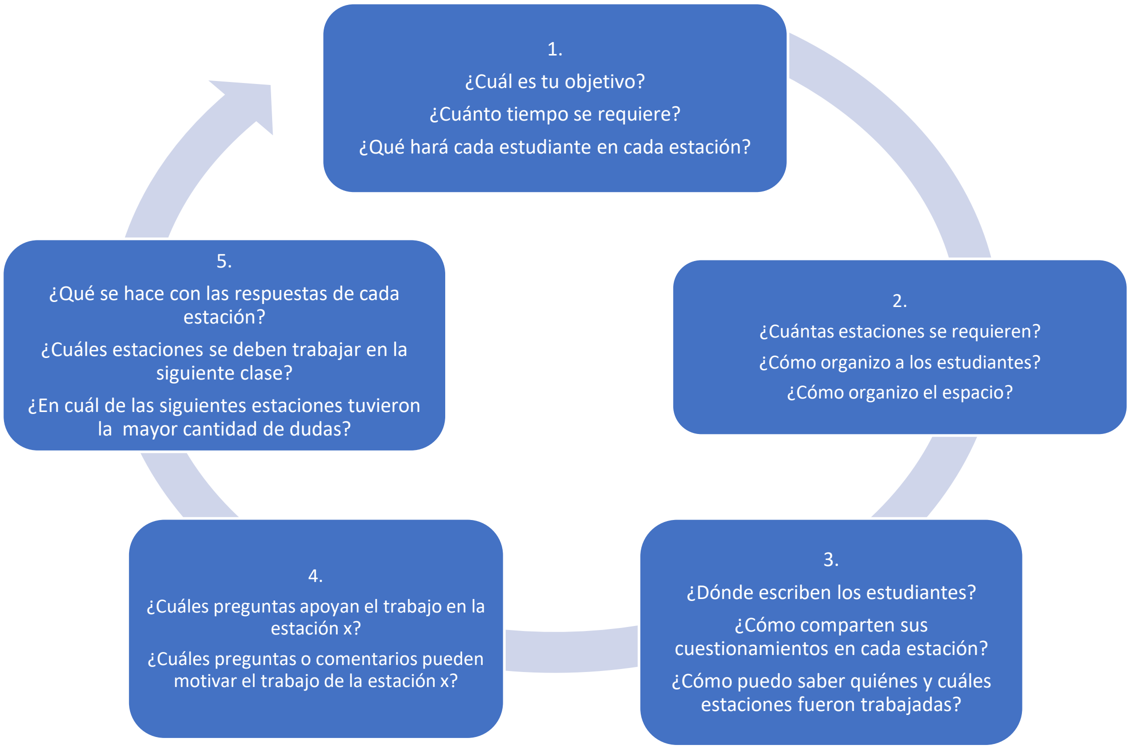
Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Intersección parábola – eje X	Reconoce que se debería aplicar la formula.	Hace las transformaciones equivalentes que corresponden y aplica la fórmula de forma correcta.	Hace las transformaciones equivalentes que corresponden y aplica la fórmula de forma correcta y llega al resultado correcto.
Intersección parábola – recta	Reconoce que se debería aplicar la formula.	Realiza las transformaciones equivalentes que corresponden y aplica la fórmula de forma correcta.	Hace las transformaciones equivalentes que corresponden y aplica la fórmula de forma correcta y llega al resultado correcto.
Intersección parábola – parábola	Reconoce los gráficos y lo relaciona con las tablas de valores.	Relaciona los gráficos con alguna otra representación.	Relaciona los gráficos con las tablas de valores, las ecuaciones y la solución con el punto de la intersección, que está representado por el valor x que se obtiene con la ecuación.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que el desarrollo de la habilidad de resolver problemas implica una serie de otras habilidades, en este caso, la variación de parámetros o de condiciones iniciales de un problema que afectan en la aplicación y comprensión de una fórmula. Se sugiere explicar algebraicamente la obtención de la fórmula y explicar las condiciones para tener una única solución, dos diferentes o ninguna. Sobre la construcción del conocimiento, se sugiere tener en cuenta que la situación se refiere al lanzamiento de balas. La primera pregunta se refiere a los parámetros comunes de las tres trayectorias, punto de partida que se verifica gráficamente en el punto inicial, el ángulo del lanzamiento que coincide en las tres trayectorias y las formas parabólicas incluyendo la simetría en los lanzamientos. La segunda pregunta de la construcción del conocimiento se refiere a las diferencias de los lanzamientos, en los gráficos son los diferentes vértices y las diferentes intersecciones con el eje horizontal que es el largo del lanzamiento. La tercera pregunta de la construcción del conocimiento hace referencia a los vértices que son los puntos más interesantes en cada trayectoria porque, debido a la simetría, los vértices definen el largo del lanzamiento.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de pensar con perseverancia y proactividad, se sugiere que el trabajo con estaciones incluya el juego y la corroboración de los pares obtenidos por el equipo. Se sugiere también, anotar en su cuaderno las soluciones y los pasos que están involucrados en el desarrollo de la fórmula y no simplemente anotar las soluciones.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo en estaciones: se sugieren las siguientes preguntas para guiar la implementación de las estaciones.



Módulo obligatorio 3

Visión panorámica

Gran idea

Las propiedades y relaciones geométricas entre objetos y sus distancias permiten resolver problemas que involucran destrezas de visualización espacial.

Objetivos de aprendizaje

OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA3. Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

OA6. Realizar demostraciones simples de resultados e identificar en una demostración, si hay saltos o errores, trabajando con empatía y respeto. **(Argumentar y comunicar)**

OA7. Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar**. (Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Sistemas de ecuaciones lineales (2x2).
- Homotecias.
- Teorema de Thales.

Tiempo estimado
6 semanas (24 horas)

Propósito del módulo obligatorio 3

En el módulo 3 de la asignatura de matemática del Nivel 1 de Educación Media, se espera que los estudiantes comprendan que *las propiedades y relaciones geométricas entre objetos y sus distancias permiten resolver problemas que involucran destrezas de visualización espacial*. Entendiendo que la comprensión se logra cuando el estudiante realiza varios procesos desde lo experiencial hasta lo abstracto y simbólico de la matemática, expresado en este caso por las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales, las homotecias y en particular por el teorema de Tales.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 3 desarrollan las habilidades de representar, resolver problemas, argumentar y comunicar. En particular, este módulo desarrolla la expresión de los sistemas de ecuaciones lineales en el plano cartesiano y utiliza elementos geométricos para expresar la homotecia. Además, selecciona modelos lineales según el fenómeno y el modelo homotético para proyecciones y proporciones. También se desarrolla la variación de parámetros y de condiciones iniciales para resolver problema y descubrir las propiedades homotéticas, para finalmente realizar demostraciones simples sobre el teorema de Tales y otras propiedades. En el caso de la homotecia y su relación con las proyecciones, se espera que los estudiantes evalúen el esquema con la realidad que comprueben los resultados y soluciones dadas según la realidad, comparando los objetos reales con las proyecciones y las medidas de estas.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 3 desarrollan las actitudes del siglo XXI del ámbito de las Maneras de pensar, las Maneras de trabajar y las maneras de vivir en el mundo, promoviendo el desarrollo de varias actitudes. La actitud de perseverar en torno a metas en la resolución de un problema o en la elaboración de esquemas que den una idea geométrica de la situación y desarrolla la actitud de aprovechar las herramientas disponibles, como calculadoras, reglas, transportador y compas, como también los objetos técnicos que puedan estar a su alcance. Esta actividad brinda oportunidades para desarrollar la actitud de pensar con perseverancia y proactividad en la búsqueda de soluciones y en el desarrollo de algunas demostraciones sobre el teorema de Tales, como también el trabajo respetuoso y empático que se pueda dar entre los compañeros al momento de presentar soluciones y demostraciones.

Ruta de Aprendizaje del Módulo 3

Las propiedades y relaciones geométricas entre objetos y sus distancias permiten resolver problemas que involucran destrezas de visualización espacial.

Actividad de desempeño 1: Expresar situaciones utilizando el plano cartesiano y ecuaciones lineales, para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y dar respuestas a los problemas planteados.

Actividad de desempeño 2: Resolver problemas expresando situaciones en el plano cartesiano y ecuaciones lineales, para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y dar respuestas a los problemas planteados.

Actividad de desempeño 3: Variar parámetros o condiciones iniciales para descubrir las propiedades homotéticas.

Actividad de desempeño 4: Realizar demostraciones simples sobre el teorema de Thales y otras propiedades de la homotecia, identificando en una demostración, si hay saltos o errores.

Actividad de desempeño 1

Propósito

En esta actividad los estudiantes expresarán situaciones a través de funciones lineales con dos incógnitas y las representarán en el plano cartesiano para dar respuestas a problemas del diario vivir. Esta actividad comienza con la solución pictórica de un problema, para luego avanzar en grado de dificultad, continuando con la una solución esquemática de ecuaciones lineales 2x2.

Objetivo de Aprendizaje

OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles**. (Representar)**

Conocimiento esencial

Ecuaciones lineales 2x2.

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Hacer tablas de valores de ecuaciones lineales.
- Graficar ecuaciones lineales.
- Revisar pendiente e intersecciones con los ejes.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes la imagen de dos impresoras y les pide opinar sobre el contexto en el cual se pueden utilizar las funciones lineales.


Algunas de las preguntas que pueden promover el proceso de modelación de las funciones son:

- ¿Cuál podría ser la diferencia entre las impresoras?
- ¿En cuál contexto podría ser interesante para nosotros?
- ¿Cuáles variables podrían tomarse en cuenta?
- ¿Cómo podríamos visualizar los costos asociados a la impresión?

Conexión interdisciplinar
Educación Financiera
OA3 Nivel 1 y 2 EM

Construcción de conocimiento

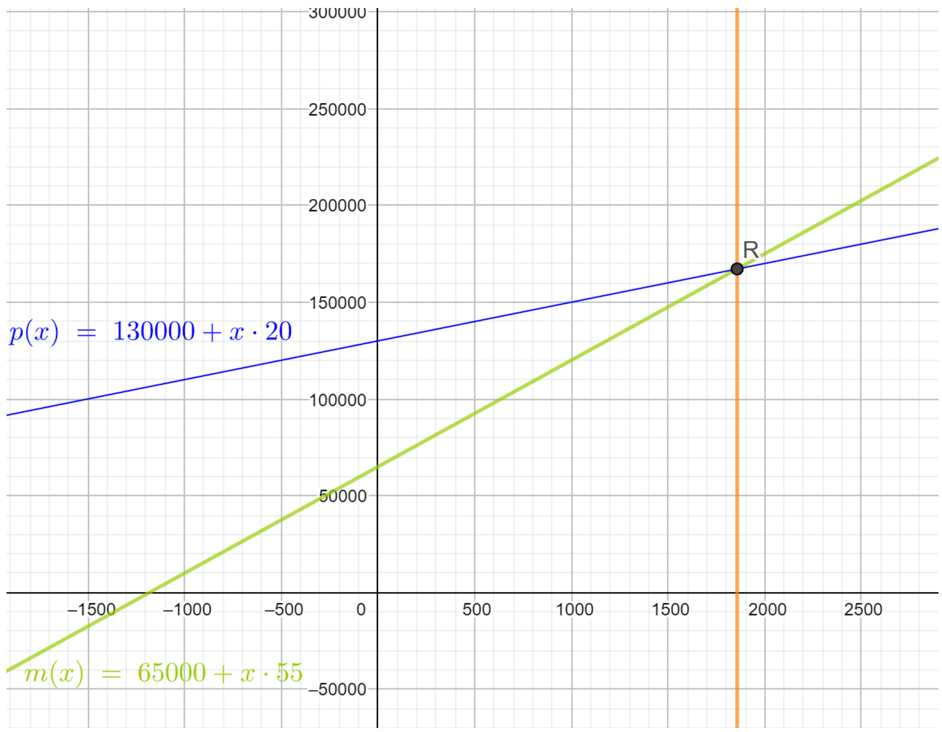
Para introducir la representación se sugiere precisar con datos la situación y dar una respuesta particular para luego llegar a lo general de los procesos que permiten obtener solución a un sistema 2x2.

Un secretario está muy interesado en reducir los costos asociados a la impresión que hay en la oficina, para esto, le han encargado hacer un presupuesto. Una impresora multifuncional cuesta $65 000 y cada hoja impresa cuesta $55, mientras un modelo más profesional cuesta $130 000 con un precio por hoja impresa de $20.

¿Cuál de las dos impresoras es más eficiente?

Impresora 1	Impresora 2
Gasto fijo: $65 000 Gasto variable: $55 por cada hoja	Gasto fijo: $130 000 Gasto variable: $20 por cada hoja
x: es la cantidad de hojas y: es el gasto de impresión en términos de la cantidad de hojas.	

Se sugiere que antes de resolver, se grafiquen ambas situaciones $y = 65\,000 + 55x$ para la primera impresora, y $y = 130\,000 + 20x$ para la segunda impresora.



Para motivar el desarrollo algebraico se sugiere preguntar sobre la línea vertical que se ha marcado en el gráfico y su relación con la solución.

I	$y = 130\,000 + 20x$	x: cantidad de hojas impresas
II	$y = 65\,000 + 55x$	y: costo de la impresión

Igualando

I = II	$130\,000 + 20x = 65\,000 + 55x$	$\mid -65\,000$
$\Leftrightarrow$	$65\,000 + 20x = 55x$	$\mid -20x$
$\Leftrightarrow$	$65\,000 = 35x$	$\mid : 35$
$\Leftrightarrow$	$1\,857{,}14 \approx x$	

Reemplazando en I

$\Leftrightarrow$ $y = 130\,000 + 20 \cdot 1\,857{,}14$

$y \approx 167\,142{,}8$

Dar sentido a la solución según el contexto

x es la cantidad de hojas, y es el precio que se ha gastado, la solución es un par $(1\,857{,}14 \mid 167\,142{,}8)$ que se lee en este contexto como:
El gasto de ambas impresoras coincide cuando se comienza a imprimir la página número 1 857 y el gasto es de \$167 143. A partir de ese momento, la impresora profesional es más económica.

Se sugiere utilizar el mismo contexto de la compra de impresoras para trabajar los casos en que se tiene las otras posibles soluciones: la misma recta con infinitas soluciones y rectas paralelas con ninguna solución.

Práctica guiada

El docente motiva otra estrategia para solucionar dos ecuaciones lineales donde la situación se plantea en sumas de múltiplos de las variables. Se sugiere diferenciar con el caso anterior donde la presentación de problema ya implicaba una solución por igualación, ya que la variable gasto estaba despejada.

¿Cuánto cuesta una entrada de niño y una de adulto?

Familia Saavedra

1 niño y 2 adultos
Costo total de las entradas al cine: $12 000

Familia Reyes

3 niños y 2 adultos
Costo total de las entradas al cine: $18 000

I	$x + 2y = 12\,000$	x: precio de la entrada de niño
II	$3x + 2y = 18\,000$	y: precio de la entrada de adulto
Transformaciones equivalentes		
I	$-x - 2y = -12\,000$	$\vert \cdot (-1)$
II	$3x + 2y = 18\,000$	
Reduciendo a una variable		
I+II	$2x = 6\,000$	| :2
⇔	$x = 3\,000$	$\vert : 35$
Reemplazando en II		
II	$3 \cdot 3\,000 + 2y = 18\,000$	
	$y = 4\,500$	
Dar sentido a la solución según el contexto		

x es el precio de la entrada de niño, y es el precio de la entrada de adulto, la solución es un par $(3\,000 \mid 4\,500)$ que se lee en este contexto como:
El costo de una entrada al cine de un niño cuesta 3 000 pesos y el costo de una entrada de adulto cuesta 4 500 pesos.

Se sugiere considerar el graficar las rectas y encontrar la solución de manera visual para reforzar la idea de solución algebraica y visual. Para esto, se sugiere convertir las ecuaciones a la forma normal (I) $y =$

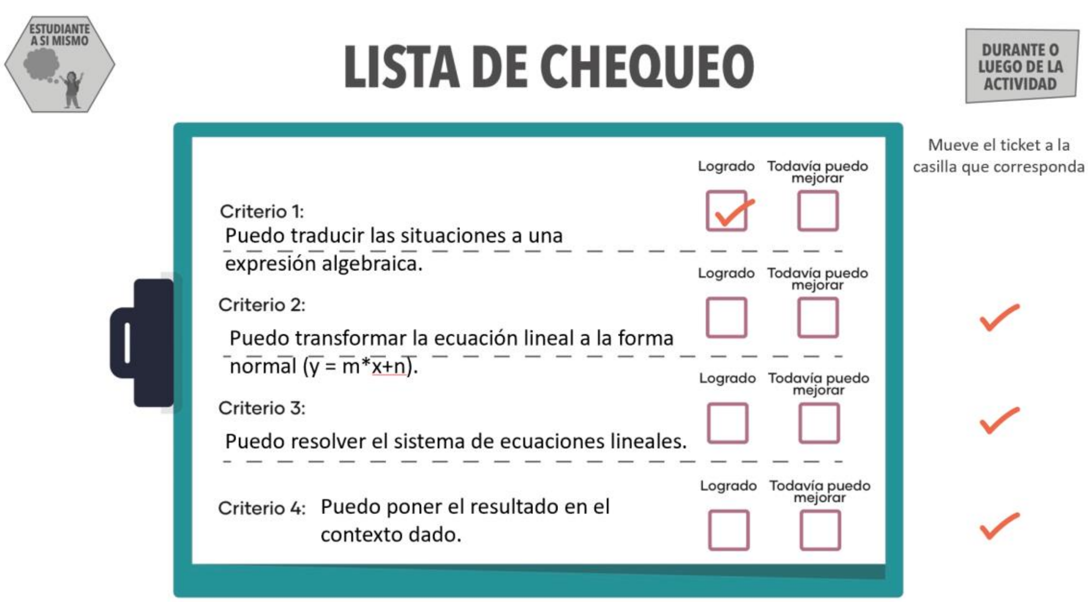
$-\frac{1}{2}x + 6\,000$ (II) $y = -\frac{3}{2}x + 9\,000$ y graficar con una calculadora científica que de una tabla de valores.

Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo de pares en la cual cada integrante resuelve y comenta el método de solución que ha elegido según el contexto. En la tabla se muestra un ejemplo de camino a seguir para cada problema.

Igualar	Reducción
Dos velas se consumen lentamente. Como la vela roja es mucho más fina que la azul, se reduce más rápidamente. Al principio de la observación, la vela azul tiene 12cm de altura y la roja 18cm. Ya se ha observado que en una hora el azul se consume en 6mm y el rojo en 9mm de manera uniforme. ¿Después de cuánto tiempo tienen la misma altura?	Dos tazas de café y un trozo de torta cuestan \$8 000. Tres tazas de café y cuatro trozos de torta cuestan \$20 000. ¿Cuánto cuesta una taza de café y un trozo de pastel?

Para retroalimentar la actividad y el aprendizaje de la representación y de resolver problemas relacionados con funciones cuadráticas, se sugiere utilizar la lista de chequeo con los siguientes criterios:



Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Representación	Dibuja gráficos a partir de una tabla	Elabora una tabla y grafica a partir de las funciones.	Modela distintas situaciones con distintos sistemas de ecuaciones, elabora tablas y graficas a partir de las funciones y la solución.
Resolver problemas	Describe la información entregada utilizando algún sistema de ecuaciones.	Trabaja la información utilizando sistemas de ecuaciones adecuadamente.	Trabaja la información utilizando sistemas de ecuaciones adecuadamente y da respuestas a las preguntas planteadas.
	Estima situaciones entregando la información en palabras.	Estima situaciones entregando la información en sistemas de ecuaciones.	Estima situaciones entregando la información en sistemas de ecuaciones adecuadamente y da respuestas a las preguntas planteadas.
Contextos	Reconoce similitudes en los contextos de sistemas de ecuaciones.	Reconoce similitudes en diferentes contextos y utiliza sistemas de ecuaciones adecuadamente.	Reconoce similitudes en diferentes contextos y transfiere según corresponda la resolución con distintas estrategias de varios sistemas de ecuaciones adecuadamente.

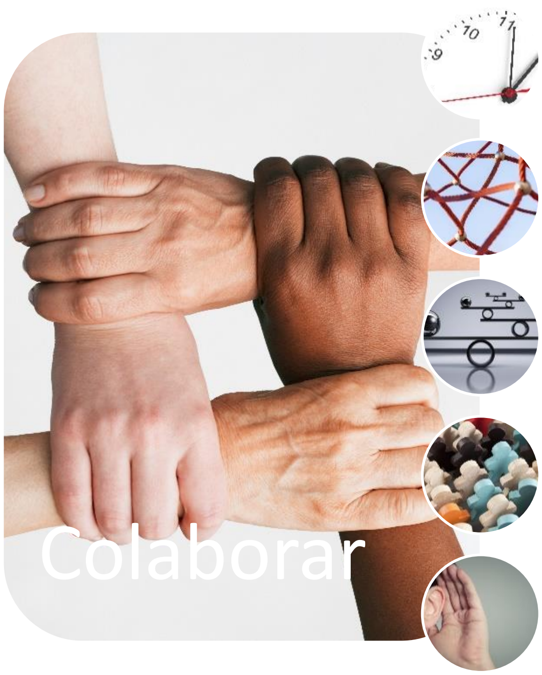
Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que expresar ecuaciones utilizando diferentes representaciones es parte de la habilidad de representar, esto significa transferir las ecuaciones y su solución desde el sistema de ecuaciones al gráfico y viceversa. Dentro de este proceso se requiere de la transferencia entre la situación y la expresión algebraica que describe a la situación, este paso es el primero del ciclo de modelación y la actividad lo incluye, pero no lo considera como un foco. Entonces, en caso de ser necesario, se sugiere precisar este paso marcando las frases y asociando con flechas o colores las partes de la expresión algebraica con el texto, dando énfasis a la asignación de las variables y al sentido de la igualdad según el contexto.

Se sugiere planificar un módulo cero que considere las ecuaciones lineales trabajadas en los módulos 2 y 3 del nivel 3 de Educación Básica, enfocándose en la habilidad de resolver problemas y de modelar situaciones utilizando la ecuación lineal. También se sugiere incluir algunos elementos de traslaciones o rotaciones de figuras en el plano, enfocándose en dibujar en el plano cartesiano y en la habilidad de representar.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de aprovechar las herramientas disponibles, se sugiere realizar gráficos manuales utilizando regla y papel cuadriculado y gráficos digitales utilizando algún programa de fácil acceso, en ambos casos, relevar la prolijidad, el tipo de escala a utilizar, el uso de la notación correcta de los ejes y la asignación de nombres a las funciones.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo grupal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo grupal en esta actividad:



Actividad dentro del horario de clases, el trabajo colaborativo y cómo ocurre debe ser observado en clases.

Entregar instrucciones precisas sobre lo que se espera al término del trabajo, entregar una rúbrica con los criterios y dejar uno o dos minutos para revisar la comprension de las instrucciones.

La evaluación es grupal y se sugiere no evaluar hasta que se comprenda que la idea es contribuir para el logro de un objetivo común.

Decida con anterioridad la forma de organizar los grupos, ya sea de forma aleatoria o por coincidir con las propuestas o por nivel de comprensión del tema, considere siempre la cantidad de participantes por grupo y cantidad de la clase.

Decida con anterioridad los momentos en que los participantes del grupo se escuchan y toman las primeras decisiones para organizar lo que hará cada uno, como también el momento en qu elos grupos se escuchan entre sí.

Actividad de desempeño 2

Propósito

Esta actividad busca expresar situaciones a través de funciones lineales con dos incógnitas y representar el sistema de ecuaciones lineales y su solución en el plano cartesiano para dar respuestas a problemas del diario vivir. Esta actividad comienza conociendo otras estrategias para resolver ecuaciones lineales 2x2 y continua con la elección y variación de las estrategias incluyendo la solución gráfica y determinando el punto de intersección de ambos gráficos se obtiene una estrategia simbólica de igualación de las ecuaciones de un sistema 2x2 de ecuaciones lineales, también se puede concluir sobre la existencia, no-existencia o de la existencia de infinitas soluciones del sistema.

Objetivo de Aprendizaje

OA3. Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

Sistema de ecuaciones 2x2.

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

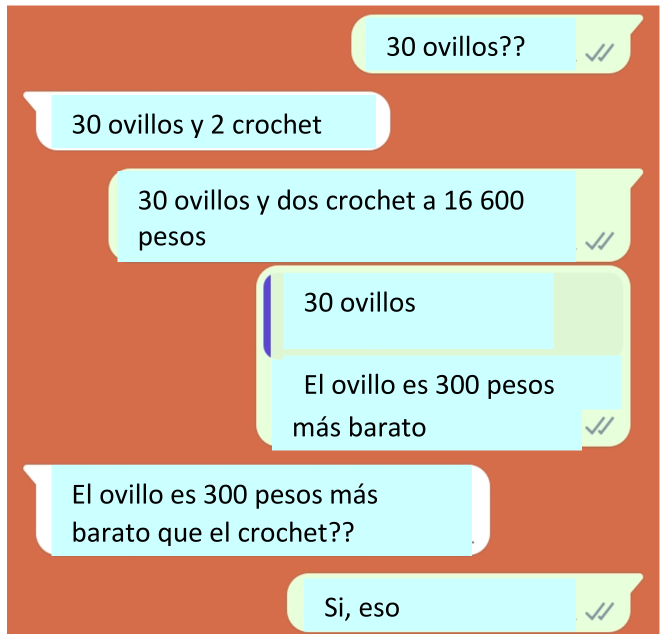
- Aplicación de la propiedad distributiva.
- Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Transformaciones equivalentes.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes una situación de compras de productos que permita elaborar un sistema de ecuaciones para determinar valores unitarios.

