



PROGRAMA DE ESTUDIO

MATEMÁTICA

**EDUCACIÓN PARA PERSONAS JÓVENES Y
ADULTAS**

FORMACIÓN GENERAL

Nivel 2 de Educación Media

Unidad de Currículum y Evaluación
Marzo 2022

Programa de estudio Matemática de Educación para Personas Jóvenes y Adultas (EPJA)
Nivel 1 de Educación Media
Documento aprobado por el Consejo Nacional de Educación mediante el Acuerdo N°019/2022

Equipo de Desarrollo Curricular
Unidad de Currículum y Evaluación
Ministerio de Educación 20212

IMPORTANTE

En el presente documento, se utilizan de manera inclusiva términos como “el docente”, “el estudiante”, “el profesor”, “el niño”, “el compañero” y sus respectivos plurales (así como otras palabras equivalentes en el contexto educativo) para referirse a hombres y mujeres.

Esta opción obedece a que no existe acuerdo universal respecto de cómo aludir conjuntamente a ambos sexos en el idioma español, salvo usando “o/a”, “los/las” y otras similares, y ese tipo de fórmulas supone una saturación gráfica que puede dificultar la comprensión de la lectura.

Índice

Presentación	4
Nociones Básicas	5
Consideraciones generales	11
Propósitos formativos de la asignatura de Matemática	24
Enfoque de la asignatura	24
Estructura curricular Matemática.....	25
Objetivos de Aprendizaje.....	25
Orientaciones didácticas y pedagógicas	30
Visión panorámica Objetivos de Aprendizaje y conocimientos esenciales	36
Módulos obligatorios de la asignatura	38
Módulo obligatorio 1	39
Propósito del módulo obligatorio 1	40
Ruta de Aprendizaje del Módulo obligatorio 1	41
Actividad de desempeño 1	42
Actividad de desempeño 2	49
Actividad de desempeño 3	57
Actividad de desempeño 4	64
Módulo obligatorio 2	76
Propósito del módulo obligatorio 2	77
Ruta de Aprendizaje del Módulo obligatorio 2	78
Actividad de desempeño 1	79
Actividad de desempeño 2	88
Actividad de desempeño 3	95
Actividad de desempeño 4	103
Módulo obligatorio 3	114
Propósito del módulo obligatorio 3	115
Ruta de Aprendizaje del Módulo obligatorio 3	116
Actividad de desempeño 1	117
Actividad de desempeño 2	125
Actividad de desempeño 3	135
Actividad de desempeño 4	144

Módulo obligatorio 4.....	155
Propósito del módulo obligatorio 4	156
Ruta de Aprendizaje del Módulo obligatorio 4	157
Actividad de desempeño 1	158
Actividad de desempeño 2	166
Actividad de desempeño 3	176
Actividad de desempeño 4	185
Módulos electivos.....	194
Módulo de Aprendizaje basado en Proyectos	195
Módulo de Aprendizaje Basado en problemas 4	205

Presentación

Las Bases Curriculares para EPJA establecen Objetivos de Aprendizaje (OA) de habilidades y actitudes que se integran con conocimientos esenciales para la comprensión de grandes ideas consideradas relevantes en cada asignatura. El presente Programa de estudio es una propuesta de organización curricular que define y desarrolla actividades de desempeño para que los estudiantes construyan los aprendizajes establecidos para cada nivel de enseñanza.

Al Ministerio de Educación le corresponde la tarea de elaborar Programas de estudio que orienten la implementación de las Bases Curriculares para aquellos establecimientos que no han optado por la elaboración de programas propios. Estos programas constituyen un complemento coherente y alineado con las Bases Curriculares y son una herramienta para apoyar a los docentes en el logro de los Objetivos de Aprendizaje y propósitos formativos declarados en cada asignatura y nivel.

Los Programas de estudio constituyen una propuesta que los establecimientos pueden implementar, o ser un referente para aquellos establecimientos que deseen elaborar Programas de estudio propios. En este sentido, responden a las múltiples realidades educativas que se derivan de los distintos contextos en los cuales se imparte la modalidad, y que dan origen a una diversidad de aproximaciones didácticas, metodológicas y organizacionales, que se expresan en el desarrollo de distintos proyectos educativos, todos válidos mientras permitan el logro de los Objetivos de Aprendizaje.

Los Programas de estudio proponen al docente una organización de los Objetivos de Aprendizaje, conocimientos esenciales y grandes ideas de acuerdo con el tiempo disponible dentro del año escolar, y constituyen una orientación acerca de cómo desarrollar una comprensión profunda y significativa. Se trata de una estimación temporal aproximada y de carácter propositivo y que por tanto, puede ser adaptada por los docentes de acuerdo a la realidad de sus estudiantes y de su establecimiento.

Para apoyar la implementación de las Bases, los Programas proporcionan orientaciones disciplinares, didácticas y criterios de evaluación formativa que pueden utilizarse como apoyo para las actividades de desempeño sugeridas. Las actividades de desempeño son actividades que permiten a los estudiantes poner en “uso” el conocimiento esencial; para esto, aplican los procedimientos que definen a las habilidades y actitudes declaradas en los Objetivos de aprendizaje. Las actividades de desempeño, en consecuencia, permiten construir aprendizajes y recoger evidencias de comprensión. Estas actividades se enriquecen con recomendaciones de recursos didácticos complementarios y bibliografía para profesores y estudiantes; se enmarcan en un modelo pedagógico cuyo enfoque es el de la comprensión, lo que implica establecer conexiones desde la experiencia del estudiante, al interior de cada disciplina y también con otras áreas del conocimiento. Las actividades de desempeño de los Programas ilustran un modelo para que cada docente, en su establecimiento, pueda construir nuevas actividades acordes con las diversas realidades.

Nociones Básicas

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DE HABILIDADES Y ACTITUDES NUCLEARES

Los Objetivos de Aprendizaje definen los aprendizajes terminales esperables para una asignatura determinada en cada nivel escolar, y evidencian de forma clara y precisa cuál es el aprendizaje que el estudiante debe lograr. Los Objetivos de Aprendizaje de estas Bases Curriculares refieren a las habilidades y actitudes fundamentales de cada asignatura, y se constituyen en el núcleo del aprendizaje.

Las habilidades son definidas como procesos estratégicos centrales para realizar tareas y para solucionar problemas con precisión y adaptabilidad. Favorecen la transferencia educativa, es decir, la capacidad para utilizar el conocimiento y aplicarlo a nuevos contextos.

Las actitudes, por su parte, son disposiciones frente a objetos, ideas o personas, que incluyen componentes afectivos, cognitivos y valorativos, y que inclinan a las personas a determinados tipos de acciones. Las actitudes que conforman los OA refieren a los cuatro ámbitos del marco de Habilidades para el siglo XXI, y su inclusión responde a criterios de pertinencia para ser trabajadas integradamente con las habilidades. En los niveles de Básica, se prioriza el desarrollo de actitudes que fomentan la autonomía y la proactividad, y en los niveles de Media actitudes que fomentan la responsabilidad personal y social de los estudiantes.

Las actitudes y las habilidades se integran en la construcción de los Objetivos de Aprendizaje nucleares, lo que evidencia su interdependencia y su importancia para una formación integral, que permita a los estudiantes contar con una combinación de valores, disposiciones, habilidades y conocimientos para enfrentar los desafíos del futuro¹.

CONOCIMIENTOS ESENCIALES

Los conocimientos esenciales refieren a una red conceptual coherente y rica en conexiones, que permite construir la comprensión sobre los fenómenos y el mundo. El conocimiento entendido como comprensión, permite a los estudiantes refinar, transformar o reemplazar ideas preexistentes que han adquirido en su experiencia vital y cotidiana, y moverse con flexibilidad entre visiones generales y detalles, generalizaciones y ejemplos sobre los fenómenos que estudian.

Los conocimientos esenciales son prioritarios e imprescindibles, pues constituyen una base que permite avanzar de manera progresiva en el aprendizaje de cada asignatura, y construir nuevos conocimientos.

¹ OECD (2020). Op. Cit., pág. 5.

PROPÓSITO FORMATIVO

Los propósitos formativos de cada asignatura definen las finalidades educativas que se busca desarrollar a partir de los Objetivos de Aprendizaje y conocimientos esenciales en cada nivel. Entregan el para qué del aprendizaje y buscan evidenciar cómo cada asignatura contribuye al logro de los Objetivos generales de la Educación Media, definidos en la Ley General de Educación.

En estas Bases Curriculares, las grandes ideas operan como propósito formativo de cada nivel, orientando la comprensión y la articulación de los Objetivos de Aprendizaje y los conocimientos esenciales.

ENFOQUE DE LA ASIGNATURA

Explican los principales principios, teorías y conceptos disciplinares desde los cuales se han construido los aprendizajes de la asignatura. Se presenta una visión actualizada de dichos elementos de acuerdo con el desarrollo de las disciplinas. En el enfoque de la asignatura se explicitan también los énfasis teóricos y perspectivas disciplinares desde las cuales se espera que los docentes y estudiantes aborden los conocimientos, habilidades y actitudes incluidos en los Objetivos de Aprendizaje. Asimismo, en esta sección se explican los enfoques didácticos que permiten orientar la implementación de la asignatura en el aula. Esto último se sustenta en los conceptos, teorías y principios pedagógicos de la enseñanza de cada disciplina.

HABILIDADES Y ACTITUDES PARA EL SIGLO XXI

La existencia y el uso de la tecnología en el mundo global, multicultural y en constante cambio ha determinado nuevos modos de acceso al conocimiento, de aplicación de los aprendizajes y de participación en la sociedad. Estas necesidades exigen competencias particulares, identificadas internacionalmente como Habilidades del siglo XXI, y responden a los diversos requerimientos del mundo actual, como el aprendizaje de nuevas maneras de pensar, de aprender, de relacionarse con los demás, de comunicarse, de usar la tecnología, de trabajar, de participar en la sociedad, de desarrollarse como persona y de desarrollar la creatividad, entre otros².

Las Habilidades para el siglo XXI corresponden al foco formativo central que propende a la formación integral de los estudiantes. Corresponden a un marco de habilidades y actitudes transversales a todas las asignaturas y a partir de las cuales cada una define sus propios aprendizajes disciplinares. Se presentan organizadas en torno a cuatro ámbitos: Maneras de pensar, Maneras de trabajar, Herramientas para trabajar y Maneras de vivir en el mundo.

²El conjunto de habilidades seleccionadas para las Bases Curriculares de EPJA corresponden a una adaptación de distintos modelos (Binkley et al., 2012; Fadel et al., 2016). Se han organizado en cuatro categorías: Maneras de pensar, Maneras de trabajar, Herramientas para trabajar y Maneras de vivir en el mundo.

MANERAS DE PENSAR

Desarrollo de la creatividad y la innovación

Las personas creativas poseen habilidades de pensamiento divergente, producción de ideas, fluidez, flexibilidad y originalidad. El pensamiento creativo implica abrirse a diferentes ideas, perspectivas y puntos de vista, ya sea en la exploración personal o en el trabajo en equipo. La enseñanza para la creatividad implica asumir que el pensamiento creativo puede desarrollarse en todas las instancias de aprendizaje y en varios niveles: imitación, variación, combinación, transformación y creación original. Por ello, es importante que los docentes consideren que, para lograr la creación original, es necesario haber desarrollado varias habilidades y que la creatividad también puede enseñarse mediante actividades más acotadas según los diferentes niveles.

Desarrollo del pensamiento crítico

El pensamiento crítico permite discriminar entre informaciones, declaraciones o argumentos, evaluando su contenido y pertinencia. Permite cuestionar la información, tomar decisiones y emitir juicios, como asimismo reflexionar críticamente acerca de diferentes puntos de vista, tanto de los propios como de los demás, ya sea para defenderlos o contradecirlos sobre la base de evidencias. Contribuye así, además, a la autorreflexión y corrección de errores, y favorece la capacidad de estar abierto a los cambios y de tomar decisiones razonadas. El principal desafío en la enseñanza del pensamiento crítico es la aplicación exitosa de estas habilidades en contextos diferentes de aquellos en que fueron aprendidas.

Desarrollo de la metacognición

Corresponde al concepto de “aprender a aprender”. Se refiere a ser consciente del propio aprendizaje y de los procesos para lograrlo, lo que permite autogestionarlo con autonomía, adaptabilidad y flexibilidad. El proceso de pensar acerca del pensar involucra la reflexión propia sobre la posición actual, fijar los objetivos a futuro, diseñar acciones y estrategias potenciales, monitorear el proceso de aprendizaje y evaluar los resultados. Incluye tanto el conocimiento que se tiene sobre uno mismo como estudiante o pensador, como los factores que influyen en el rendimiento. La reflexión acerca del propio aprendizaje favorece su comunicación, por una parte, y la toma de conciencia de las propias capacidades y debilidades, por otra. Desde esta perspectiva, desarrolla la autoestima, la disciplina, la capacidad de perseverar y la tolerancia a la frustración.

Desarrollo de Actitudes

- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.
- Pensar con apertura a distintas perspectivas y contextos, asumiendo riesgos y responsabilidades.
- Pensar con consciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.
- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.
- Pensar con reflexión propia y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar.
- Pensar con consciencia de que los aprendizajes se desarrollan a lo largo de la vida y enriquecen la experiencia.
- Pensar con apertura hacia otros para valorar la comunicación como una forma de relacionarse con diversas personas y culturas, compartiendo ideas que favorezcan el desarrollo de la vida en sociedad.

MANERAS DE TRABAJAR

Desarrollo de la comunicación

La comunicación, ya sea escrita, oral o multimodal, requiere generar estrategias y herramientas que se adecuen a diversas situaciones, propósitos y contextos socioculturales, con el fin de transmitir lo que se desea de manera efectiva. La comunicación permite desarrollar la empatía, la autoconfianza, la valoración de la interculturalidad, así como la adaptabilidad, la creatividad y el rechazo a la discriminación.

Desarrollo de la colaboración

La colaboración entre personas con diferentes habilidades y perspectivas faculta al grupo para tomar mejores decisiones que las que se tomarían individualmente. Además, el trabajo colaborativo entre pares determina nuevas formas de aprender y de evaluarse a sí mismo y a los demás, lo que permite visibilizar los modos en que se aprende; esto conlleva nuevas maneras de relacionarse en torno al aprendizaje.

La colaboración implica, a su vez, actitudes clave para el aprendizaje en el siglo XXI, como la responsabilidad, la perseverancia, la apertura de mente hacia lo distinto, la aceptación y valoración de las diferencias, la autoestima, la tolerancia a la frustración, el liderazgo y la empatía.

Desarrollo de Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.
- Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.
- Trabajar con empatía y respeto en el contexto de la diversidad, eliminando toda expresión de prejuicio y discriminación.
- Trabajar con autonomía y proactividad en trabajos colaborativos e individuales para llevar a cabo eficazmente proyectos de diversa índole.

HERRAMIENTAS PARA TRABAJAR

Desarrollo de la alfabetización digital

Promueve el desarrollo del pensamiento computacional, la autonomía y el trabajo en equipo, la creatividad, la participación en redes de diversa índole, y el interés por ampliar los propios intereses y horizontes culturales, por medio del uso responsable de la tecnología para hacer frente a nuevos desafíos, como la ciberseguridad y el autocuidado. La utilización de la tecnología como herramienta de trabajo implica dominar las posibilidades que ofrece, como asimismo darle un uso creativo e innovador que, a la vez, promueva el pensamiento crítico. A partir de esto, la alfabetización digital apunta también a la resolución de problemas en el marco de la cultura digital que caracteriza al siglo XXI, aprovechando las herramientas que nos da la programación, el pensamiento computacional, la robótica e internet,

entre otros, para desarrollar habilidades que permitan crear contenidos digitales, informarnos a partir de la tecnología y vincularnos con los demás utilizando la tecnología.

Desarrollo del uso de la información

Dice relación con la eficacia y eficiencia en la búsqueda, el acceso, el procesamiento, la clasificación, la integración, la gestión, la evaluación crítica, el uso creativo y ético, y la comunicación, de la información. Implica formular preguntas, indagar y generar estrategias para seleccionar, organizar y comunicar la información. Tiene además siempre en cuenta tanto los aspectos éticos y legales que la regulan, como el respeto a los demás y a su privacidad. Promueve también el acceso, uso responsable, aplicación eficaz y evaluación crítica de Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), y su uso creativo de acuerdo con distintos propósitos, atendiendo a las características y convenciones de diversos contextos multiculturales.

Desarrollo de Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.
- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.
- Valorar las TIC como una oportunidad para informarse, investigar, socializar, comunicarse y participar como ciudadano.
- Actuar responsablemente al gestionar el tiempo para llevar a cabo eficazmente los proyectos personales, académicos y laborales.
- Actuar de acuerdo con los principios de la ética en el uso de la información y de la tecnología, respetando la propiedad intelectual y la privacidad de las personas.

MANERAS DE VIVIR EN EL MUNDO

Desarrollo de la ciudadanía local y global

La ciudadanía se refiere a la participación del individuo en su contexto desde una perspectiva política, social, territorial, cultural, económica, medioambiental, entre otras dimensiones. Por ello, es necesaria la interacción eficaz con las instituciones públicas y la participación en iniciativas que apoyen la cohesión social. La participación también implica reflexionar y tener un juicio crítico acerca de los mensajes de los medios de comunicación masiva, de modo de adoptar una postura razonada ante ellos. La conciencia de ser ciudadano promueve el sentido de pertenencia y la valoración y ejercicio de los principios democráticos, como los derechos humanos y la igualdad, así como asumir sus responsabilidades como tal. En este sentido, el respeto a los demás, a su privacidad, y a las diferencias valóricas, religiosas y étnicas cobra gran relevancia; se relaciona directamente con una actitud empática, de mentalidad abierta y de adaptabilidad.

Desarrollo del plan de vida y carrera

La construcción y consolidación de un proyecto de vida y de una carrera, oficio u ocupación, requiere la capacidad de adaptarse a los cambios para poder desenvolverse en distintos roles y contextos. Para el logro de objetivos personales, es necesario establecer metas, crear estrategias para conseguirlas, desarrollar la autogestión, actuar con iniciativa y compromiso, ser autónomo para ampliar los aprendizajes, ser autocrítico, reflexionar críticamente y estar dispuesto a integrar las retroalimentaciones recibidas. Por otra parte, para lograr estas metas se requiere interactuar con los demás de manera flexible, con la capacidad de trabajar en equipo y negociar para la búsqueda de soluciones. Esto permite el desarrollo de liderazgo, responsabilidad, ejercicio ético del poder y el respeto a las diferencias en ideas y valores.

Desarrollo de responsabilidad personal y social

La responsabilidad personal y social se interrelacionan constantemente. En lo personal, el respeto por los demás y el rechazo a la discriminación, la conciencia acerca de la propia cultura y las relaciones de esta con las del mundo, el compromiso con la propia vida y el contexto inmediato, y el control de la agresión, la violencia y la autodestrucción permiten que las personas se desarrollen de una manera integral. Por otra parte, el compromiso con la propia persona se traduce, a su vez, en una manera sana y activa de relacionarse con los demás, generando confianza en los otros y comunicándose de una manera asertiva, empática, libre de prejuicios, que acepte los distintos puntos de vista y contribuyendo a mejorar la sociedad en la que vive. Estas habilidades apuntan a ser consciente de sí mismo y de los otros, y realizar acciones concretas que den cuenta de la responsabilidad que tiene el individuo con su vida y con su entorno.

Desarrollo de Actitudes

- Perseverar en torno a metas con miras a la construcción de proyectos de vida y al aporte a la sociedad y al país con autodeterminación, autoconfianza y respeto por uno mismo y por los demás.
- Participar asumiendo posturas razonadas en distintos ámbitos: cultural, social, político, medioambiental, entre otros.
- Tomar decisiones razonadas y que contribuyan al bien común, respetando los derechos humanos, la diversidad y la multiculturalidad.
- Actuar con honestidad, responsabilizándose por las propias acciones y decisiones con consciencia de las implicancias que estas tienen sobre uno mismo y los otros.