¿Cuánto cuesta cada ovillo y cada crochet?



Algunas de las preguntas que pueden motivar el cambio de estrategia para solucionar el sistema de ecuaciones son:

- ¿Qué información nos entrega el chat?
- ¿Qué ecuaciones lineales describen la situación?
- ¿Cómo podemos resolver eficientemente el sistema de ecuaciones lineales?

Conexión interdisciplinar
Emprendimiento y empleabilidad
OA 1 Nivel 1 y 2 EM

Educación Financiera
OA1 Nivel 1 y 2 EM

Construcción de conocimiento

Para introducir el concepto del procedimiento de sustituir una variable en la otra, el docente podría guiar el proceso de aprendizaje por medio de la explicación de la resolución del problema de la situación experiencial, explicando que, aunque es posible resolver con los métodos de igualación y reducción, el método de sustitución en este caso es más efectivo, más rápido y se utiliza cuando hay información de un dato en relación a otro, es decir, una ecuación ya está dada con una variable despejada o muy cerca a estar despejada. En este momento el docente podría recordar a los estudiantes que finalmente todos los caminos tienen que llegar al mismo resultado y que lo más importante no es resolver rápido, sino que resolver correctamente.

Elaboración de las ecuaciones

30 ovillos y 2 crochet	→ $30x + 2y$	x: precio de un ovillo y: precio de un crochet
30 ovillos y dos crochet a 16 600 pesos	→ $30x + 2y = 16\,600$	
El ovillo es 300 pesos más barato que el crochet??	→ $x = y - 300$	

Sistemas de ecuaciones

I	$30x + 2y = 16\,600$	x: precio de un ovillo
II	$x = y - 300$	y: precio de un crochet

Sustituir

II en I $\quad 30(y - 300) + 2y = 16\,600$

Resolver la ecuación lineal

	$30y - 9\,000 + 2y = 16\,600$	
⇔	$32y - 9\,000 = 25\,600$	$\mid +9\,000$
⇔	$32y = 25\,600$	$\mid : 32$
⇔	$y = 800$	

Reemplazando en II

II $\quad x = 800 - 300$

$x = 500$

Dar sentido a la solución según el contexto

x es el precio de un ovillo, y es el precio de un crochet, la solución es un par $(500 \mid 800)$ que se lee en este contexto como:
El costo de un ovillo es de \$500 y el costo de un crochet es de \$800.

Práctica guiada

Para guiar el proceso de elección de la estrategia el docente explica el contenido de la siguiente tabla:

Criterio para elegir la estrategia	Estrategia por utilizar
Dos ecuaciones presentadas de la forma: I $\quad y = m_1x + n_1$ II $\quad y = m_2x + n_2$	Se sugiere graficar para encontrar una solución gráficamente y comprobar utilizando la estrategia de igualación.
Dos ecuaciones presentadas de la forma: I $\quad ax + by = s$ II $\quad y = cx + r$	Se sugiere utilizar el método de sustitución o bien graficar despejando y para obtener una solución gráfica.

Dos ecuaciones presentadas de la forma: I $a_1x + b_1y = c_1$ II $a_2x + b_2y = c_2$	Se sugiere utilizar el método de reducción, multiplicando una de las dos ecuaciones de tal manera que en ambas ecuaciones el factor delante de x o de y sea igual para luego sumar o restar las ecuaciones.

Se sugiere presentar a continuación, el siguiente problema, con lo cual se espera que los estudiantes elijan su estrategia y que grafiquen para encontrar o comprobar la solución.

El Sr. Sánchez paga un total de 820 dólares por 2 tabletas del mismo precio y una funda protectora. La funda protectora es 260 dólares más barata que una tableta.
¿Cuánto cuesta una tableta y cuánto cuesta la funda protectora?

Elaboración de las ecuaciones	
Paga un total de 820 dólares por 2 tabletas del mismo precio y una funda → $2x + y = 820$	x: precio de la tableta y: precio de la funda
La funda es 260 dólares más barata que una tableta → $y = x - 260$	

Sistemas de ecuaciones		
I	$2x + y = 820$	x: precio de la tableta
II	$y = x - 260$	y: precio de la funda

Sustituir	
II en I	$2x + (x - 260) = 820$

Resolver la ecuación lineal		
	$2x + (x - 260) = 820$	
⇔	$3x - 260 = 820$	$\vert +260$
⇔	$3x = 1\,080$	$\vert : 3$
⇔	$x = 360$	
Reemplazando en II		
II	$y = 360 - 260$	
	$y = 100$	

Dar sentido a la solución según el contexto

x es el precio de una tableta, y es el precio de una funda, la solución es un par $(360 \mid 100)$ que se lee en este contexto como:
El costo de una tableta 360 dólares y el costo de una funda es de 100 dólares.

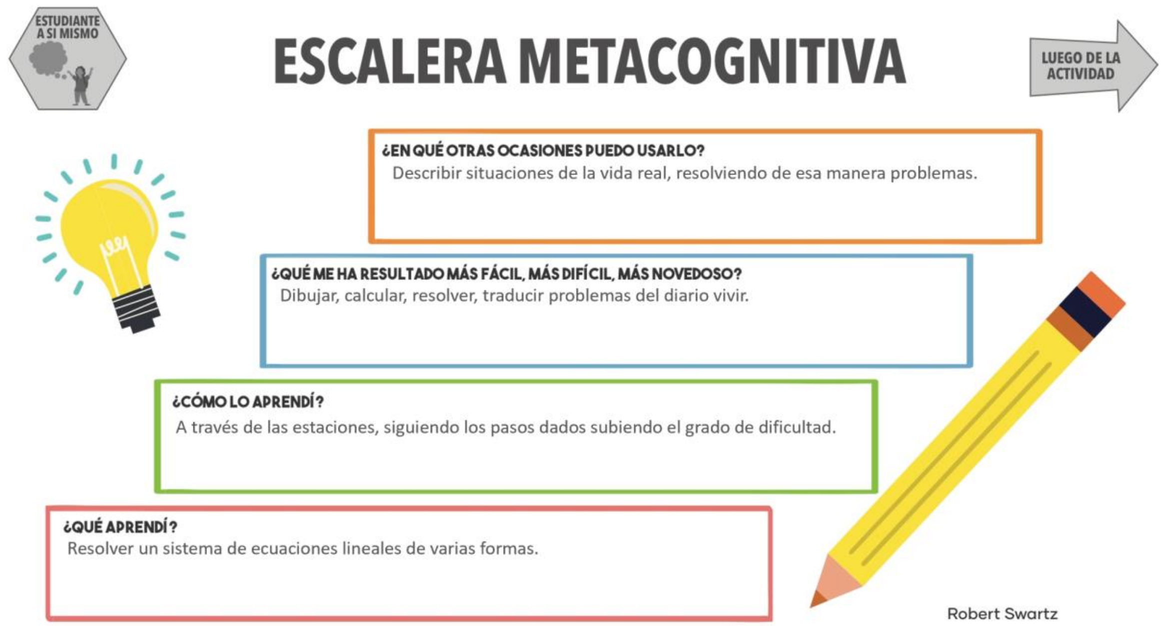
Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo de estaciones para profundizar la comprensión de las relaciones entre la función y la ecuación, y con la tabla de los valores de x con $f(x)$ y el gráfico. Algunas de las estaciones que se sugieren para esta actividad son:

Estación	Material	Instrucción	Organización
Graficar funciones lineales y resolver a través de la intersección.	Hoja con ejercicios para graficar y hoja con las soluciones.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotarlo, soluciona y corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 5 ejercicios colgado en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgado en otra parte de la sala.
Igualar un sistema de ecuaciones con dos variables	Hoja con ejercicios para igualar y hoja con las soluciones.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotarlo, soluciona y corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 10 ejercicios colgado en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgado en otra parte de la sala.
Resolver un sistema de ecuaciones con dos variables a través de una adición (resta).	Hoja con ejercicios para resolver sumando y hoja con las soluciones.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotarlo, soluciona y corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 10 ejercicios colgado en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgado en otra parte de la sala.
Resolver un sistema de ecuaciones con dos variables reemplazando una variable.	Hoja con ejercicios para resolver reemplazando y hoja con las soluciones.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotarlo, soluciona y corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 10 ejercicios colgado en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgado en otra parte de la sala.
Ejercicios mixtos	Hoja con ejercicios mixtos y hoja con las soluciones.	Identifica cuál estrategia es más rápida o fácil para resolver el ejercicio, después soluciona.	Hoja con unos 5 ejercicios colgado en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgado en otra parte de la sala.
Ejercicios de aplicación	Hoja con ejercicios mixtos y hoja con las soluciones.	Convierte la situación dada en dos ecuaciones lineales, identifica cuál estrategia es más rápida o fácil para resolver el ejercicio, después soluciona.	Hoja con unos 5 ejercicios colgado en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgado en otra parte de la sala.

Se sugiere hacer variaciones de estas estaciones relacionadas con los factores en los sistemas de ecuaciones dados en las hojas de los ejercicios.

Para retroalimentar la actividad personal en las estaciones, se sugiere utilizar la retroalimentación del estudiante a si mismo, denominada escalera metacognitiva:



https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Gráfico	Grafica líneas rectas en el plano cartesiano.	Grafica las ecuaciones del sistema de ecuaciones asociando cada una de ellas a la función afín en el plano cartesiano.	Grafica las ecuaciones del sistema de ecuaciones asociando cada una de ellas a la función afín en el plano cartesiano y resuelve el sistema de ecuaciones gráficamente.
Igualación de ecuaciones con dos variables	Logra hacer la transformación correcta para tener los números de un lado de la ecuación.	Logra hacer las transformaciones correctas para tener los números de un lado y la variable del otro lado de la ecuación.	Logra hacer las transformaciones correctas y resuelve el sistema de ecuaciones de forma correcta.
Adición de dos ecuaciones	Encuentra el valor del factor a multiplicar para sumar las ecuaciones y reducir la cantidad de variables.	Encuentra el valor del factor a multiplicar para sumar las ecuaciones y reducir la cantidad de variables, multiplica la ecuación según el factor considerando todos los términos de la ecuación.	Encuentra el valor del factor a multiplicar para sumar las ecuaciones y reducir la cantidad de variables, multiplica la ecuación según el factor considerando todos los términos de la ecuación, suma para reducir a una variable y resuelve el sistema de ecuaciones.

Reemplazo de una variable.	Despeja la variable de forma correcta.	Despeja la variable y la reemplaza en la otra ecuación de forma correcta.	Despeja la variable, la reemplaza en la otra ecuación y resuelve el sistema de ecuaciones de forma correcta.
Ejercicios mixtos	Identifica con cuál estrategia sería más rápido o fácil resolver el sistema de ecuaciones.	Identifica con cuál estrategia sería más rápido o fácil para resolver el sistema de ecuaciones y soluciona el sistema de ecuaciones con ayuda.	Identifica con cuál estrategia sería más rápido o fácil para resolver el sistema de ecuaciones y soluciona el sistema de ecuaciones de forma correcta.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que la habilidad de resolver de problemas se desarrolla de varias maneras, una de ellas es evaluando el proceso y comprobando las soluciones. En esta actividad se promueve un trabajo sistemático que permite ir evaluando el procedimiento y entrega una estructura para resolver los problemas, además de las estrategias para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2x2.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de pensar con flexibilidad para reelaborar, se sugiere tener a disposición las tres estrategias para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2x2 dando la oportunidad para que el estudiante utilice aquella que más le acomoda para resolver y que de manera independiente comprenda el valor de las sugerencias que se dan para la elección de la estrategia, es decir que pruebe y que decida por sí mismo cual es la mejor, teniendo estos consejos previamente a su disposición.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo grupal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo grupal en esta actividad:

Actividad dentro del horario de clases, el trabajo colaborativo y cómo ocurre debe ser observado en clases.

Entregar instrucciones precisas sobre lo que se espera al término del trabajo, entregar una rúbrica con los criterios y dejar uno o dos minutos para revisar la comprension de las instrucciones.

La evaluación es grupal y se sugiere no evaluar hasta que se comprenda que la idea es contribuir para el logro de un objetivo común.

Decida con anterioridad la forma de organizar los grupos, ya sea de forma aleatoria o por coincidir con las propuestas o por nivel de comprensión del tema, considere siempre la cantidad de participantes por grupo y cantidad de la clase.

Decida con anterioridad los momentos en que los participantes del grupo se escuchan y toman las primeras decisiones para organizar lo que hará cada uno, como también el momento en qu elos grupos se escuchan entre sí.

Anexo

Situación 1: El albergue juvenil

Para el viaje de fin de año, la encargada del viaje decide ir a un albergue juvenil, para tomar mejor su decisión llama por teléfono y anota: 18 habitaciones de cuatro y seis camas, en total, pueden alojarse 84 jóvenes. Cuando lo comenta, con el grupo se empiezan hacer los grupos, pero le asalta una duda ¿Cuántas grupos de cuatro o de seis se pueden hacer?

Situación 2: El viaje a China

En un cuento chino aparece la siguiente historia: cinco bueyes y dos ovejas cuestan ocho piezas de oro, dos bueyes y ocho ovejas cuestan ocho piezas de oro ¿Cuál es el precio de cada animal?

Situación 3: Un problema de Adam Ries

Dos personas quieren comprar un caballo por 11 florines.

A le dice a B: "Dame un tercio de tu dinero, y yo le añadiré el mío y pagaré el caballo".

B le dice a A: "Dame una cuarta parte de tu dinero, y yo le añadiré el mío y pagaré el caballo".

Ahora pregunto: ¿cuánto dinero tenía cada uno?

Actividad de desempeño 3

Propósito

Esta actividad busca variar parámetros o condiciones iniciales y descubrir las propiedades homotéticas. Esta actividad comienza con una situación experiencial de la vida cotidiana de un técnico forestal donde se espera que los estudiantes se motiven a conocer la utilidad de las matemáticas en el quehacer profesional. Se espera una traducción de la situación al contexto matemático con un croquis para finalmente encontrar las condiciones y relaciones para aplicar la homotecia.

Objetivo de Aprendizaje

OA7. Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

Homotecias.

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

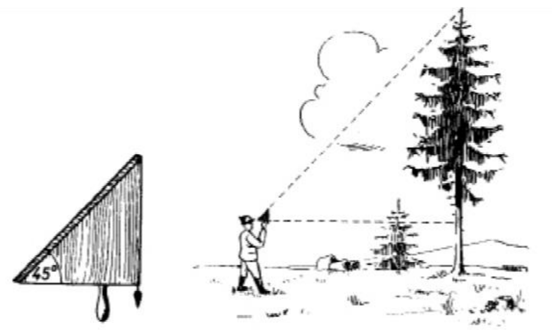
En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Medidas de triángulos.
- Aplicación del teorema de Pitágoras.
- Aplicación de la razón y proporciones.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes una situación propia de un técnico forestal, como lo es medir la altura de árboles, ya sea para calcular la necesidad de corte o para calcular volumen del aserradero. El docente contextualiza comentando que, para determinar la altura de los árboles, se suele utilizar el llamado triángulo del silvicultor: tras apuntar a un árbol con el triángulo, teniendo el triángulo derecho y con la ayuda de un plomo colgando en un hilo desde la esquina derecha arriba, es posible determinar la altura de los árboles.



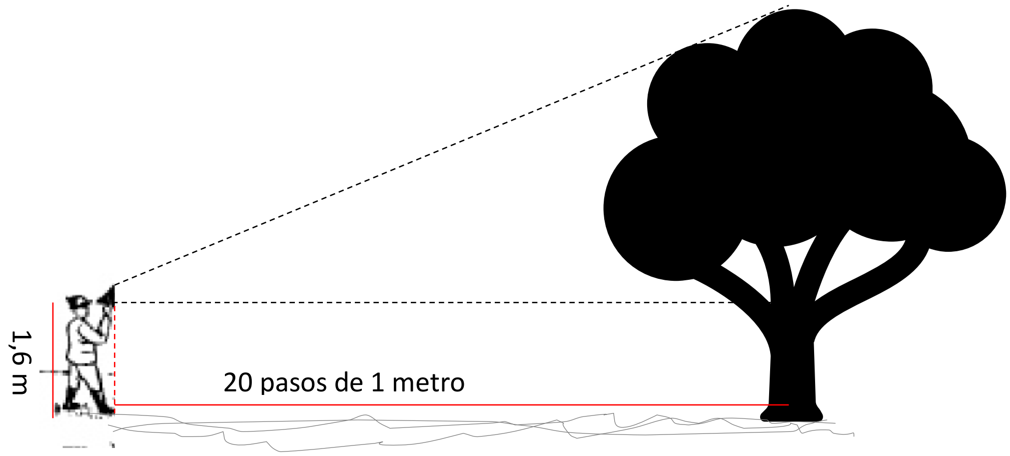
Fuente: https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.weilerbach-rsplus.de/Hausaufgaben/Hausaufgabe20200420114606.pdf

Algunas de las preguntas que pueden motivar la introducción de los conceptos relacionados a la homotecia son:

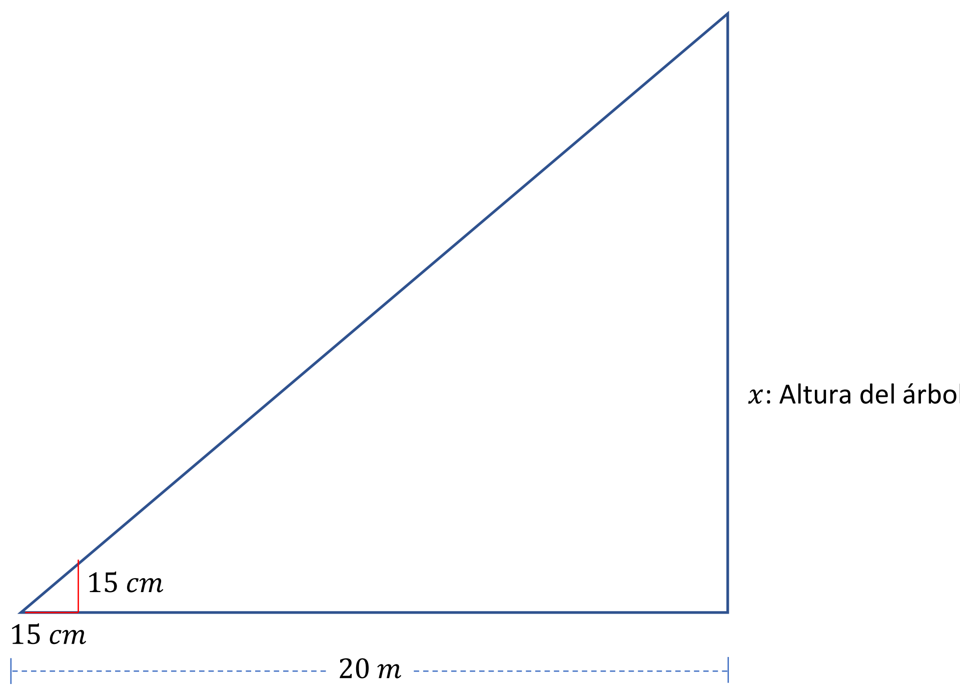
- ¿Qué instrumento se está utilizando?
- ¿Qué medidas son conocidas?
- ¿Qué medidas se pueden conocer?
- ¿De qué manera se podría encontrar la altura del árbol?

Construcción de conocimiento

Para construir el conocimiento de las homotecias se sugiere describir el procedimiento utilizado por el técnico forestal para conocer la altura de un árbol, utilizando un ejemplo concreto como el sugerido a continuación:



El docente explica la necesidad de conocer las características o medidas del instrumento para determinar la altura del árbol y cómo la proporción ayuda a resolver el problema. Para esto, se sugiere hacer un esquema de la situación incluyendo las medidas del instrumento, relevando el uso del plomo para obtener la medida de 90° y lograr un triángulo semejante.



La medida del árbol se obtiene sumando la altura de 1,6m que corresponde a la altura a la que se encuentran los ojos del silvicultor con respecto al suelo. En este caso y debido a las características del instrumento, el silvicultor sabe que la altura del árbol tendrá 20m más la altura del piso a sus ojos:

$$20 + 1{,}6 = 21{,}6$$

Se sugiere desarrollar la expresión que describe la altura en el caso de no contar con un triángulo isósceles de 90°:

$$Altura = distancia \cdot \frac{cateto\ vertical}{cateto\ horizontal} + altura\ de\ \ los\ ojos$$

La noción de triángulos semejantes cuando tienen los mismos ángulos puede ser reforzada en esta actividad, también se puede generalizar a partir de este procedimiento y de la expresión:

$$\frac{Altura}{distancia} = \frac{cateto\ vertical}{cateto\ horizontal}$$

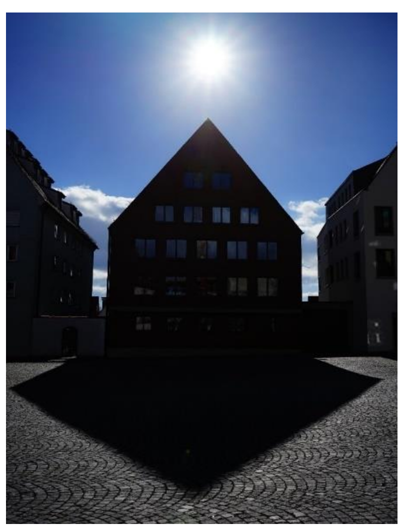
Se sugiere realizar la pregunta ¿funcionaría este procedimiento si el árbol está torcido? La cual permite establecer la noción de paralelismo como condición dentro de esta proposición.

Práctica guiada

Para guiar la comprensión del concepto de homotecia, se sugiere realizar el paso a paso de un problema que se puede abordar de muchas maneras y que en este caso requiere de considerar un mismo rayo de sol que se proyecta sobre dos objetos diferentes.

> Nicolas le pide a su hijo Bastián que pinte la fachada de una casa. Para hacer el cálculo de la mano de obra, se necesita conocer el área del frontis que se compone de un rectángulo con un triángulo isósceles. Para calcular el área, se requiere conocer la altura de la casa desde la base hasta el techo. Nicolas se pone frente a la casa y se desplaza verticalmente hacia ella mirando que el final de su sombra quede justo al final de la sombra de la casa, hasta que los límites de ambas sombras coincidan. Cuenta los pasos desde los dos puntos hasta la casa y responde a su padre Nicolas rápida y precisamente, sin ayuda de la tecnología cuanto costara.

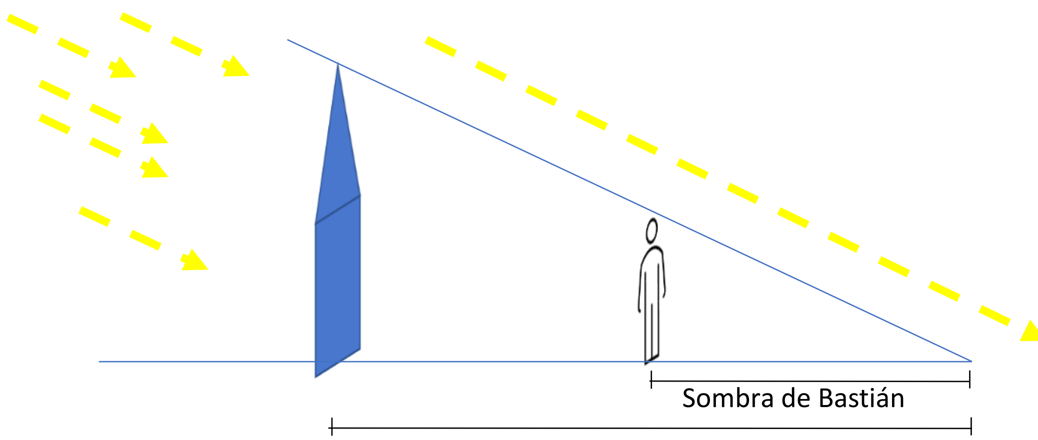
¿Cómo lo hizo Bastián para responder?



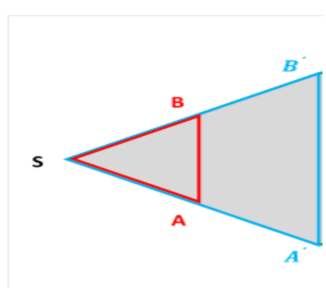
Se espera que los estudiantes empiecen haciendo un dibujo de ella para encontrar un camino hacia una respuesta adecuada. El docente podría guiar el proceso por medio de las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la estrategia de Bastián?
- ¿Qué más tiene que saber o haber hecho Bastián antes de responder?
- ¿Para qué mide las distancias?
- ¿Qué se puede observar en el dibujo?
- ¿Qué tienen en común los triángulos dibujados?

Se espera que los estudiantes vean en el triángulo del silvicultor la proyección de la homotecia y la misma proyección en el problema de Nicolas y Bastián, cuando las puntas de las sombras están en el mismo punto, el mismo rayo sobre la cabeza y sobre la punta de la casa.



Ahora puede aplicar las propiedades de una homotecia cuyo centro se encuentra en el límite de las sombras. Se mide los segmentos necesarios contando los pasos respectivos. Considerando que el sol está detrás de la casa. Se sugiere explicar de manera sencilla y previo a resolver el problema de Bastián y Nicolas, la forma de determinar un valor k de una homotecia, considerando primero la homotecia de un segmento.



Considerar la homotecia con centro S del segmento $\overline{AB}$ y la imagen $\overline{A\acute{}B\acute{}}$ relevando el hecho de que $\overline{AB}$ II $\overline{A\acute{}B\acute{}}$ indicando que las medidas deben estar en cierta relación, denominada factor de homotecia, y que se debe cumplir en la razón entre varios segmentos. El factor k se obtiene dividiendo la distancia $\overline{A\acute{}S}$ por $\overline{AS}$:

$$k = \frac{\overline{A\acute{}S}}{\overline{AS}}$$

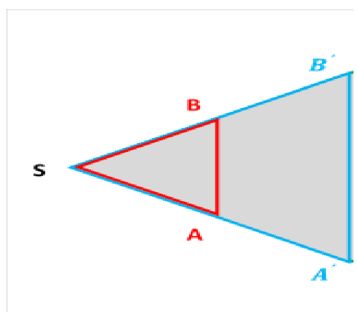
El factor k de una homotecia es el número con el cual se multiplican los largos de todos los lados de una preimagen para obtener los largos de todos los lados de la imagen proyectada.

$$\overline{A\acute{}B\acute{}} = k \cdot \overline{AB}$$

Se sugiere ejemplificar numéricamente cómo se encuentra el factor de homotecia. Si el segmento $\overline{AB} = 3cm$ y $\overline{A\acute{}B\acute{}} = 6cm$. Determinar el factor k de la homotecia considerada.

$$k = \frac{\overline{A\acute{}B\acute{}}}{\overline{AB}} = \frac{6}{3} = 2$$

También, explicar la aplicación del factor de homotecia, indicando que el significado del factor $k = 2$ para los otros segmentos. Esto significa que se debe ubicar el centro S para que se cumpla la homotecia, es decir, se debe cumplir que el segmento $\overline{SA} = 2\overline{SA'}$ y el segmento $\overline{SB} = 2\overline{SB'}$



Esta es una forma para construir la relación entre los segmentos:

$$\frac{\overline{SA\acute{}}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{A\acute{}B\acute{}}}{\overline{AB}}$$

Relevando las condiciones, esto siempre ocurre cuando hay dos rectas que se intersecan y dos que son paralelas.

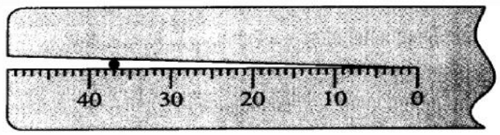
Para volver al problema anteriormente dado, el docente aclara que hay varias transformaciones que se pueden obtener de la igualdad y varias posibles maneras de obtener otra igualdad correcta. Finalmente lo reduce a una posible regla para recordar:

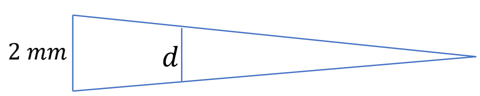
$$\frac{Segmento\ largo}{Segmento\ corto}(Seg. parallelos) = \frac{Segmento\ largo}{Segmento\ corto}(Seg. interseccion)$$

Se sugiere desarrollar el problema de Nicolas y Bastián, considerando que Bastián tiene 150cm de altura, su sombra a esa hora es de 3m de longitud y la sombra de la casa es de 20m de longitud.

Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo personal, que incluya la etapa de realización del esquema, determinación del factor de homotecia, aplicación para encontrar un lado y presentación de otras proporciones que se cumplen en el problema.

<table>
<tr><td colspan="3">¿Qué grosor tiene el cable si la apertura del corte es de 2mm de ancho?


Fuente: https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.weilerbach-rsplus.de/Hausaufgaben/Hausaufgabe20200420114606.pdf
Nota: el punto negro dentro del instrumento de medición representa un cable cortado.</td></tr>
<tr><td>Esquema</td><td>Factor de la homotecia</td><td>Aplicación de la homotecia</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\frac{2}{50} = 0{,}04$
$\rightarrow k = 0{,}04$
Esta es una homotecia que tiene factor 0,04.
Se cumple:
$0{,}04 \cdot 37 = 1{,}48$</td><td>$\frac{2}{50} = \frac{d}{37}$
$\rightarrow\ d = 1{,}48mm$
La medida del grosor del cable es de 1,48mm</td></tr>
</table>

Para retroalimentar la actividad personal del desarrollo del problema, se sugiere utilizar la mentalidad de crecimiento:

https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Datos iniciales del problema	Identifica datos y realiza un cálculo.	Identifica los datos y calcula el factor k.	Identifica los datos, calcula el factor k y llega al resultado correspondiente.
Homotecia	Encuentra en el problema qué tiene que ver con la homotecia.	Relaciona de forma correcta las partes dadas del problema con la homotecia para resolverlo.	Relaciona de forma correcta las partes dadas del problema con la homotecia para resolverlo y observa que el diámetro del círculo no está exactamente vertical en el corte.
Variaciones	Identifica cambios en el factor k dados en las condiciones iniciales.	Determina el desarrollo del problema de la homotecia según las nuevas condiciones dadas.	Determina el desarrollo del problema de la homotecia según las nuevas condiciones dadas y conjetura sobre el posible resultado.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que la resolución de problemas requiere del desarrollo de estrategias, en este caso la homotecia y sus condiciones permiten ampliar la forma de encontrar los datos de objetos que están en nuestro alrededor. La variación de las condiciones permite verificar la validez de la propiedad homotética, suponiendo que no hay perpendicularidad y la variación de parámetros permitirá encontrar diferentes factores de la homotecia. En ambos casos, se sugiere guiar la comparación por medio de una conversación sobre los cambios y efectos en los resultados cuando se realizan estas variaciones.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de pensar con perseverancia y proactividad se sugiere, por una parte, la ejemplificación de los pasos “esquema – factor – aplicación de la propiedad – respuesta” para promover la perseverancia y lograra lo esperado. Por otra parte, se sugiere promover la proactividad presentando problemas similares en la aplicación de la propiedad de la homotecia.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo personal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo personal e independiente de otros:

Independencia

Pensandolas soluciones y los caminos para obtener soluciones por cuenta propia.

Confianza en lo que se sabe

Generar seguridad en lo que se hace en cada paso. La confianza como facilitador de explicaciones propias y para explicar a otros.

Trabajar a su propio nivel

En ciertos momentos es necesario saber dónde se está y trabajar al propio ritmo.

Practicar la autoregulación

Cada tarea requiere de concentracion y de regular en qué momento volverse a un compañero o maestro para pedir ayuda directa.

Actividad de desempeño 4

Propósito

En esta actividad los estudiantes realizarán demostraciones simples de resultados e identificarán en una demostración, si hay saltos o errores a través de un trabajo grupal. Esta actividad profundiza el tema de la homotecia ampliando a los teoremas de Tales, para desarrollar variadas herramientas para el diario vivir que permitan aproximar longitudes, áreas o volúmenes, en casos donde no hay formas de medir directamente.

Objetivo de Aprendizaje

OA6. Realizar demostraciones simples de resultados e identificar en una demostración, si hay saltos o errores, trabajando con empatía y respeto. **(Argumentar y comunicar)**

Conocimiento esencial

Teoremas de Thales

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Aplicación de la proporcionalidad
- Utilización de la regla de tres
- Resolver ecuaciones lineales

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes diferentes situaciones relacionadas con situaciones reales, en las cuales por distintas razones no se puede medir longitudes, áreas o volúmenes de forma directa y es necesario recurrir a las propiedades de la homotecia.






Algunas de las preguntas que pueden motivar el pensamiento de aplicar la homotecia y en el cómo se podría hacer son:

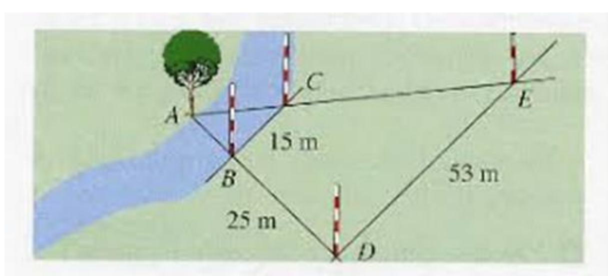
- ¿Qué se quiere medir?
- ¿Cuál sería el punto de referencia?
- ¿A cuáles medidas puedo tener acceso?
- ¿De qué forma nos podría ayudar el triángulo del silvicultor?
- ¿Por qué se puede confiar en esta medida?

Conexión interdisciplinar
Ciencias naturales
OA1 Nivel 1 EM

Construcción de conocimiento

Para introducir la realización de demostraciones simples, se sugiere comenzar con una aplicación numérica del teorema de Tales, por ejemplo:

¿Cómo se puede determinar el ancho del riachuelo?



Los segmentos BC, BD y DE tienen las medidas dadas y con el teorema de Tales se puede determinar el ancho del río:

$$\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{53}{15} \approx 3{,}5$$

Dado que hay una homotecia y los segmentos BC es paralelo a DE, se tiene que:

$$\frac{|AD|}{|AB|} \approx 3{,}5$$

Con el redondeo resulta:

$$|AD| = 3{,}5|AB|$$

Además, según el dibujo:

$$|AD| = |AB| + 25 \quad \rightarrow \quad 3{,}5|AB| = |AB| + 25$$

$$3{,}5|AB| - |AB| = 25$$

$$|AB|(3{,}5 - 1) = 25$$

$$|AB| = \frac{25}{2{,}5} = 10$$

Con lo que se concluye que el ancho del riachuelo AB es de aproximadamente 10m.

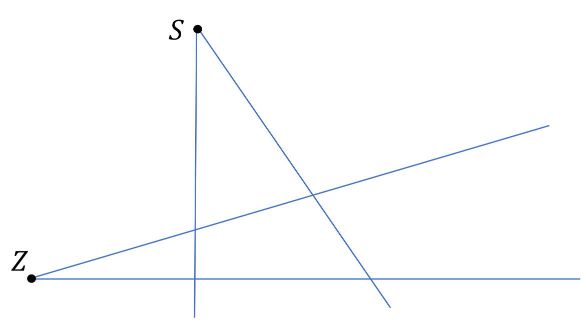
Se sugiere promover la conversación en torno a la pregunta ¿Cómo podemos estar seguros de la veracidad de este teorema de Tales? y ¿qué dice este teorema? Para presentar el teorema de Tales y su demostración.

Características de la homotecia con centro en Z y factor k:

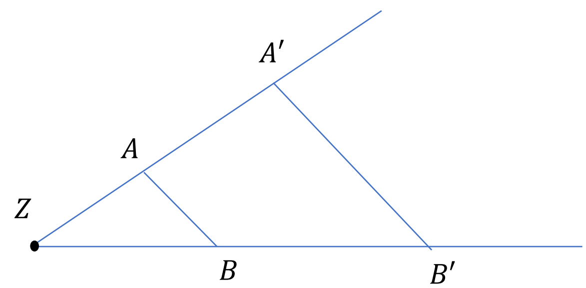
- Z es el único punto fijo.
- Cada punto P con $P \neq Z$ tiene una imagen asignada de la siguiente manera:
  P' se encuentra sobre la recta generada por el segmento ZP y $|ZP'| = k \cdot |ZP|$
- Las imágenes de segmentos o de rectas siguen siendo segmentos o rectas.
  La medida del segmento imagen es k veces más largo que la preimagen.
  Cada recta es transformada en una recta paralela.
- La medida de los ángulos queda invariante.
- La razón de proporcionalidad es invariante.

Propiedad 1: cada recta es transformada en una recta paralela.

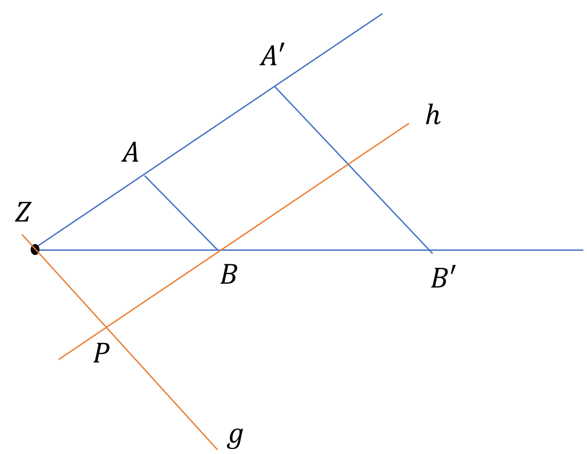
Demostración: Supongamos que una imagen de una recta se corta en un punto S. Entonces hay dos puntos fijos Z y S, lo cual contradice la primera característica de la homotecia. Con esto, tenemos que hay una contradicción y no hay otro punto fijo y las rectas deben ser paralelas.



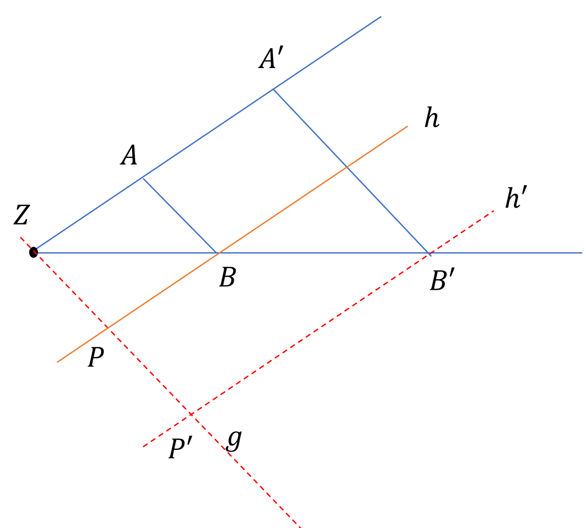
Propiedad 2: la imagen de un segmento que ha sido transformado por la homotecia de centro Z y factor de homotecia k, es k veces más largo que el segmento original.



Demostración: Construyamos una recta g paralela a AB y que contenga a Z y una recta h que sea paralela a ZA y que contenga a B.



Así, se tiene el paralelogramo $ZPBA$ y $|AB| = |ZP|$, extendamos el segmento ZP en un factor k, entonces se tiene $|ZP'| = k \cdot |ZP|$ y PB tiene una imagen $P'B'$.



Así, se tiene que:

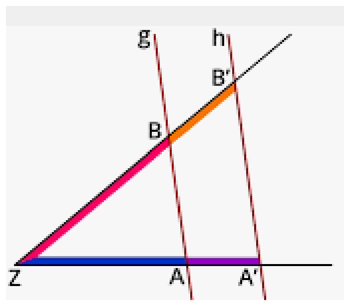
$$g \parallel AB \quad h \parallel ZA \quad h \parallel h'$$

Con esto se tiene que $ZP'B'A'$ es un paralelogramo y se cumple que

$$|A'B'| = |ZP'| = k \cdot |ZP| = k \cdot |AB|$$

Práctica guiada

Motivar el descubrimiento de otras propiedades por medio de los conocimientos adquiridos sobre las propiedades de las homotecias, relevando el factor de la homotecia y la razón entre los segmentos que se mantiene. Se sugiere presentar en un dibujo con segmentos de color azul, morado rojo y naranjo, la homotecia de un segmento para demostrar el teorema de Tales.



Algunas de las preguntas que pueden orientar el desarrollo del descubrimiento del primer teorema de Tales son:

- ¿Qué transformación geométrica se representa?
- ¿Qué posición mutua tienen las rectas g y h?
- ¿Qué razón se mantiene?
- ¿Qué se hace para encontrar el factor?
  Si se conocen todas las medidas ¿de cuántas maneras podrías encontrar el factor de la homotecia?

Se sugiere guiar la demostración, relevando los pasos que están involucrados. En ningún caso se espera que los estudiantes realicen demostraciones de manera independiente, más bien se espera que comprendan el procedimiento de una demostración y el porqué de cada paso.

Primer teorema de Tales: Si $g \parallel h$ entonces:

$$\frac{ZA'}{ZA} = \frac{ZB'}{ZB}$$

También se cumple que

$$\frac{ZA}{AA'} = \frac{ZB}{BB'}$$

Demostración: determinando la razón

$$k = \frac{ZA'}{ZA}$$

Se define una homotecia de centro Z y factor k, la imagen de B bajo esta homotecia es B^* y se tiene que $A'B^* \parallel AB$ y $A'B' \parallel AB$ entonces $A'B^* \parallel A'B'$ como comparten el mismo punto A' se tiene que $B' = B^*$ y con esto se cumple que:

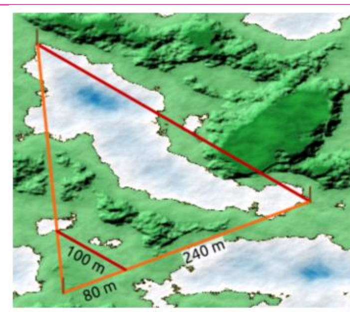
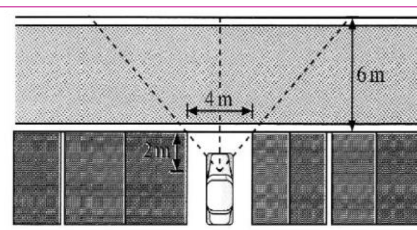
$$k = \frac{ZB'}{ZB}$$

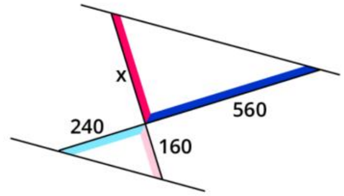
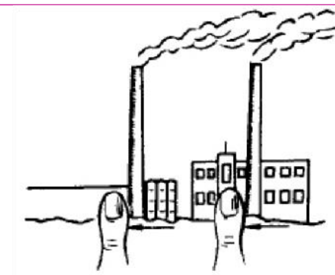
Igualando el factor k, se tiene el primer teorema de Tales.

Se sugiere mencionar el reciproco del primer teorema de Tales y el segundo teorema de Tales, para el cual no se cumple el reciproco, en ambos casos, se sugiere presentar la demostración para comprender los pasos que están involucrados.

Práctica independiente

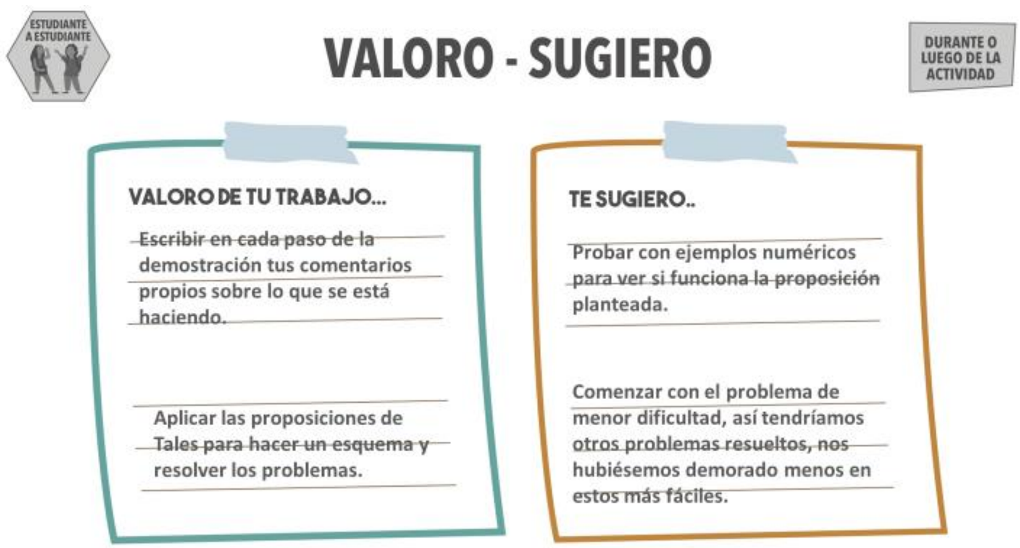
Se sugiere hacer un trabajo grupal con diferentes ejercicios de aplicación de los teoremas de Tales y diferenciar según niveles de dificultad. Para desafiar de igual forma a todos los estudiantes se recomienda formar grupos homogéneos en rendimiento matemático para el trabajo grupal.

Dificultad 1 Se mide la longitud de un lago inaccesible. Las líneas rojas son paralelas entre sí. Introduzca el valor a continuación.	 https://wwww.curriculumnacional.cl/link/https://mathe.aufgabenfuchs.de/flaeche/dreieck/strahlensatz.shtml
Dificultad 2 Una patrulla de policía se encuentra en una entrada. a) ¿Cuántos metros del lado opuesto de la carretera puede ver? b) ¿Cuántos metros puede ver si se acerca 1 m a la carretera?	 https://wwww.curriculumnacional.cl/link/https://www.weilerbach-rsplus.de/Hausaufgaben/Hausaufgabe20200420114606.pdf

Dificultad 3 Calcule la distancia entre los pueblos en el punto A y B.	
Dificultad 4 El salto del pulgar cuando se mira con un ojo u otro es una regla empírica para estimar la distancia a un objeto o de su tamaño. La regla establece que la anchura por la que el pulgar "salta" sobre el objeto observado cuando el ojo cambia, es una décima parte de la distancia.	 https://wwww.curriculumnacional.cl/link/https://www.weilerbach-rsplus.de/Hausaufgaben/Hausaufgabe20200420114606.pdf Dos chimeneas de una fábrica están a 600 m del observador. Al apuntar, su distancia lateral corresponde exactamente a un salto del pulgar. La distancia entre los ojos del observador es de 6,5 cm, la distancia ojo-pulgar es de 65 cm. ¿Cuál es la distancia real de las chimeneas?
Dificultad 5 Si uno cierra el ojo izquierdo y el derecho alternamente, el pulgar, sostenido en posición vertical con el brazo extendido, parece dar un salto en el terreno.	Sara tiene la longitud del brazo de 64cm y la distancia entre los ojos de 6,4cm. Ella estima con esa técnica que el ancho de un muro que se encuentra en frente es de 5m. ¿A qué distancia del muro está Cora si la estimación es correcta?

Evaluación formativa

Para retroalimentar la actividad grupal se sugiere utilizar Valoro - Sugiero:



https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que la habilidad de argumentar y comunicar matemáticamente tiene varias componentes, una de ellas es realizar demostraciones y comprender los pasos que se están realizando. En esta actividad, se quiere dar el foco en las condiciones para que las proposiciones se cumplan y en presentar una demostración. No se espera que el estudiante demuestre proposiciones nuevas a las que se presentaron de manera guiada, se espera que el estudiante aplique las proposiciones y verifique las condiciones iniciales para que se cumpla la propiedad.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de trabajar colaborativamente se sugiere promover un trabajo con empatía y respeto por los demás, particularmente en la toma de decisiones sobre el problema a resolver, la distribución del trabajo y la escucha respetuosa de las posibles soluciones. Trabajar colaborativamente en matemática significa resolver problemas por partes, donde cada colaboración que se realiza contribuye a formular una respuesta, donde cada idea se evalúa grupalmente para clasificarla o reorientarla según el problema o situación. Trabajar colaborativamente es pensar en conjunto sobre los caminos y procedimientos para lograr el objetivo, se sugiere motivar el trabajo colaborativo indicando que todas las ideas y contribuciones son bienvenidas cuando se revisan entre todos.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo grupal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo grupal en esta actividad:

Actividad dentro del horario de clases, el trabajo colaborativo y cómo ocurre debe ser observado en clases.

Entregar instrucciones precisas sobre lo que se espera al término del trabajo, entregar una rúbrica con los criterios y dejar uno o dos minutos para revisar la comprension de las instrucciones.

La evaluación es grupal y se sugiere no evaluar hasta que se comprenda que la idea es contribuir para el logro de un objetivo común.

Decida con anterioridad la forma de organizar los grupos, ya sea de forma aleatoria o por coincidir con las propuestas o por nivel de comprensión del tema, considere siempre la cantidad de participantes por grupo y cantidad de la clase.

Decida con anterioridad los momentos en que los participantes del grupo se escuchan y toman las primeras decisiones para organizar lo que hará cada uno, como también el momento en qu elos grupos se escuchan entre sí.

Módulo 4
Visión panorámica

Gran idea
La probabilidad permite interpretar, predecir fenómenos, caracterizar situaciones, simular posibilidades y estudiar situaciones de incerteza.
Objetivos de aprendizaje **OA1.** Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)** **OA7.** Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)** **OA8.** Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**
Conocimientos esenciales • Probabilidades. • Regla multiplicativa. • Regla aditiva.
Tiempo estimado 6 semanas (24 horas)

Propósito del módulo 4

En el módulo 4 de la asignatura de matemática del Nivel 2 de Educación Media, se espera que los estudiantes comprendan que *la probabilidad permite interpretar, predecir fenómenos, caracterizar situaciones, simular posibilidades y estudiar situaciones de incerteza.* Entendiendo que la comprensión de la probabilidad se basa en nociones intuitivas y que se quiere relacionar la intuición con lo teórico para caracterizar las situaciones que nos rodean y que se relacionan con lo azaroso, la incertidumbre o incerteza. Este módulo considera situaciones cercanas a los estudiantes que son parte de nuestra cultura, como también situaciones que son propias de la matemática y que permiten abstraer en un contexto simplificado el concepto probabilístico que caracteriza a esa clase de situaciones.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 4 desarrollan la habilidad de resolver problemas conociendo y aplicando el cálculo de probabilidades y las reglas multiplicativa y aditiva. En particular, la variación de parámetros y condiciones iniciales para un mismo experimento permitirá comparar la probabilidad en un caso u otro, como también permitirá identificar la aplicación de la regla que se requiere según un caso o el otro. El uso de las conjunciones y, o en la construcción del conocimiento permiten hacer una transferencia entre lo verbal y simbólico, como también diferenciar entre la necesidad de aplicar una regla u otra. El uso del árbol de probabilidad es un apoyo para la comprensión y organización de la información, permite ampliar el pensamiento probabilístico y evaluar el proceso por el cual se obtiene una respuesta, también permite comparar las diferentes posibilidades o caminos que se describen en la situación.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 4 desarrollan las actitudes del siglo XXI del ámbito de las Maneras de pensar, promoviendo la actitud de perseverar frente a tareas o metas específicas que se presentan en las actividades, promoviendo la proactividad por medio de la orientación hacia el cambio y anticipando panoramas. También se promueve el desarrollo de un pensamiento flexible para reelaborar las ideas, en este sentido el uso de esquemas, como el árbol de probabilidad ayuda a flexibilizar y reelaborar con facilidad las diferentes respuestas.