Consideraciones generales

Las consideraciones que se presentan a continuación son relevantes para una óptima implementación de los Programas de Estudio, se vinculan estrechamente con los enfoques curriculares, y permiten abordar de mejor manera los Objetivos de Aprendizaje de las Bases Curriculares.

El estudiante de Educación para Jóvenes y Adultos

PERFIL DE EGRESO

La formación habilita al estudiante para conducir su propia vida en forma autónoma, plena y responsable, de modo que pueda desarrollar planes de vida y proyectos personales, continuar su proceso educativo formal mediante la educación superior, o incorporarse a la vida laboral.

Los estudiantes que egresan de la modalidad de Jóvenes y Adultos han desarrollado los conocimientos, habilidades y actitudes definidas en el currículum nacional y transfieren sus aprendizajes a distintos ámbitos: social, cultural, cívico, laboral, intelectual y personal. A partir de dichos aprendizajes, son capaces de alcanzar sus metas académicas y laborales, y de construir un proyecto de vida de acuerdo con sus necesidades e intereses, actuando con autonomía, responsabilidad.

Considerando el marco de Habilidades del siglo XXI y los Objetivos generales de la Ley General de Educación, las Bases Curriculares para la EPJA definen un conjunto de diez competencias que reúnen habilidades, actitudes y conocimientos que los estudiantes han adquirido al finalizar el Segundo Nivel de Educación Media de la modalidad. Estas competencias se organizan según los ámbitos de las Habilidades del siglo XXI, y su relación de tributación con las habilidades y actitudes nucleares de los Objetivos de Aprendizaje. La competencia 1 se refiere al dominio disciplinar de las asignaturas que los estudiantes deberán dominar al finalizar la Educación Media.

Dominio disciplinar

1. Aplica conocimientos y habilidades disciplinares de las áreas del lenguaje, las matemáticas, las ciencias, la historia y la geografía y el idioma extranjero inglés en contextos que impliquen aprendizaje y desarrollo personal.

Maneras de pensar

2. Gestiona el proceso de aprendizaje personal por medio de habilidades de metacognición, reflexión y comunicación, demostrando autonomía, motivación y una sólida autoestima y confianza en las propias capacidades para mejorar y enriquecer su desarrollo personal y cognitivo.
3. Identifica problemas, elabora argumentos, considera nuevas ideas, y propone soluciones creativas e innovadoras ante los desafíos que enfrenta.

4. Piensa de manera crítica y elabora puntos de vista y opiniones propias, utilizando evidencia y con una actitud abierta, dispuesta a cuestionar los supuestos y a reconsiderar las propias visiones.

Maneras de trabajar

5. Trabaja de manera colaborativa con otros en la resolución de problemas y en el desarrollo de proyectos, demostrando habilidades interpersonales de comunicación, gestión y monitoreo del trabajo, y capacidad para asumir roles, reconocer fortalezas y aceptar debilidades, y una actitud perseverante para alcanzar los objetivos propuestos.
6. Se comunica efectivamente con otros en lengua materna y en una lengua extranjera, con diferentes propósitos y en diversos contextos, por medio de habilidades de comunicación oral, escrita y no verbal, demostrando capacidad de escuchar y comprender distintos mensajes, y una valoración positiva del lenguaje como fuente de enriquecimiento cultural y personal.

Herramientas para trabajar

7. Utiliza internet y las herramientas digitales de manera efectiva y eficiente, demostrando habilidades de búsqueda, selección, manejo y producción de información, y capacidad para resolver tareas, reconociendo los aspectos éticos y legales involucrados en el acceso y uso de la información en ambientes digitales.
8. Demuestra compromiso y capacidad de autogestionar el aprendizaje en las diversas instancias de formación que enfrenta, por medio de habilidades que le permitan desenvolverse en distintos roles y contextos y planificar un proyecto de vida personal y laboral en el tiempo, desarrollando una disposición favorable al aprendizaje a lo largo de la vida.

Maneras de vivir en el mundo

9. Se relaciona de manera respetuosa, empática y constructiva con otros en las diversas instancias de intercambio y colaboración que enfrenta, demostrando conciencia y reconocimiento de la propia cultura y la de los demás, y una actitud de rechazo a la violencia, a la agresión y a la discriminación.
10. Demuestra conciencia de los derechos y responsabilidades ciudadanas al relacionarse con sus pares, con la comunidad y con las instituciones públicas, practicando habilidades de interacción eficaz, de participación y toma de decisiones, mostrando un compromiso con el bien común, la cohesión social, los Derechos Humanos y los principios de la democracia, a nivel local y global.

CONTEXTUALIZACIÓN CURRICULAR

La contextualización curricular es el proceso de apropiación y desarrollo del currículum en una realidad educativa concreta. Este se lleva a cabo considerando las características particulares del contexto escolar (por ejemplo, el medio en que se sitúa el establecimiento educativo, la cultura, el proyecto educativo institucional de la escuela y la comunidad escolar, el tipo de formación diferenciada que se imparte - Humanístico-Científica o Técnico Profesional), lo que posibilita que el proceso educativo adquiera significatividad para los estudiantes desde sus propias realidades y facilita, así, el logro de los Objetivos de Aprendizaje.

El marco de Habilidades y Actitudes que define esta propuesta permite desarrollar actitudes y habilidades que facilitan formas de pensar, de vivir en el mundo, formas de trabajar y herramientas para trabajar que definen el perfil del estudiante EPJA y que pueden ser utilizados como estrategias para atender a las necesidades de contextualización las diferencias que se presenten en las aulas. Los Programas de estudio son una propuesta de diseño de clases, de actividades y de evaluaciones flexible, que pueden modificarse, ajustarse y transferirse a diferentes realidades y contextos, considerando, entre otros:

Diversidad etaria; debido a que la edad de los estudiantes de Educación para Jóvenes y Adulto puede variar de los 15 a más de 50 años de edad, las actividades propuestas se han diseñado desde un principio de flexibilidad que permita en las aulas ajustarse a las distintas necesidades y posibilidades de estudiantes que no han iniciado o interrumpido su trayectoria formativa por un corto o un largo período de tiempo.

Tipos de establecimientos: considerando las distintas posibilidades originadas por el tipo de establecimiento en las que se implementa la modalidad; Tercera jornada, Centros de Educación Integrada de Adultos, Establecimientos Educativos al interior de Recintos Penitenciarios y al interior de Unidades Militares, la ilustración didáctica de las actividades propuestas en el programa sugiere el uso de recursos y procedimientos tanto análogos como virtuales.

Trayectorias formativas: considerando que por razones diversas las trayectorias formativas de los estudiantes EPJA se interrumpen, y en consecuencia, la progresión de aprendizajes de las asignaturas que forman parte del Plan de Formación General en sus distintos Niveles de Educación Básica y Educación Media: Lenguaje y Comunicación/Lengua y Literatura, Matemática, Ciencias e Historia, Geografía, Ciencias Sociales y Educación Ciudadana, pueden estar afectadas, de modo que para la implementación de los programas de estudio se necesite realizar procesos previos de nivelación que permitan a los estudiantes avanzar en su trayectoria formativa. La implementación del programa se ha diseñado en un tiempo estimativo que, de acuerdo al plan de estudio, puede ajustarse a las necesidades formativas de los estudiantes.

INCLUSIÓN Y DIVERSIDAD

En el trabajo pedagógico, es importante comprender que la diversidad se entiende en términos culturales, sociales, étnicos, religiosos, de género, de estilos de aprendizaje y de niveles de conocimiento y/o de trayectorias escolares. Esta diversidad enriquece los escenarios de aprendizaje y está asociada a los siguientes desafíos:

- Desarrollar aprendizajes significativos que se relacionen con el contexto y la realidad de los estudiantes.
- Generar oportunidades inclusivas para desarrollar el aprendizaje en todos los estudiantes.
- Favorecer y potenciar metodologías integradoras y colaborativas tales como Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) y Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas (ABRP).

Atender a la diversidad de estudiantes, en sus contextos, implica reconocer las necesidades educativas de los estudiantes para diseñar experiencias de aprendizaje considerando tiempos, recursos y estrategias para que cada estudiante logre un aprendizaje de calidad. La experiencia y conocimiento que tengan los docentes sobre su asignatura y las estrategias que promuevan un aprendizaje profundo, son herramientas para tomar decisiones pertinentes y oportunas respecto de las necesidades de sus alumnos.

Para los estudiantes con necesidades educativas especiales, el conocimiento de los profesores, el apoyo y las recomendaciones de los especialistas contribuyen a que todos desarrollen al máximo sus capacidades.

Algunas orientaciones para considerar:

- Generar ambientes de aprendizaje inclusivos, lo que implica que cada estudiante debe sentir seguridad para participar, experimentar y contribuir de forma significativa a la clase. Se recomienda destacar positivamente las características particulares y rechazar toda forma de discriminación, agresividad o violencia.
- Proveer igualdad de oportunidades, asegurando que los estudiantes puedan participar por igual en todas las actividades, evitando asociar el trabajo de aula con estereotipos asociados a género, características físicas o cualquier otro tipo de sesgo que provoque discriminación.
- Utilizar diversos materiales, estrategias didácticas y actividades que se adecuen a las singularidades de los estudiantes y sus intereses.
- Promover un trabajo sistemático, con actividades variadas para diferentes estilos de aprendizaje y con ejercitación abundante, procurando que todos tengan acceso a oportunidades de aprendizaje enriquecidas.

Orientaciones pedagógicas Programas de estudio EPJA

Todas las actividades siguen los pasos que caracterizan el proceso de aprendizaje en los jóvenes y adultos: identificar la necesidad del aprendizaje; crear una estrategia y recursos para alcanzarlos; desarrollar la estrategia y evaluarla. Para aprender, necesitan saber cuál es el propósito de su aprendizaje, aplicar lo aprendido en la vida profesional; y ser agentes de su propio aprendizaje, utilizando su experiencia.

La etapa inicial del aprendizaje es de gran importancia, ya que, si bien el estudiante puede no estar siempre consciente de lo que necesita aprender, la motivación y el compromiso por el aprendizaje como un medio para adquirir autonomía y aprender a aprender, pueden operar como incentivos poderosos para encontrar un sentido al aprendizaje escolar. Asimismo, es relevante que los estudiantes participen en el proceso de diseño del aprendizaje. La literatura señala que, en los estudiantes adultos, compartir el control de las estrategias de aprendizaje lo hace más eficaz.³ Hacer participar a los estudiantes adultos como agentes de su aprendizaje, satisface su necesidad de conocer y estimula su autoconcepto como alumnos independientes⁴.

³ Knowles, M. S., Holton III, E. F., & Swanson, R. A. (2014). *The adult learner: The definitive classic in adult education and human resource development*. Routledge, pág. 148.

⁴ *Ibidem*.

Organización modular del Programa de estudio

Los Programas de estudio para las Bases Curriculares de la Educación de Jóvenes y Adultos, proponen una estructura modular que organiza los Objetivos de Aprendizaje de habilidades y actitudes, los conocimientos esenciales y las grandes ideas de cada asignatura de acuerdo con las Bases Curriculares aprobadas para la modalidad.

Los módulos se definen como bloques unitarios de aprendizaje que integran habilidades, actitudes y conocimientos requeridos para adquirir desempeños flexibles en una determinada área o asignatura.

Todas las asignaturas, tanto del plan de Formación General como de Formación Instrumental cuentan con Programas de estudio modulares para su implementación. En cuanto a la estructura, cada asignatura se organiza por nivel en cuatro módulos obligatorios y cuatro módulos electivos. Los módulos obligatorios organizan los Objetivos de Aprendizaje, conocimientos esenciales y grandes ideas de cada nivel, y los módulos electivos ofrecen oportunidades de profundizar en el desarrollo del OA y en la comprensión de las grandes ideas del nivel, por medio del desarrollo de proyectos o la resolución de problemas.

MÓDULOS OBLIGATORIOS:

En coherencia con las Bases Curriculares, los módulos obligatorios organizan los Objetivos de Aprendizaje, los conocimientos esenciales y las grandes ideas del nivel. Cada módulo presenta cuatro actividades de aprendizaje y evaluación que desarrollan, como foco principal, las habilidades y actitudes de los Objetivos de Aprendizaje del nivel. En las Bases Curriculares para EPJA, las habilidades son entendidas como conocimientos procedimentales que desarrollan destrezas de pensamiento y hábitos de mente que permiten pensar en los contenidos en profundidad. Desarrollar habilidades permite a los estudiantes aprender a pensar sobre el conocimiento, ponerlo “en movimiento para hacer conexiones y predicciones”, darle forma “para crear nuevos productos y resultados creativos”, como señala David Perkins⁵.

Organización del aprendizaje en los Módulos obligatorios

Los módulos obligatorios organizan el aprendizaje en torno al desarrollo de una actividad de desempeño y actividades de evaluación que se integran. Los elementos que componen estos módulos son:

- **Visión panorámica del Módulo**

La visión panorámica de cada módulo se presenta la gran idea, los objetivos de aprendizaje y conocimientos esenciales que se necesitan desarrollar para cumplir el propósito formativo del módulo. Por último, se identifica el tiempo semanal y en horas de clase propuesto para abarcar su implementación.

- **Propósito del módulo**

El propósito del módulo responde a tres interrogantes: ¿qué se espera que los estudiantes comprendan?, ¿cómo se evidenciará que los estudiantes han comprendido? y ¿cómo tributa el módulo al marco formativo de las Habilidades y Actitudes del SXXI? Para responder a la primera interrogante se explica brevemente la gran idea que se pretende construir en el módulo. Luego se relacionan explicativamente las habilidades, actitudes y conocimientos esenciales que pondrá en uso el estudiante para finalmente detallar cómo estos se integran y tributan al marco de Habilidades y actitudes del SXXI.

⁵ Perkins, D. Prólogo a Swartz, R. et al. (2017). Op. Cit., pág. 8.

- **Ruta de aprendizaje**

Secuencia de 4 actividades de desempeño que describen sintéticamente qué habilidades – procedimientos estratégicos- y actitudes desarrollará el estudiante para poner en uso los conocimientos esenciales declarados en el módulo. Cada desempeño se construye identificando qué hace el estudiante – habilidad o procedimiento aplicado- y el conocimiento esencial que se moviliza. El conjunto de actividades de desempeño se integra coherentemente para dar cuenta del propósito formativo general declarado en el módulo.

- **Actividades de desempeño**

Para organizar el desarrollo de las actividades propuestas se utilizan criterios didácticos transversales que guíen flexiblemente a los docentes, de modo que puedan transferir la propuesta a sus diferentes contextos. Los criterios utilizados se distinguen por su función didáctica, es decir, la finalidad formativa que se persigue a través de ello:

- Situación experiencial, permite enmarcar de forma situada un determinado aprendizaje, activando y enganchando el conocimiento previo con el nuevo conocimiento para desarrollar un aprendizaje significativo.
- Construcción del conocimiento, permite ilustrar cómo mediar, a través de una propuesta de selección de recursos y estrategias la adquisición y organización de nuevos conocimientos.
- Práctica guiada, modela paso a paso la mediación que realiza el docente, a través de actividades individuales, plenarias o colaborativas que desarrollan los estudiantes, para profundizar en la comprensión de un determinado conocimiento.
- Práctica independiente, detalla las actividades individuales y/o colaborativas que desarrollan los estudiantes para realizar desempeños flexibles que permitan profundizar y evidenciar su comprensión. Permite al docente monitorear el proceso de aprendizaje.
- Integración, corresponde a una actividad de síntesis que realiza el estudiante individualmente para evidenciar la comprensión del propósito declarado para la actividad. Por ejemplo, mediante el uso de ticket de salida.
- Orientaciones al docente: en esta sección se aclaran y precisan conceptos disciplinares que se han movilizado a la largo del módulo. Se realizan sugerencias complementarias al docente sobre el trabajo con adultos y/o estrategias didácticas que puedan facilitar su labor. Se sugieren seleccionar estrategias para guiar la retroalimentación y la evaluación formativa compartiendo criterios, estrategias de retroalimentación y rúbricas.

MÓDULOS ELECTIVOS

Los módulos electivos ofrecen oportunidades de profundizar en el desarrollo de las habilidades y actitudes de los Objetivos de Aprendizaje del nivel y en la comprensión de las grandes ideas. Se desarrollan por medio de metodologías de Aprendizaje basado en Proyectos y Aprendizaje basado en Resolución de problemas; se organizan en torno a un tema que es planteado como problema o desafío y que permite ampliar el conocimiento esencial, profundizar en la comprensión de las grandes ideas y conectar con los intereses y experiencias de los estudiantes.

Los problemas y desafíos podrán ser adaptados a los contextos, intereses y experiencias vitales de los estudiantes.

Se sugiere considerar los Objetivos de Desarrollo Sostenible de la Agenda para el Desarrollo Sostenible de la UNESCO como foco para orientar los problemas y proyectos a desarrollar en los módulos electivos. Estos temas son⁶:

1. Fin de la pobreza
2. Hambre cero
3. Salud y Bienestar
4. Educación de calidad⁷
5. Igualdad de género
6. Agua limpia y saneamiento
7. Energía asequible y no contaminante
8. Trabajo decente y crecimiento económico
9. Industria, innovación e infraestructura
10. Reducción de las desigualdades
11. Ciudades y comunidades sostenibles
12. Producción y consumo responsables
13. Acción por el clima
14. Vida submarina
15. Vida de ecosistemas terrestres
16. Paz, justicias e instituciones sólidas
17. Alianzas para lograr los objetivos. Esta metodología debe permitir generar un compromiso activo del estudiante con el aprendizaje, lo cual se logrará si es que este aprendizaje: conecta con sus necesidades o inquietudes, y sabe de antemano cuál será este aprendizaje (*qué* aprender), lo considera importante (*por qué* aprender) y sabe *cómo* ocurrirá este aprendizaje (plan de trabajo) e idealmente participa en su planeamiento.

Estructura del aprendizaje en los Módulos electivos

En coherencia con lo que plantean las Bases Curriculares, los módulos electivos ofrecen oportunidades para el desarrollo de metodologías de trabajo colaborativo y que aborden desafíos cognitivos y del entorno. En particular, los Programas de estudio desarrollan las metodologías de Aprendizaje basado en Proyectos y Aprendizaje basado en la Resolución de Problemas como propuestas que permiten desarrollar habilidades y poner en uso el conocimiento, integrar aprendizajes y promover la curiosidad y la búsqueda activa y creativa de respuestas. Estas metodologías buscan que los estudiantes puedan transferir el conocimiento a distintas áreas y/o situaciones de la vida real, por medio de aprendizajes significativos y relevantes. En cada nivel se ilustran dos ejemplos, uno de ABP y otro de Resolución de problemas, que podrán servir de modelo para que los docentes puedan construir nuevos proyectos o problemas.

Tanto en la Resolución de problemas como en ABP se busca conectar los problemas y preguntas con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) de UNESCO, para reforzar su relevancia y transversalidad.

⁶ Recuperado de: <https://es.unesco.org/sdgs>

⁷ Las Bases Curriculares de EPJA se encuentran alineadas con este Objetivo N°4, en tanto apuntan al Aprendizaje a lo largo de la vida, y a una educación de calidad para todos.

Aprendizaje Basado en Proyectos

Consiste en la organización de los estudiantes en torno a una pregunta o desafío originado a partir de un problema real o que sea significativo para los estudiantes, que puede ser concreto o abstracto. En la medida que el problema es más complejo moviliza e integra diferentes áreas de conocimiento, promoviendo de esta manera la interdisciplinariedad. Para su desarrollo, es deseable que los docentes se organicen y planifiquen el trabajo de manera conjunta entre docentes de diferentes asignaturas.