Ruta de Aprendizaje del Módulo 4

¿Cómo estudiamos las situaciones de incerteza?

Actividad de desempeño 1: Variar parámetros o condiciones iniciales de problemas aleatorios relacionados con la regla de Laplace para comparar cambios en los resultados.

Actividad de desempeño 2: Evaluar el proceso y comprobar resultados utilizando árboles de probabilidad para representar y comprobar resultados asociados a la regla multiplicativa.

Actividad de desempeño 3: Evaluar el proceso y comprobar resultados utilizando árboles de probabilidad para representar y comprobar resultados asociados a la regla aditiva.

Actividad de desempeño 4: Variar parámetros o condiciones iniciales de problemas aleatorios relacionados con la regla multiplicativa o aditiva para comparar cambios en los resultados.

Actividad de desempeño 1

Propósito

En esta actividad los estudiantes representarán y variarán parámetros o condiciones iniciales de problemas aleatorios relacionados con la regla de Laplace para comparar cambios en los resultados. Esta actividad comienza con simples juegos aleatorios como se ven en las fondas o ramadas a lo largo de Chile en las fiestas patrias.

Objetivo de Aprendizaje

OA7. Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

Probabilidades (Regla de Laplace).

Tiempo estimado

6 horas

Conocimientos previos

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Conversión de fracciones a decimales.
- Conversión de decimales a porcentajes.
- Conversión de fracciones a porcentajes.
- Relación entre el circulo, el ángulo, la fracción y el porcentaje.
- Aplicación de la regla de tres.
- Identificación del vocabulario evento, frecuencia absoluta, frecuencia relativa y lista de recuento o tabla de datos.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes situaciones de juegos de azar y se centra particularmente en la rueda de la fortuna, la cual se puede encontrar, probablemente en la gran mayoría de fondas o ramadas en todo Chile.

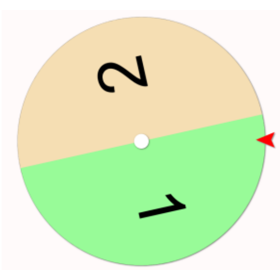


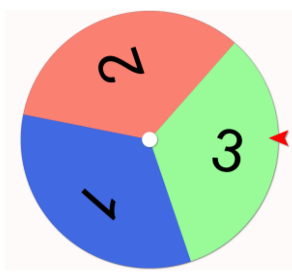
Para introducir el concepto de un experimento Laplace, el docente podría realizar las siguientes preguntas:

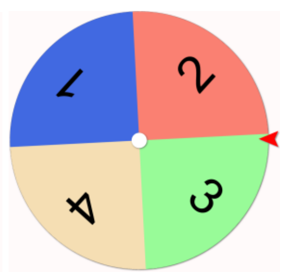
- ¿Cuáles juegos aleatorios conocen?
- ¿Cómo sería una rueda de la fortuna donde las posibilidades de ganar son iguales?
- ¿Con cuáles otros experimentos se podría comparar?
- ¿Por qué la rueda de la fortuna es muy popular en estas fiestas?

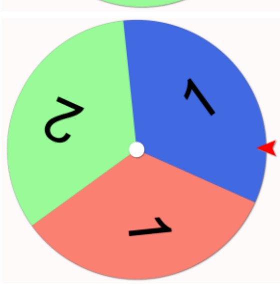
Construcción de conocimiento

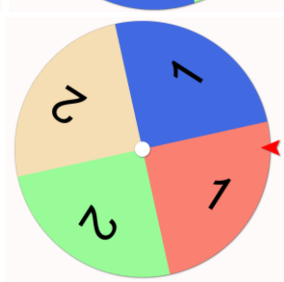
Para construir el conocimiento sobre variar las condiciones y comparar los cambios en los resultados, se sugiere trabajar con diferentes ruedas de la fortuna, en las imágenes se muestran diferencias en referencia a los números.

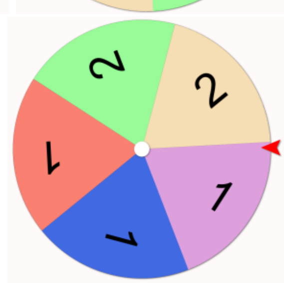












A través de preguntas el docente construye o recuerda definiciones para homologar el vocabulario, diferenciando entre la primera fila de ruedas y la segunda fila. Algunas de las preguntas son:

- ¿Qué tipo de experimento se puede realizar con estas ruedas?
- ¿Podemos predecir el resultado?

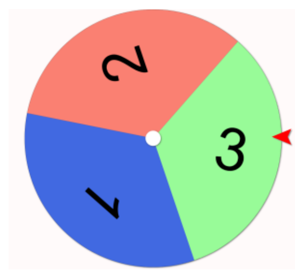
Experimento aleatorio: es un experimento en el que no se puede predecir previamente el resultado. Por ejemplo, la rueda de la fortuna, el lanzamiento de dados, el ludo, la rifa, la lotería, la ratonera, el tiro de argollas.

- ¿Qué característica tienen todas las ruedas?
- ¿Qué tienen en común con el lanzamiento de una moneda?
- ¿Qué tienen en común con el lanzamiento de un vaso plástico?

Experimento aleatorio equiprobable: todas las partes que componen el objeto tienen la misma probabilidad de salir, en muchos casos es una figura regular, por ejemplo, en el caso del lanzamiento de una moneda es comparable con la primera rueda de la primera fila y el lanzamiento de un vaso no es equiprobable, es más probable que caiga de lado a que caiga parado.

- ¿Qué objetos entran en juego en la rueda?
- ¿Cuál es el universo de todas las posibilidades?

Espacio muestral: son todos los posibles resultados del experimento. En nuestro ejemplo, el espacio muestral estaría compuesto por estos resultados: obtener un 1, obtener un 2, obtener un 3, se anota $\Omega = \{1, 2, 3\}$ o bien $\Omega = \{azul, rojo, verde\}$.



- ¿Qué entendemos por suceso o evento?
- ¿Qué suceso es probable, posible o imposible?
- ¿Qué diferencia un suceso de otro?

Suceso o evento: es cualquier subconjunto del espacio muestral. Algunos sucesos podrían ser: obtener un 3, obtener un número impar, en general un suceso es cualquier subconjunto del conjunto sigma. Por ejemplo:

$$A: la\ rueda\ se\ detiene\ en\ el\ 1.$$

$$B: la\ rueda\ se\ detiene\ en\ el\ 2.$$

$$C: la\ rueda\ se\ detiene\ en\ el\ 3.$$

$$D: la\ rueda\ no\ se\ detiene\ en\ ninguno.$$

$$E: la\ rueda\ se\ detiene\ en\ el\ 1\ o\ en\ el\ 2.$$

$$F: la\ rueda\ se\ detiene\ en\ el\ 1\ o\ en\ el\ 3.$$

$$G: la\ rueda\ se\ detiene\ en\ el\ 2\ o\ en\ el\ 3.$$

$$H: la\ rueda\ se\ detiene\ en\ el\ 1, 2\ o\ 3.$$

Dentro de los sucesos destacamos cuatro tipos:

Suceso seguro: Es el suceso o evento que siempre se verifica. Por ejemplo, un suceso seguro sería obtener un número natural menor que 4, en nuestro ejemplo será el suceso H.

Suceso imposible: Es el suceso que no se puede obtener nunca. En la rueda de la fortuna de ejemplo, un suceso imposible sería obtener un número mayor que 7.

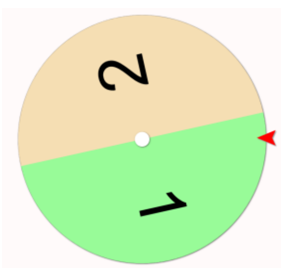
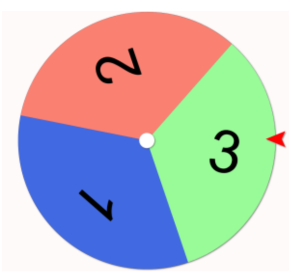
Suceso probable: son todos aquellos sucesos que son posibles de salir, en nuestro ejemplo sería, A, B, C, D, E, F y G.

Suceso complementario: El suceso probable y contrario a un suceso o que se verifica cuando no se verifica el suceso A, se denomina suceso complementario de A. En nuestro ejemplo, $A\colon la\ rueda\ se\ detiene\ en\ el\ 1$. El complemento es $E\colon la\ rueda\ se\ detiene\ en\ el\ 1\ o\ en\ el\ 2$. El complemento de A se anota $\bar{A}$.

- ¿Cómo se calcula la probabilidad de ocurrencia de un evento?
- ¿Siempre es posible calcular esta probabilidad?
- ¿Por qué podría ser interesante de saber la probabilidad de un suceso?

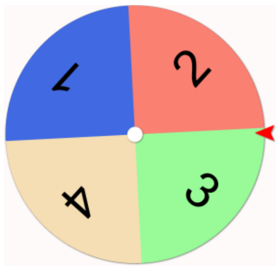
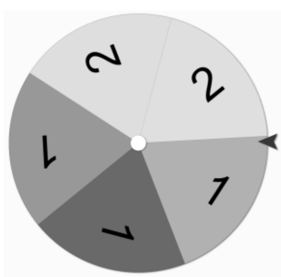
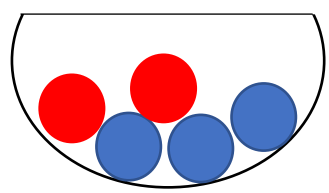
Regla de Laplace: en el caso de que todos los sucesos probables de un experimento aleatorio tengan la misma probabilidad de ocurrir, se define la probabilidad de un suceso **A** como el cociente entre el número de resultados favorables de que ocurra el suceso **A** en el experimento y el número de resultados posibles del experimento.

$$P(A) = \frac{Casos\ favorables\ de\ A}{Total\ de\ casos\ posibles}$$

Experimento	**Cálculo de probabilidades**
	$360° : 2 = 180°$ A = "obtener el 1" $(A = \bar{B})$ $\frac{1}{2}$ ① $p(A) = \frac{1}{2} = 0,5$; 50% ; 180° B = "obtener el 2" $(B = \bar{A})$ $\frac{1}{2}$ ② $p(B) = \frac{1}{2} = 0,5$; 50% ; 180°
	$360° : 3 = 120°$ A = "obtener el 1" $\frac{1}{3}$ ① $p(A) = \frac{1}{3} = 0,\bar{3}$; $33,\bar{3}$ % ; 120° B = "obtener el 2" $\frac{1}{3}$ ② $p(B) = \frac{1}{3} = 0,\bar{3}$; $33,\bar{3}$ % ; 120° C = "obtener el 3" $\frac{1}{3}$ ③ $p(C) = \frac{1}{3} = 0,\bar{3}$; $33,\bar{3}$ % ; 120°

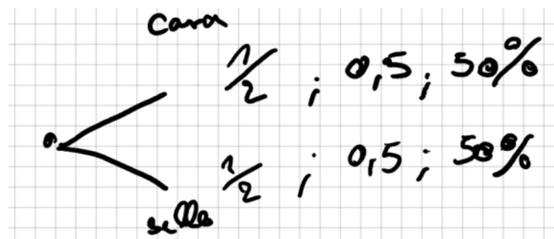
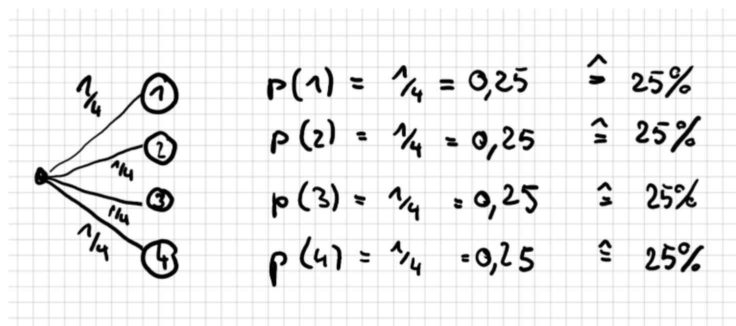
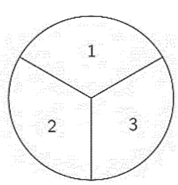
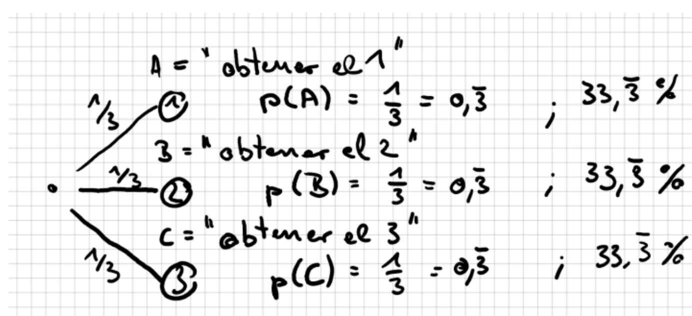
Práctica guiada

Se sugiere hacer una transferencia de un tipo de experimento a otro, identificando las diferencias y similitudes, como también, utilizando el lenguaje propio para el desarrollo del pensamiento probabilístico. Para esto, se sugiere realizar una tabla comparativa.

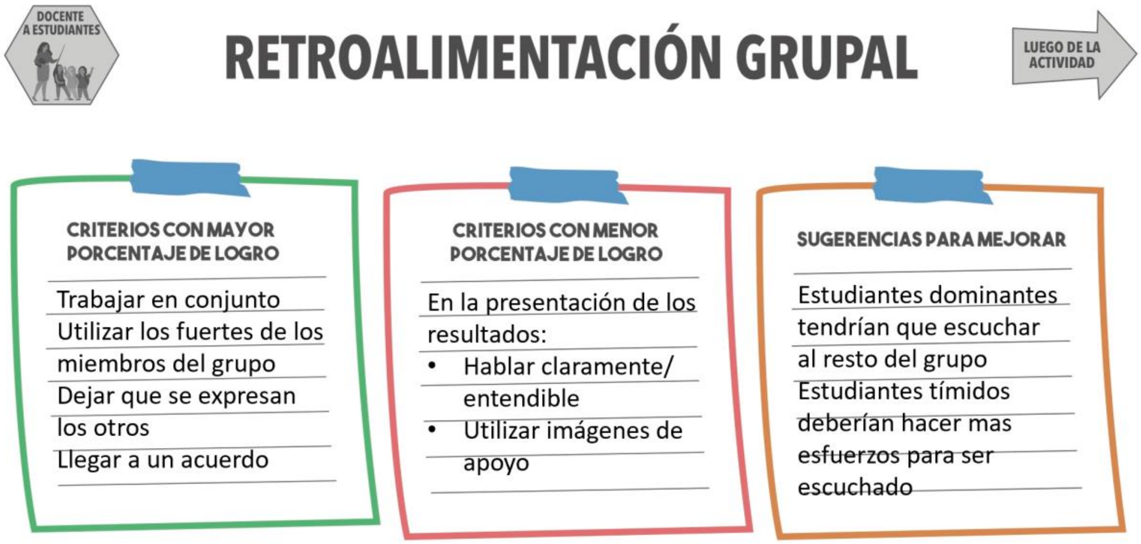
<table>
<tr><th>Experimento 1</th><th>Experimento 2</th></tr>
<tr><td>Hacer rodar una rueda de la fortuna, numerada del 1 al 4, cuando se detiene, la flecha marca un número.
</td><td>Lanzar un dado de cuatro lados, el número que sale en la punta es el número que se considera como evento.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">La estructura de forma de los objetos es diferente, el tipo de acción que se realiza en un caso es rodar y en el otro es lanzar.</td></tr>
<tr><td colspan="2">La probabilidad de obtener un 2 como resultado es:
$$P(2)=\frac{Casos\ favorables\ de\ A}{Total\ de\ casos\ posibles}=\frac{1}{4}$$</td></tr>
<tr><td>Hacer rodar una rueda de la fortuna, numerada con 1 y 2, cuando se detiene, la flecha marca un número.
</td><td>Sacar una bolita de una urna, donde todas las bolitas tiene el mismo tamaño y peso, pero diferente color, 2 rojas y 3 azules.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">La estructura de los objetos es diferente, en su forma y en el material, las acciones difieren entre rodar y sacar.</td></tr>
<tr><td colspan="2">La probabilidad de tener un 2 o el color rojo es:
$$P(2)=P(R)=\frac{Casos\ favorables}{Total\ de\ casos\ posibles}=\frac{2}{5}$$</td></tr>
</table>

Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo de grupos de al menos 4 estudiantes con diferentes experimentos aleatorios que cumplan la probabilidad de Laplace, donde cada experimento sea tratado por al menos tres grupos. Se espera una parte experimental de la probabilidad, realizando el experimento de manera concreta, utilizando la frecuencia relativa y el porcentaje, y el cálculo teórico, aplicando el teorema de Laplace, de manera que al final los grupos presenten en pleno los resultados. Se sugiere, complementar el experimento con la ley de los grandes números, que es el teorema fundamental de la teoría de la probabilidad que indica que, si repetimos muchas veces, tendiendo al infinito un mismo experimento aleatorio, la frecuencia de que suceda un cierto evento tiende a ser una constante.

Juego		Cálculo de la probabilidad
Lanzamiento de moneda, al menos unas 50 veces.		
Lanzar dados de 4, 6, 8, 10, 12 y 20 lados, al menos unas 100 veces.		
Rueda de la fortuna, girar al menos unas 100 veces.		

Para retroalimentar la actividad grupal de elaborar una presentación sobre un juego aleatorio y la determinación de la probabilidad, se sugiere utilizar la retroalimentación grupal:



https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Juego/Experimento	Describen en pocas palabras el experimento.	Describen de forma clara el experimento y su realización.	Describen de forma detallada el experimento, su realización y lo respaldan visualmente.
Probabilidad	Presentan en su discurso el desarrollo del experimento.	Presentan en su discurso de forma clara el desarrollo del experimento, los cálculos y los resultados.	Presentan en su discurso de forma detallada el desarrollo del experimento, los cálculos, los resultados y lo respaldan visualmente.
	Utilizan tablas y cálculos para determinar la probabilidad.	Utilizan tablas, frecuencias relativas, porcentajes y la regla de Laplace para determinar la probabilidad.	Utilizan tablas, frecuencias relativas, porcentajes, la regla de Laplace para determinar la probabilidad y relacionan la probabilidad del experimento con el cálculo de Laplace.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: para desarrollar la habilidad de representar el mismo contenido, en este caso las probabilidades Laplace, se sugiere comenzar con lo que ya saben los estudiantes, convirtiendo fracciones a decimales y porcentaje, y viceversa. A través de la tabla de conteo y uniendo los resultados de varios estudiantes, se verifica lo que después se puede calcular de forma más corta para finalmente llegar a decisiones o conclusiones para la vida. No es necesario que los estudiantes hagan cada juego, es importante que entiendan el concepto de un experimento Laplace y lo pueden distinguir de otro donde las probabilidades no son iguales.

Se sugiere planificar un módulo cero que considere los experimentos aleatorios, frecuencia absoluta, relativa y la probabilidad del módulo 4 del Nivel 3 de Educación Básica, enfocándose en la resolución de problemas, la modelación y la representación de la información.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de valorar las TIC como una oportunidad, se sugiere utilizar la calculadora en los que momentos que se indiquen, los cuales pueden ser al final de la práctica independiente y solo como medio para verificar resultados. Valorar el uso de la calculadora significa en esta actividad, verla como un apoyo para verificar las ideas y no como un medio para realizar los cálculos. Por otra parte, ocupar la computadora como generador de experimentos aleatorios a través de distintos sitios de la web significa valorar las TIC como medios para generar resultados.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo grupal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo grupal en esta actividad:

- Actividad dentro del horario de clases, el trabajo colaborativo y cómo ocurre debe ser observado en clases.
- Entregar instrucciones precisas sobre lo que se espera al término del trabajo, entregar una rúbrica con los criterios y dejar uno o dos minutos para revisar la comprension de las instrucciones.
- La evaluación es grupal y se sugiere no evaluar hasta que se comprenda que la idea es contribuir para el logro de un objetivo común.
- Decida con anterioridad la forma de organizar los grupos, ya sea de forma aleatoria o por coincidir con las propuestas o por nivel de comprensión del tema, considere siempre la cantidad de participantes por grupo y cantidad de la clase.
- Decida con anterioridad los momentos en que los participantes del grupo se escuchan y toman las primeras decisiones para organizar lo que hará cada uno, como también el momento en qu elos grupos se escuchan entre sí.

Actividad de desempeño 2

Propósito

Esta actividad busca evaluar el proceso y comprobar resultados asociados a la regla multiplicativa utilizando árboles de probabilidad. Se espera relacionar el uso de la conjunción con la propiedad multiplicativa, dando énfasis en la ocurrencia de dos sucesos y la visualización del camino que se recorre en el árbol de probabilidad para describir verbalmente lo que está ocurriendo.

Objetivo de Aprendizaje

OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

Regla multiplicativa.

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Cálculo de probabilidad utilizando la regla de Laplace.
- Multiplicación de fracciones.
- Multiplicación de decimales.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta una situación de menú de restaurant y la probabilidad de elección de comidas, para transferir los conocimientos de probabilidades a otras situaciones que no sean necesariamente de juegos y que introduzcan la noción de probabilidad para la toma de decisión.

Algunas de las preguntas que pueden orientar a la necesidad de calcular la probabilidad son:

- ¿Cuántas posibilidades de elección hay en un menú?
- ¿Por qué la probabilidad de elección podría ser importante?
- ¿De qué manera influyen las preferencias en las probabilidades?

Conexión interdisciplinar
Emprendimiento y empleabilidad
OA3 Nivel 1 y 2 EM

Educación Financiera
OA2 Nivel 1 y 2 EM

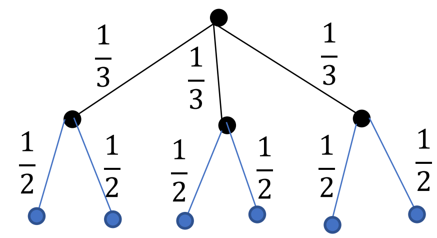
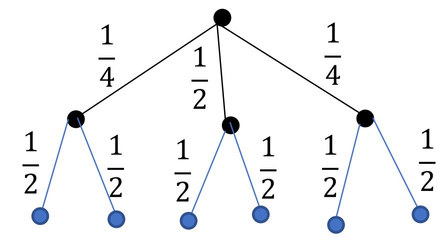
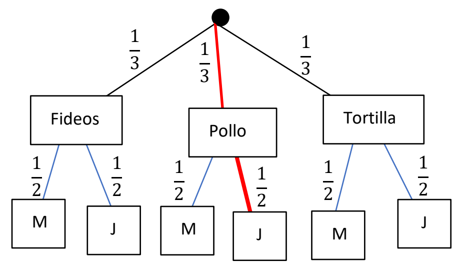
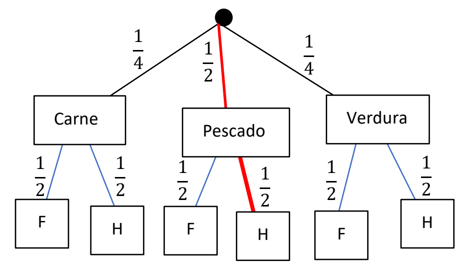
Construcción de conocimiento

Para introducir la representación de ideas y la evaluación del proceso para construir la regla multiplicativa, se sugiere tener dos posibilidades de menú, en uno de ellos con la misma probabilidad de elección y en otro donde la probabilidad de elección tiene incluida una preferencia. En ambos casos, se sugiere la elaboración de un árbol de probabilidades y la marcación de un camino para calcular la probabilidad.

<table>
<tr><th>Sin preferencias</th><th>Con preferencias</th></tr>
<tr><td>Menú del día
• Fideos con salsa
• Pollo con arroz
• Tortilla de papa
Postres
• Maicena (M)
• Jalea (J)

Las personas no tienen una preferencia de alguna comida o postre en particular.</td><td>Menú del día
• Carne
• Pescado
• Verduras
Postres
• Frutas (F)
• Helado (H)

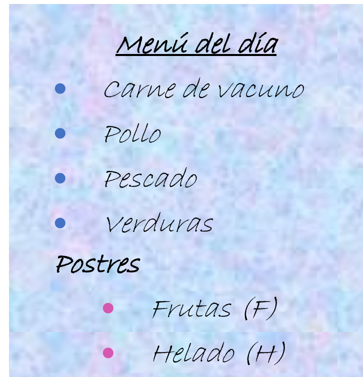
Las personas tienen preferencia de las comidas, carne (25%), pescado (50%) y verduras (25%), en los postres es 50 y 50.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Árbol de probabilidades</td></tr>
</table>

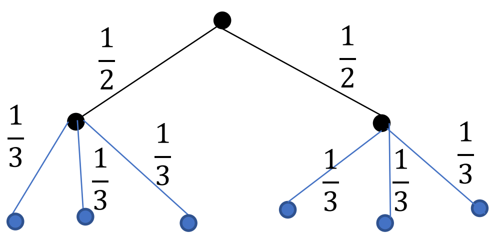
	
¿Cuál es la probabilidad de elegir pollo con arroz y jalea?	¿Cuál es la probabilidad de elegir pescado de plato principal y helado de postre?
	