Existe una serie de elementos que son requisitos para que el diseño de un proyecto permita maximizar el aprendizaje y la participación de los estudiantes, de manera que aprendan cómo aplicar el conocimiento al mundo real, cómo utilizarlo para resolver problemas, responder preguntas complejas y crear productos de alta calidad⁸. Estos elementos son:

- **Conocimiento esencial, comprensión y habilidades:**

El proyecto se enfoca en profundizar en la comprensión del conocimiento, ya que permite desarrollar a la vez los Objetivos de Aprendizaje y las habilidades del Siglo XXI que se requieren para realizar el proyecto.

Se basa en un problema significativo para resolver o una pregunta para responder, en el nivel adecuado de desafío para los alumnos, que se implementa mediante una pregunta de conducción abierta y atractiva.

- **Indagación sostenida:**

El proyecto implica un proceso activo y profundo a lo largo del tiempo, en el que los estudiantes generan preguntas, encuentran y utilizan recursos, hacen preguntas adicionales y desarrollan sus propias respuestas.

- **Autenticidad:**

El proyecto tiene un contexto del mundo real, utiliza procesos, herramientas y estándares de calidad del mundo real y tiene un impacto real, ya que creará algo que será utilizado o experimentado por otros, y/o está conectado a las propias preocupaciones, intereses e identidades de los estudiantes.

Es importante saber en qué contexto del mundo real puede encontrarse el problema como el planteado y por qué el proyecto puede ser significativo para los estudiantes.

- **Voz y elección del estudiante:**

El proyecto permite a los estudiantes tomar algunas decisiones sobre los productos que crean, cómo funcionan y cómo usan su tiempo, guiados por el docente.

- **Gestión y auto organización:**

El proyecto exige a los estudiantes desarrollar el trabajo en equipo, la comunicación y la resolución de problemas; tomar decisiones sobre el diseño y la implementación del proyecto en sus distintas etapas. Esto implica identificar las competencias y procedimientos que son necesarios para desarrollar un plan de trabajo adecuado al proyecto, y una exploración activa de los recursos y actividades con que cuentan para su desarrollo. Asimismo, reconocer las fortalezas y debilidades con que cuenta cada uno de los miembros para su desarrollo.

⁸ Adaptación de: John Larmer, John Mergendoller, Suzie Boss (ASCD 2015). *Setting the Standard for Project Based Learning: A Proven Approach to Rigorous Classroom Instruction*.

- **Evaluación y Retroalimentación:**

El proyecto brinda oportunidades para que los estudiantes reflexionen sobre qué y cómo están aprendiendo. Incluye procesos de evaluación formativa y retroalimentación para que los estudiantes den y reciban comentarios sobre su trabajo, con el fin de revisar sus ideas y productos o realizar una investigación adicional.

- **Producto público.**

El proyecto requiere que los alumnos demuestren lo que aprenden, creando un producto que se presenta u ofrece a personas que se encuentran más allá del aula.

Considerando estos elementos, los Programas proponen un diseño de ABP con la siguiente estructura:

Estructura	Descripción
Problema central:	Se describe el problema que origina el proyecto.
Propósito:	Refiere al propósito formativo del proyecto, es decir, qué se espera que aprendan los estudiantes gracias a la realización de este.
Objetivos de Aprendizaje:	Identifica y/o registra qué objetivos de Aprendizaje de la asignatura y de otras asignaturas del nivel del plan de estudio de EPJA se integran para el desarrollo del proyecto.
Preguntas:	Se proponen preguntas orientadoras, que servirán para diseñar las etapas del proyecto. Son preguntas centrales y generales.
Tipo de proyecto:	Identifica el tipo de proyecto de acuerdo a las asignaturas que participan: STEM, interdisciplinario, etc.
Producto:	identifica el producto que se espera construir colaborativamente en el proyecto para dar respuesta concreta al problema.
Habilidades y actitudes del siglo XXI:	Identifica cuáles son las habilidades y actitudes que se desarrollarán, y a qué ámbito pertenecen.
Etapas:	se realiza un cronograma con las distintas etapas del proyecto, identificando: características de cada etapa, qué hará el estudiante, cómo lo realizará. Se apoya con recursos y/o ilustraciones cada etapa.
Evaluación:	Se comparten criterios de evaluación y rúbricas que guíen y permitan monitorear el desarrollo de los aprendizajes durante la realización del proyecto. Los criterios y las rúbricas deben verificar los aprendizajes de los objetivos que se identificaron para el proyecto, de manera descriptiva y por nivel de logro.
Difusión final:	describir cómo se difundirá el producto, incluyendo a la comunidad escolar y/o local.
Recursos:	Nombra recursos, clasificándolos según su tipo.

Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas

El modelo de Aprendizaje basado en la Resolución de Problemas que presentan los Programas de estudio se organiza en torno a un problema o desafío cognitivo para el cual se busca encontrar una solución, por medio del uso del conocimiento y el desarrollo de habilidades. En los Programas, un problema se define por una situación o pregunta que presenta restricciones y cuya respuesta no es evidente.

Al resolver problemas, los estudiantes utilizan procesos y estrategias relacionadas con el análisis crítico, la investigación, la evaluación y la comunicación; planifican su trabajo y reflexionan sobre la solución que mejor responde a las restricciones que presenta el problema o desafío cognitivo. Como resultado, ponen en uso el conocimiento, lo amplían adquiriendo nuevos conceptos, principios e información, y desarrollan nuevas destrezas de pensamiento crítico y creativo⁹.

La resolución de problemas permite motivar y despertar el interés del estudiante, desarrolla la autonomía y el trabajo en equipo; esto requiere que las situaciones o problemas sean significativos y relevantes, y que puedan visualizar las posibles soluciones. Esta metodología requiere que el docente adquiera un rol activo como guía para monitorear el desarrollo del proceso y orientar el trabajo de los estudiantes.

El modelo que proponen los Programas de estudio para el desarrollo del Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas se compone de los siguientes elementos:

Elementos de la estructura	Descripción
Título	Se plantea como una afirmación o pregunta que sintetiza el problema o desafío.
Propósito	Busca despertar el interés, predisponer al estudiante para el aprendizaje basado en problemas.
Preparación	Busca contextualizar a los estudiantes en la situación que se planteará y/o familiarizarlos con la resolución de problemas y su sistema de trabajo.
Presentación del problema	Se expone el problema, considerando la contextualización del mismo en una situación significativa. Se define con claridad y precisión cuál es el problema; se distinguen conceptos centrales y restricciones que constituyen el problema.
Posibles soluciones	Se describe cómo se mediará estratégicamente el trabajo colaborativo: el uso de estrategias para mediar disposiciones actitudinales positivas que les permitan a los estudiantes involucrarse con el problema y buscar soluciones (por ejemplo, la perseverancia), y estrategias de mediación para compartir las soluciones; se ilustran soluciones posibles que puede tener el problema.
Investigación	Describe cómo mediar el trabajo de investigación y el desarrollo de habilidades de indagación y evaluación; se ilustran recursos que se puedan utilizar y conocimientos disciplinares que se movilizan en la solución del problema.

⁹ R. Swartz "El Aprendizaje basado en el Pensamiento. Cómo desarrollar en los alumnos las competencias del SXXI (2017). Edit. SM Figura 7-11. Pág. 232. Adaptación.

Evaluar la solución del problema:	Describe cómo mediar estratégicamente las soluciones propuestas al problema, considerando las habilidades y la evaluación de las posibles soluciones.
Comunicación	Describe cómo se mediará la comunicación individual y/o colaborativa del problema, según códigos de comunicación pertinentes y característicos de las disciplinas.

Orientaciones para evaluar los aprendizajes

La evaluación, como un aspecto intrínseco del proceso de enseñanza-aprendizaje, se plantea en estos programas con un foco formativo al servicio del aprendizaje de los estudiantes. Para que esto ocurra, se plantea recoger evidencias que permitan describir con precisión la diversidad existente en el aula para tomar decisiones pedagógicas y retroalimentar a los estudiantes. La evaluación desarrollada con foco pedagógico favorece la motivación de los estudiantes a seguir aprendiendo; asimismo, el desarrollo de la autonomía y la autorregulación potencia la reflexión de los docentes sobre su práctica y facilita la toma de decisiones pedagógicas pertinentes y oportunas que permitan apoyar de mejor manera los aprendizajes.

Para implementar una evaluación con un foco formativo, se requiere:

- Diseñar experiencias de evaluación que ayuden a los estudiantes a poner en práctica lo aprendido en situaciones que muestren la relevancia o utilidad de ese aprendizaje.
- Evaluar solamente aquello que los alumnos efectivamente han tenido la oportunidad de aprender mediante las experiencias de aprendizaje mediadas por el profesor.
- Procurar que se utilice diversas formas de evaluar, que consideren las distintas características, ritmos y formas de aprender, necesidades e intereses de los estudiantes, evitando posibles sesgos y problemas de accesibilidad para ellos.
- Promover que los alumnos tengan una activa participación en los procesos de evaluación; por ejemplo: al elegir temas sobre los cuales les interese realizar una actividad de evaluación o sugerir la forma en que presentarán a otros un producto; participar en proponer los criterios de evaluación; generar experiencias de auto y coevaluación que les permitan desarrollar su capacidad para reflexionar sobre sus procesos, progresos y logros de aprendizaje.
- Que las evaluaciones sean de la más alta calidad posible; es decir, deben representar de la forma más precisa posible los aprendizajes que se busca evaluar. Además, las evidencias que se levantan y fundamentan las interpretaciones respecto de los procesos, progresos o logros de aprendizajes de los estudiantes, deben ser suficientes como para sostener de forma consistente esas interpretaciones evaluativas.

El profesor puede utilizar diferentes métodos para evaluar los OA. Para esto, se sugiere emplear una variedad de medios y evidencias, como portafolios, registros anecdóticos, proyectos de investigación grupales e individuales, informes, presentaciones, entre otros. La forma en que se diseñe este tipo de evaluaciones y el modo en que se registre y comunique la información que se obtiene de ellas debe permitir que dichas evaluaciones integren lo formativo y sumativo para retroalimentar tanto la enseñanza como el aprendizaje.

El uso formativo de la evaluación debiera preponderar en las salas de clases, utilizándose de manera sistemática para reflexionar sobre el aprendizaje y la enseñanza, y para tomar decisiones pedagógicas

pertinentes y oportunas que busquen promover el progreso del aprendizaje de todos los estudiantes, considerando la diversidad como un aspecto inherente a todas las aulas.

El proceso de evaluación formativa que se propone implica articular el proceso de enseñanza-aprendizaje en función de responder a las siguientes preguntas: **¿A dónde voy?** (qué objetivo de aprendizaje espero lograr), **¿Dónde estoy ahora?** (cuán cerca o lejos me encuentro de lograr ese aprendizaje) y **¿Qué estrategia o estrategias pueden ayudarme a llegar a donde tengo que ir?** (qué pasos tengo que dar para acercarme a ese aprendizaje). Este proceso continuo de establecer un objetivo de aprendizaje, evaluar los niveles actuales y luego trabajar estratégicamente para reducir la distancia entre los dos, es la esencia de la evaluación formativa. Una vez que se alcanza una meta de aprendizaje, se establece una nueva meta y el proceso continúa.

Para promover la motivación para aprender, el nivel de desafío y el nivel de apoyo deben ser los adecuados – en términos de Vygotsky (1978), estar en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes–, para lo cual se requiere que todas las decisiones que tomen los profesores y los propios estudiantes se basen en la información o evidencia sobre el aprendizaje recogidas continuamente¹⁰.

Como parte de la evaluación formativa, los Programas proponen en cada actividad un conjunto de criterios que permiten evaluar el desempeño de los estudiantes en un determinado aprendizaje. Estos criterios permiten identificar el lugar en que se encuentran los estudiantes en el desarrollo de las habilidades y la construcción de conocimientos, entregando información que permita al docente tomar decisiones pedagógicas para avanzar hacia el logro de los aprendizajes propuestos¹¹.

Los criterios de evaluación describen el dominio de conceptos, de procedimientos y actitudes en los estudiantes. En su conjunto, permiten evaluar la comprensión y la disposición o inclinación a actuar de acuerdo al marco de Habilidades y actitudes del siglo XXI. Cuando se integran en el desarrollo de la clase, los criterios de evaluación permiten generar un mejoramiento continuo del aprendizaje¹².

¹⁰ Mineduc (2017). *Presentación de Criterios de evaluación, calificación y promoción al Consejo Nacional de Educación. Fundamentos a la propuesta de actualización de criterios y normas de Evaluación, Calificación y Promoción Escolar de estudiantes de Educación Regular* presentada por la Unidad de Currículo y Evaluación al Consejo Nacional de Educación. Santiago, pág. 74.

¹¹ Para la construcción de los criterios, se han tenido a la vista las orientaciones que plantea la Mesa Covid Universitaria y la normativa vigente para la atención a la diversidad, la inclusión y la flexibilidad en la repuesta educativa contenida en la ley 20.845 de inclusión escolar (Art. 1°, núm. i), y como referente los principios del Decretos 83 de 2015 y Decreto 67 de 2018.

¹² *Propuestas Educación Mesa Social Covid-19 (2021). Recomendación para una evaluación pertinente en tiempos de crisis. Santiago de Chile.* Santiago, pág. 65.

Referencias

John Larmer, John Mergendoller, Suzie Boss. *Setting the Standard for Project Based Learning: A Proven Approach to Rigorous Classroom Instruction*, (ASCD 2015).

Knowles, M. S., Holton III, E. F., & Swanson, R. A. (2014). *The adult learner: The definitive classic in adult education and human resource development*. Routledge.

Lemov, D. (2014). *Teach like a champion 2.0: 62 techniques that put students on the path to college*. John Wiley & Sons.

Mineduc (2017). *Presentación de Criterios de evaluación, calificación y promoción al Consejo Nacional de Educación*. Fundamentos a la propuesta de actualización de criterios y normas de Evaluación, Calificación y Promoción Escolar de estudiantes de Educación Regular presentada por la Unidad de Currículo y Evaluación al Consejo Nacional de Educación. Santiago

Propuestas Educación Mesa Social Covid-19 (2021). *Recomendación para una evaluación pertinente en tiempos de crisis*. Santiago de Chile. Santiago, pág. 65

R. Swartz "El Aprendizaje basado en el Pensamiento. Cómo desarrollar en los alumnos las competencias del SXXI (2017). Edit. SM Figura 7-11. Pág. 232. Adaptación.

Universidad del Desarrollo, Centro de Innovación. *Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)*. Recurso web disponible en: <https://innovaciondocente.udd.cl/metodologias-activas/>

UNESCO (2015). *La Agenda para el Desarrollo Sostenible*.
<https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/development-agenda/>

Propósitos formativos de la asignatura de Matemática

Comprender las matemáticas y aplicar sus conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales es fundamental para los ciudadanos del siglo XXI. La necesidad de resolver e interpretar una cantidad cada vez mayor de problemas y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales, laborales, sociales y científicos, requiere comprender conceptos, desarrollar el razonamiento y aplicar destrezas matemáticas.

Un estudiante con conocimientos matemáticos reconoce el papel que las matemáticas juegan en el mundo para poder hacer juicios bien fundados y tomar las decisiones que necesitan los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos¹³. La educación matemática es fundamental para la formación de ciudadanos responsables, profesionales capaces y es la base para desarrollar la capacidad de estudio de otras materias¹⁴. La matemática es, además de una herramienta que se puede utilizar y aplicar, una fuente para el desarrollo del pensamiento, que promueve habilidades y actitudes para la vida.

Con este propósito, la asignatura Matemática para la Educación de Personas Jóvenes y Adultas busca desarrollar en los estudiantes habilidades que les permitan comprender las matemáticas y el papel que estas juegan en la cultura y en sus propias vidas, al proporcionar un lenguaje que permite comprender el mundo desde una perspectiva lógica, por medio de la capacidad de modelar la realidad, representarla y resolver problemas con precisión y adaptabilidad. La asignatura busca también desarrollar en los estudiantes un pensamiento autónomo y crítico que les permita desenvolverse activamente como ciudadanos, aprender en un mundo incierto y fortalecer el autoconcepto y confianza en su propio razonamiento.

Enfoque de la asignatura

La asignatura tiene un énfasis principal en la alfabetización matemática y en el desarrollo de la capacidad de razonamiento matemático y la resolución de problemas en diversos contextos. La alfabetización matemática se entiende como la capacidad de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en la vida, hacer juicios bien fundados y usar, en forma adecuada, tanto los conocimientos como las herramientas matemáticas para resolver problemas del ámbito personal, social y laboral. En el caso de la población Joven y Adulta, esto implica reconocer los aprendizajes previos que las personas puedan tener con los contenidos de la asignatura, evaluar y perfeccionar las formas de pensar matemáticamente y los procedimientos, desarrollar la capacidad de modelar y representar la realidad para entenderla.

¹³ Organization for Economic Co-operation and Development (OECD) 2020, Mathematics performance (PISA) (indicator). doi: 10.1787/04711c74-en (Accessed on 14 August 2020).

¹⁴ Loos, A. y Ziegler, G.-M. (2015). Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik. En R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme y H.-G. Weigand (Eds.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*, pp. 3-19. Berlin, Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-35119-8

El aprendizaje de la matemática implica tanto la aplicación de conocimientos y procedimientos, como la elaboración de estrategias. Con este fin, la resolución de problemas se presenta como una oportunidad de aprendizaje que está presente en todos los niveles de la asignatura, permitiendo a los estudiantes desarrollar de manera progresiva estrategias y la creatividad para buscar y poner a prueba distintas soluciones. Ello permitirá reconocer la utilidad que tienen las matemáticas en la vida real, desarrollar la capacidad de resolver problemas de mayor complejidad y transferir las habilidades matemáticas a otras disciplinas.

Por otro lado, la representación en matemática, el desarrollo de la transferencia entre diferentes representaciones y el tránsito flexible de conocimiento matemático entre los lenguajes hablados, visuales, táctiles, sonoros u otros, abre las puertas al trabajo con algunas de las necesidades educativas especiales permanentes y transitorias, en términos comunicacionales y de comprensión. Por esto, el trabajo con esta habilidad y su desarrollo para la comprensión matemática son fundamentales para el trabajo en clases.

Estructura curricular Matemática

Las Bases Curriculares de Matemática para EPJA se articulan en torno a Objetivos de Aprendizaje de Habilidades y Actitudes. Las actitudes se trabajan de manera transversal e integral con los OA; sin embargo, se intencionan ciertos ámbitos de las Habilidades del Siglo XXI dada su pertinencia para el trabajo específico con cada habilidad. De esta manera, se integra en cada Objetivo de Aprendizaje la habilidad con una actitud.

Los Objetivos de Aprendizaje de habilidad y actitud se integran con los conocimientos esenciales del ámbito de los números y operaciones; álgebra y funciones; geometría; estadística y probabilidades, para favorecer la comprensión de las grandes ideas de la asignatura. Las grandes ideas operan como propósito formativo de cada módulo y nivel, orientando la comprensión y la articulación de los Objetivos de Aprendizaje y los Conocimientos esenciales.

Objetivos de Aprendizaje

Los objetivos de habilidades y actitudes se organizan en 4 ejes e integran actitudes de los ámbitos que organizan las habilidades del siglo XXI, de acuerdo con un criterio de pertinencia para ser trabajadas integradamente con las habilidades. Estos ejes son:

- Representar
- Modelar
- Argumentar y Comunicar
- Resolver Problemas

Representar

La habilidad de representar se refiere a las formas de expresar conceptos, relaciones y objetos matemáticos provenientes de diferentes contextos. Las representaciones se pueden dar en tres niveles, de manera concreta, pictórica o simbólica. Esta habilidad incluye el crear relatos en base a una expresión matemática simple, ecuación o función, utilizar tablas o esquemas con lenguaje matemático, transferir una situación de un nivel de representación a otro. También incluye el uso de representaciones propias de la matemática, como la línea recta, el plano cartesiano, la tabla de datos para comprender y explicar tanto procesos como relaciones.