El camino indica que hay un tercio de probabilidad de elegir pollo y un medio de elegir jalea, entonces la probabilidad de elegir pollo y jalea es de un sexto. $$P(pollo) = \frac{1}{3}$$ $$P(jalea) = \frac{1}{2}$$ $$P(pollo\ y\ jalea) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$	El camino indica que hay un medio de probabilidad de elegir pescado y un medio de elegir helado, entonces la probabilidad de elegir pescado y helado es de un cuarto. $$P(pescado) = \frac{1}{2}$$ $$P(helado) = \frac{1}{2}$$ $$P(pescado\ y\ helado) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
Respuesta: sin preferencias hay un 16,7% de probabilidad de elegir pollo de plato principal y jalea de postre.	Respuesta: con preferencias hay un 25% de probabilidad de elegir pescado de plato principal y helado de postre.

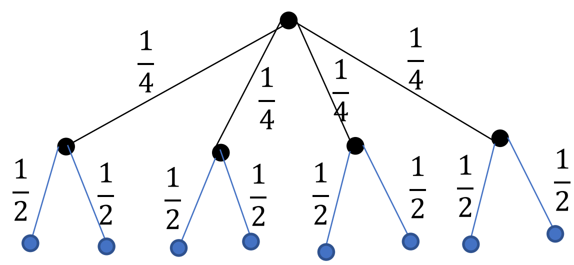
Práctica guiada

Para guiar la evaluación del proceso y la representación de ideas matemáticas, se sugiere realizar una nueva comparación entre dos situaciones de menú, en los cuales se ha cambiado la cantidad de posibilidades y se procede a determinar la probabilidad de una elección.

<table>
<tr><th>6 posibilidades</th><th>8 posibilidades</th></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="2">Árbol de probabilidades</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cuál es la probabilidad de elegir carne y helado?</td></tr>
<tr><td>

$$P(carne) = \frac{1}{2}$$

$$P(helado) = \frac{1}{3}$$

$$P(carne\ y\ helado) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

</td><td>

$$P(carne) = \frac{1}{4}$$

$$P(helado) = \frac{1}{2}$$

$$P(carne\ y\ helado) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

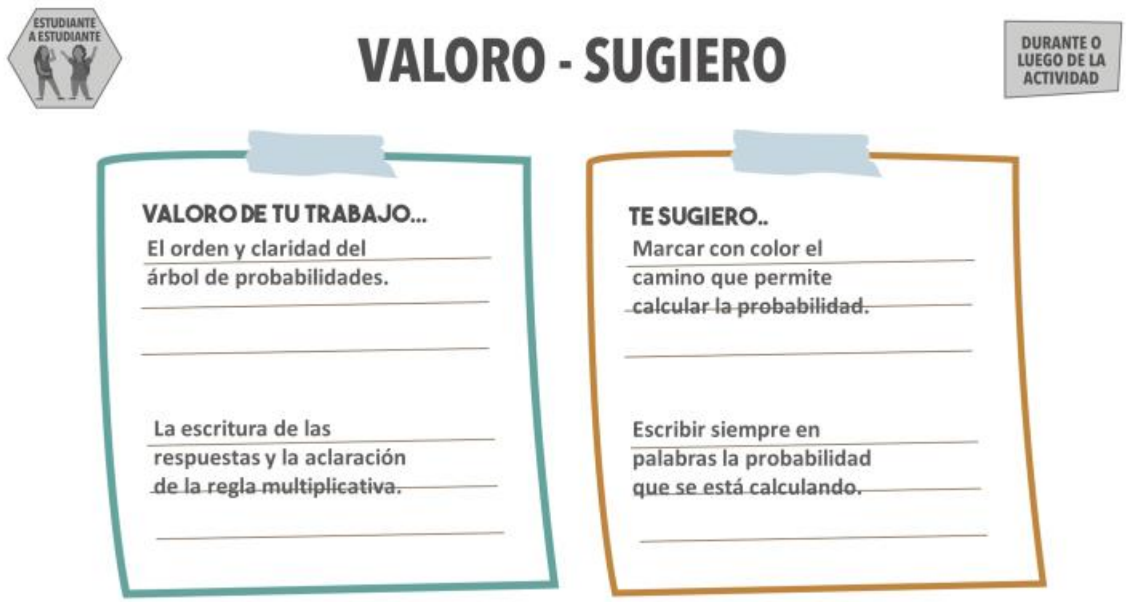
</td></tr>
<tr><td>Respuesta: sin preferencias hay un 16,7% de probabilidad de elegir carne de plato principal y helado de postre.</td><td>Respuesta: sin preferencias hay un 12,5% de probabilidad de elegir carne de plato principal y helado de postre.</td></tr>
</table>

Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo de pares para comparar y evaluar el proceso realizado para determinar la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes. Se sugiere continuar con el mismo contexto y hacer variaciones de cantidades o de preferencias, esto permitirá internalizar la aplicación de la regla multiplicativa. En la tabla se muestran sugerencias para un trabajo en pareja.

Estudiante 1	Estudiante 2
Menú del día • Sopa • Ensalada Segundo • Charquicán • Pastel de choclo • Pantrucas Las personas no tienen una preferencia de alguna comida o postre en particular.	**Menú del día** • Carne • Pescado Postres • Frutas (F) • Helado (H) • Jalea (J) Las personas tienen preferencia de los postres, fruta (50%), helado (25%) y jalea (25%).
Menú del día • Carne de vacuno • Pollo • Pescado • Verduras Postres • Frutas (F) • Helado (H) Las personas tienen preferencia de la carne de vacuno (20%), pollo (10%), pescado (40%) y verduras (30%).	**Menú del día** • Carne de vacuno • Pollo • Pescado • Verduras Postres • Frutas (F) • Helado (H) Las personas tienen preferencia de fruta (75%) y de helado (25%).

Para retroalimentar la actividad de pares, se sugiere utilizar la estrategia Valoro - Sugiero:



https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Evento/suceso	Reconoce las diferentes posibilidades de un resultado.	Reconoce las diferentes posibilidades de un resultado y los representa en un diagrama de árbol.	Reconoce las diferentes posibilidades de un resultado, los representa en un diagrama de árbol y calcula de forma correcta las respectivas probabilidades.
Regla multiplicativa	Realiza una operatoria con dos probabilidades.	Multiplica dos probabilidades utilizando la regla multiplicativa.	Multiplica dos probabilidades utilizando la regla multiplicativa según el contexto y lo solicitado.
Comparación	Elabora una tabla comparativa.	Elabora una tabla comparativa y reconoce diferencias y similitudes.	Elabora una tabla comparativa y reconoce diferencias y similitudes, identificando la diferencia en el cálculo de la probabilidad.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: en esta actividad se desarrollan dos habilidades, por un parte la habilidad de representar por medio del diagrama de árbol, y por otro, la habilidad de resolver problemas por medio de la evaluación del proceso, en este caso comparando y evaluando el proceso y los resultados obtenidos. Se sugiere en estos dos casos, no perder de vista la aplicación de la regla multiplicativa para el cálculo de probabilidades y la transferencia que se hace desde los juegos de azar a una situación más cotidiana, como es el caso de la presentación de un menú.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de pensar con flexibilidad para reelaborar, se sugiere que el trabajo personal se corrija entre los pares. Se sugiere también, anotar en su cuaderno las soluciones y los pasos que están involucrados en el desarrollo del diagrama de árbol y no simplemente anotar las soluciones.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo grupal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo grupal en esta actividad:

Actividad dentro del horario de clases, el trabajo colaborativo y cómo ocurre debe ser observado en clases.

Entregar instrucciones precisas sobre lo que se espera al término del trabajo, entregar una rúbrica con los criterios y dejar uno o dos minutos para revisar la comprension de las instrucciones.

La evaluación es grupal y se sugiere no evaluar hasta que se comprenda que la idea es contribuir para el logro de un objetivo común.

Decida con anterioridad la forma de organizar los grupos, ya sea de forma aleatoria o por coincidir con las propuestas o por nivel de comprensión del tema, considere siempre la cantidad de participantes por grupo y cantidad de la clase.

Decida con anterioridad los momentos en que los participantes del grupo se escuchan y toman las primeras decisiones para organizar lo que hará cada uno, como también el momento en qu elos grupos se escuchan entre sí.

Actividad de desempeño 3

Propósito

Esta actividad busca evaluar el proceso y comprobar resultados asociados a la regla aditiva utilizando árboles de probabilidad. Se espera relacionar el uso de la conjunción con la propiedad aditiva, dando énfasis en la ocurrencia de dos sucesos y la visualización de los caminos que se recorren en el árbol de probabilidad para describir verbalmente lo que está ocurriendo.

Objetivo de Aprendizaje

OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

Regla aditiva.

Tiempo estimado

6 horas

Conocimientos previos

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Cálculo de probabilidad utilizando la regla de Laplace.
- Multiplicación y adición de fracciones.
- Multiplicación y adición de decimales.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta una situación conocida como es la salida familiar a comer en un restaurante, en un caso particular de la Familia de Verónica, que se compone de dos papás, cinco niños y abuelitos, en total 9 personas de las cuales 8 pueden pedir un menú. Se acompaña con el siguiente menú que encontraron en la entrada de un restaurant.

¿Todos pueden elegir un menú diferente al otro?	Según la cantidad de personas de mi familia
	

Algunas de las preguntas que pueden motivar la relación de la situación con la probabilidad son:

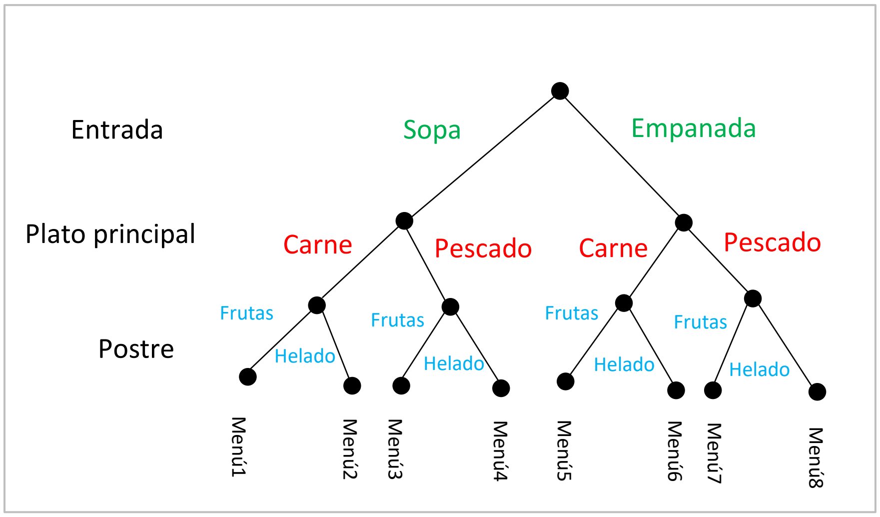
- ¿Cuál será la condición de que un menú sea diferente al otro?
- ¿Cómo se pueden determinar sistemáticamente todas las posibilidades?
- ¿Cómo se puede visualizar el procedimiento para todas las posibilidades?
- ¿Cuáles son los parámetros numéricos que inciden en el cálculo de todas las posibilidades?
- ¿Cómo se podría calcular la probabilidad de elección de las posibilidades?

Conexión interdisciplinar
Emprendimiento y empleabilidad
OA3 Nivel 1 y 2 EM

Educación Financiera
OA2 Nivel 1 y 2 EM

Construcción de conocimiento

Para introducir el concepto de la regla aditiva, el docente podría guiar el aprendizaje por medio del siguiente procedimiento que se relaciona con las respuestas a las preguntas de la situación experiencial, relevando que una posibilidad es diferente a la otra, si se cambia un plato de comida. El menú se puede ordenar con entrada, plato principal y postre, haciendo las diferentes selecciones posibles, el procedimiento de elección se puede visualizar con un diagrama de árbol.

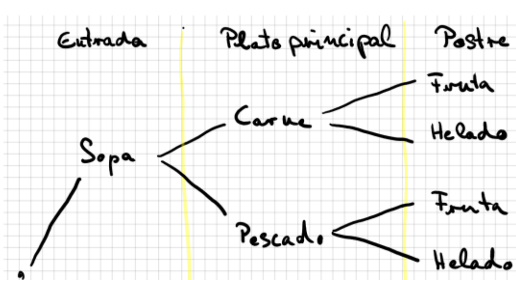


Observar que cada rama del árbol termina en un menú diferente, relevando una de las ramificaciones ya sea marcando en color o extrayendo una parte del árbol. También relevar la noción de camino o ramificación del árbol, describiendo las ocho posibilidades e indicando como se leen las 8 soluciones en términos del uso de la conjunción "o":

- Sopa y carne y fruta o
- Sopa y carne y helado o
- Sopa y pescado y fruta o
- Sopa y pescado y helado o
- Empanada y carne y fruta o
- Empanada y carne y helado o
- Empanada y pescado y fruta o
- Empanada y pescado y helado.

Se sugiere diferenciar con un ejemplo el uso de la conjunción y en la probabilidad aplicando la regla multiplicativa, como se ejemplifica a continuación:

¿Cuál es la probabilidad de que alguien pida sopa, carne y un helado?

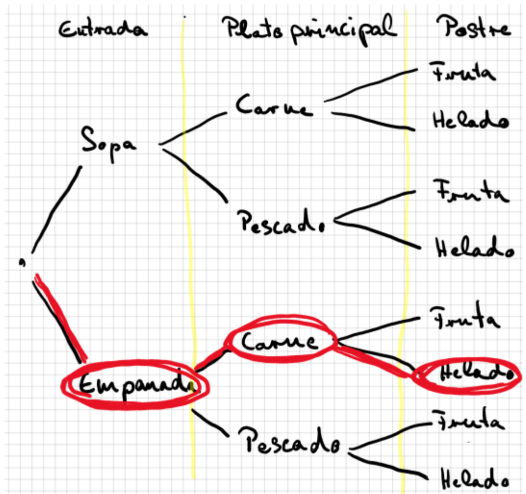


Para responder a la pregunta, aplicar la regla multiplicativa:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Luego, para construir la regla aditiva, se sugiere realizar la pregunta:

¿Cuáles son las posibilidades de terminar con helado como postre?



Para responder a la pregunta, es necesario marcar todas las posibilidades, de manera que se concluya que cada vez que hay dos posibilidades se tiene un 50% y que los 4 caminos se pueden marcar en el árbol o se pueden leer directamente de las 4 posibilidades usando la conjunción "o", como se ilustra a continuación:

Sopa y carne y helado **o** Sopa y pescado y helado **o** empanada y carne y helado **o** empanada y pescado y helado

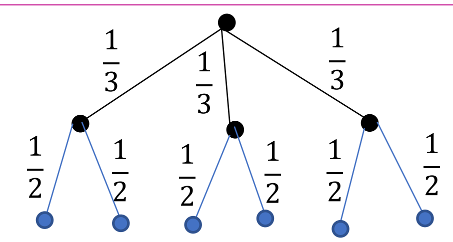
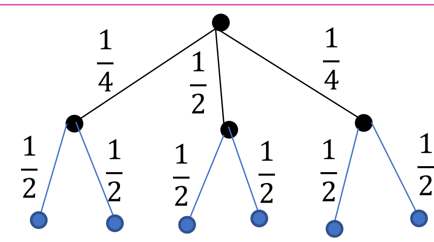
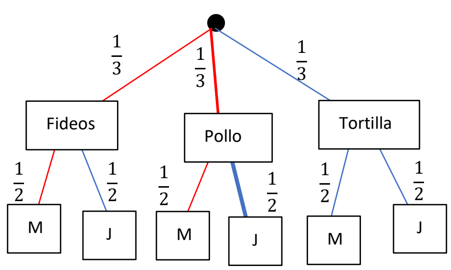
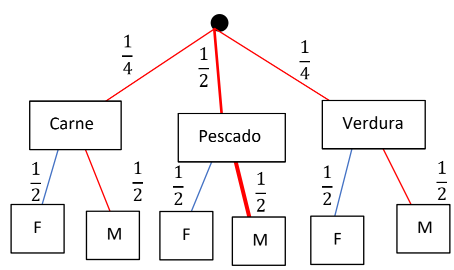
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

De manera que la probabilidad de terminar con helado como postre es de un 50%.

Práctica guiada

Para guiar la aplicación de la regla aditiva para determinar la probabilidad de varios sucesos dentro de una misma situación, se sugiere incluir las preferencias y marcar los caminos que se están solicitando.

Sin preferencias	Con preferencias
Menú del día • Fideos con salsa • Pollo con arroz • Tortilla de papa Postres • Maicena (M) • Jalea (J) Las personas no tienen una preferencia de alguna comida o postre en particular.	**Menú del día** • Carne • Pescado • Verduras Postres • Frutas (F) • Maicena (M) Las personas tienen preferencia de las comidas, carne (25%), pescado (50%) y verduras (25%), en los postres es 50 y 50.
Árbol de probabilidades	
	
¿Cuál es la probabilidad de tener un menú con fideos o pollo y postre de maicena?	¿Cuál es la probabilidad de tener un menú con postre de maicena?
	
Los caminos que tienen fideos o pollo son dos y de esos quedan cuatro donde dos tienen maicena y la probabilidad se determina: $P(M) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$ $= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$	Los caminos que tienen maicena son tres y la probabilidad se determina: $P(M) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$ $= \frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

Respuesta: la probabilidad de tener un menú con pollo o fideo y de postre maicena es de aproximadamente 33,3%	Respuesta: la probabilidad de tener postre de maicena en el menú es de un 50%.

Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo personal, transfiriendo la aplicación de la regla aditiva a otras situaciones. En la tabla se muestra una posible estructura de esta práctica individual.

<table>
<tr><th>Menú</th><th>Pregunta</th></tr>
<tr>
<td>Menú del día
• Sopa
• Ensalada
Segundo
• Charquicán
• Pastel de choclo
• Pantrucas

Las personas no tienen una preferencia de alguna comida o postre en particular.

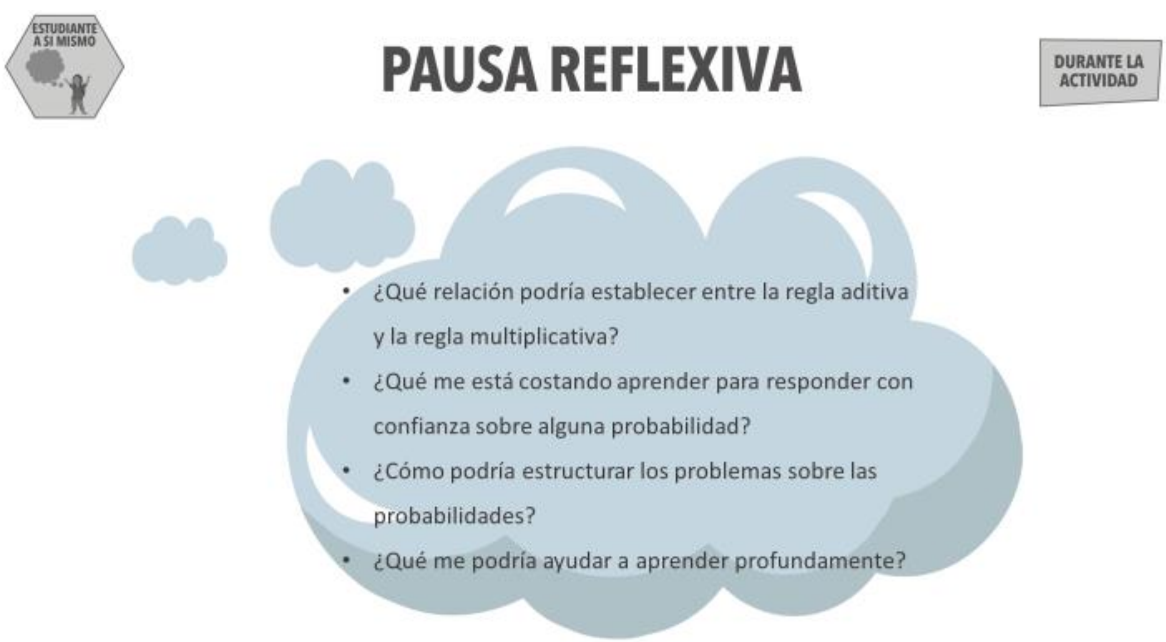
¿Cuál es la probabilidad de tener sopa en el menú?</td>
<td>Menú del día
• Carne
• Pescado
Postres
• Frutas (F)
• Helado (H)
• Jalea (J)

Las personas tienen preferencia de los postres, fruta (50%), helado (25%) y jalea (25%).

¿Cuál es la probabilidad de tener helado en el menú?</td>
</tr>
<tr>
<td>Menú del día
• Carne
• Pescado
Postres
• Frutas (F)
• Helado (H)
• Jalea (J)</td>
<td>Menú del día
• Carne de vacuno
• Pollo
• Pescado
• Verduras
Postres
• Frutas (F)
• Helado (H)</td>
</tr>
<tr><td colspan="2">¿Cuál es la probabilidad de tener helado como postre?</td></tr>
</table>

<u>Menú del día</u> • Carne de vacuno • Pollo • Pescado • Verduras Postres • Frutas (F) • Helado (H) Las personas tienen preferencia de la carne de vacuno (20%), pollo (10%), pescado (40%) y verduras (30%). ¿Cuál es la probabilidad de tener pollo o pescado en el menú?	<u>Menú del día</u> • Carne de vacuno • Pollo • Pescado • Verduras Postres • Frutas (F) • Helado (H) Las personas tienen preferencia de fruta (75%) y de helado (25%). ¿Cuál es la probabilidad de tener pollo o pescado o helado en el menú?

Para retroalimentar la actividad de transferencia de la aplicación de la regla aditiva, se sugiere utilizar la pausa reflexiva:



Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Regla aditiva	Elabora frases utilizando la conjunción "o".	Relaciona la conjunción "o" con la adición.	Relaciona la conjunción "o" con la adición, diferenciando con la conjunción "y" y la multiplicación.
	Realiza cálculos que incluyen la multiplicación y la adición de fracciones.	Realiza cálculos que incluyen la multiplicación y la adición de fracciones aplicando la regla aditiva y multiplicativa.	Realiza cálculos que incluyen la multiplicación y la adición de fracciones aplicando la regla aditiva y multiplicativa según el contexto.
Árbol de probabilidades.	Dibujan un diagrama de árbol que corresponde.	Dibujan un diagrama de árbol que corresponde y marcan el camino correcto.	Dibujan un diagrama de árbol que corresponde, marcan el camino correcto y agregan las probabilidades correctas.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que la habilidad de representar una idea matemática tiene una estructura que debe ser conocida por los estudiantes. Así como la recta numérica o el plano cartesiano, estos son presentados en un primer momento y luego son utilizados y completados para resolver problemas. En estas representaciones se incluyen cálculos, que, en el caso del árbol de probabilidades, son incluidos en las ramas las probabilidades, ya sea como fracciones o en porcentajes. Se recomienda determinar las probabilidades y rotularlas cada vez, leyendo cada rama o camino según el contexto. Se entiende en esta actividad que evaluar el proceso en la resolución de problemas, está integrado en la elaboración del árbol de probabilidades y se espera que al marcar los caminos que incluyen las posibilidades solicitadas, se esté dando un paso más en la resolucion del problema y en el desarrollo de una estrategia para resolver problemas similares.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de pensar con flexibilidad para reelaborar, se sugiere ofrecer tiempo para la elaboración de tablas y árboles, estos pueden ser realizados de manera manual, con planillas de cálculo o con otras opciones de programas en línea. Permita a sus estudiantes ser tenaces y responder a los problemas escribiendo una frase completa. También, promueva el uso de las herramientas disponibles para la elaboración manual o usando tecnología.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo personal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo personal e independiente de otros:

Independencia

Pensandolas soluciones y los caminos para obtener soluciones por cuenta propia.

Confianza en lo que se sabe

Generar seguridad en lo que se hace en cada paso. La confianza como facilitador de explicaciones propias y para explicar a otros.

Trabajar a su propio nivel

En ciertos momentos es necesario saber dónde se está y trabajar al propio ritmo.

Practicar la autoregulación

Cada tarea requiere de concentracion y de regular en qué momento volverse a un compañero o maestro para pedir ayuda directa.

Actividad de desempeño 4

Propósito

En esta actividad se hace una transferencia de la aplicación de la regla aditiva o multiplicativa a otros contextos, retomando los juegos de azar y la extracción de bolitas de urna. Para esto, se elaboran diagramas de árboles y se aplican de manera simbólica las reglas aditiva y multiplicativa, diferenciando según el contexto cuál de ellas se debe utilizar.

Objetivos de Aprendizaje

OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

- Regla multiplicativa.
- Regla aditiva.

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Elaboración de diagramas de árbol.
- Aplicación de la regla multiplicativa.
- Operatoria con decimales.
- Operatoria con fracciones.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes algunas situaciones en las cuales se puede calcular la probabilidad de eventos independientes utilizando la regla multiplicativa y aditiva.



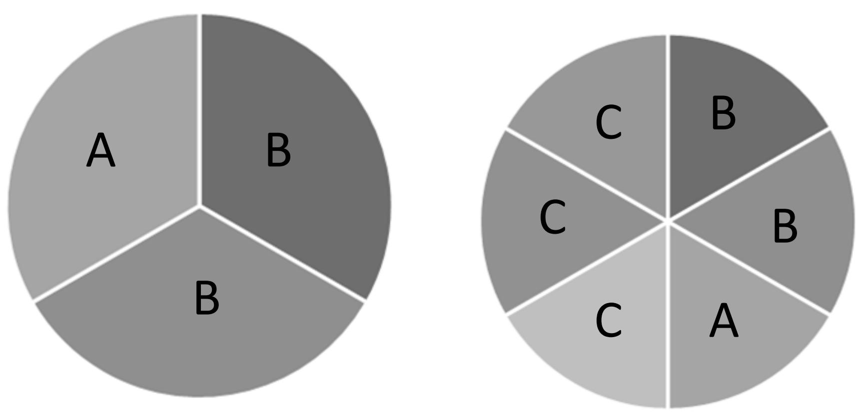
Algunas de las indicaciones que pueden promover la aplicación de las reglas multiplicativa o aditiva son:

- Indique juegos conocidos y el espacio muestral que los compone.
- Elabore tres frases relacionadas con las acciones probables que contengan la conjunción “y”.
- Elabore tres frases relacionadas con las acciones probables que contengan la conjunción “o”.

Construcción de conocimiento

Para introducir el concepto de seleccionar y combinar las reglas, evaluarlas y comprobar resultados y soluciones dadas de distintos problemas, el docente podría construir el conocimiento desde una situación de ruletas, que tienen una distribución equiprobable de los sucesos. A continuación, se presenta un ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de que ambas ruedas coincidan cada una en la A?



$$P(A\ y\ A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

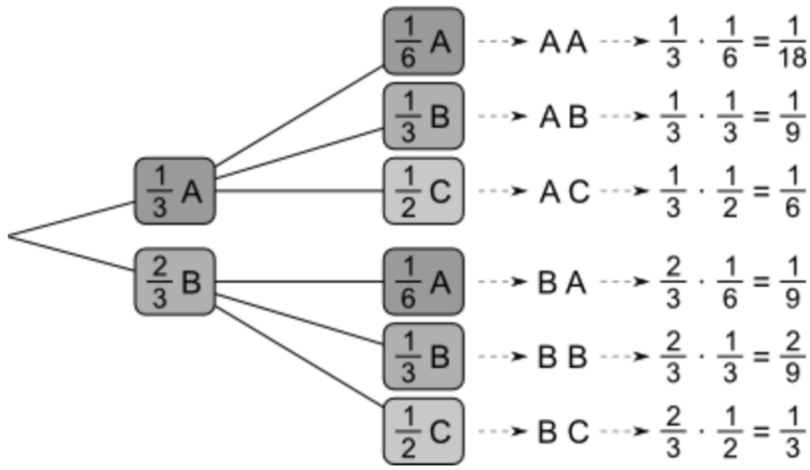
La probabilidad de que ambas caigan en la letra A es de aproximadamente un 5,6%

¿Cuál es la probabilidad de que las ruedas muestren dos letras idénticas?

$$P(AA\ o\ BB) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{18} + \frac{4}{18} = \frac{5}{18}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que ambas caigan en una misma letra AA o BB es de aproximadamente un 27,8%

¿Cuál es la probabilidad de tener la combinación AB o BC al hacer girar las dos ruedas?

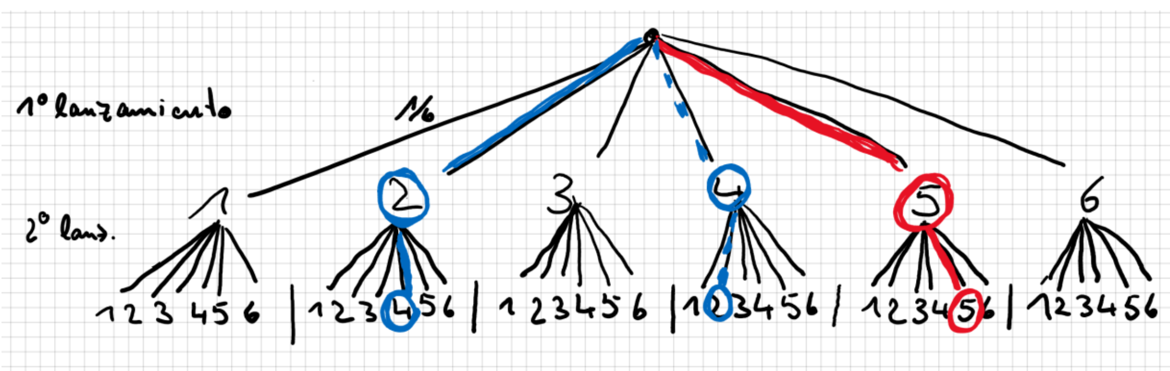


$$P(AB\ o\ BC) = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

Por lo tanto, la probabilidad de tener el par AB o BC es de aproximadamente un 44,4%

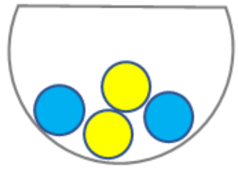
Práctica guiada

Se sugiere motivar la comprensión del diagrama de árbol y de las reglas aditiva o multiplicativa, presentando un diagrama de árbol y solicitando que a partir de este y de sus colores se pueda elaborar una historia de un juego de azar o de menú de restaurant.



Se sugiere comentar una de las posibles respuestas, relevando la explicación del juego, por ejemplo, lanzar el dado dos veces y elegir la combinación ganadora de dos cinco, mientras que otro elige la combinación ganadora de un dos y un cinco, revisando en qué caso es más conveniente o justo.

También, se sugiere ejemplificar la diferencia entre evento independiente y dependiente, considerando dos variantes en la extracción de bolitas de una urna con cuatro bolitas, dos amarillas y dos azules.

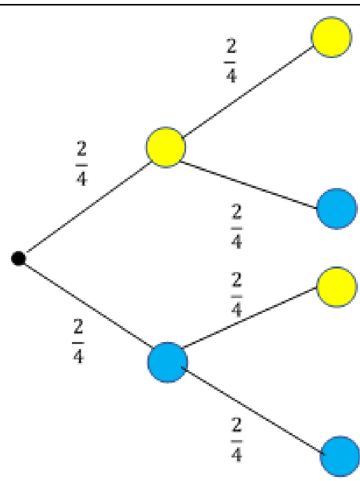
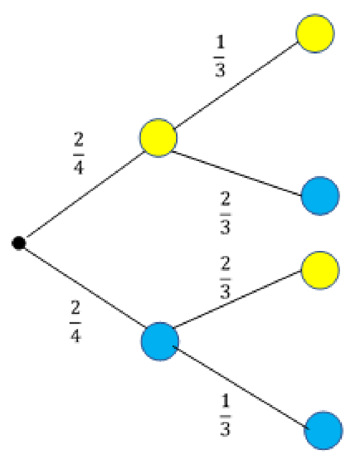


Variante uno: Se saca una bolita y se devuelve.

Variante dos: Se saca una bolita y no se devuelve.

Conjeturar sobre en cuál de las dos variantes las probabilidades no se calculan como eventos simples, indicando el caso de ser independientes y dependientes. Relevar la acción de devolver la bolita como el caso de eventos independientes, ya que la urna vuelve a ser como era antes. En el caso de no devolver la bolita, se trata de un caso dependiente y por lo tanto la probabilidad ya no se calcula como evento simple, ya que disminuye la cantidad de bolitas en la urna y la probabilidad dependerá del color extraído.

Determinar las probabilidades en ambas variantes, elaborando un árbol de probabilidades y fijando un suceso, por ejemplo, determinar la probabilidad de sacar bolita amarilla cuando ya se ha extraído una bolita amarilla en la primera extracción.

Variante uno	Variante dos
	
La probabilidad se mantiene. En la segunda extracción la probabilidad de obtener otra vez una bolita amarilla es $\frac{1}{2}$.	La probabilidad cambia. La probabilidad de extraer una bolita amarilla en la segunda extracción es $\frac{1}{3}$.

Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo de estaciones con diferentes ejercicios en los cuatro temas trabajados, experimentos de Laplace, regla aditiva, regla multiplicativa y combinaciones de ellas. En esta ocasión los estudiantes podrán elegir de eliminar una estación según su nivel, 1 a 3 o de 2 a 4. Algunas de las estaciones que se sugieren para esta actividad son:

Estación	Material	Instrucción	Organización
Experimentos Laplace	Tarjetas con distintos ejercicios.	Calcule las probabilidades.	Sobre la mesa hay diferentes tarjetas con ejercicios y para cada estudiante hay una hoja de trabajo donde puede anotar sus respuestas. Para cada estación el profesor tiene hojas con las respuestas correctas y se les pasa para corregir, una vez que el estudiante le muestra que terminó con la estación/ejercicio.
Regla aditiva		Calcule las probabilidades según la regla aditiva.	
Regla multiplicativa		Calcule las probabilidades según la regla multiplicativa.	
Combinación		Calcule las probabilidades según corresponde.	

Para retroalimentar la actividad se sugiere utilizar la diana:

https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

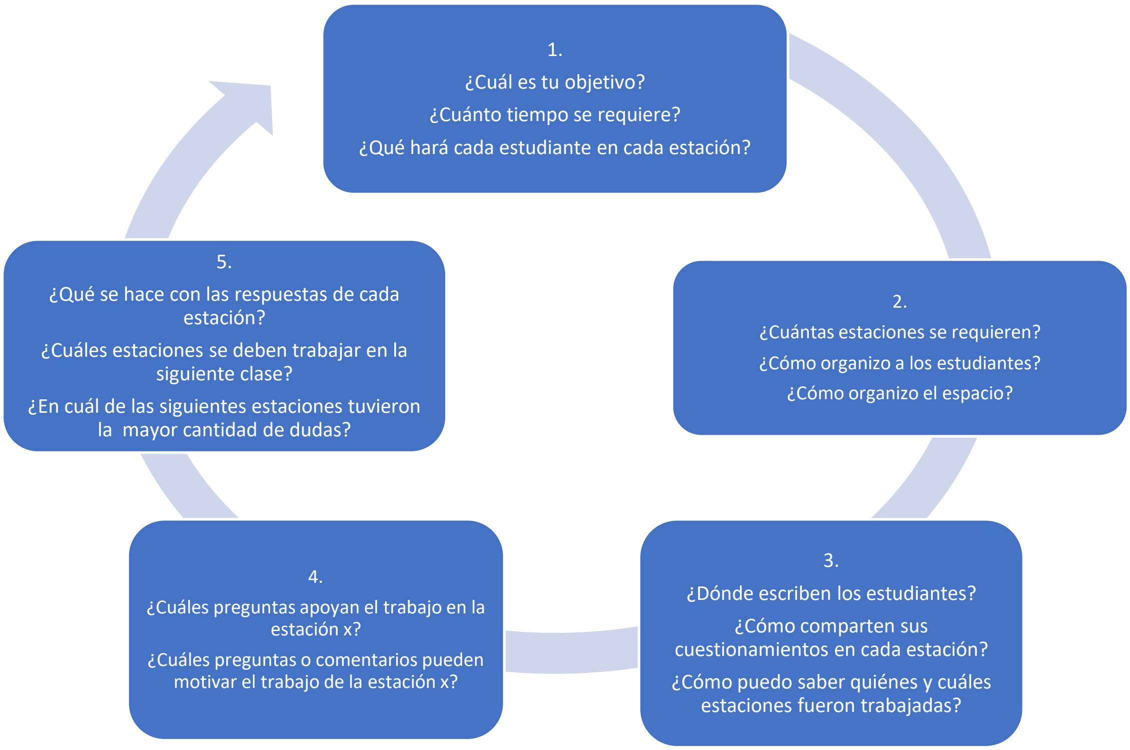
Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Regla multiplicativa y **Regla aditiva**	Diferencia cuál es la operación entre las reglas.	Aplica la regla multiplicativa o la regla aditiva.	Aplica según la situación la regla multiplicativa o la regla aditiva.
	Selecciona una regla.	Selecciona una regla según el caso.	Selecciona una regla según el caso, identificando que la aditiva requiere de la multiplicativa.
	Reconoce diferencias entre los contextos.	Reconoce diferencias entre los contextos según la regla aditiva y multiplicativa.	Reconoce diferencias entre los contextos según la regla aditiva y multiplicativa, elaborando situaciones según un diagrama de árbol.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que el desarrollo de la habilidad de resolver problemas implica una serie de otras habilidades, en este caso, la variación de condiciones iniciales de un problema que afectan en la aplicación y comprensión de este. Se sugiere promover siempre el uso del diagrama de árbol para mejor visualizar las posibles soluciones.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de pensar con flexibilidad para reelaborar, se sugiere que las soluciones en el trabajo de estaciones sean anotadas de forma ordenada en el cuaderno, especialmente los pasos que están involucrados para después poder encontrar errores y reelaborar.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo en estaciones: se sugieren las siguientes preguntas para guiar la implementación de las estaciones.



Anexo

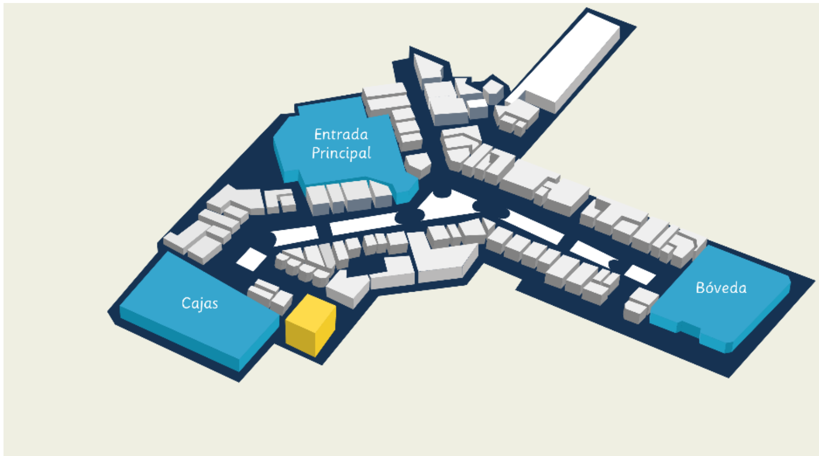
Situación 1: El Guardia Segundo Segura[16]

Un guardia de seguridad realiza rondas nocturnas para evitar robos. Cada noche inicia su ronda por un camino distinto al de la noche anterior, con ello evita que se conozca por dónde empezará.

Si posee tres rutas para realizar las rondas, es decir puede partir por la bóveda, la zona de cajas o por la entrada principal, y sabemos que el día lunes comienza por la bóveda

[16] Problema elaborado por ARPA activando la resolución de problemas en las aulas, iniciativa de investigación de la Universidad de Chile.

¿Cuál es la probabilidad de que el día jueves comience su ronda por la ruta de la bóveda o la entrada principal?



Situación 2: Salvando el curso [17]

Javiera y Diego son alumnos de un curso y ambos sacaron un 3,9 en la última prueba de probabilidades. No contentos con su desempeño ambos fueron a conversar con el profesor de matemáticas pidiéndole una oportunidad para ganar la décima que les faltaba a ambos para subir a 4,0. El profesor accedió a darles una oportunidad y les dijo:

"Pueden elegir entre las siguientes dos opciones. La primera es lanzar dos dados simultáneamente, si en ambos les sale un 1 o un 4 en dicho lanzamiento accedo a subirles la nota a ambos. La segunda es preguntarle a cada uno de sus compañeros de clases, incluyéndose ustedes, cuándo están de cumpleaños (qué número de día del mes entre 1 y 31). Si hay a lo menos un par que esté de cumpleaños el mismo día, entonces les subo la nota a ambos"

Javiera y Diego no conocen los cumpleaños de sus compañeros, a Javiera le parece mejor idea lanzar el dado, pero Diego cree que es mejor idea preguntar por los cumpleaños.

¿Quién tiene razón?

[17] Problema elaborado por ARPA Activando la Resolución de Problemas en las Aulas, iniciativa de investigación de la Universidad de Chile.

Módulos electivos

Módulo Aprendizaje Basado en Proyecto
Visión panorámica

Gran idea

La probabilidad permite interpretar, predecir fenómenos, caracterizar situaciones, simular posibilidades y estudiar situaciones de incerteza.

Objetivos de aprendizaje

OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles**. (Representar)**

OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar**. (Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Probabilidades.
- Regla multiplicativa.
- Regla aditiva.

Tiempo estimado
6 semanas (24 horas)

El proyecto ***elaboración de rifas amigables utilizando la probabilidad*** surge de la necesidad de responder a la junta de fondos con fines de colaborar en la comunidad, por ejemplo, juntar fondos para viajes de estudio, o para la compra de material necesario para un proyecto, para visitas a lugares educativos, intercambios estudiantiles, ayuda a un compañero de la clase que lo requiera, aportes de la clase al establecimiento, entre otras actividades educativas y de colaboración a la comunidad. En general, la comunidad educativa se organiza para hacer un aporte a una instancia en la cual se generan fondos en conjunto y el gasto se hace más accesible para todos. Las rifas son una instancia enraizada en la cultura chilena, y de más en más estas rifas han dejado de ser amigables, son poco atractivas y no son convenientes para los participantes. Se espera que con el conocimiento de las probabilidades y su utilización en la elaboración de rifas se puedan elaborar rifas que sean más atractivas y novedosas para la comunidad a la cual va dirigida.

Con estos antecedentes, se busca que los estudiantes propongan diferentes rifas en las cuales se tiene el azar como un factor a determinar y calcular las probabilidades a base de algunas modificaciones que se ven reflejadas en un plan justo de ganancias, y por lo tanto, se obtiene una rifa que es más amigable.

Nombre del Proyecto

ELABORACION DE RIFAS AMIGABLES UTILIZANDO LA PROBABILIDAD

Situación central

La realización de varias rifas en la vida diaria como en el ámbito escolar o en otras instituciones muestra una cierta monotonía o rutina en la determinación de los ganadores. Así surge la idea de poner más diversificación en la próxima rifa en la cual los estudiantes organizadores tiene como objetivo utilizar el conocimiento de las probabilidades y sus cálculos para lograr una rifa más amigable.

Propósito

En este proyecto se busca que los estudiantes propongan y elaboren una rifa amigable basada en la noción de azar y del cálculo de la probabilidad y que responda al concepto de ser amigable en un contexto social y de ayuda financiera, para así lograr financiar actividades educativas.

La característica de una rifa amigable tiene dos aspectos. Primero, aumentar las posibilidades de ganancias en escaladas justas según las probabilidades que inciden y, segundo, abrir las rifas a otros objetos, aparte del sorteo de números, como cinta de colores, letras, ruedas de fortuna o emojis que hacen las rifas más entretenidas para los participantes.

En cuanto al aprendizaje de las probabilidades, la elaboración de la rifa conlleva para los alumnos organizadores la oportunidad de aplicar conocimientos previos, transferir propiedades del azar a situaciones nuevas y determinar las probabilidades respectivas y construir y aplicar el modelo de Laplace y las reglas multiplicativas y aditivas.

Objetivos de Aprendizaje

Matemática

OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles**. (Representar)**

OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar**. (Resolver problemas)**

Preguntas

- ¿Por qué es importante elaborar una rifa que sea amigable?
- ¿De qué manera ayuda el cálculo de probabilidades para elaborar una rifa amigable?
- ¿Cómo se relaciona el cálculo de probabilidades de un juego al azar con las ganancias de una rifa?
- ¿Cómo se utilizan los conocimientos específicos de las probabilidades en la elaboración de una rifa?
- ¿Cómo se puede generar un plan justo de ganancias de rifas?

Tipo de Proyecto Intradisciplinario

- Matemática

Productos

- Juegos al azar creados para la realización de una rifa escolar.
- Utilidades de la rifa como donación a un proyecto social.

Habilidades y actitudes para el Siglo XXI

- Creatividad e innovación
- Pensamiento crítico
- Trabajo colaborativo
- Uso de la información

Recursos

1. Para la elaboración de las diferentes rifas: material de construcción, reciclado o de fácil adquisición, material de oficina, útiles de juguetes como bolitas para elaborar los juegos al azar que definen los aciertos de la rifa.

2. Para los premios de las rifas: Donaciones materiales de la comunidad educativa del colegio o de algunos auspiciadores

Etapas

Fase 1. Identificación de la situación.

En la fase inicial los estudiantes reflexionan

- ¿Por qué hacer una rifa?
- ¿Cómo, con la ayuda de las reglas de probabilidades, podemos ayudar a la comunidad elaborando rifas que sean más amigables?
- ¿Qué rifas serán más entretenidos que un puro sorteo de números duplicados en un bombo de sorteo?

Al final de esta fase el estudiante ha recontextualizado

Fase 2. Diseño teórico de los tipos de rifa.

En esta fase, los estudiantes proponen el diseño de varios tipos de juegos al azar mediante los cuales se determinan los aciertos. Los conocimientos nuevos se van construyendo a medida que van a apareciendo y según las consideraciones que se hacen para la rifa. Se sugiere dar mayor libertad sobre la extracción con reposición o sin reposición y considerar, solo si es necesario, la inclusión de la probabilidad condicional utilizando el diagrama de árbol.

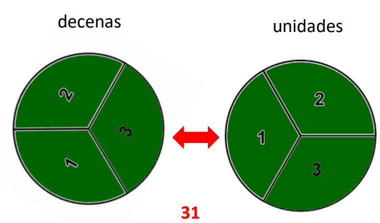
Algunos ejemplos, que son detallados en el anexo, son el uso de combinaciones de colores, que se hacen más atractivas en la elección de la combinación ganadora y se pueden tener diferentes condiciones de premios, bolitas con ciertas condiciones

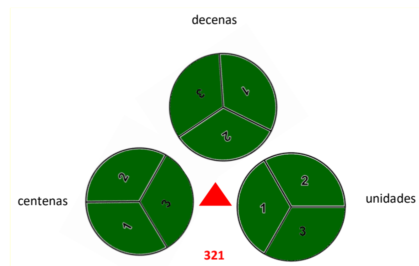
Algunos ejemplos de tipos de rifa

Colores del arcoíris

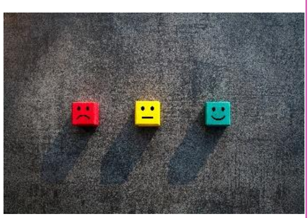
colores de arcoíris
en orden original

Formación de números

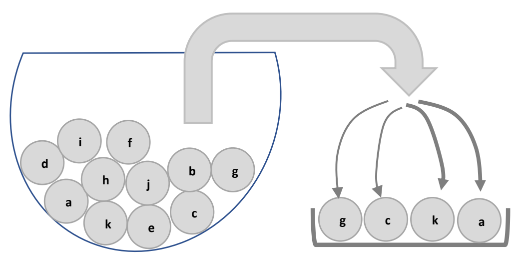




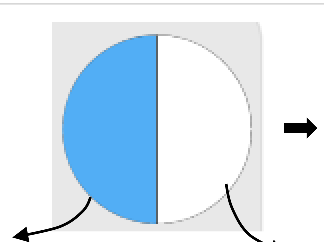
Eligiendo emociones



Mini Loto 4



Rifa número y colores



00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Número en celeste

Número en negro

Fase 3. Determinación de las condiciones de la rifa para que sea amigable

En esta fase los alumnos organizadores de la rifa reflexionan acerca de dos aspectos.

- **Primero**, se determina qué parte de los ingresos de la rifa considerada será repartida en premios.

Si hay premios que consisten exclusivamente de donaciones se retiene todo el dinero recaudado por la venta de billetes. Este dinero entra a la ganancia total que se utiliza para la actividad educativa o se dona a la institución de beneficencia que se ha elegido para ayudar. Se sugiere descontar los gastos utilizados en material fungible, como planillas y listas, aquellos materiales que son reutilizables, como tarjetas, ruletas, bolitas son guardados por el establecimiento para una próxima actividad.

Si hay que comprar premios se puede pensar en retener la mitad (u otra parte) del dinero recaudado por la venta de billetes. Así una parte del dinero es considerada como ganancia y que será utilizada en la actividad educativa o será donada a la institución que se ha elegido. El resto se utiliza en la adquisición de premios.

- **Segundo,** se determinan la premiación y las relaciones entre los rangos de las ganancias según las probabilidades de ocurrencia de los eventos respectivos. Para esto, se sugiere considerar que cuánto más probable es la ocurrencia tanto menor es el valor del premio.

Por ejemplo, en el caso de una rifa de acierto a cuatro letras de un grupo de 11 letras, el total de posibilidades de boletos de rifa son 330. La probabilidad de tener las 4 letras correctas es:

$$p_4 = \frac{1}{330}$$

La probabilidad de coincidir con 3 letras en un grupo de 4 letras es:

$$p_3 = \frac{1}{165}$$

La probabilidad de coincidir con2 letras en un grupo de 4 letras es:

$$p_2 = \frac{1}{55}$$

Según esto, la venta que se hace para entrar en el sorteo del primer premio, que es coincidir con las 4 letras, debe tener un valor 6 veces más grande que el valor de los boletos que entran en el sorteo de acierto a dos letras. Además, el valor del boleto que participan en el sorteo mayor debe ser el doble del valor de los boletos que participan en el sorteo de acierto a tres letras. Así se tiene la siguiente relación para el precio de los premios y de la venta de boletos:

Primer premio		Segundos premios		Terceros premios		
6	$+$	3	$+$	1	$=$	10

$$\frac{6}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = 1$$

Al final de esta fase, los estudiantes han elaborado tablas determinando valores de la venta de los boletos según los valores de los premios que serán rifados y deciden la parte de la recaudación que se convertirá en premios y han elaborado planes justos de ganancia de todos los juegos según las probabilidades involucradas.