En el primer nivel se espera que los estudiantes puedan relacionar el conocimiento intuitivo con una explicación formal de las situaciones, pudiendo transitar de un nivel de representación a otro (concreta, pictórica y simbólica) para luego contrastar la información que ofrecen distintos niveles de representación. En la Educación Media podrán representar, de manera autónoma, un mismo contenido, transitando entre distintos niveles de representación. Esta progresión favorece el desarrollo de la transferencia, potencia la comprensión de las operaciones, relaciones y conceptos matemáticos y brinda un significado cercano a las expresiones matemáticas.

Se espera que, para realizar estas representaciones, los estudiantes extraigan información desde acciones concretas y elijan distintas formas de expresar esta información, por ejemplo, utilizando números, unidades de medidas estandarizadas, tablas, gráficos, diagramas, metáforas, símbolos matemáticos, rectas numéricas, entre otras representaciones. En particular, la habilidad del siglo XXI de las herramientas para trabajar contribuye al desarrollo de la habilidad de representar. Los momentos de aprendizaje priorizan el uso y la aplicación de diferentes herramientas visuales, sonoras, digitales tecnológicas o táctiles para trabajar, con el objetivo de representar ideas, objetos, procesos y relaciones en matemática. Incluyendo desde el uso de TIC hasta el uso apropiado de la regla, el uso de la calculadora, el uso de plataformas o programas.

Modelar

Modelar es una habilidad que permite encontrar un modelo que describe matemáticamente una situación del mundo real permitiendo hacer predicciones, valoraciones, ajustes y cambios, para eventualmente hacer cambios a la realidad o al modelo. Es decir, un modelo expresa acciones o situaciones reales, cotidianas con lenguaje matemático. El modelo construido debe capturar parte de las características de una realidad dinámica para poder estudiarla, modificarla y/o evaluarla. Asimismo, el modelo permite buscar soluciones, aplicarlas a otras realidades similares (objetos, fenómenos, situaciones), comparar impactos y encontrar nuevas relaciones de la realidad. Es importante señalar que la habilidad de organizar, componer, crear y ajustar desde la realidad con base en la matemática y viceversa, es la base de la habilidad de modelar. En el proceso de modelar hay algunas nociones de la habilidad de representar y por esto, se habla de habilidades que se complementan según el contexto.

La habilidad de modelar implica la capacidad de seleccionar, usar, ajustar y evaluar modelos que involucren operatoria, identificar regularidades y generalizar usando lenguaje matemático, traducir expresiones en lenguaje cotidiano a lenguaje matemático y viceversa. En los niveles de Educación Básica, los estudiantes aprenderán a seleccionar un modelo según su pertinencia a la situación real, para luego usarlo para comprender fenómenos diversos. En base a ello, podrán evaluar la pertinencia de los modelos utilizados en relación con el problema y considerando sus limitaciones. En los niveles de la Educación Media, podrán seleccionar y ajustar modelos matemáticos pudiendo representar patrones y fenómenos, y resolver problemas cotidianos.

En conjunto con esta habilidad matemática, se espera que los estudiantes desarrollen la manera de trabajar colaborativamente, con responsabilidad y liderazgo, lo cual requiere de propuestas de trabajo en proyectos y organización del tiempo y del trabajo en grupos. Además, se busca motivar la manipulación de herramientas para trabajar, valorando las TIC como una oportunidad para informarse, investigar y comunicarse, actuando de acuerdo con los principios de la ética. En esta actitud, los datos juegan un rol principal en la comprensión y presentación de la información.

La integración de la habilidad de modelar y con el ámbito de Maneras de vivir en el mundo permite dar un enfoque al momento de trabajar y evaluar la actitud, priorizando en este caso el modelamiento de situaciones reales. El modelamiento matemático de mi alrededor permite dar respuestas técnicas, resolver problemas logísticos, de presupuesto y organizacionales propios de la construcción de proyectos personales, de la sociedad o de la comunidad en la cual los estudiantes de EPJA están inmersos.

Argumentar y comunicar

La habilidad de argumentar implica comunicar resultados en lenguaje matemático, explicar el razonamiento utilizado para realizar procedimientos, y fundamentar conjeturas, comprobar reglas y propiedades y realizar deducciones. Esta es una habilidad que permite desarrollar la generalización, que es considerado uno de los procedimientos básicos en la producción del conocimiento de las disciplinas en general y de la disciplina matemática en particular.

Los objetivos de aprendizaje de este grupo de habilidades desarrollan la capacidad de identificar y luego explicar reglas, soluciones propias y procedimientos, entendiendo que el razonamiento matemático es la capacidad de argumentar y obtener conclusiones a partir de premisas o conjeturas. En el ámbito de la comunicación, por su parte, podrán expresar el razonamiento matemático utilizado en la elaboración de conjeturas, procedimientos y resultados, llegando a fundamentar las conjeturas, utilizando el lenguaje matemático, y realizar demostraciones simples de sus resultados, pudiendo identificar si en esta hay saltos o errores.

La integración de la habilidad de argumentar y comunicar con el ámbito de la Maneras de trabajar se focaliza en el logro y verificación de la comunicación en matemática. Se espera que los estudiantes de EPJA logren desarrollar tanto la habilidad de argumentar como la de comunicar, mostrando empatía y respeto por las posturas o errores del otro a la hora de desarrollar trabajos colaborativos y en situaciones de argumentación. En particular, en la habilidad de argumentar se espera un procedimiento honesto donde la matemática juega un rol en el razonamiento lógico en el proceso y logro de resultados de problemas abiertos o cerrados.

Resolver problemas

La habilidad de resolver problemas es tanto un medio como un fin en la adquisición de habilidades matemáticas. La habilidad implica desarrollar otras habilidades que permitan que la resolución se vaya acercando a procesos creativos de búsqueda de soluciones y transferencia de procedimientos hasta llegar a variar parámetros o condiciones.

Los Objetivos de Aprendizaje de estas bases progresan de manera que los estudiantes complejicen las estrategias utilizadas y especialmente, la capacidad de transferir los procedimientos y resultados a otras situaciones. En los niveles de la Educación Básica, los estudiantes tendrán que aplicar los procedimientos utilizados a otras situaciones idénticas a la original, y podrán transferirlos a nuevas situaciones. En la Educación Media, los estudiantes podrán resolver problemas variando parámetros o condiciones y observar cómo influye en los resultados obtenidos, evaluando el proceso y comparando los cambios.

La habilidad de resolver problemas se enriquece con el trabajo conjunto de las demás habilidades matemáticas como representar, modelar, argumentar y comunicar, incentivando el desarrollo de la creatividad, la capacidad de identificar nuevos problemas y explicarlos.

Aprender a resolver problemas es un proceso en el cual es recomendable incluir el trabajo colaborativo, ya que la ayuda y colaboración de otros en la búsqueda de soluciones promueve el aprendizaje entre pares. Dar una respuesta requiere de responsabilidad y honestidad, la cual puede facilitarse en las conversaciones entre pares y de forma colaborativa reconocer y mejorar el error para poder avanzar en conjunto. La resolución de problemas se facilita con el uso de las herramientas disponibles y un problema puede ser una meta que lograr o un desafío que da respuestas a la comunidad de mi entorno. Tomar una decisión responde, entre otras cosas, al resultado de una solución a un problema y una postura razonada puede producir cambios positivos en los diferentes ámbitos.

Si bien la habilidad de resolver problemas es una habilidad transversal, requiere también de una intencionalidad y de un acompañamiento para su correcto desarrollo. Se espera que esta habilidad sea trabajada integradamente con el ámbito de Formas de pensar, promoviendo la actitud de pensar con perseverancia y con flexibilidad para encontrar soluciones a los problemas. Además, se espera que el estudiante de EPJA sea reflexivo con sus procedimientos y autónomo en las elecciones de las estrategias involucradas en la resolución de problemas.

Objetivos de Aprendizaje

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

- OA1.** Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, valorando el uso de las TIC. (Representar)
- OA2.** Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación y aprovechando las herramientas disponibles. (Representar)
- OA3.** Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. (Modelar)
- OA4.** Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones y tomando decisiones razonadas que contribuyan al bien común. (Modelar)
- OA5.** Fundamentar conjeturas usando conocimientos matemáticos, trabajando colaborativamente. (Argumentar y comunicar)
- OA6.** Realizar demostraciones simples de resultados e identificar en una demostración, si hay saltos o errores, trabajando con empatía y respeto. (Argumentar y comunicar)
- OA7.** Variar parámetros o condiciones, comparando los cambios en los resultados obtenidos y pensando con perseverancia y proactividad. (Resolver problemas)
- OA8.** Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. (Resolver problemas)

Conocimientos esenciales

- Porcentajes, cambio porcentual constante, índices económicos, planilla de cálculo.
- Función exponencial, planilla de cálculo.
- Elementos de la geometría básica para el dibujo técnico.
- Cuartiles y quintiles, planilla de cálculo.

Orientaciones didácticas y pedagógicas

Para promover el aprendizaje de la matemática se sugieren las siguientes orientaciones didácticas y pedagógicas:

- Aprender comprensivamente en matemática

Entendemos que una persona ha aprendido profundamente un contenido cuando es capaz de realizar una variedad de operaciones mentales sobre un mismo tópico (Beas, Manterola y Santa Cruz, 1998). Los objetivos de aprendizaje y las actividades de desempeño se presentan para lograr la comprensión profunda de la matemática, se espera que el estudiante dé explicaciones, que muestre evidencia y ejemplos, saque conclusiones, generalice, compare, aplique a nuevas situaciones, establezca analogías, presente la información de diferentes perspectivas, que utilice el conocimiento para resolver problemas y que avance en éste estableciendo relaciones.

Para esto es necesario guiar a los estudiantes mostrando posibles explicaciones, elaborando evidencias, ejemplificar la forma de transferir a otras situaciones. Se sugiere guiar la realización de las diferentes operaciones mentales que se pueden realizar sobre un mismo tópico, en particular, ampliar la memoria mecánica, ya que puede facilitar varios procesos de la resolución de problemas que la requieren. Dado que EPJA tiene varias modalidades y con diferentes accesos a las herramientas de trabajo, podría ser de gran ayuda la memoria mecánica, como también el uso hábil de las herramientas disponibles, en particular de la calculadora. Por lo tanto, saber de manera directa la operación que se debe utilizar o el conocimiento del procedimiento de varias operaciones puede ser un facilitador de la comprensión del tópico matemático que se esté trabajando. En este sentido, se sugiere utilizar una variada gama de estrategias visuales, auditivas o escritas en las prácticas guiadas que permitan incentivar las diferentes preferencias de los estilos de aprendizaje de los estudiantes.

- Nociones Básicas en matemática

Considerar las Nociones Básicas en Matemática significa tener presente las ideas, imágenes y acciones mentales previas de cada estudiante para construir y comprender conocimiento matemático. El docente desarrolla en las clases de matemática esta construcción de conocimiento desde las experiencias de los estudiantes hasta llegar a la abstracción y generalización, momento en el cual, el estudiante aplica el conocimiento y luego transfiere a nuevas situaciones que pueden ser similares o completamente diferentes. Esta caracterización de las Nociones Básicas en matemática (Vom Hofe y Reyes-Santander, 2021) incluyen la significación matemática del concepto, el establecimiento de representaciones que dejan de ser personales para ser comprendidas desde el lenguaje matemático y la transferencia al mundo real, por medio del desarrollo de la habilidad de modelar.

El trabajo con las Nociones Básicas en EPJA es fundamental para el desarrollo de habilidades matemáticas, dado que el joven y adulto ya tiene una noción de lo que podría significar algún conocimiento matemático, es necesario centrarse en cuáles son estas nociones adquiridas y en el cómo se llega a una noción normativa, que describe interpretaciones comprensibles de conceptos, definiciones y relaciones

matemáticas. Para lo primero, el trabajo con las preguntas propuestas en las actividades de desempeño y las respuestas que dan los estudiantes, permiten hacer una estructura de las nociones básicas de la clase. Esta información en conjunto con el desarrollo de la construcción del conocimiento y la práctica guiada de la actividad de desempeño deberían permitir al estudiante hacer el recorrido para obtener una Noción Básica de un concepto matemático.

- **Carácter progresivo de la asignatura**

La educación matemática tiene un carácter progresivo y en espiral, esto significa que las clases se desarrollan volviendo siempre a los conceptos básicos en diferentes niveles y contextos. El principio en espiral da cuenta de los conocimientos matemáticos previos que se requieren para aprender de manera fluida, comenzando desde lo más sencillo hasta lo más complejo, volviendo al mismo tema, ampliando y profundizando cada vez más, hasta cerrar completamente el tema, así no se desplazan temas hasta que se tenga todo el conocimiento necesario, se puede empezar siempre con un nivel inicial, preparatorio. El principio en espiral se acompaña del principio de continuidad de la educación matemática, que es considerada como la selección y tratamiento de un tema para que sea posible luego con un nuevo tratamiento adicional y una continuación en el siguiente nivel educativo.

Este carácter progresivo, nos indica que la construcción del conocimiento tiene antecedentes del nivel anterior y consecuentes para el año siguiente. Se sugiere considerar, retomar para poder avanzar de un año a otro. En el caso del nivel 1 de Educación Básica y cada vez que se comience un tema que no tiene un antecedente, se sugiere considerar las nociones básicas intuitivas para construir un nuevo conocimiento. En este programa se pone a disposición del docente la sección del diagnóstico, la cual se basa en los conocimientos previos que se requieren para comenzar con la actividad. Además, se sugiere cada vez que sea necesario el considerar un módulo cero de nivelación o dedicar un tiempo para revisar y retomar para luego avanzar. En cada tema y su planificación anual, se sugiere utilizar el principio de esquematización progresiva, que comienza en pequeños pasos, aislando las dificultades para reducir la complejidad y lograr el nivel de abstracción que permite una comunicación matemática fluida y comprensiva.

- **Ejercitar con sentido**

Internalizar un concepto requiere de varias acciones, en matemática una de las acciones más reconocidas, como en la educación física, es la ejercitación. Aquí hablamos de ejercitar para lograr una meta, una ejercitación con sentido se refiere a que los ejercicios propuestos tienen una estructura que permite reconocer la ampliación y profundizar en el conocimiento y la habilidad. La ejercitación sirve y tiene sentido cuando nos lleva de manera directa a lograr un objetivo preciso y previamente declarado.

Para lograr una ejercitación con sentido se sugieren en la mayoría de las prácticas independientes, situaciones, problemas y ejercicios en los cuales se presentan variaciones de la instrucción para ejercitar un mismo tópico. En algunos casos, se presentan estrategias de clases o metodologías de trabajo como las estaciones, trabajo grupal, trabajo autónomo, juego de roles o trabajo de pares para llevar a cabo esta ejercitación. Según Leuders (2005) hay una enseñanza explícita que se consolida con ejercicios básicos directos, necesaria para la adquisición segura del conocimiento y para la ejercitación que requiere de nexos matemáticos más profundos.

Se sugiere considerar para la práctica independiente y la categorización de los diferentes tipos de ejercitación con sentido el siguiente listado:

- Ejercicios básicos directos.
- Ejercicios que combinan otras áreas del conocimiento.
- Ejercicios que requieren de una comprensión profunda y de elaborar conexiones matemáticas.
- Ejercicios que se basan en la proactividad y la experimentación concreta.
- Ejercicios que son una combinación de una conexión matemática con la experimentación concreta y que implica hacer inferencias sobre los resultados de un experimento que no están detallados previamente.
- Ejercicios creativos que consideran la modificación de las condiciones iniciales o intermedias o de la creación propia de ejercicios.

La ejercitación incluye el pensar en los diferentes grados de dificultad de los problemas presentados y en este sentido, se sugiere comenzar siempre con un nivel básico y de accesibilidad para todos, esto significa que todo el curso debería responder a este tipo de ejercitación. Un ejercicio puede ser al inicio un problema para el estudiante, esta mirada debe estar siempre desde el punto de vista del estudiante y no del docente, esto significa que se espera entonces que luego de una ejercitación, los problemas sean considerados por el estudiante como un ejercicio o como un problema rutinario. La ejercitación debe ser considerada como un facilitador para la resolución de problemas, más que un trabajo repetitivo y sin sentido.

- Los grupos etarios, la motivación y los contextos en matemática

El perfil de egreso de un estudiante de EPJA se va construyendo desde todas las asignaturas y a través de todos los años de duración de los estudios, este perfil incluye además las experiencias que vaya teniendo cada persona en su trayecto de vida. La Matemática contribuye como una asignatura que ofrece situaciones basadas en contextos que van desde situaciones familiares, del trabajo, profesionales o del ámbito de las ciencias, incluso ofrece contextos y oportunidades de aprendizaje que se desarrollan dentro de la matemática misma y con o sin necesidad de tener contextos.

En este sentido, el tener diferentes grupos etarios provee a la clase de una variedad de contextos que pueden ser trabajados y compartidos con los estudiantes, desarrollando principalmente la empatía y la comprensión de las situaciones y vivencias de otros. La motivación para aprender matemática es un gran desafío para el docente y por este motivo, el desarrollo de una situación experiencial cercana e idealmente vivenciada por algún integrante de la clase puede ser una fortaleza para enganchar a los estudiantes con el tema. También, la presentación y comunicación de la experiencia es clave para motivar a la clase, el desarrollo de las preguntas iniciales de la clase y escribir las respuestas iniciales de esta parte de la clase considerando todo como un aporte, puede hacer una gran diferencia a la motivación personal como grupal por aprender matemática.

- Diferenciación natural en matemática

En las clases de matemática de EPJA se encuentran diferentes formas de heterogeneidad, por nombrar algunas, de género, culturales o étnicas, edad, logros de los aprendizajes, tipo de establecimiento, condiciones de espacio, condiciones de libertad, deficiencias, y discapacidades intelectuales, de aprendizaje o físicas. Dentro de estas, el docente puede considerar la heterogeneidad como un problema, como un caso normal o como una oportunidad para la enseñanza o para el aprendizaje. Con todas estas posibilidades, el docente debe elegir según sus propias capacidades o intereses cuál de ellas puede trabajar de manera objetiva y responsable en sus clases.

En particular, desde la asignatura de matemática se puede considerar la heterogeneidad como una oportunidad de aprendizaje y con un centro natural en el nivel de logro de aprendizajes, ya sea para potenciar o nivelar rendimientos. Dentro de esta categoría, se sugieren las siguientes consideraciones que pueden ser incluidas en la práctica independiente como una categorización de los problemas, situaciones y ejercicios presentados:

- Cantidad de ejercicios, más o menos dependiendo de cada estudiante o clase.
- Grado de dificultad, proponer en categorías de 3 a 4 grados diferentes.
- Forma de la apropiación o internalización que tiene de preferencia cada estudiante, leyendo, escuchando, hablando o haciendo, para algunos basta con una vez de escuchar y para otros requieren escuchar varias veces, escribir y complementar en su casa.
- Forma de abordar y presentar los conocimientos conceptuales y procedimentales, incluyendo una variedad de representaciones visuales, auditivas, táctiles o corporales.
- Graduar la ayuda y mediaciones que recibe el estudiante, aunque se reconoce que hay estudiantes que necesitan mucha ayuda para comenzar o durante el trabajo, el desarrollo de la autonomía debe ser el objetivo transversal del docente.
- Variedad en las formas sociales de trabajo, individual, pares o en grupos.
- Graduación del tiempo concedido para un mismo trabajo.
- Dar a elegir entre uno o más ejercicios, problemas o situaciones a desarrollar.

- El trabajo con el error en matemática

La actitud del docente frente al error se puede presentar con la metáfora de los errores como una ventana hacia el pensamiento del estudiante. Los errores no se pueden ignorar porque así no es posible promover el aprendizaje, ya que estos son una fuente de información acerca del razonamiento del estudiante, que es el lugar en el cual el estudiante aplica y construye nuevos aprendizajes. Por otra parte, si el profesor solo castiga el error, tampoco se avanza, entonces se sugiere tomar el error y analizarlo para ver de qué manera es posible ayudar a ese estudiante a mejorar su comprensión sobre el tema (Larraín, 2016).