Fase 4. Producto

En esta fase los estudiantes organizan y realizan la elaboración de los diferentes jugos al azar, guiándose por las siguientes preguntas.

- ¿Con qué infraestructura del colegio se puede contar para la elaboración e implementación de la rifa?
- ¿Con qué parte de la comunidad educativa se puede contar para recibir ayuda técnica o logística?
- ¿Quiénes elaboran el juego al azar?
- ¿Quiénes venden los boletos?
- ¿Quiénes se encargan de realizar el sorteo?
- ¿Cómo se informa adecuadamente a los participantes de la rifa acerca de las reglas del sorteo?
- ¿Cómo se explica que la rifa es amigable y justa según el azar y los cálculos realizados en la fase anterior?
- ¿En qué momento se realiza un ensayo general para ver el funcionamiento correcto de los juegos de azar?
- ¿Cuáles podrían ser los imprevistos en la realización de la rifa?
- ¿Cómo se abordan los imprevistos?

Al final de esta fase los estudiantes tienen el producto del proyecto elaborado y han realizado los ensayos para tener un buen funcionamiento en la implementación de la rifa.

Fase 5. Difusión

En esta etapa los estudiantes elaboran una comunicación de la rifa, la cual se puede hacer por medio de afiches, videos o trípticos. Esta comunicación contiene la información relevante y responde a las siguientes preguntas.

- ¿En qué se distingue la rifa de las rifas común y corrientes?
- ¿Por qué la rifa es amigable?
- ¿Por qué la rifa tiene una premiación justa?
- ¿A qué actividad educativa o a cuál institución se otorga las ganancias de las rifas?

Al final de esta fase los estudiantes han elaborado los diferentes medios de comunicación de la rifa y se podría comenzar con la venta de boletos.

Evaluación

Se sugiere la siguiente rúbrica de evaluación del proceso del proyecto:

Aspectos para evaluar	Puntaje por aspecto	Puntaje obtenido por alumno
Planteamiento del problema		
Identifica el problema que el grupo puede responder por medio de la ejecución de un proyecto.	3	
Identifica varios problemas que el grupo podría responder por medio de la ejecución de varios proyectos.	2	
Identifica un problema que no es posible de responder por medio de la ejecución de un proyecto.	1	
No identifica un problema.	0	
Diseño teórico		
Diseña teóricamente un tipo de rifa al azar, identifica la existencia del azar y determina las probabilidades todas las diferentes ocurrencias.	3	
Diseña teóricamente un tipo de rifa al azar y determina la probabilidad de algunas ocurrencias.	2	
Contribuye al diseño de un tipo de rifa al azar.	1	
No contribuye al diseño ni determina probabilidades.	0	
Determinaciones para una rifa amigable		
Participa de forma proactiva en la toma de decisiones de la repartición de la recaudación de las rifas y de las donaciones a la rifa. Elabora planes de premiación basados en las probabilidades de todas las ocurrencias de los eventos ganadores.	3	
Contribuye a la toma decisiones de la repartición de la recaudación de las rifas y de las donaciones a la rifa. Elabora algunos planes de premiación basados en las probabilidades de algunas ocurrencias de los eventos ganadores.	2	
Contribuye a alguna toma de decisiones y contribuye a la elaboración de planes de premiación.	1	
No contribuye en la toma de decisiones ni a la elaboración de planes de premiación.	0	
Elaboración de los juegos al azar		
Toma un rol proactivo en la elaboración del tipo del juego al azar y muestra competencia experimental en la prueba repetitiva de los juegos al azar.	3	
Contribuye a la elaboración del tipo de juego al azar y realiza experimentos azarosos.	2	
Contribuye a la elaboración de los juegos al azar.	1	
No participa en la elaboración de los juegos al azar ni en la experimentación un dibujo técnico.	0	
Elaboración de la publicidad de la rifa		
Contesta y argumenta todas las preguntas que entran en la información acerca de la publicidad. Participa de forma proactiva en la elaboración de los medios de propagación.	3	
Contesta y argumenta algunas preguntas que entran en la información acerca de la publicidad. Participa en la elaboración de los medios de propagación de la rifa.	2	
Atribuye a las respuestas de las preguntas y a la elaboración de los medios de propagación.	1	

No atribuye a las respuestas de las preguntas ni a la elaboración de los medios de propagación.	0	
Total		

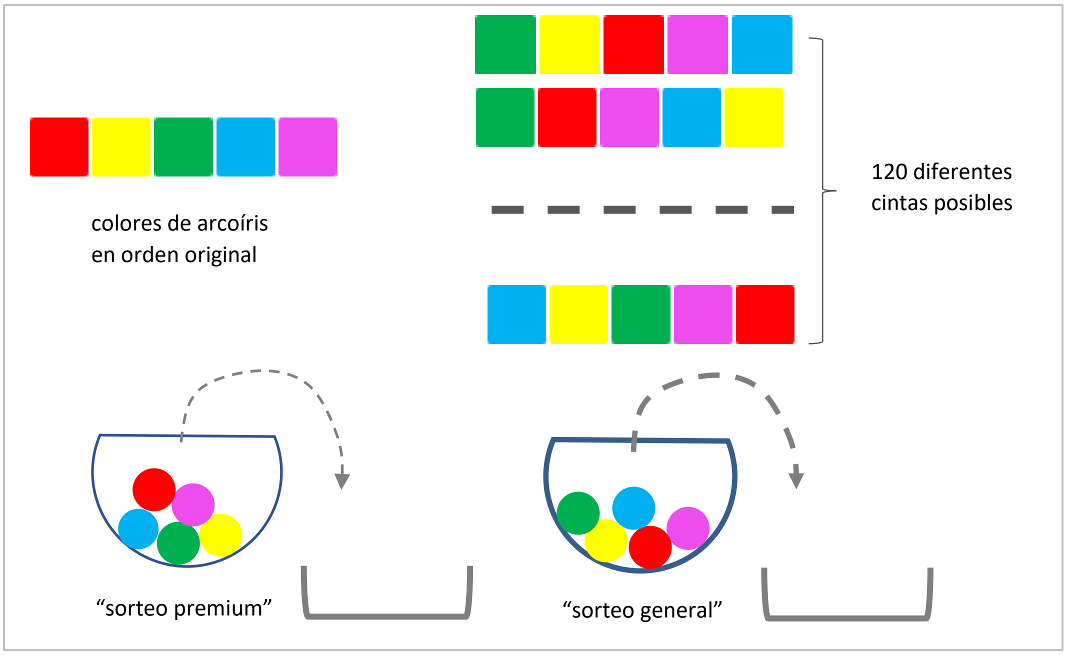
Criterios de habilidades siglo XXI

Se sugiere usar rúbricas y criterios relacionados con habilidades del siglo XXI de Pensamiento creativo e innovación, Pensamiento crítico, y Trabajo colaborativo, como también de Diseño del proyecto y la Presentación del trabajo que se muestran en el texto metodología de Aprendizaje basado en Proyectos, páginas 21 a 29 en https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140166_recurso_pdf.pdf

Anexo

Desarrollo teórico de los ejemplos de rifas de la fase 2:

- **Cintas de los colores de arcoíris**



Se sugiere considerar de manera sistemática todas las cintas posibles de 5 colores y confeccionar las 120 cintas. Apoyar esta cantidad con el cálculo de las permutaciones de los 5 colores y el numero 5 factorial. En el desarrollo de la rifa, se hace primero el supuesto de la venta de las 120 cintas, con la condición de no duplicarlas y realizar el sorteo con bolitas de colores, traspasando el modelo de sorteo al azar de bolitas de los mismos colores. También, se puede considerar diferentes tipos de sorteos y poner diferentes precios a la apuesta, por ejemplo:

Sorteo premium

Acierto a los 5 colores de la tira, con una sola posibilidad el 1° premio, esto es, el premio máximo lo tiene la persona que tiene los 5 colores en el orden sorteado. Probabilidad $p = \frac{1}{120}$.

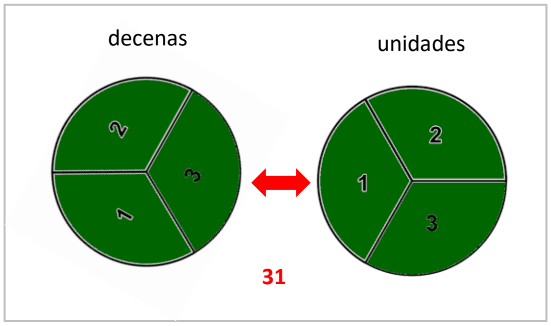
Sorteo bronce, plata y oro

- Se puede considerar como oro las dos cintas que coinciden exactamente en 4 colores en el mismo orden ininterrumpido con la cinta de los 5 colores en el mismo orden que aparecen en el sorteo. En este sorteo se excluye la cinta de los 5 colores. Probabilidad de cada una de las cintas con 4 colores ininterrumpidos $p = \frac{1}{120} + \frac{1}{120} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$
- Se puede considerar como plata, las 3 cintas ganadoras que coinciden en 3 colores del orden ininterrumpido con la cinta sorteada. Probabilidad de cada una de las cintas con tres colores ininterrumpidos $p = \frac{1}{120} + \frac{1}{120} + \frac{1}{120} = \frac{3}{120} = \frac{1}{40}$

- Se puede considerar como bronce aquellas 4 cintas que ganan coincidiendo en 2 colores del orden ininterrumpido. Probabilidad de cada una las cintas con 2 colores ininterrumpidos $p = \frac{1}{120} + \frac{1}{120} + \frac{1}{120} + \frac{1}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$
- En la elaboración del valor de los premios hay que considerar la razón entre las probabilidades que conlleva que los premios sean justos:

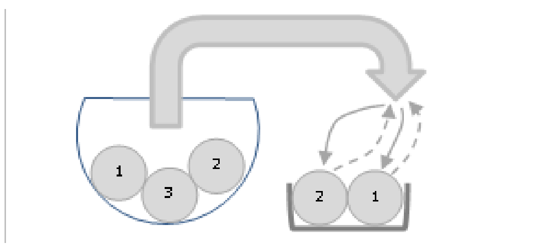
Probabilidad	Premios	Valor del premio
$\frac{1}{120}$	Máximo	el doble del premio oro, o bien $12x$,
$\frac{1}{60}$	Oro	el doble del premio bronce, o bien $6x$
$\frac{1}{40}$	Plata	$\frac{3}{2}$ del premio bronce o bien $4x$
$\frac{1}{30}$	Bronce	$3x$ Se considera la variable x como unidad de valor

- **Formación de números**

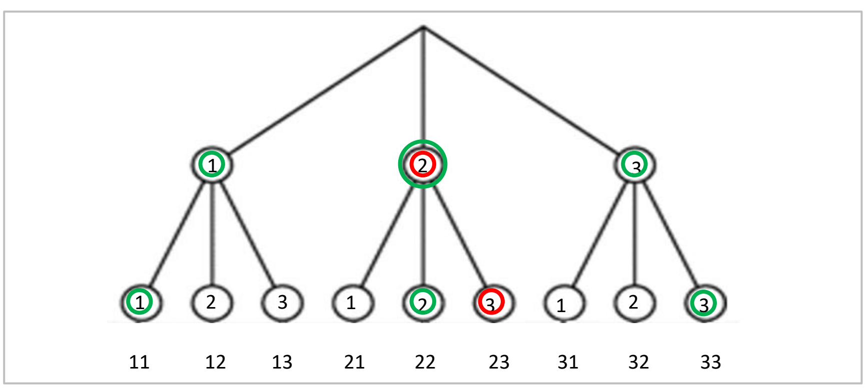


Se consideran 2 ruedas de la fortuna una se gira para obtener la decena y la otra para obtener la unidad, en el ejemplo se tienen 2 ruedas de fortuna con los números 1, 2 y 3. Se giran las 2 ruedas al azar y el número ganador es el número formado por las dos cifras que están frente a la doble flecha. Se elaboran sistemáticamente los 9 boletos con los números que se pueden generar, $3^2 = 9$ y se elabora un árbol de probabilidades.

Dada la dificultad de confeccionar las ruedas de fortuna con todo el mecanismo de girar y parar, se piensa en otro modelo que tenga las mismas probabilidades y planes de ganancias, la urna y la extracción de bolitas con reposición.



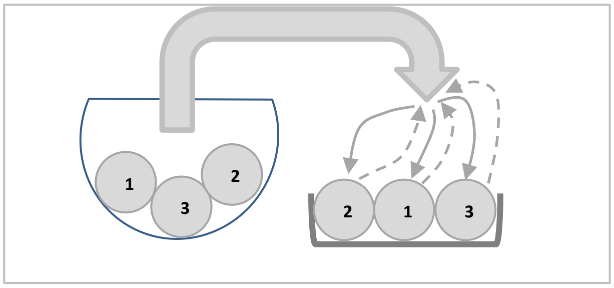
El árbol de probabilidades permitirá elaborar un plan justo de premiación.



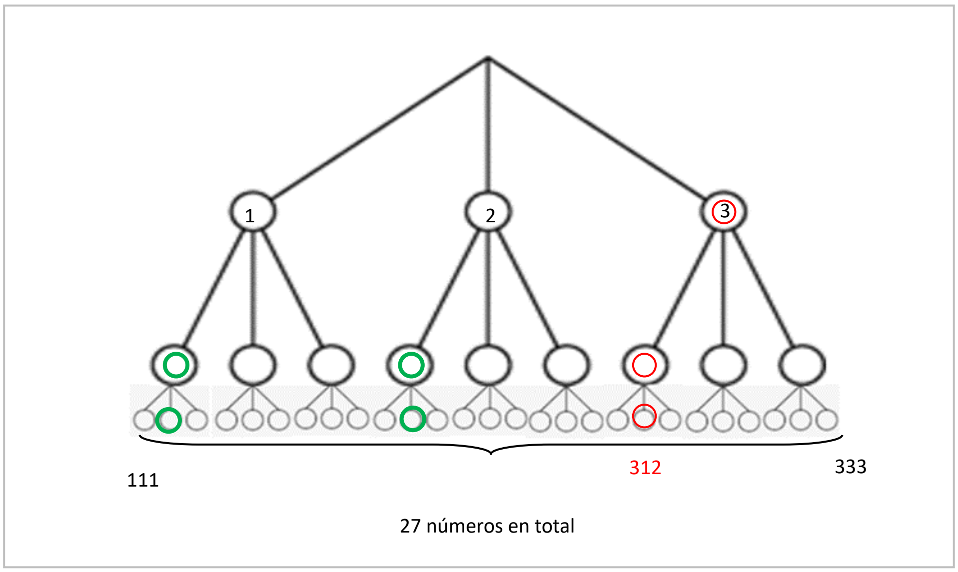
Un plan de ganancia justa se obtiene al diferenciar entre decenas y unidades iguales o diferentes, en el caso de tener decenas y unidades iguales, la probabilidad es $p = \frac{3}{9}$. Así, los boletos tienen un valor menor y se categorizan para el segundo premio. Los números que tengan unidades y decenas diferentes tienen una probabilidad de $p = \frac{1}{6}$ y por lo tanto se categorizan en el primer premio.

En el caso de 3 ruedas de la fortuna se debe realizar un árbol de probabilidades de 3 bifurcaciones.

- **Formación de números utilizando la urna**



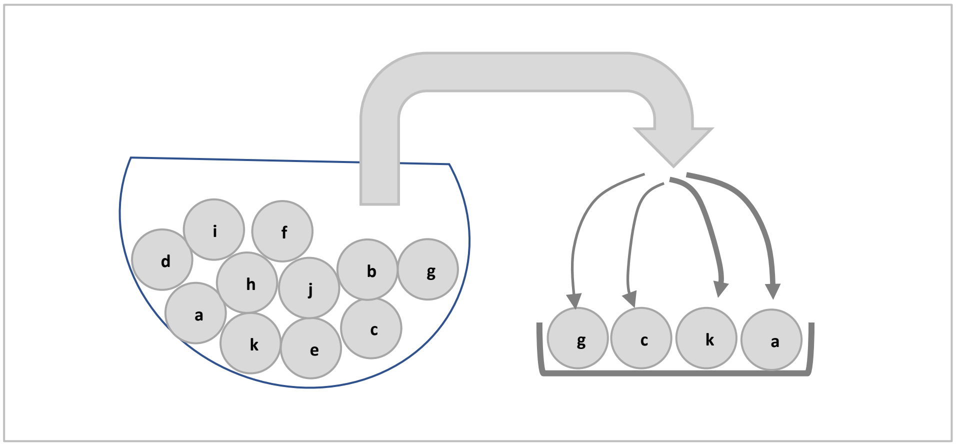
Se hacen 3 extracciones con devolución de las bolitas extraídas y se elaboran sistemáticamente los números que se pueden generar. Hay 27 números; $3^3 = 27$ o se elabora un árbol con 3 realizaciones y 3 bifurcaciones.



Un plan de ganancia justa se obtiene al considerar que, si se genera el número ganador, por ejemplo: 312, la ruta de este número está marcada de rojo en el árbol de probabilidades. Primer premio con la probabilidad de $p = \frac{1}{27}$. En el segundo premio se consideran ganadores los números que tengan idénticos pares ordenados de decenas y unidades, las rutas de estos números están marcadas en el árbol de probabilidades en verde y tienen probabilidad de $p = \frac{1}{27} + \frac{1}{27} = \frac{2}{27}$.

Algunas de las variaciones que se pueden hacer en estas rifas son aumento de sectores y aumentar la cantidad de ruedas o de urnas.

- **Mini Loto 4**



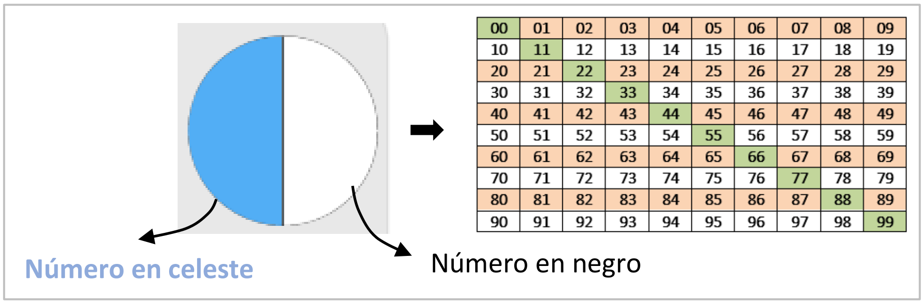
Se sugiere utilizar las letras de alguna frase o de alguna palabra que identifique a esta rifa, en el ejemplo, se muestra 11 bolitas con letras que se sortean al azar sin devolución y se realizan 4 extracciones. En este caso, se puede tener 3 tipos de ganadores, ganadores con 4 aciertos, 3 aciertos y 2 aciertos.

- Primer premio, acierto a las cuatro letras, probabilidad de ganar $p = \frac{1}{330}$
- Segundo premio, acierto a tres letras, probabilidad de ganar $p = \frac{1}{165} = 2 \cdot \frac{1}{330}$
- Tercer premio, acierto a dos letras, probabilidad de ganar $p = \frac{1}{55} = 6 \cdot \frac{1}{330}$

Con esta información se puede elaborar el siguiente plan de ganancias justa:

- Con 4 aciertos se gana el doble del segundo premio y el séxtuplo del tercer premio.
- Con 3 aciertos se gana el triple del tercer premio que corresponde a 2 aciertos.
- Con 2 aciertos se gana la tercera parte de la ganancia del primer premio.

- **Color y número**



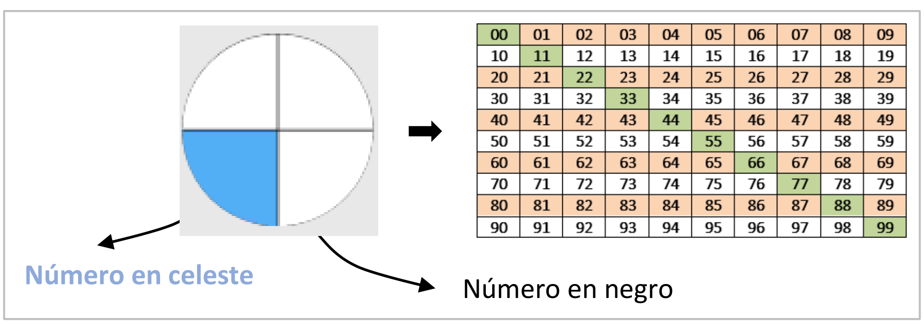
00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Sorteo de uno de 2 colores diferentes más un número, en este caso se sugiere esquematizar un árbol de probabilidades y diferenciar cuales podrían ser los tipos de número y color que podrían tener menor probabilidad de salir.
Al agregar dos colores se duplica la cantidad de números y las probabilidades se reducen a la mitad. El número sorteado debe coincidir con las cifras y el color sorteado. Este caso tiene una probabilidad $p = \frac{1}{200}$ y estaría asociado al primer premio.
La probabilidad $p = \frac{1}{198}$ se obtiene para el antecesor como para el sucesor de un número y podría ser considerada como el segundo premio. Definir el antecesor de 00 es 99 y el sucesor de 99 es 00.
Aplicando la regla aditiva, la probabilidad de tener uno de ellos es

$$p = \frac{1}{198} + \frac{1}{198} = \frac{2}{198} = \frac{1}{99}$$

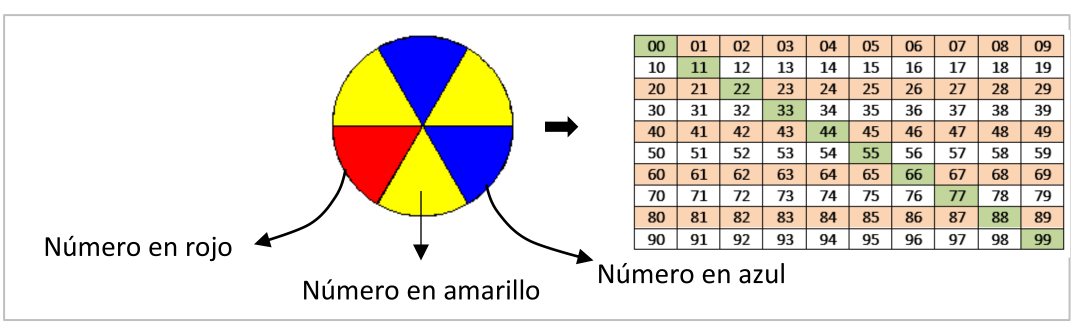
Algunas variaciones que se pueden hacer a esta rifa son:

- cifras iguales en el color sorteado: $00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$.
- Los colores del sorteo no son equiprobables



00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

- Más colores para sortear y los colores del sorteo no son equiprobables.



00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Módulo Aprendizaje Basado en Problemas
Visión panorámica

Aprendizaje Basado en Problemas

Las funciones, las expresiones algebraicas y procedimientos permiten construir modelos y encontrar soluciones a situaciones de cambio en diferentes ámbitos de nuestra realidad.

Objetivos de aprendizaje

OA2. Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación, valorando las TIC como una oportunidad. **(Representar)**

OA3. Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

OA4. Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones, asumiendo posturas razonadas. **(Modelar)**

OA7. Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Productos notables.
- Función y ecuación cuadrática.

Tiempo estimado

6 semanas (24 horas)

Propósito Módulo electivo

En el módulo electivo basado en el aprendizaje a través de la resolución de problemas de la asignatura de matemática del Nivel 1 de Educación Media, se espera que los estudiantes comprendan que las funciones, las expresiones algebraicas y procedimientos permiten construir modelos y encontrar soluciones a situaciones de cambio en diferentes ámbitos de nuestra realidad. Especialmente, se espera en este módulo que construyan conocimiento sobre la utilidad de las funciones cuadráticas para elaborar productos de gran envergadura ingenieril y como estas funciones dan respuestas sobre las distancias, alturas y posibles costos según las condiciones iniciales del problema.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo electivo 2 desarrollan las habilidades de representar, modelar y resolver problemas. En particular, los estudiantes representan de manera concreta y pictórica la función cuadrática, seleccionan y ajustan un comportamiento cuadrático para dar respuesta a un problema, evalúan modelos comparándolos entre sí y con la realidad, para encontrar la solución más adecuada y varían parámetros o condiciones iniciales para comparar los resultados obtenidos. En el transcurso de este módulo los estudiantes obtienen datos para elaborar un modelo que será la base de la solución, también realizaran algunos supuestos que les permita precisar y ajustar el modelo, para finalmente comparar y evaluar la información que se obtiene del modelo con un criterio de realidad de construcción. La elaboración del modelo cuadrático contempla una parte de medición de un objeto concreto, de esta manera se construye el conocimiento y se profundiza en el conocimiento adquirido en el módulo obligatorio.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo electivo 2 desarrollan las actitudes del siglo XXI del ámbito de las Maneras de pensar y de las Maneras de trabajar. Con este tema en particular los estudiantes valoran las TIC como una oportunidad para dibujar y representar sus ideas, desarrollan la producción de ideas y del pensamiento crítico, evaluando los modelos obtenidos. Se espera que los estudiantes transiten desde la realidad a la matemática con una postura razonada, tanto desde lo que indica la matemática como lo que es posible en la realidad. Se espera que este módulo desarrolle la actitud de perseverar en torno a una meta y de ser proactivo en la búsqueda de soluciones individuales o grupales.