En relación con el manejo de errores frecuentes, es muy relevante que los docentes conozcan al menos los errores más usuales, porque esto ayuda a que sean capaces de percibir de manera más clara e inmediata los errores que se están cometiendo y puedan manejar hipótesis acerca de qué es lo que ha generado los errores y por tanto pueda reaccionar de mejor manera cuando estos ocurren. También es posible anticiparse a algunos errores frecuentes, presentarlos a nivel curso y pensar todos juntos, identificando qué es lo que no está bien. Así, la decisión acerca de cómo tratar un error y hacer un plan de acción, de qué hacer para corregir el error, depende de las dos fases anteriores: percibir o identificar el error y luego interpretarlo para elaborar hipótesis acerca de sus causas.

Referencias

Beas, J., Manterola, M., y Santa Cruz, J. (1998). Habilidades cognitivas y objetivos transversales: Un tema para pensar y actuar. *Pensamiento educativo, Revista De Investigación Latinoamericana (PEL)*, 22(1), 175-192. Recuperado a partir de <http://pensamientoeducativo.uc.cl/index.php/pel/article/view/24935>.

Larraín, M. (2016). Comprensión del razonamiento matemático de los estudiantes: una práctica pedagógica inclusiva. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. 45: 152-161.

Leuders, T. (2005). Intelligentes Üben selbst gestalten! Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht. *Pädagogik* 57(11), 29 – 32.

Loos, A. y Ziegler, G.-M. (2015). Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik. En R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme y H.-G. Weigand (Eds.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*, pp. 3-19. Berlin, Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-35119-8

OECD, Organization for Economic Co-operation and Development (2020). *Mathematics performance, PISA* (indicator). doi: 10.1787/04711c74

Vom Hofe, R., y Reyes-Santander, P. (2021). Nociones Básicas: Un enfoque didáctico para promover la comprensión del contenido en clase de matemática. En R. vom Hofe y otros (eds.), *matemática enactiva: Aportes para la articulación entre teoría y práctica en la educación matemática*. Barcelona: Grao. 27 - 60.

Visión panorámica de los módulos del Nivel 2 EM para Matemática

Módulo obligatorio

M1 Nivel 1 EM

Utilizar el cálculo numérico permite desarrollar soluciones y fundamentar la toma de decisiones frente a los problemas financieros.

M2 Nivel 1 EM

El modelado de situaciones o fenómenos que involucra la función exponencial permite tomar decisiones respecto a temas relevantes para las personas y las comunidades.

M3 Nivel 1 EM

La geometría provee herramientas claves que permiten resolver problemas de visualización espacial y construcción en ambientes digitales.

M4 Nivel 1 EM

La estadística entrega herramientas que permite organizar y presentar características de la población.

Módulos electivos

ME1 Nivel 1 EM

ME2 Nivel 1 EM

ME3 Nivel 1 EM

¿Cómo nos ayudan las herramientas de la geometría para facilitar la convivencia con las aves y así proteger su existencia?

ME4 Nivel 1 EM

¿Cómo organizar la información y dar consejos sobre el mejor clima para visitar mi ciudad?

Visión panorámica Objetivos de Aprendizaje y conocimientos esenciales

Matemática				
Nivel 2 Educación Media				
Módulos obligatorios	Módulo 1 Nivel 2 EM	Módulo 2 Nivel 2 EM	Módulo 3 Nivel 2 EM	Módulo 4 Nivel 2 EM
Gran idea	Utilizar el cálculo numérico permite desarrollar soluciones y fundamentar la toma de decisiones frente a los problemas financieros.	El modelado de situaciones o fenómenos que involucra la función exponencial permite tomar decisiones respecto a temas relevantes para las personas y las comunidades.	La geometría provee herramientas claves que permiten resolver problemas de visualización espacial y construcción en ambientes digitales.	La estadística entrega herramientas que permite organizar y presentar características de la población.
Objetivos de Aprendizaje	<p>OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, valorando el uso de las TIC. (Representar)</p> <p>OA4. Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones y tomando decisiones razonadas que contribuyan al bien común. (Modelar)</p> <p>OA5. Fundamentar conjeturas usando conocimientos matemáticos, trabajando colaborativamente.</p>	<p>OA3. Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. (Modelar)</p> <p>OA4. Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones y tomando decisiones razonadas que contribuyan al bien común. (Modelar)</p> <p>OA7. Variar parámetros o condiciones, comparando los</p>	<p>OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, valorando el uso de las TIC. (Representar)</p> <p>OA6. Realizar demostraciones simples de resultados e identificar en una demostración, si hay saltos o errores, trabajando con empatía y respeto. (Argumentar y comunicar)</p> <p>OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para</p>	<p>OA2. Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación y aprovechando las herramientas disponibles. (Representar)</p>

Conocimientos esenciales	<p>(Argumentar y comunicar)</p> <p>OA7. Variar parámetros o condiciones, comparando los cambios en los resultados obtenidos y pensando con perseverancia y proactividad. (Resolver problemas)</p>	<p>cambios en los resultados obtenidos y pensando con perseverancia y proactividad. (Resolver problemas)</p> <p>OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. (Resolver problemas)</p>	reelaborar. (Resolver problemas)	
	Porcentajes, cambio porcentual constante, índices económicos, planilla de cálculo.	Función exponencial, planilla de cálculo.	Elementos de la geometría básica para el dibujo técnico.	Cuartiles y quintiles, planilla de cálculo.
Tiempo estimado	6 semanas (24 horas)	6 semanas (24 horas)	6 semanas (24 horas)	6 semanas (24 horas)

Módulos electivos

	Módulo electivo 1 Nivel 1 EB	Módulo electivo 2 Nivel 2 EB	Módulo electivo 3 Nivel 2 EB	Módulo electivo 4 Nivel 2 EB
Tiempo estimado	6 semanas (24 horas)			

Módulos obligatorios de la asignatura

Módulo obligatorio 1

Visión panorámica

Gran idea

Utilizar el cálculo numérico permite desarrollar soluciones y fundamentar la toma de decisiones frente a los problemas financieros.

Objetivos de aprendizaje

OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, valorando el uso de las TIC. **(Representar)**

OA4. Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones y tomando decisiones razonadas que contribuyan al bien común. **(Modelar)**

OA5. Fundamentar conjeturas usando conocimientos matemáticos, trabajando colaborativamente. **(Argumentar y comunicar)**

OA7. Variar parámetros o condiciones, comparando los cambios en los resultados obtenidos y pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Porcentajes.
- Cambio porcentual constante.
- Índices económicos.
- Planilla de cálculo.

Tiempo estimado
 6 semanas (24 horas)

Propósito del módulo obligatorio 1

En el módulo 1 de la asignatura de matemática del Nivel 2 de Educación Media, se espera que los estudiantes comprendan que la *utilización del cálculo numérico permite desarrollar soluciones y fundamentar la toma de decisiones frente a los problemas financieros*. Para esto, se consideran situaciones que podrían vivir las personas en tramites bancarios, en la solicitud de créditos, de ahorro o de retiro de dinero en forma de pensión. En este nivel se espera una aplicación de conocimientos adquiridos en niveles anteriores, como también una ampliación del lenguaje específico de la matemática financiera y el uso de planillas de cálculo para facilitar el desarrollo de las actividades.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 1 desarrollan las habilidades que permiten comprender la información numérica y trabajar esta información ya sea representando, modelando, argumentando y resolviendo problemas, principalmente para tomar decisiones de manera consciente. Específicamente, en este nivel diremos que se comprende profundamente la información de ámbitos numéricos cuando se expresa el desarrollo de un capital de manera recursiva, cuando se evalúan modelos de interés simple, interés compuesto o cuando se utilizan modelos de crecimiento o decrecimiento, cuando se fundamenta una decisión teniendo en cuenta las ventajas y desventajas de las posibilidades propuestas y cuando se varían las condiciones de créditos, ahorros o retiros que permiten comparar los diferentes resultados de cada situación. Se espera que los estudiantes comprendan el principio del cambio porcentual constante y sepan utilizarlo tanto para el crecimiento como el decrecimiento en contextos financieros como de ahorros individuales, ahorros para pensiones de jubilados, financiamiento de créditos de consumo e hipotecarios.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 1 desarrollan las actitudes del siglo XXI del ámbito de las Maneras de pensar, las Herramientas para trabajar y las Maneras de trabajar, promoviendo las oportunidades que ofrece la tecnología para facilitar el cálculo, principalmente utilizando las planillas de cálculo, como también modelar situaciones pensando en un bien común y desarrollar el trabajo colaborativo. Asimismo, este módulo promueve una actitud de perseverancia y proactividad en los estudiantes, relevando un método de trabajo exhaustivo para lograr respuestas y una inquietud e interés por lograr una toma de decisión fundamentada en los cálculos y la información numérica obtenida en este procedimiento.

Ruta de Aprendizaje del Módulo obligatorio 1

¿De qué manera utilizamos el cálculo numérico para tomar decisiones en situaciones financieras?

Actividad de desempeño

1: Evaluar modelos de interés simple y compuesto, fundamentando el procedimiento por medio de la estrategia recursiva de cálculo.

Actividad de desempeño

2: Variar las condiciones iniciales o del modelo para calcular el interés compuesto y determinar recursivamente el desarrollo del capital en una situación de pensión.



Actividad de desempeño

3: Fundamentar conjeturas sobre el desarrollo del capital en caso de disminuciones sorpresivas en situaciones de retiros anticipados o recesiones económicas del país.

Actividad de desempeño

4: Expresar recursivamente y utilizando una planilla de cálculo, la disminución de un capital o de deudas, donde el capital o deuda restante sigue generando intereses.

Actividad de desempeño 1

Propósito

Esta actividad busca desarrollar la evaluación de dos modelos utilizando la estrategia de comparación entre el interés simple y el compuesto, que se presentan en situaciones de inversión de capital con el objetivo de lograr un ahorro según los planes y propósitos individuales. El modelo de cambio porcentual es calculado paso a paso, de manera recursiva, que permite comprender lo que ocurre con el desarrollo de un ahorro sin utilizar una fórmula de crecimiento exponencial. Simultáneamente se registra el capital actual aumentado y el monto de los intereses correspondiente al intervalo del tiempo de inversión, para lo cual se sugiere el uso de una planilla de cálculo.

Objetivos de Aprendizaje

OA4. Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones y tomando decisiones razonadas que contribuyan al bien común. **(Modelar)**

OA5. Fundamentar conjeturas usando conocimientos matemáticos, trabajando colaborativamente. **(Argumentar y comunicar)**

Conocimiento esencial

- Porcentajes.
- Cambio porcentual constante.
- Índices económicos.
- Planilla de cálculo.

Tiempo estimado

- 6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que verifique los siguientes criterios:

- La noción de porcentaje como fracción con denominador 100.
- La noción de porcentaje como un número decimal.
- Cálculo de porcentajes y estrategias para determinar el porcentaje, la cantidad porcentual y la cantidad total.
- Variaciones porcentuales simples.
- La noción de interés compuesto.
- Función afín o cambio constante de un intervalo a otro.

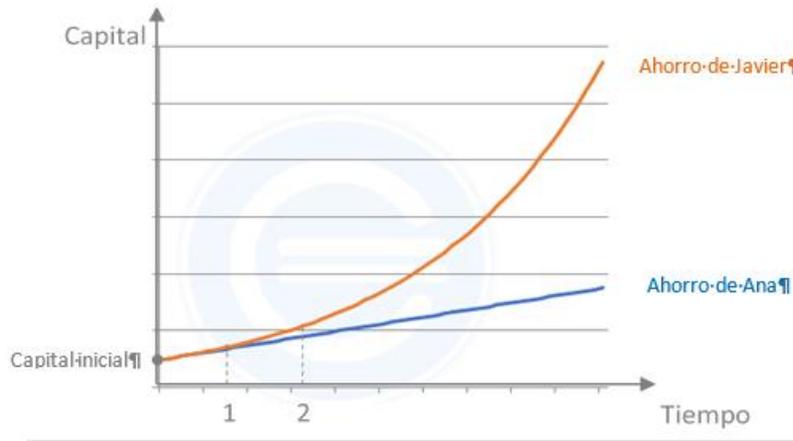
Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes dos casos, que ofrecen diferentes tipos de intereses, el de Ana que invierte su dinero en una cuenta con un tipo de interés y el caso de Javier que invierte su capital en una cuenta con otro tipo de interés. Ambos casos se presentan en el gráfico, donde se muestra el desarrollo en el tiempo con el mismo capital inicial.

Conexión interdisciplinar

Educación financiera
OA2 y OA3 Nivel 1 y 2 EM



Algunas de las preguntas que pueden promover la distinción entre los dos tipos de crecimiento son:

- ¿Qué gráfico representa el mayor crecimiento del capital invertido?
- ¿Cuál inversión tiene mes a mes intereses del mismo monto?
- ¿Cuál podría ser una descripción para los intereses del ahorro de Javier?

Construcción de conocimiento

Para construir el conocimiento sobre el crecimiento constante en períodos iguales, se sugiere comenzar con los intereses simples y el caso de Ana, con una inversión de un capital de \$1 000 000 con una tasa de interés anual de 5% por un período de 10 años.

¿Cómo se desarrolla el capital invertido?



Para guiar a los estudiantes en la elaboración de respuestas, se sugiere motivar su participación elaborando una tabla o planilla de cálculo con el desarrollo anual del capital en cada fila, elaborar el gráfico para visualizar la tendencia y conjeturar sobre la posible función asociada al crecimiento, para finalmente verificar con valores de la tabla o con una nueva cantidad de años.

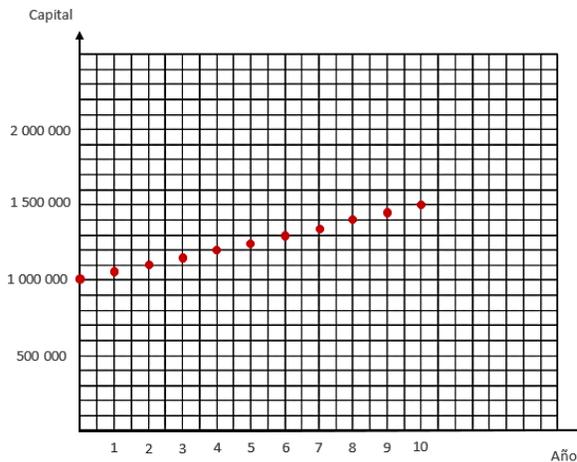
Acción Resultado esperado Preguntas de apoyo

Confeccionar una tabla para conjeturar sobre el comportamiento.

Año	Capital en \$
0	1 000 000
1	1 050 000
2	1 100 000
3	1 150 000
4	1 200 000
5	1 250 000
6	1 300 000
7	1 350 000
8	1 400 000
9	1 450 000
10	1 500 000

¿Cómo comenzar el desarrollo de este capital?
¿Qué ocurre año a año?
¿Cuál es el interés que se aplica?
¿Cómo se aplica este interés?
¿Qué datos se deben ingresar en la planilla de cálculo?

Elaborar un gráfico para predecir.



¿Cómo podemos visualizar mejor el comportamiento del capital año a año?
¿Qué tipo de crecimiento se puede esperar?
¿Qué nos indican los puntos en el gráfico?
¿Cuáles son los pasos para llegar al gráfico?

Evaluar modelos y determinar la función del desarrollo de interés simple.

Una función afín es de la forma:

$$f(t) = b + a \cdot t$$

Según los datos se puede identificar el parámetro b con 1 000 000 y dada la tasa de interés anual 5%, se identifica a con 0,05.

$$f(t) = 1\,000\,000 + 50\,000 \cdot t$$

$$t = 0 \quad f(0) = 1\,000\,000 + 50\,000 \cdot 0 = 1\,000\,000 \text{ (capital inicial)}$$

$$t = 5 \quad f(5) = 1\,000\,000 + 50\,000 \cdot 5 = 1\,000\,000 + 250\,000 = 1\,250\,000$$

¿Qué modelos matemáticos permiten describir este comportamiento?
¿Qué partes están involucradas?
¿Con qué podemos identificar cada término del problema?

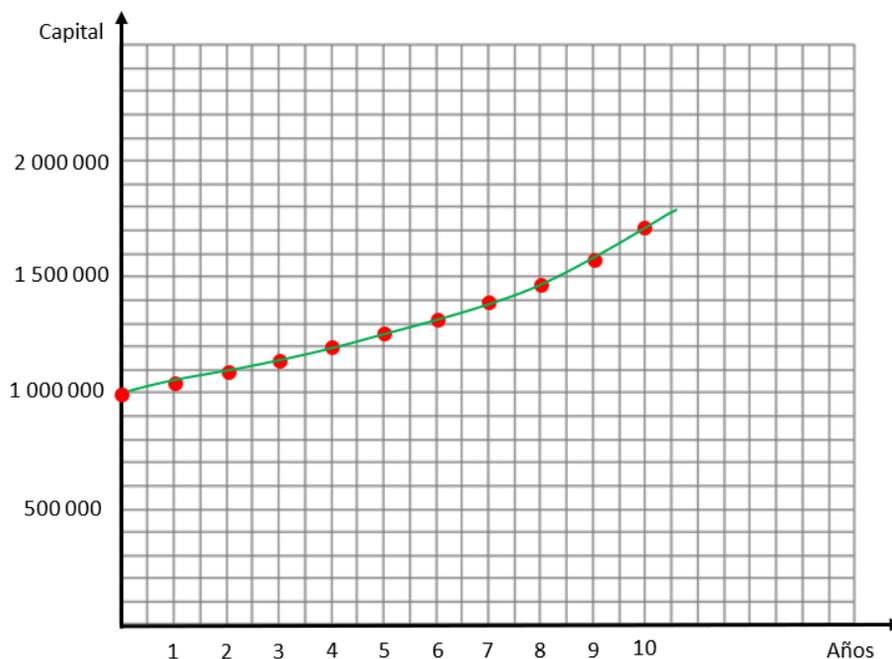
¿Cómo explico que el modelo elegido es el correcto?
¿Cómo podemos verificar si el modelo elegido nos sirve?
¿Para qué nos sirve el modelo?

Práctica guiada

Para guiar la evaluación de otros modelos como el de crecimiento porcentual constante sobre un capital invertido una sola vez y elaborar conjeturas sobre el modelo que se obtiene, se sugiere utilizar una tabla de valores o planilla de cálculo, utilizando el cálculo recursivo con el año anterior. Además, se sugiere mantener las mismas condiciones que en el caso anterior, es decir, capital invertido una sola vez \$1 000 000 con intereses anuales de 5%, utilizando la aproximación a la unidad. Este modelo sigue el desarrollo de los ahorros de Javier presentado en la situación experiencial.

Acción	Resultado esperado			
Confeccionar una tabla para conjeturar sobre el comportamiento.	Período (año)	Capital al inicio del período	Intereses sobre el período	Capital al final del período
	1	1 000 000	50 000	1 050 000
	2	1 050 000	52 500	1 102 500
	3	1 102 500	55 125	1 157 625
	4	1 157 625	57 881	1 215 506
	5	1 215 506	60 775	1 276 281
	6	1 276 281	63 814	1 340 095
	7	1 340 095	67 005	1 407 100
	8	1 407 100	70 355	1 474 455
	9	1 474 455	73 723	1 548 178
10	1 548 178	77 409	1 625 587	

Elaborar un gráfico para conjeturar sobre la función que permite modelar.



Comparar con el modelo de interés simple.

El desarrollo no es lineal, más bien es una curva creciente y el crecimiento es mayor que un crecimiento afín.

$$f(t + 1) - f(t) = 0,05 \cdot f(t) \Leftrightarrow f(t + 1) = f(t) + 0,05 \cdot f(t)$$

Con $f(0) = 1\,000\,000$

Para determinar un cierto valor de la forma recursiva, se debe calcular todos valores que anteceden.

$$f(t) = f(t - 1) + if(t - 1)$$

Donde i es la tasa de interés expresada en número decimal.

Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo de pares y un juego de roles, donde uno hace de banquero con la planilla de cálculo y el otro integrante es la persona interesada por el desarrollo de su capital. Una posible situación de trabajo en pares se puede visualizar en el siguiente esquema:

Primera parte del juego de roles



Segunda parte del juego de roles



Para retroalimentar la actividad y el aprendizaje de la aplicación de los modelos de interés simple y compuesto, se sugiere utilizar la retroalimentación grupal:



<https://www.curriculumnacional.cl/porta/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Confección de tabla de valores interés simple	Confecciona tablas para el interés simple.	Confecciona tablas que corresponden al desarrollo de un capital con interés simple.	Confecciona tablas completas que corresponden al desarrollo de un capital con interés simple utilizando la función afín.
Confección de tabla de valores interés compuesto	Confecciona tablas para el interés compuesto.	Confecciona tablas que corresponden al desarrollo de un capital con interés compuesto.	Confecciona tablas completas que corresponden al desarrollo de un capital con interés compuesto utilizando la función recursiva.
Elaboración de gráficos	Elabora gráficos.	Elabora gráficos que corresponden al desarrollo de un capital utilizando la tecnología.	Elabora gráficos que corresponden al desarrollo de un capital, de forma manual o utilizando la tecnología.
Uso de modelos	Identifica el modelo de interés simple.	Utiliza el modelo de interés simple en la situación que corresponde.	Utiliza el modelo de interés simple o compuesto según los requerimientos de cada situación.
Explicaciones	Da explicaciones sobre los procedimientos de cálculos.	Da explicaciones usando el modelo de interés simple según la situación.	Da explicaciones y fundamenta usando el modelo de interés simple o compuesto según la situación.
Evaluación de modelos	Identifica la diferencia entre la línea recta y una curva tanto en tablas como en gráficos.	Evalúa modelos según los tipos de intereses y la descripción de la situación.	Evalúa modelos según los tipos de intereses correspondiendo entre la descripción de la situación y el tipo de interés.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que evaluar modelos en esta actividad requiere de una selección de uno de los dos modelos trabajados según la situación y una comparación de estos modelos según los diferentes contextos y según las limitaciones del modelo. Por ejemplo, limitaciones de tiempo para desarrollar el capital, limitaciones de contextos al considerar tasas de intereses que estén sobre el 5%. En cuanto a la habilidad de argumentar, entenderemos que un fundamento es el principio sobre el cual se apoya un argumento, así fundamentar es, en este caso, considerar como fundamento alguno de los dos tipos de modelos como apoyo para los argumentos utilizados en explicaciones o frases que avalan y o prueban las conjeturas sobre a qué tipo de intereses corresponden las situaciones financieras presentadas. Por ejemplo, se podrían incluir actividades en las cuales se realice primero una conjetura sobre el monto final de un desarrollo de capital y argumentar utilizando fundamentos de apoyo usando el interés simple o compuesto.

Se sugiere especificar el uso de una línea continua en el gráfico, relevando que la línea utilizada en el gráfico representa el desarrollo del capital y que no hay valores entre medio, es decir, que no necesariamente se corresponde con un desarrollo continuo en el tiempo.

Se sugiere planificar un módulo cero que considere la operatoria con números racionales y raíces. Enfocando este módulo introductorio a la estimación de resultados, al uso de la calculadora y a resolver problemas en diferentes contextos, según lo propuesto en el módulo 1 del Nivel 1 de Educación Media. Se sugiere utilizar la secuencia procedimental disponible en la ficha pedagógica de la habilidad de resolver problemas en https://www.curriculumnacional.cl/docente/629/articles-248151_recurso_pdf.pdf, también se puede revisar la infografía de la misma habilidad, que se encuentra disponible en https://www.curriculumnacional.cl/docente/629/articles-248152_recurso_pdf.pdf

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de utilizar las herramientas disponibles se sugiere el uso de la planilla de cálculo y la inclusión de fórmulas basadas en la función lineal para el interés simple y una fórmula recursiva para el interés compuesto. También se pueden incluir algunas preguntas para fortalecer la toma de decisiones razonadas que contribuyan al bien común, por ejemplo: ¿qué es más conveniente para su caso particular?, ¿cuáles serían las ventajas personales? o ¿es posible dejar el dinero por más tiempo? En cuanto a desarrollar la actitud de trabajo colaborativo, se sugiere promover un trabajo de pares que incluya la explicación de cómo se hizo el procedimiento, por ejemplo, cómo se hizo la planilla de cálculo, así será posible que trabajen juntos y que se aprenda de su par.

Orientaciones para organizar e implementar el juego de roles: se sugieren las siguientes indicaciones para guiar la implementación del trabajo de pares con un juego de roles:

1.	2.	3.
<ul style="list-style-type: none"> •Elabore tarjetas con dos diferentes roles. La persona que pregunta puede ser considerado el cliente y la persona que responde puede ser considerado el banquero. Indique en las tarjetas lo que se espera como tarea en cada rol. •Determine el tiempo de dedicación a la práctica independiente. 	<ul style="list-style-type: none"> •Organice la clase y el espacio para el trabajo en pares. Identifique si es necesario elaborar un juego de roles de tres personas y para este caso, elabore una situación diferente, por ejemplo, asistente, supervisor, jefe del banco, familiar u otro cliente. •Determine cómo y cuándo se hará el cambio de roles en cada grupo. 	<ul style="list-style-type: none"> •Organice el proceso del juego indicando dónde se hacen las anotaciones. •Determine lo que se hará con los resultados y con la entrega de las respuestas. No es necesario que se haga una presentación de los resultados, se sugiere conversar sobre las dificultades y obstáculos que surgen en cada rol.

Actividad de desempeño 2

Propósito

Esta actividad busca que el estudiante varíe parámetros y condiciones iniciales que afectan al modelo en una situación de ahorro y desarrollo de un capital que tiene como fin el ser utilizado luego como pensión. El modelo utilizado de cambio porcentual es calculado paso a paso, de manera recursiva y calculando primero el monto que se obtiene de la cotización mensual. Se sugiere apoyar los cálculos con una planilla con filas de mes a mes, esto permitirá comprender lo que ocurre con el desarrollo de un ahorro previsional. Se considera el concepto de variar parámetros y de mantener condiciones iniciales a través del tiempo para facilitar la comprensión, para los estudiantes con mayor habilidad en el uso de la planilla de cálculo, estas condiciones iniciales pueden ser modificadas en el desarrollo del capital.

Objetivos de Aprendizaje

OA7. Variar parámetros o condiciones, comparando los cambios en los resultados obtenidos y pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

- Interés compuesto.
- Ahorro previsional.
- Planilla de cálculo.

Tiempo estimado

- 6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que verifique los siguientes criterios:

- Relacionar el porcentaje con una fracción de denominador 100.
- Representar el porcentaje como un número decimal.
- Calcular porcentajes para determinar el porcentaje, la cantidad porcentual y la cantidad total.
- Aplicar la noción de interés compuesto.
- Reconocer los términos pensión y administradora de fondos.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes el caso de un trabajador que cotiza mensualmente para generar un capital para luego sacar el dinero mes a mes como un sueldo. Esta situación de ahorro se modela en base al crecimiento porcentual constante en forma recursiva, al cual se agrega mes a mes las cotizaciones mensuales.



Les pide comentar y conversar en base a las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se genera el dinero que se recibe mes a mes en la vejez?
- ¿Cómo podemos describir este desarrollo de capital?
- ¿Cómo saber cuánto tendremos de capital a los 67 años?

Conexión interdisciplinar

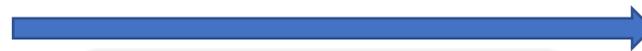
Educación financiera
OA2, OA3 y OA4
Nivel 1 y 2 EM

Construcción de conocimiento

Para introducir el concepto de incremento de capital y cotización mensual para la pensión, se sugiere aclarar primero los supuestos iniciales y explicar que estos supuestos se consideran para simplificar el modelo que se trabajara en clases. Se sugiere, aclarar que normalmente las tasas de interés varían en el periodo de tiempo, hay ciertos gastos de comisiones de la entidad que administra los fondos, que además podrían existir lagunas en la cotización, es decir, periodos en que la persona no pudo cotizar y que hay variaciones en los porcentajes de cotización.

¿Cómo podemos describir el desarrollo de esta situación?

- Tasa de intereses constante sobre todo el período de cotización.
- Todos los gastos de comisiones están incluidos en la tasa de intereses.
- No hay períodos sin cotización.
- Renta imponible constante sobre el período de cotización.
- Porcentaje de cotización constante sobre la renta imponible.



- Renta imponible de \$1 000 000.
- Porcentaje de cotización de 10%.
- Intereses mensuales de 0,4%.



Para guiar a los estudiantes en la elaboración de respuestas, se sugiere ejemplificar las posibles respuestas a las preguntas que permiten comenzar con la elaboración de una planilla de cálculos, por ejemplo:

Pregunta	Respuesta esperada
¿Cuál es la renta imponible?	\$1 000 000
¿Cuál es el 10% que se debe cotizar?	$\$1\,000\,000 \cdot 0,10 = \$100\,000$
¿Cuál es el capital inicial?	\$100 000
¿Cuál es el monto del capital cuando se le ha aplicado el interés?	$\$100\,000 \cdot (1 + 0,004) = \$100\,400$
¿Cuál es el capital inicial al segundo mes?	$\$100\,000 + \$100\,400 = \$200\,400$
¿Cuál es el monto del capital cuando se le ha aplicado el interés?	$\$200\,400 \cdot (1 + 0,004) = \$201\,202$
¿Cómo continuar con el tercer mes?	Considerando el capital anterior \$201 202 , agregando los \$100 000 de cotización y volviendo a calcular el interés de un 0,4% .

Práctica guiada

Para guiar la variación en el desarrollo de un capital, al cual se le aumenta mes a mes una cantidad, en este caso, un aumento del 10% del sueldo bruto de \$1 000 000, y comprender el método recursivo, se sugiere utilizar la planilla de cálculo, basándose en una estructura por partes y con mayores detalles:

Periodo (mes)	Capital del ahorro al inicio del mes	Intereses al final del mes	Nuevo capital	Nueva cotización
1	\$100 000	\$400	\$100 400	\$100 000
2	Sumar el nuevo capital con la nueva cotización (en la planilla de cálculo sería la fórmula $D2 + E2$)	Calcular el interés, en este caso de 0,4% (en la planilla de cálculo sería $0,004 \cdot B3$)	Sumar el capital del ahorro al inicio del mes con los intereses al final del mes (en la planilla de cálculo sería $C3 + B3$)	Calcular el 10% del sueldo

Se sugiere combinar el uso de tablas y de calculadora para apoyar el trabajo con la planilla de cálculo y el uso de fórmulas, es necesario que se comprenda por qué se pone en cada celda los valores y lo que quieren indicar cada uno de ellos. Para motivar el desarrollo de una cierta cantidad de meses, se sugiere presentar preguntas del tipo ¿Cuál es el capital que se tiene al final del primer año? ¿y del segundo año?

11	1 122 237	4 489	1 126 726	100 000
12	1 226 726	4 907	1 231 633	100 000
13	1 331 633	5 327	1 336 960	100 000
14	1 436 960	5 748	1 442 708	100 000
15	1 542 708	6171	1 548 879	100 000
16	1 648 879	6596	1 655 475	100 000
17	1 755 475	7 022	1 762 497	100 000
18	1 862 497	7 450	1 869 947	100 000
19	1 969 947	7 880	1 977 827	100 000
20	2 077 827	8 311	2 086 138	100 000
21	2 186 138	8 745	2 194 883	100 000
22	2 294 883	9 180	2 304 063	100 000
23	2 404 063	9 616	2 413 679	100 000
24	2 513 679	10 055	2 523 734	100 000

También se sugiere contrastar el monto obtenido con la suma de las 24 cotizaciones que se habría obtenido sin intereses para ver cuánto se ha ganado $\$2\,523\,734 - \$2\,400\,000 = \$123\,734$ en intereses. Comparar el desarrollo por medio de gráficos y dependiendo del tiempo, se sugiere comparar por medio de la elaboración de un gráfico de una función afín con el cual se estima el desarrollo de las puras cotizaciones sin considerar los intereses.

Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo personal de elaboración del desarrollo de un ahorro previsional, considerando cotizaciones en el fondo E del tipo más conservador en un período de 36 años laborales bajo las siguientes suposiciones de simplificación:

- Al capital inicial se agrega siempre la cotización anual.
- Intereses anuales de 4,8% (factor anual de crecimiento de 1,048, que corresponde a $100\% + 4,8\% = 1,00 + 0,048$).
- Aumento anual del sueldo de 1% que lleva a un factor de crecimiento de 1,58.
- Capital inicial anual $C_0 = \$720\,000$ que corresponde a un sueldo mensual de $\$600\,000$ con 10% de cotización, que equivale a $\$60\,000$ por 12 meses.

Se espera un desarrollo año a año con una tabla similar a la siguiente:

$C(1) = 720\,000 \cdot 1,058 = 761\,760$	$761\,760 + 720\,000 = 1\,481\,760$
$C(2) = 1\,481\,760 \cdot 1,058 = 1\,567\,702$	$1\,567\,702 + 720\,000 = 2\,287\,702$
$C(3) = 2\,287\,702 \cdot 1,058 = 2\,420\,389$	$2\,420\,389 + 720\,000 = 3\,140\,389$
$C(4) = 3\,140\,389 \cdot 1,058 = 3\,322\,531$	$3\,322\,531 + 720\,000 = 4\,042\,531$

$C(5) = 4\,042\,531 \cdot 1,058 = 4\,276\,998$	$4\,276\,998 + 720\,000 = 4\,996\,998$
$C(6) = 4\,996\,998 \cdot 1,058 = 5\,286\,824$	$5\,286\,824 + 720\,000 = 6\,006\,824$
$C(7) = 6\,006\,824 \cdot 1,058 = 6\,355\,220$	$6\,355\,220 + 720\,000 = 7\,075\,220$
$C(8) = 7\,075\,220 \cdot 1,058 = 7\,485\,582$	$7\,485\,582 + 720\,000 = 8\,205\,582$
$C(9) = 8\,205\,582 \cdot 1,058 = 8\,681\,506$	$8\,681\,506 + 720\,000 = 9\,401\,506$
$C(10) = 9\,401\,506 \cdot 1,058 = 9\,946\,793$	$9\,946\,793 + 720\,000 = 10\,666\,793$
$C(11) = 10\,666\,793 \cdot 1,058 = 11\,285\,466$	$11\,285\,466 + 720\,000 = 12\,005\,466$
$C(12) = 12\,005\,466 \cdot 1,058 = 12\,701\,783$	$12\,701\,783 + 720\,000 = 13\,421\,783$
$C(13) = 13\,421\,783 \cdot 1,058 = 14\,200\,246$	$14\,200\,246 + 720\,000 = 14\,920\,246$
$C(14) = 14\,920\,246 \cdot 1,058 = 15\,785\,620$	$15\,785\,620 + 720\,000 = 16\,505\,620$
$C(15) = 16\,505\,620 \cdot 1,058 = 17\,462\,945$	$17\,462\,945 + 720\,000 = 18\,182\,945$
$C(16) = 18\,182\,945 \cdot 1,058 = 19\,237\,555$	$19\,237\,555 + 720\,000 = 19\,957\,555$
$C(17) = 19\,957\,555 \cdot 1,058 = 21\,115\,093$	$21\,115\,093 + 720\,000 = 21\,835\,093$
$C(18) = 21\,835\,093 \cdot 1,058 = 23\,101\,528$	$23\,101\,528 + 720\,000 = 23\,821\,528$
$C(19) = 23\,821\,528 \cdot 1,058 = 25\,203\,176$	$25\,203\,176 + 720\,000 = 25\,923\,176$
$C(20) = 25\,923\,176 \cdot 1,058 = 27\,426\,720$	$27\,426\,720 + 720\,000 = 28\,146\,720$
$C(21) = 28\,146\,720 \cdot 1,058 = 29\,779\,229$	$29\,779\,229 + 720\,000 = 30\,499\,229$
$C(22) = 30\,499\,229 \cdot 1,058 = 32\,268\,184$	$32\,268\,184 + 720\,000 = 32\,988\,184$
$C(23) = 32\,988\,184 \cdot 1,058 = 34\,901\,498$	$34\,901\,498 + 720\,000 = 35\,621\,498$
$C(24) = 35\,621\,498 \cdot 1,058 = 37\,687\,544$	$37\,687\,544 + 720\,000 = 38\,407\,544$
$C(25) = 38\,407\,544 \cdot 1,058 = 40\,635\,181$	$40\,635\,181 + 720\,000 = 41\,355\,181$
$C(26) = 41\,355\,181 \cdot 1,058 = 43\,753\,781$	$43\,753\,781 + 720\,000 = 44\,473\,781$
$C(27) = 44\,473\,781 \cdot 1,058 = 47\,053\,260$	$47\,053\,260 + 720\,000 = 47\,773\,260$
$C(28) = 47\,773\,260 \cdot 1,058 = 50\,544\,109$	$50\,544\,109 + 720\,000 = 51\,264\,109$
$C(29) = 51\,264\,109 \cdot 1,058 = 54\,237\,427$	$54\,237\,427 + 720\,000 = 54\,957\,427$
$C(30) = 54\,957\,427 \cdot 1,058 = 58\,144\,957$	$58\,144\,957 + 720\,000 = 58\,864\,957$
$C(31) = 58\,864\,957 \cdot 1,058 = 62\,279\,124$	$62\,279\,124 + 720\,000 = 62\,999\,124$
$C(32) = 62\,999\,124 \cdot 1,058 = 66\,653\,073$	$66\,653\,073 + 720\,000 = 67\,373\,073$
$C(33) = 67\,373\,073 \cdot 1,058 = 71\,280\,711$	$71\,280\,711 + 720\,000 = 72\,000\,711$
$C(34) = 72\,000\,711 \cdot 1,058 = 76\,176\,752$	$76\,176\,752 + 720\,000 = 76\,896\,752$
$C(35) = 76\,896\,752 \cdot 1,058 = 81\,356\,763$	$81\,356\,763 + 720\,000 = 82\,076\,763$
$C(36) = 82\,076\,763 \cdot 1,058 = 86\,837\,215$	$86\,837\,215 + 720\,000 = 87\,557\,215$

Para conversar sobre el monto final obtenido y el tipo de comportamiento del capital en los 36 años, se sugiere el apoyo con un gráfico, por ejemplo, un gráfico del tipo:



Para retroalimentar la actividad personal del desarrollo del capital en tablas o en planillas de cálculo, se sugiere utilizar la estrategia mentalidad de crecimiento:



MENTALIDAD DE CRECIMIENTO



Mis Logros fueron:	Mis errores que me ayudaron a mejorar fueron:	¿Qué haré para seguir mejorando?
<ul style="list-style-type: none"> Elaborar la tabla utilizando la calculadora. Elaborar la planilla de cálculo. Desarrollar el capital de manera recursiva, comprendiendo el cálculo de intereses del mes o del año anterior. 	<ul style="list-style-type: none"> Tratar de elaborar las fórmulas en la planilla Excel. Fijarme en los resultados al trabajar con la calculadora. Reconocer que debe ir en aumento el desarrollo del capital. 	<ul style="list-style-type: none"> Variar las condiciones iniciales. Replicar el mismo procedimiento, pero con un sueldo más bajo o más alto. Graficar para comparar más fácilmente.