En este módulo electivo se busca desarrollar las habilidades de representar, resolver problemas y modelar utilizando la metodología del aprendizaje basado en problemas. Para esto, se propone el problema ***Un puente cerca de mi casa***[18] en un contexto relacionado con la construcción de puentes, las variables que lo describen y la construcción de la función cuadrática. Los estudiantes elaboran un modelo que sea pertinente a su entorno, realizan mediciones concretas, representaciones concretas o pictóricas y proponen variaciones relacionadas con la altura, el vértice, los puntos de corte con el eje X, la amplitud y la distancia del puente.

Preparación

Para que los estudiantes se preparen para el problema se sugiere plantear el contexto de la construcción de puentes en nuestro país. Se sugiere presentar algunos videos relacionados con la historia de la construcción de puentes, los éxitos y los fracasos en este tipo de construcción. Además, de precisar en el uso que tienen estos puentes y los aportes que pueden tener para nuestra comunidad, se sugiere diferenciar entre el piso y el arco del puente para precisar en los tipos de puentes que existen y abstraer a la figura parabólica básica que se encuentra en la mayoría de ellos.

- ¿Qué puentes conoces?
- ¿Cuál podría ser la característica central de todos los puentes?

En el sentido de modelar desde el propio entorno, se sugiere anotar todas las respuestas y a partir de ellas generar diferentes categorías para las características, por ejemplo, podría ser el tipo de material, la forma, el uso, la antigüedad o el tamaño. Estas categorías, en particular el tamaño y la forma dan origen a la presentación del problema y crean formas de pensar más complejas, que luego se pueden comunicar y argumentar, especialmente en la fase de validación de los resultados.

Presentación del problema

Para presentar el problema del módulo, se sugiere entregar el problema impreso y por medio de la escucha activa y lectura comprensiva, promover que los estudiantes registren detalles de la situación general y de su propia situación con respecto a la construcción de puentes.

> Para cruzar una zanja cerca de mi casa, la comunidad ha decidido construir un puente, yo por mi parte me he preocupado de la forma y la estrategia para construir el puente ¿Qué tan largo y alto debe ser el puente? ¿Cómo me ayuda la matemática para enfrentarme a las diferentes posibilidades de largo y alto del puente?

[18] La elaboración del problema fue realizada por la Dra. Rita Borromeo-Ferri de la Universidad de Kassel, Alemania, 2021.

Algunas consideraciones para enfrentar el problema

- Acciones concretas de elaboración de un puente a escala. Para ello, se necesitan materiales que pueden ser reciclados, herramientas de medición y algunos materiales de construcción dependiendo del modelo a escala que se quiere hacer. Esta parte, desarrolla habilidades de motricidad fina, de medición y de los conocimientos de razones para trabajar el modelo a escala.
- Apoyos en información, como tarjetas de apoyo con medidas de puentes, tales como largo y alto de los puentes, detalles técnicos que permitan extraer la información para elaborar esquemas propios, fotografías de puentes que permitan determinar las alturas o largos o deducirlas desde un trabajo con razones o estimaciones.
- Preguntas previas que permiten acercarse al problema, tales cómo ¿Dónde sería necesario construir un puente cerca de mi casa? ¿Cómo puedo tomar algunas medidas? ¿Qué tipo de puente se podría construir?
- Organización para enfrentarse al problema y eventuales obstáculos, por ejemplo, posibilidades de elaborar un puente a escala, acceso a la información, posibilidades de tomar una foto y de sacar información, conocimientos previos de razones.

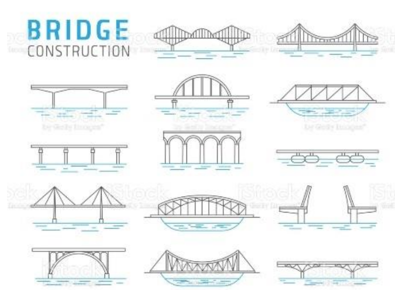
Los estudiantes asocian la situación con necesidades de la comunidad relacionadas con la seguridad y de pertenencia. Esta etapa es previa e importante, porque se trata esencialmente de saber cuál es la pregunta que se quiere responder y la motivación para responderla, así surgirán de manera natural los pasos hacia la solución y la necesidad del conocimiento.

Posibles soluciones al problema: Construcción de imágenes mentales desde la experiencia

Los estudiantes experimentan de manera concreta la relación que hay entre las diferentes alturas que tiene el arco del puente y su distancia al centro o bien la relación que hay entre el largo del puente y la altura que se requiere para el arco. También, diferencian de manera visual entre puentes con arco y sin arco y puentes con arco sobre o debajo del camino del puente.

Desarrollo de estrategias de acción concreta

- Tarjetas para clasificar los diferentes tipos de puentes

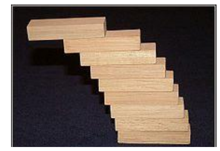


Fuente: https://media.istockphoto.com/vectors/bridge-constructions-vector-set-vector-id887974402

- Elaboración de un puente utilizando materiales de fácil acceso y realizar mediciones de las alturas y de las distancias anotándolas en una tabla de datos.





Investigación

Los estudiantes relacionan los datos para formular la función cuadrática que se encuentra en los puentes que se han construido, para esto consideran un punto de referencia, el cual se denomina origen, a partir del cual se hacen las mediciones hacia la derecha, hacia la izquierda, hacia arriba y hacia abajo. Las medidas deben anotarse en una tabla por pares, la primera columna se hará para las distancias a nivel horizontal y la segunda columna para el nivel vertical. De esta manera, el estudiante podrá relacionar las medidas horizontales con las verticales.

La investigación que realiza el estudiante tiene la connotación de análisis de los datos, de búsqueda de conocimientos que le ayuden a completar el análisis y la comprensión para generalizar las relaciones encontradas a la función cuadrática con sus elementos claves como el vértice, amplitud y puntos de corte.

Las nuevas preguntas que pueden organizar esta etapa podrían ser:

- ¿Dónde sería conveniente ubicar el punto de origen?
- ¿De qué manera podemos relacionar los datos?
- ¿Qué función tiene el punto más alto o bajo del puente?
- ¿Qué relación hay entre las medidas de las diferentes alturas del arco con la distancia recorrida en el puente?
- ¿Qué rol tiene la distancia recorrida en el camino del puente en las mediciones?
- ¿Qué varía y qué se mantiene constante?
- ¿Qué falta para generalizar?
- ¿Dónde puedo encontrar la información que me falta?
- ¿Qué aproximaciones se pueden hacer para tener una forma cuadrática?

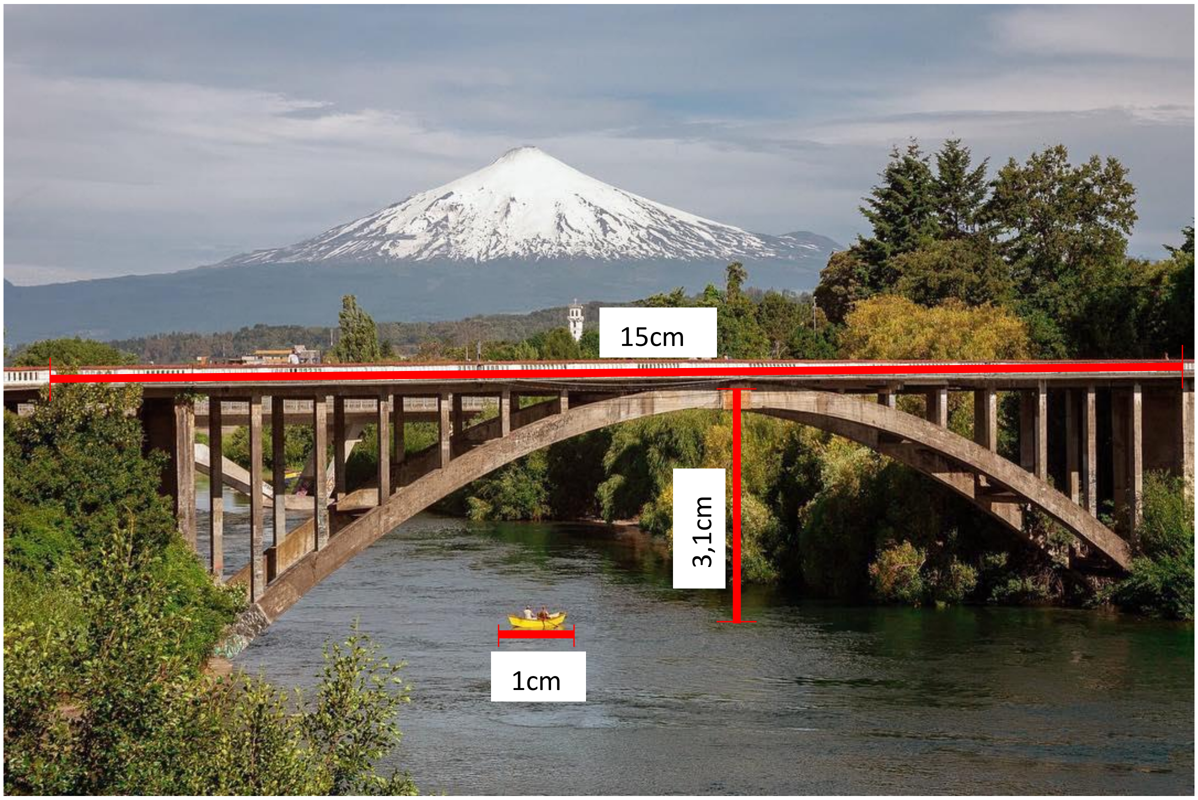
Estas preguntas ayudan a reformular cada paso para generalizar la función cuadrática y formular el modelo a partir de las medidas que se tienen desde las fotografías o desde las elaboraciones propias de puentes.

Los apoyos de información pueden ser detallados o bien pueden dar una pauta para iniciar una medición a escala. La investigación debe estar dirigida hacia la construcción del conocimiento desde las necesidades de cada modelo.

Evaluar una solución del problema

Los estudiantes evalúan una solución al problema y reconocen la posibilidad de hacer una transferencia en el proceso, comenzando con una fotografía, realizando estimaciones, construyendo el modelo función cuadrática, buscando información para comprobar u obtener más información y transferir realizando cálculos para responder a un problema particular. Se sugiere acompañar este proceso comparando con lo realizado hasta este momento por los estudiantes, completando con los conocimientos sobre el cálculo del vértice y de los puntos de intersección con el eje X.

Se sugiere presentar el desarrollo de una situación particular de una fotografía de un puente y determinar el largo del puente y la altura del puente por medio de la estimación de las medidas. Para luego comprobar con cálculos y con información que este a disposición.

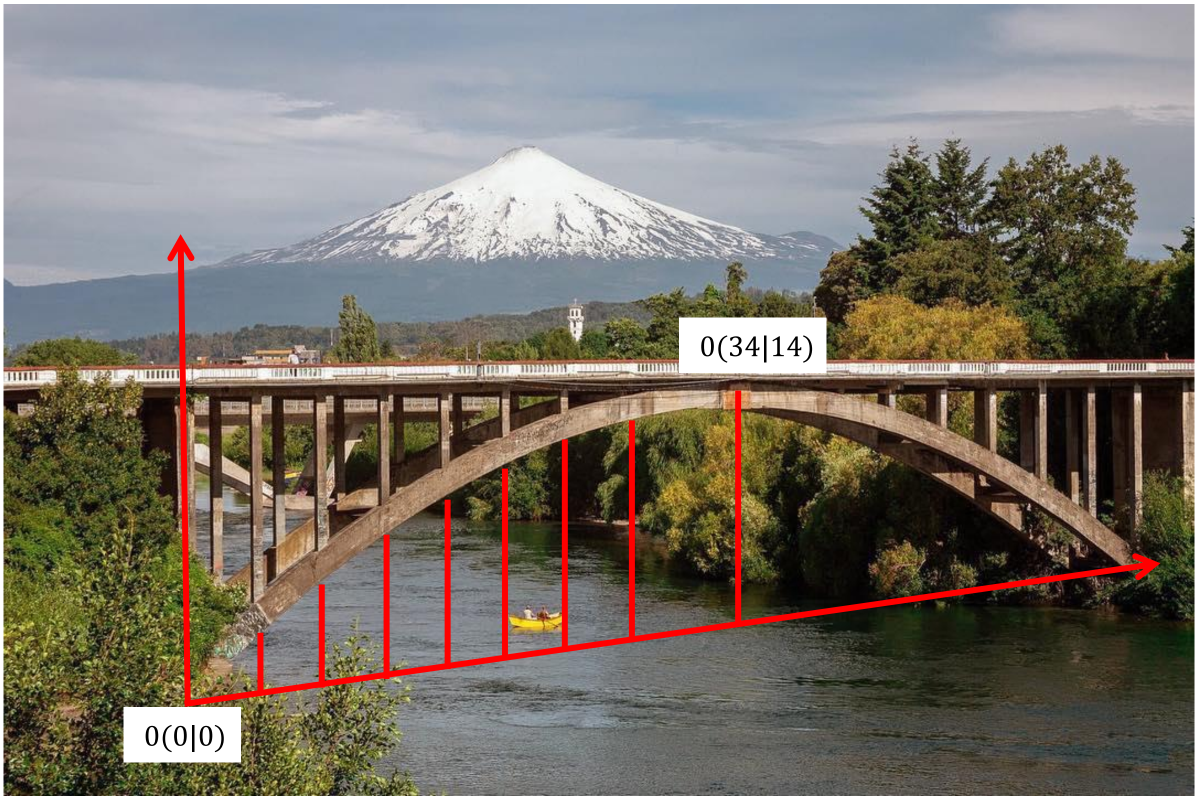


Fuente: https://www.facebook.com/deVillarrica/posts/2370262006393816/

Suponiendo que el bote tiene un largo aproximado de 4,5 metros y que la persona que tomo la foto no se encuentra de frente y que los objetos que están más adelante se ven más grande que los que están detrás, se puede estimar que la altura del puente es de aproximadamente $4{,}5 \cdot 3{,}1 = 13{,}95$ es decir unos 14m de altura. El largo sería aproximadamente de $15 \cdot 4{,}5 = 67{,}5$ es decir, unos 68 metros desde que comienza el arco hasta donde termina.

Según los datos encontrados en la evolución histórica de los puentes de Chile, documento extraído de https://www.mop.cl/PuenteChacao/Documents/P_Departamento_Puentes_de_Vialidad.pdf y elaborado por el Ministerio de Obras Públicas, se tiene en la diapositiva 17 que el puente Toltén en Villarrica tiene un vano principal de 72m y una altura de 15m.

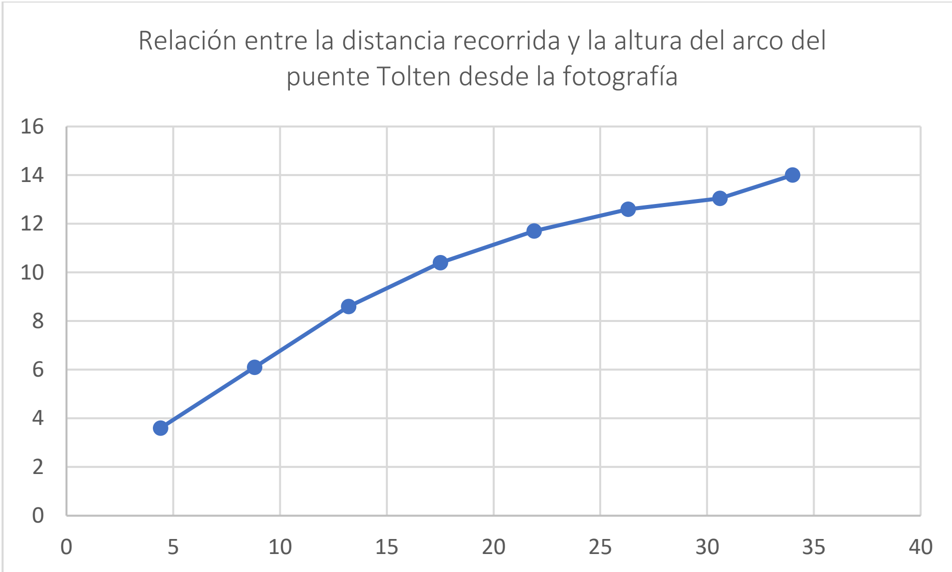
Para encontrar la relación entre la distancia recorrida y la altura se necesita ubicar un plano cartesiano en la foto y elaborar una tabla para registrar las estimaciones realizadas a partir de la fotografía. También, se sugiere tomar las columnas a la misma distancia, comenzando desde altura hacia el centro y estimando la distancia de la primera columna desde el centro.



Para la elaboración de la tabla, se sugiere realizar el registro de las mediciones y de las estimaciones, haciendo algunas suposiciones sobre las medidas y el factor aproximado $k = 4{,}5$ determinado previamente, por ejemplo:

Mediciones desde la foto		Estimaciones y ajustes	
Distancia recorrida (cm)	Altura del arco (cm)	Distancia recorrida (m)	Altura del arco (m)
1	0,8	4,4	3,6
1,8	1,4	8,8	6,1
2,6	1,9	13,2	8,6
3,4	2,3	17,5	10,4
4,2	2,6	21,9	11,7
5,2	2,8	26,3	12,6
6,6	2,9	30,6	13,05
7,5	3,1	34	14

Para elaborar el modelo, se sugiere hacer un gráfico de manera manual en papel milimétrico o utilizando algún programa para graficar que esté disponible en la web, también se puede utilizar una planilla de cálculo y obtener un gráfico similar a:



Elaborar y ajustar el modelo matemático

Los estudiantes requieren hacer supuestos e incluir nuevos conocimientos relacionados con la función cuadrática. En particular, la forma de la función cuadrática que incluye el vértice en su forma general:

$$y = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v \text{ donde el vértice es } V(x_v|y_v)$$

En este caso particular, se tiene que el vértice del arco del puente se ha estimado en 34m a la derecha del origen y 15m hacia arriba desde el origen $V(34|14)$ y el modelo podría ser:

$$y = a \cdot (x - 34)^2 + 14 \text{ donde el vértice es } V(34|14)$$

Considerar el supuesto inicial sobre el punto de origen en esta expresión para determinar el coeficiente a:

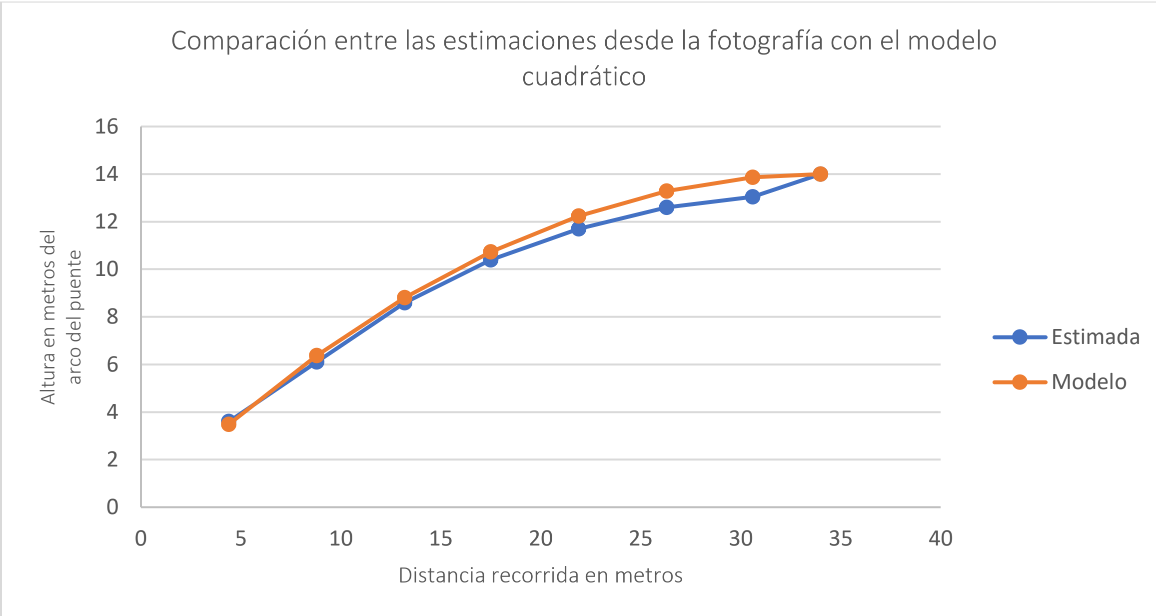
$$0 = a \cdot (0 - 34)^2 + 14$$

$$-14 = a \cdot (-34)^2$$

$$\frac{-14}{1\,156} = a \qquad \rightarrow \qquad a \cong -0{,}012$$

$$y = -0{,}012 \cdot (x - 34)^2 + 14 \text{ donde el vértice es } V(34|14)$$

De esta manera, se tiene un modelo que describe la altura del arco de un puente según la distancia recorrida, o bien da el valor de la altura de las columnas según la posición que estas tienen. Se sugiere comparar los datos obtenidos por el modelo ajustado con los datos entregados por las mediciones realizadas en la fotografía.



En general, los resultados obtenidos en esta situación particular deben ser evaluados desde el sentido de realidad y del puente elaborado o desde el puente que se quiere elaborar asumiendo una postura razonada, para obtener un resultado real y posible de realizar.

La comparación realizada tiene dos momentos, el primer momento es comparar lo obtenido desde una fotografía y las estimaciones realizadas con el factor de proporcionalidad con el modelo cuadrático. Este momento, permite aplicar un conocimiento y ajustarlo a la realidad. El segundo momento de comparación, tiene relación con el modelo y su transferencia con lo que ya se ha realizado para el caso propio del puente y las mediciones que se han realizado para el modelo concreto.

Algunas de las preguntas que pueden apoyar el modelo son:

- ¿Se han ubicado bien las columnas que sostienen el arco del puente?
- ¿Tienen la altura correspondiente?
- ¿Qué aportes tiene el modelo matemático a mi construcción?
- ¿Qué tan cercana estuvieron las mediciones y estimaciones con el modelo?
- ¿Qué aportes tiene un modelo de este tipo a la construcción de puentes?
- ¿Qué ajustes se pueden realizar a la propuesta de puente?

Comunicar

Los resultados obtenidos son comunicados y comparados entre ellos, por ejemplo, los puentes que tienen el arco sobre o bajo el camino y las implicancias que esto tiene en el coeficiente del modelo matemático, el modelo que tiene el origen en otro lugar del puente y el desarrollo del modelo. Así, se puede reflexionar sobre la estructura de los modelos cuadráticos y sobre algunas implicancias que tiene la estructura de arco con la estructura lineal de puentes, algunas de las preguntas que pueden guiar la conversación son:

- ¿Qué tiene en común los modelos o los resultados?
- ¿Qué pregunta nueva o diferente responde este modelo en relación con el mío?
- ¿Qué operaciones son utilizadas en mi modelo en comparación con otros?

Se sugiere comunicar la propuesta de puente, el proceso y el modelo utilizando alguna de estas posibilidades:

- Afiche
- Presentación
- Informe
- Díptico
- Video
- Poster

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: se sugiere relevar, mencionando explícitamente, en cada uno de los momentos en los cuales se requiere de un nuevo conocimiento y la forma en que se puede relacionar con lo que se está haciendo para levantar una propuesta de puente. En particular, se sugiere tener presente las diferentes formas para presentar la función cuadrática:

Forma normal	$y = 2x^2 - 4x - 6$
Forma del vértice	$y = 2(x-1)^2 - 8$
Forma factorizada	$y = 2(x-3)(x-1)$

El uso que se les puede dar a cada una de ellas dependerá de la información que tengan a su disposición y la ubicación del origen para acceder a los puntos del gráfico. La simetría del arco del puente promueve el uso y aplicación de elevar al cuadrado, esto se parecía mejor en el caso de ubicar el origen en el eje de simetría del arco.
En el caso de trabajar con fotografías, se debe cuidar mucho el uso de las razones y proporciones, sobre todo cuando la imagen está muy inclinada, idealmente se sugiere trabajar con fotografías donde el puente quede de frente.

Para focalizar el desarrollo de habilidades: Aunque esta actividad desarrolla varias de las habilidades de matemática, se sugiere focalizar el desarrollo en solo una de ellas, para esto se puede tener presente la siguiente estrategia interrogativa para enfocar el desarrollo de la habilidad de construir el modelo:

- ¿Qué relaciones matemáticas se pueden observar en los datos?
- ¿Cómo dependen los datos entre sí y con otros?

- ¿Qué propiedades se pueden distinguir de los datos?
- ¿Cómo podemos deducir los parámetros del modelo?
- ¿Cuáles de los datos coinciden con el modelo?, ¿se encuentran cerca o difieren significativamente del modelo?
- ¿Qué limitaciones tiene el modelo?

Además, de poner a disposición de los estudiantes un organizador gráfico que puede ser utilizado como bitácora para la construcción del modelo:

<table>
<tr><td colspan="5">¿Qué relaciones matemáticas se pueden observar en los datos?</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>Constante</td><td>Crecimiento</td><td>Decrecimiento</td><td>Periódico</td><td>Cuadrático</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cómo dependen los datos entre sí y con otros?</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué propiedades se pueden distinguir de los datos?</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cómo podemos deducir los parámetros del modelo?</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="5">¿Cuáles de los datos coinciden con el modelo?, ¿se encuentran cerca o difieren significativamente del modelo?</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Qué limitaciones tiene el modelo?</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

https://www.curriculumnacional.cl/docente/629/articles-248176_recurso_pdf.pdf