<https://www.curriculumnacional.cl/porta1/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Datos iniciales del capital	Determina porcentajes y realiza adiciones.	Determina la cantidad a cotizar y calcula los intereses asociados.	Determina la cantidad a cotizar, calcula los intereses asociados y determina el valor del nuevo capital sumando las cantidades correspondientes.
Consideraciones del proceso de desarrollo del capital	Elabora una tabla o planilla que transcurre en el tiempo, reconociendo que hay un desarrollo del capital en meses o en años.	Elabora una tabla o planilla que transcurre en el tiempo, identificando cálculos que requieren de los meses o años anteriores.	Elabora una tabla o planilla que transcurre en el tiempo, aplicando la noción de recursividad para determinar el desarrollo del capital en meses o años anteriores.
Variaciones	Identifica cambios en los montos y porcentajes dados en las condiciones iniciales.	Determina el desarrollo del capital según las nuevas condiciones dadas.	Determina el desarrollo del capital variando las condiciones y conjeturando sobre el posible desarrollo del capital.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que variar parámetros y condiciones tiene en esta actividad una incidencia sobre el modelo y sobre las condiciones iniciales que son dadas o que nuevamente pueden ser variadas. Por una parte, el modelo recursivo utilizado tiene una variación con respecto al modelo de la actividad 1, en este se agrega mes a mes o año a año una nueva cantidad, denominada cotización, sobre la cual se vuelve a calcular intereses. Por otra parte, se tienen las variaciones relacionadas con el sueldo sobre el cual se hace el desarrollo del capital que a su vez podría variar a través de los años según antigüedad en el trabajo; variación asociada a la cantidad de tiempo que se desarrolla el capital, que se relaciona con el tiempo de trabajo de una persona, y la variación de los porcentajes, que pueden estar asociados a la cotización o a los intereses. Se sugiere tener presente como docente la diferencia entre la variación del modelo utilizado y las variaciones de condiciones al momento de construir el conocimiento, relevando en ese momento la diferencia con el modelo utilizado en la actividad 1.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de perseverancia y proactividad se sugiere promover la entrega de tablas y planillas completas. Ser perseverante en matemática significa realizar una tarea a pesar de que haya obstáculos, el docente podría motivar al estudiante para realizar preguntas que lo ayuden a comprender donde están sus propios obstáculos y que parte del desarrollo del capital está en la nebulosa y se transforma en obstáculo. El uso de la planilla de cálculo puede facilitar la entrega de tareas completas, en este caso, se sugiere realizar preguntas para chequear la comprensión de lo realizado. En la elaboración de tablas, permita el uso de la calculadora y promueva la escritura de cada uno de los pasos, esto permitirá observar el procedimiento realizado.

Para apoyar la proactividad en esta actividad, se sugiere dar oportunidades para que los estudiantes incluyan condiciones iniciales relacionadas con su vida personal, por ejemplo, propio sueldo o sueños de sueldo, cantidad de años dedicados al trabajo o ideales de años de trabajo y que consideren porcentajes reales de cotización o de intereses, esto desarrollará la relación entre ser activo en matemática y ser activo en las situaciones de mi propia vida. En la práctica independiente de elaboración del desarrollo de un ahorro previsional, considerando cotizaciones en el fondo E por un período de 36 años laborales, se sugiere pedir a los estudiantes agregar las fórmulas para calcular entre las celdas ya sea utilizando la planilla de cálculo o bien utilizando una tabla de datos y especificando que columna es la que se debería considerar para hacer el cálculo.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo personal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo personal e independiente de otros:



Independencia
Pensando las soluciones y los caminos para obtener soluciones por cuenta propia.



Confianza en lo que se sabe
Generar seguridad en lo que se hace en cada paso. La confianza como facilitador de explicaciones propias y para explicar a otros.



Trabajar a su propio nivel
En ciertos momentos es necesario saber dónde se está y trabajar al propio ritmo.



Practicar la autoregulación
Cada tarea requiere de concentración y de regular en qué momento volverse a un compañero o maestro para pedir ayuda directa.

Actividad de desempeño 3

Propósito

Esta actividad busca que el estudiante desarrolle la fundamentación de conjeturas en una situación de ahorro y desarrollo de un capital, con el fin de utilizarlo luego como pensión y que tiene una recesión temporal o un vacío en las cotizaciones, que podría tener sus orígenes en dejar de trabajar en un periodo de tiempo o un retiro de parte del capital. El modelo utilizado es recursivo y calculado paso a paso, el foco de la actividad se encuentra en hacer un cambio en el desarrollo del capital y fundamentar la conjetura sobre lo que ocurre con el capital que quedó luego de esta recesión, considerando posibilidades que van desde que no hay cambio, cambio leve, cambio con consecuencias leves y cambio con consecuencias dramáticas.

Objetivos de Aprendizaje

OA5. Fundamentar conjeturas usando conocimientos matemáticos, trabajando colaborativamente. **(Argumentar y comunicar)**

Conocimiento esencial

- Interés compuesto.
- Ahorro previsional.
- Planilla de cálculo.

Tiempo estimado

- 6 horas

Diagnóstico

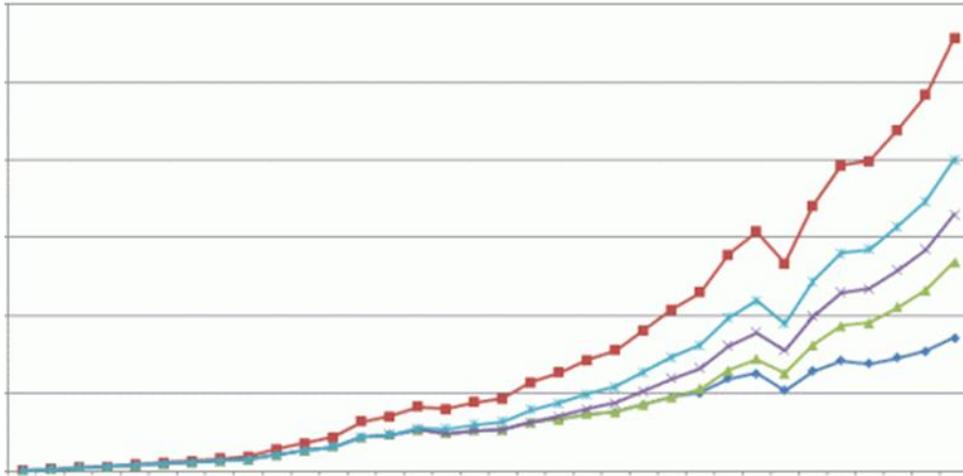
En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que verifique los siguientes criterios:

- Relacionar el porcentaje con una fracción de denominador 100.
- Representar el porcentaje como un número decimal.
- Calcular intereses compuestos por medio del modelo recursivo.
- Reconocer los términos crecimiento y decrecimiento.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta por medio de un gráfico el desarrollo de diferentes capitales, que podrían corresponder a la situación chilena de capitales en tiempo de pandemia y según los diferentes fondos de inversión que se utilizan en la economía nacional. En el gráfico se observa que algo ocurrió con el desarrollo y se sugiere buscar de manera general, que los estudiantes conjeturen sobre este fenómeno real y sus posibles causas.



Les pide comentar y conversar en base a las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se puede describir el desarrollo de estos capitales?
- ¿Qué particularidad tienen las curvas?
- ¿Cómo se puede interpretar esta particularidad?
- ¿Qué pudo haber ocurrido?
- ¿Por qué motivos se puede generar esta caída del capital?

Conexión interdisciplinar

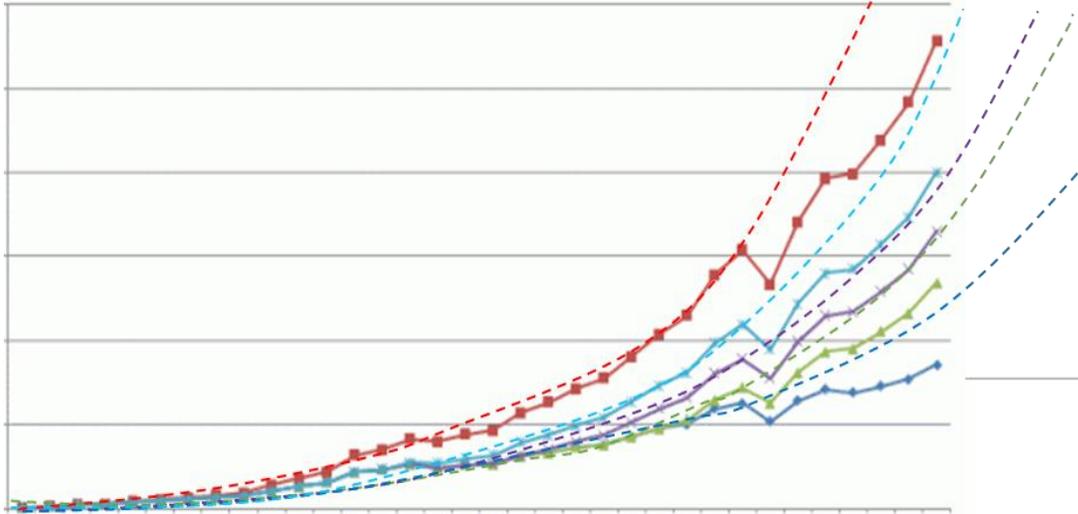
Educación financiera

OA3 y OA4

Nivel 1 y 2 EM

Construcción de conocimiento

Para introducir el fundamento de conjeturas sobre el desarrollo de un capital con fines previsionales, se sugiere incluir la noción de crecimiento más fuerte en comparación con un crecimiento lineal, para describir el desarrollo de un capital con intereses compuestos. Motivar las respuestas a las preguntas anteriores, indicando que se observa una caída, en el mismo año, en los cinco fondos, de manera simultánea y que esto se refleja en una caída de una curva. Conversar sobre las causas indicando que el retroceso o caída, que puede tener su origen en una recesión temporal del trabajo, problemas de economía global o retiro anticipado de una parte de las cotizaciones.



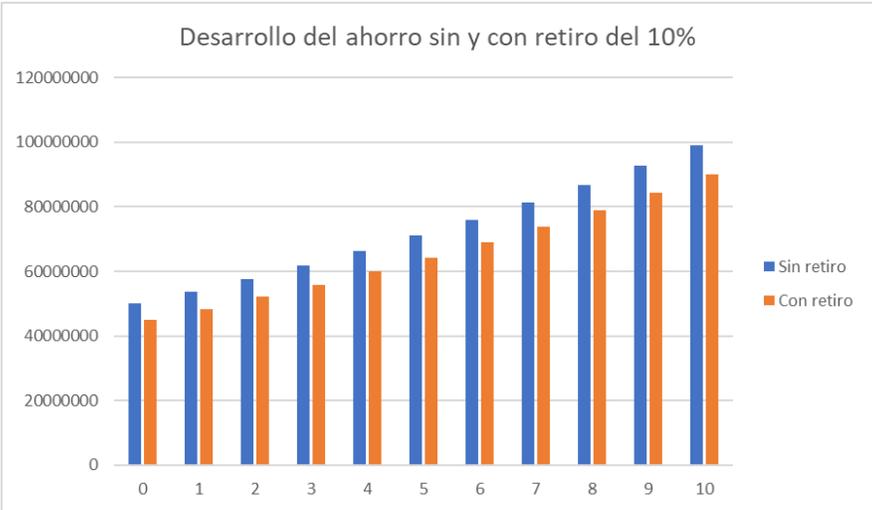
Promover un fundamento visual, dibujando a mano alzada el desarrollo normal que podría haber tenido la curva sin el retiro y conversar en base a esta conjetura de cómo hubiese sido, relevando que se observa que todos los montos hubiesen sido mayores.

Práctica independiente

Para guiar la elaboración de fundamentos para evaluar la validez de conjeturas utilizando modelos recursivos y determinando numéricamente las diferencias en una práctica independiente, se sugiere un trabajo grupal en el cual se conjeture sobre el desarrollo de un capital con el retiro del 10% del capital ahorrado y comparándolo con el desarrollo sin el retiro, por medio de la pregunta guía: ¿Qué pasa con el capital final, si se retira anticipadamente un 10%? bajo las siguientes condiciones:

- Monto ya ahorrado de \$50 000 000.
- Plazo de 10 años para jubilarse.
- Factor de crecimiento anual de 1,06 que incluye 5% de intereses más 1% de aumento del sueldo.
- La cotización es de \$720 000 anual.

Se sugiere organizar las conjeturas en tres grupos: el grupo 1 que conjetura que la diferencia es leve, el grupo 2 que dice que no hay diferencia y el grupo 3 que dice que la diferencia es significativa. Los grupos podrían organizar su trabajo para fundamentar la validez de conjeturas por medio de las siguientes acciones:

Acción	Respuesta esperada																																						
Elaborar una tabla para el desarrollo sin retiro	<table border="1" data-bbox="456 300 1373 674"> <tr> <td>$C(1) = 50\,000 \cdot 1,06 = 53\,000\,000$</td> <td>$53\,000\,000 + 720\,000 = 53\,720\,000$</td> </tr> <tr> <td>$C(2) = 53\,720\,000 \cdot 1,06 = 56\,943\,200$</td> <td>$56\,943\,200 + 720\,000 = 57\,663\,200$</td> </tr> <tr> <td>$C(3) = 57\,663\,200 \cdot 1,06 = 61\,122\,992$</td> <td>$61\,122\,992 + 720\,000 = 61\,842\,992$</td> </tr> <tr> <td>$C(4) = 61\,842\,992 \cdot 1,06 = 65\,553\,571$</td> <td>$65\,553\,571 + 720\,000 = 66\,273\,571$</td> </tr> <tr> <td>$C(5) = 66\,273\,571 \cdot 1,06 = 70\,249\,985$</td> <td>$70\,249\,985 + 720\,000 = 70\,969\,985$</td> </tr> <tr> <td>$C(6) = 70\,969\,985 \cdot 1,06 = 75\,228\,184$</td> <td>$75\,228\,184 + 720\,000 = 75\,948\,184$</td> </tr> <tr> <td>$C(7) = 75\,948\,184 \cdot 1,06 = 80\,505\,075$</td> <td>$80\,505\,075 + 720\,000 = 81\,225\,075$</td> </tr> <tr> <td>$C(8) = 81\,225\,075 \cdot 1,06 = 86\,098\,579$</td> <td>$86\,098\,579 + 720\,000 = 86\,819\,579$</td> </tr> <tr> <td>$C(9) = 86\,819\,579 \cdot 1,06 = 92\,029\,048$</td> <td>$92\,029\,048 + 720\,000 = 92\,749\,048$</td> </tr> <tr> <td>$C(10) = 92\,749\,048 \cdot 1,06 = 98\,313\,991$</td> <td>$98\,313\,991 + 720\,000 = 99\,033\,991$</td> </tr> </table>			$C(1) = 50\,000 \cdot 1,06 = 53\,000\,000$	$53\,000\,000 + 720\,000 = 53\,720\,000$	$C(2) = 53\,720\,000 \cdot 1,06 = 56\,943\,200$	$56\,943\,200 + 720\,000 = 57\,663\,200$	$C(3) = 57\,663\,200 \cdot 1,06 = 61\,122\,992$	$61\,122\,992 + 720\,000 = 61\,842\,992$	$C(4) = 61\,842\,992 \cdot 1,06 = 65\,553\,571$	$65\,553\,571 + 720\,000 = 66\,273\,571$	$C(5) = 66\,273\,571 \cdot 1,06 = 70\,249\,985$	$70\,249\,985 + 720\,000 = 70\,969\,985$	$C(6) = 70\,969\,985 \cdot 1,06 = 75\,228\,184$	$75\,228\,184 + 720\,000 = 75\,948\,184$	$C(7) = 75\,948\,184 \cdot 1,06 = 80\,505\,075$	$80\,505\,075 + 720\,000 = 81\,225\,075$	$C(8) = 81\,225\,075 \cdot 1,06 = 86\,098\,579$	$86\,098\,579 + 720\,000 = 86\,819\,579$	$C(9) = 86\,819\,579 \cdot 1,06 = 92\,029\,048$	$92\,029\,048 + 720\,000 = 92\,749\,048$	$C(10) = 92\,749\,048 \cdot 1,06 = 98\,313\,991$	$98\,313\,991 + 720\,000 = 99\,033\,991$																
$C(1) = 50\,000 \cdot 1,06 = 53\,000\,000$	$53\,000\,000 + 720\,000 = 53\,720\,000$																																						
$C(2) = 53\,720\,000 \cdot 1,06 = 56\,943\,200$	$56\,943\,200 + 720\,000 = 57\,663\,200$																																						
$C(3) = 57\,663\,200 \cdot 1,06 = 61\,122\,992$	$61\,122\,992 + 720\,000 = 61\,842\,992$																																						
$C(4) = 61\,842\,992 \cdot 1,06 = 65\,553\,571$	$65\,553\,571 + 720\,000 = 66\,273\,571$																																						
$C(5) = 66\,273\,571 \cdot 1,06 = 70\,249\,985$	$70\,249\,985 + 720\,000 = 70\,969\,985$																																						
$C(6) = 70\,969\,985 \cdot 1,06 = 75\,228\,184$	$75\,228\,184 + 720\,000 = 75\,948\,184$																																						
$C(7) = 75\,948\,184 \cdot 1,06 = 80\,505\,075$	$80\,505\,075 + 720\,000 = 81\,225\,075$																																						
$C(8) = 81\,225\,075 \cdot 1,06 = 86\,098\,579$	$86\,098\,579 + 720\,000 = 86\,819\,579$																																						
$C(9) = 86\,819\,579 \cdot 1,06 = 92\,029\,048$	$92\,029\,048 + 720\,000 = 92\,749\,048$																																						
$C(10) = 92\,749\,048 \cdot 1,06 = 98\,313\,991$	$98\,313\,991 + 720\,000 = 99\,033\,991$																																						
Elaborar una tabla para el desarrollo con retiro	<p data-bbox="646 768 1187 793">Capital inicial con el retiro del 10% de \$50 000 000</p> <p data-bbox="721 808 1110 833">$0,90 \cdot \\$50\,000\,000 = \\$45\,000\,000$</p> <table border="1" data-bbox="456 846 1373 1220"> <tr> <td>$C(1) = 45\,000\,000 \cdot 1,06 = 47\,700\,000$</td> <td>$47\,700\,000 + 720\,000 = 48\,420\,000$</td> </tr> <tr> <td>$C(2) = 48\,420\,000 \cdot 1,06 = 51\,325\,200$</td> <td>$51\,325\,200 + 720\,000 = 52\,045\,200$</td> </tr> <tr> <td>$C(3) = 52\,045\,200 \cdot 1,06 = 55\,167\,912$</td> <td>$55\,167\,912 + 720\,000 = 55\,887\,912$</td> </tr> <tr> <td>$C(4) = 55\,887\,912 \cdot 1,06 = 59\,241\,186$</td> <td>$59\,241\,186 + 720\,000 = 59\,961\,186$</td> </tr> <tr> <td>$C(5) = 59\,961\,186 \cdot 1,06 = 63\,558\,857$</td> <td>$63\,558\,857 + 720\,000 = 64\,278\,857$</td> </tr> <tr> <td>$C(6) = 64\,278\,857 \cdot 1,06 = 68\,135\,588$</td> <td>$68\,135\,588 + 720\,000 = 68\,855\,588$</td> </tr> <tr> <td>$C(7) = 68\,855\,588 \cdot 1,06 = 72\,986\,923$</td> <td>$72\,986\,923 + 720\,000 = 73\,706\,923$</td> </tr> <tr> <td>$C(8) = 73\,706\,923 \cdot 1,06 = 78\,129\,338$</td> <td>$78\,129\,338 + 720\,000 = 78\,849\,338$</td> </tr> <tr> <td>$C(9) = 78\,849\,338 \cdot 1,06 = 83\,580\,298$</td> <td>$83\,580\,298 + 720\,000 = 84\,300\,298$</td> </tr> <tr> <td>$C(10) = 84\,300\,298 \cdot 1,06 = 89\,358\,315$</td> <td>$89\,358\,315 + 720\,000 = 90\,078\,315$</td> </tr> </table>			$C(1) = 45\,000\,000 \cdot 1,06 = 47\,700\,000$	$47\,700\,000 + 720\,000 = 48\,420\,000$	$C(2) = 48\,420\,000 \cdot 1,06 = 51\,325\,200$	$51\,325\,200 + 720\,000 = 52\,045\,200$	$C(3) = 52\,045\,200 \cdot 1,06 = 55\,167\,912$	$55\,167\,912 + 720\,000 = 55\,887\,912$	$C(4) = 55\,887\,912 \cdot 1,06 = 59\,241\,186$	$59\,241\,186 + 720\,000 = 59\,961\,186$	$C(5) = 59\,961\,186 \cdot 1,06 = 63\,558\,857$	$63\,558\,857 + 720\,000 = 64\,278\,857$	$C(6) = 64\,278\,857 \cdot 1,06 = 68\,135\,588$	$68\,135\,588 + 720\,000 = 68\,855\,588$	$C(7) = 68\,855\,588 \cdot 1,06 = 72\,986\,923$	$72\,986\,923 + 720\,000 = 73\,706\,923$	$C(8) = 73\,706\,923 \cdot 1,06 = 78\,129\,338$	$78\,129\,338 + 720\,000 = 78\,849\,338$	$C(9) = 78\,849\,338 \cdot 1,06 = 83\,580\,298$	$83\,580\,298 + 720\,000 = 84\,300\,298$	$C(10) = 84\,300\,298 \cdot 1,06 = 89\,358\,315$	$89\,358\,315 + 720\,000 = 90\,078\,315$																
$C(1) = 45\,000\,000 \cdot 1,06 = 47\,700\,000$	$47\,700\,000 + 720\,000 = 48\,420\,000$																																						
$C(2) = 48\,420\,000 \cdot 1,06 = 51\,325\,200$	$51\,325\,200 + 720\,000 = 52\,045\,200$																																						
$C(3) = 52\,045\,200 \cdot 1,06 = 55\,167\,912$	$55\,167\,912 + 720\,000 = 55\,887\,912$																																						
$C(4) = 55\,887\,912 \cdot 1,06 = 59\,241\,186$	$59\,241\,186 + 720\,000 = 59\,961\,186$																																						
$C(5) = 59\,961\,186 \cdot 1,06 = 63\,558\,857$	$63\,558\,857 + 720\,000 = 64\,278\,857$																																						
$C(6) = 64\,278\,857 \cdot 1,06 = 68\,135\,588$	$68\,135\,588 + 720\,000 = 68\,855\,588$																																						
$C(7) = 68\,855\,588 \cdot 1,06 = 72\,986\,923$	$72\,986\,923 + 720\,000 = 73\,706\,923$																																						
$C(8) = 73\,706\,923 \cdot 1,06 = 78\,129\,338$	$78\,129\,338 + 720\,000 = 78\,849\,338$																																						
$C(9) = 78\,849\,338 \cdot 1,06 = 83\,580\,298$	$83\,580\,298 + 720\,000 = 84\,300\,298$																																						
$C(10) = 84\,300\,298 \cdot 1,06 = 89\,358\,315$	$89\,358\,315 + 720\,000 = 90\,078\,315$																																						
Comparar por medio de un gráfico	<p data-bbox="656 1293 1175 1318">Desarrollo del ahorro sin y con retiro del 10%</p>  <table border="1" data-bbox="480 1272 1352 1782"> <caption>Data for 'Desarrollo del ahorro sin y con retiro del 10%'</caption> <thead> <tr> <th>Periodo</th> <th>Sin retiro</th> <th>Con retiro</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>50,000,000</td><td>50,000,000</td></tr> <tr><td>1</td><td>53,720,000</td><td>48,420,000</td></tr> <tr><td>2</td><td>57,663,200</td><td>52,045,200</td></tr> <tr><td>3</td><td>61,842,992</td><td>55,887,912</td></tr> <tr><td>4</td><td>66,273,571</td><td>59,961,186</td></tr> <tr><td>5</td><td>70,969,985</td><td>64,278,857</td></tr> <tr><td>6</td><td>75,948,184</td><td>68,855,588</td></tr> <tr><td>7</td><td>81,225,075</td><td>73,706,923</td></tr> <tr><td>8</td><td>86,819,579</td><td>78,849,338</td></tr> <tr><td>9</td><td>92,749,048</td><td>84,300,298</td></tr> <tr><td>10</td><td>99,033,991</td><td>90,078,315</td></tr> </tbody> </table>			Periodo	Sin retiro	Con retiro	0	50,000,000	50,000,000	1	53,720,000	48,420,000	2	57,663,200	52,045,200	3	61,842,992	55,887,912	4	66,273,571	59,961,186	5	70,969,985	64,278,857	6	75,948,184	68,855,588	7	81,225,075	73,706,923	8	86,819,579	78,849,338	9	92,749,048	84,300,298	10	99,033,991	90,078,315
Periodo	Sin retiro	Con retiro																																					
0	50,000,000	50,000,000																																					
1	53,720,000	48,420,000																																					
2	57,663,200	52,045,200																																					
3	61,842,992	55,887,912																																					
4	66,273,571	59,961,186																																					
5	70,969,985	64,278,857																																					
6	75,948,184	68,855,588																																					
7	81,225,075	73,706,923																																					
8	86,819,579	78,849,338																																					
9	92,749,048	84,300,298																																					
10	99,033,991	90,078,315																																					
Elaborar los argumentos	Grupo 1 La diferencia es leve:	Grupo 2 No hay diferencia:	Grupo 3																																				

<p>según fundamentos matemáticos correspondientes a la conjetura de cada grupo</p>	<p>La pensión vitalicia calculada con el capital sin retiro a un 0,4% es de $0,004 \cdot \\$99\ 033\ 991 \approx 396\ 136$</p> <p>La pensión vitalicia calculada con el capital con retiro a un 0,4% es de $0,004 \cdot \\$90\ 078\ 315 \approx 360\ 313$</p> <p>La pensión se disminuiría por \$35 823.</p>	<p>La pensión vitalicia calculada con el capital sin retiro a un 0,4% es de $0,004 \cdot \\$99\ 033\ 991 \approx 396\ 136$</p> <p>La pensión vitalicia calculada con el capital con retiro a un 0,39% es de $0,0045 \cdot \\$90\ 078\ 315 \approx 396\ 345$</p> <p>La pensión aumentaría en \$209.</p>	<p>La diferencia es significativa: El capital final de \$90 078 315 obtenido con el retiro del 10% es menor en \$8 955 676 que el monto final obtenido sin el retiro \$99 033 991 El monto de \$5 000 000 retirado llegaría a una disminución del capital de \$8 955 676 que es mayor que el monto retirado.</p>
--	--	--	--

Se sugiere terminar el trabajo en grupos y la argumentación utilizando fundamentos de cálculos de porcentajes, relevando el hecho de que las decisiones sobre realizar el retiro del 10% responde en cada caso a fines personales de conveniencia y asumiendo en cada caso las ventajas y desventajas de manera responsable.

Para retroalimentar la actividad grupal de elaborar fundamentos para validar conjeturas y comparar los desarrollos de un mismo capital con y sin retiro, se sugiere utilizar la estrategia Valoro - Sugiero:



VALORO - SUGIERO

DURANTE O LUEGO DE LA ACTIVIDAD

VALORO DE TU TRABAJO...

La elaboración de la tabla con tanto detalle, el orden que utilizaste hasta el final.

Que me hayas explicado el paso a paso en cada celda.

TE SUGIERO..

Ser igual de ordenado en la elaboración del gráfico.

Nos faltaron detalles, como el nombre de los ejes.

Continuar explicando, si sigues así podrías llegar a ser profe...

<https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios para cada grupo:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Elaboración de tabla sin retiro	Confeccionan una tabla con datos.	Confeccionan una tabla que corresponde al desarrollo del capital sin retiro.	Confeccionan una tabla que corresponde al desarrollo del capital sin retiro, trabajan los 10 años considerando la cotización del último año.
Elaboración de tabla con retiro	Confeccionan una tabla con datos.	Confeccionan una tabla que corresponde al desarrollo del capital con retiro.	Confeccionan una tabla que corresponde al desarrollo del capital con retiro, realizando el cálculo del retiro, trabajando los 10 años y considerando la cotización del último año.
Comparación en gráficos	Elaboran un gráfico que contiene datos de dos capitales diferentes.	Elaboran un gráfico que representa el desarrollo de dos capitales diferentes con algunas de las condiciones iniciales dadas.	Elaboran un gráfico que representa la comparación visual del desarrollo de un capital sin retiro y otro con retiro de fondos.
Elaboración de fundamentos según la conjetura	Fundamentan utilizando estimaciones sobre la cantidad de años por vivir y dividiendo el capital final en partes iguales según la cantidad de meses.	Fundamentan utilizando la noción de pensión vitalicia y realizando cálculos para apoyar la conjetura del grupo.	Fundamentan utilizando la noción de pensión vitalicia y realizando cálculos y variaciones de condiciones pertinentes para apoyar la conjetura del grupo.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que la fundamentación de conjeturas usando conocimientos matemáticos requiere de la comprensión del desarrollo del capital y de las implicancias que el capital final tiene para elaborar las conjeturas y elaborar fundamentos para validarlas, en esta actividad se hace un proceso guiado que no requiere de la elaboración de conjeturas, centrándose en la fundamentación luego de hacer el desarrollo del capital y de comparar. La fundamentación de conjeturas es parte de las habilidades de comunicar y argumentar, para su desarrollo se sugiere el trabajo colaborativo y además una puesta en escena de los fundamentos. La línea utilizada en el gráfico se utiliza para representar el desarrollo del capital, se debe explicar que no hay valores entre medio, no es un desarrollo continuo en el tiempo.

Este desarrollo no necesariamente se relaciona con el capital invertido en una empresa administradora de pensiones: se puede tratar de un ahorro para fines particulares o un ahorro individual para convertir el capital acumulado en ingresos regulares adicionales. La particularidad de los gráficos que muestren simultáneamente un retroceso en el capital no necesariamente se debe a un retiro anticipado. Puede tratarse de una laguna en la cotización o de una situación económica global que genera pérdidas en el desarrollo del capital.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de trabajar colaborativamente se sugiere integrar la entrega de los resultados parciales, tales como tablas y gráficos. Trabajar colaborativamente en matemática significa resolver problemas por partes, donde cada colaboración que se realiza contribuye a formular una respuesta, y cada idea se evalúa grupalmente para clasificarla o reorientarla según el problema o situación, es decir, es pensar en conjunto sobre los caminos y procedimientos para lograr el objetivo, se sugiere motivar el trabajo colaborativo indicando que todas las ideas y contribuciones son bienvenidas cuando se evalúan entre todos.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo grupal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo grupal en esta actividad:



Colaborar

- 

Actividad dentro del horario de clases, el trabajo colaborativo y cómo ocurre debe ser observado en clases.
- 

Entregar instrucciones precisas sobre lo que se espera al término del trabajo, entregar una rúbrica con los criterios y dejar uno o dos minutos para revisar la comprensión de las instrucciones.
- 

La evaluación es grupal y se sugiere no evaluar hasta que se comprenda que la idea es contribuir para el logro de un objetivo común.
- 

Decida con anterioridad la forma de organizar los grupos, ya sea de forma aleatoria o por coincidir con las propuestas o por nivel de comprensión del tema, considere siempre la cantidad de participantes por grupo y cantidad de la clase.
- 

Decida con anterioridad los momentos en que los participantes del grupo se escuchan y toman las primeras decisiones para organizar lo que hará cada uno, como también el momento en que los grupos se escuchan entre sí.

Actividad de desempeño 4

Propósito

Esta actividad busca que el estudiante exprese ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, tales como las pictóricas y las simbólicas, de situaciones de pensiones, como la pensión vitalicia, la pensión que se retira mes a mes sin generar intereses y la pensión que sigue generando intereses, las dos últimas situaciones se trabajan hasta que se acabe el dinero. Se estudian dos modelos y se expresan las ideas de crecimiento y decrecimiento en un solo desarrollo de capital.

Objetivos de Aprendizaje

OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, valorando el uso de las TIC.
(Representar)

Conocimiento esencial

- Interés compuesto.
- Ahorro previsional.
- Pensión vitalicia.
- Crédito.

Tiempo estimado

- 6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que verifique los siguientes criterios:

- Relacionar el porcentaje con una fracción de denominador 100.
- Representar el porcentaje como un número decimal.
- Calcular intereses compuestos por medio del modelo recursivo.
- Reconocer los términos crecimiento y decrecimiento.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta la situación de Roberto, un pensionado que ha representado las diferentes evoluciones de un capital y se ha decido por un tipo de pensión, según Roberto, tendrá una buena pensión para el resto de su vida.



El docente les pide comentar y conversar en base a las siguientes preguntas:

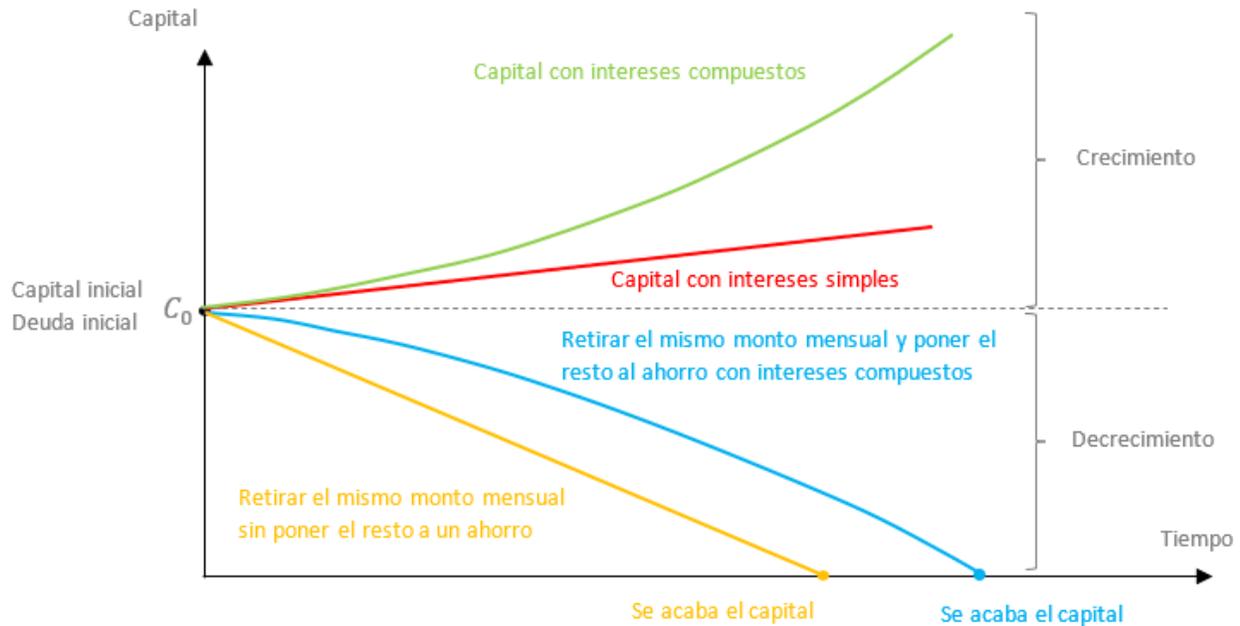
- ¿Cómo disminuye el capital al recibir mes a mes la pensión?
- ¿Qué diferencias hay con la renta vitalicia?
- ¿Qué significa que se sigan generando los intereses?
- ¿Cómo se desarrollan estos capitales al momento de jubilar?

Conexión interdisciplinar

Educación financiera
OA2, OA3 y OA4
Nivel 1 y 2 EM

Construcción del conocimiento

Para construir el conocimiento sobre las diferentes formas de expresar la idea de decrecimiento de un capital, se sugiere comenzar con la descripción de los comportamientos de crecimiento, crecimiento porcentual constante, crecimiento lineal, decrecimiento, decrecimiento lineal y decrecimiento en el cual el capital restante genera ahorros con intereses. Apoyándose con las curvas y líneas que se presentan en el gráfico y asociando cada una de ellas al desarrollo de cuatro capitales C en dependencia del tiempo t , donde los 4 capitales comienzan con un capital inicial de C_0 .



Relevar el decrecimiento que ocurre con el gráfico azul y gráfico verde, preguntando sobre la situación que puede estar detrás de estos y diferenciando entre decrecimiento porcentual constante con el gráfico verde y decrecimiento lineal con el gráfico azul. Comparar las situaciones con las actividades anteriores y los gráficos rojo y amarillo que se refieren a desarrollo de crecimiento del capital.

Precisar sobre la pensión mensual que se puede obtener a la edad de jubilación de 65 años, en la modalidad de pensión vitalicia, la cual se genera actualmente con un 0,4% del capital ahorrado para cada mes, indicando que este porcentaje puede disminuir según el aumento en la expectativa de vida.

¿Cuánto se recibe mes a mes bajo una pensión vitalicia?

Calcular una pensión vitalicia bajo las siguientes condiciones:

- El capital final de las cotizaciones es de \$87 557 215
- Mes de 0,4% del capital ahorrado.

$$0,004 \cdot \$87\,557\,215 \approx \$350\,229$$

La pensión mensual vitalicia es de \$350 229

Práctica guiada

Para guiar la representación del decrecimiento por medio de tablas y gráficos, se sugiere diferenciar las dos situaciones que serán trabajadas, la situación A de retirar todos los meses el mismo monto, asociado al decrecimiento lineal y la situación B asociado a retirar el mismo monto, pero el capital sigue generando intereses.

¿Qué pasaría si decido retirar cada vez un monto un poco más alto y hasta que se me acabe el capital ahorrado?



Considerar para la situación A un capital ahorrado de **\$80 000 000** del cual se retira mensualmente la misma pensión de **\$400 000**. El capital restante no sigue generando ganancias por inversión. La persona está en la edad de jubilación con 65 años.

Acción	Resultado esperado	Preguntas de apoyo
Elabora la función que modela la situación	<p>La variable t representa los años en los cuales se recibe la pensión.</p> <p>Durante un año se recibe de pensión</p> $12 \cdot \$400\,000 = \$4\,800\,000$ <p>El capital inicial es de $C_0 = \\$80\,000\,000$. Con estos datos se determina la ecuación de la función afín.</p> $C(t) = 80\,000\,000 - 4\,800\,000 \cdot t$	<p>¿Qué tipo de decrecimiento es este?</p> <p>¿Qué variable se debe considerar?</p> <p>¿Qué significado se da a la palabra lineal en este contexto?</p> <p>¿Se consideran meses o años?, ¿Qué es más conveniente?</p> <p>¿Qué cantidad va disminuyendo?</p>
Elabora un gráfico para ver la cantidad de años en que se acaba el capital.		<p>¿Cómo podemos visualizar mejor el comportamiento del capital año a año?</p> <p>¿Qué significa el corte con el eje X?</p> <p>¿Qué significa el corte con el eje Y?</p> <p>¿De qué otras maneras puedo determinar la cantidad de años en que se acaba el capital?</p>
Verifica por medio de cálculos	$C(t) = 0$ $0 = 80\,000\,000 - 4\,800\,000 \cdot t$ $4\,800\,000 \cdot t = 80\,000\,000$ $t = 16,6$	<p>¿Cómo podemos verificar el resultado obtenido en el gráfico?</p> <p>¿Qué debemos reemplazar en la función?</p> <p>¿Qué detalles nos entrega el cálculo que no se puede obtener desde el gráfico?</p>

<p>Elabora las respuestas</p>	<p>En el año n°16 se acaba el capital y si se tiene 65 años, al momento que se acabe el capital la persona podría tener 81 años, según la esperanza de vida actual en Chile, le queda aún 1 año por vivir, si es mujer y si fuera hombre habría perdido dinero.</p> <p>El modelo no considera que en realidad el capital restante generará ganancias que alargarán la duración de la pensión.</p>	<p>¿Qué decisión se debería tomar considerando la expectativa de vida?</p> <p>¿Qué no se considera en el modelo?</p>
-------------------------------	---	--

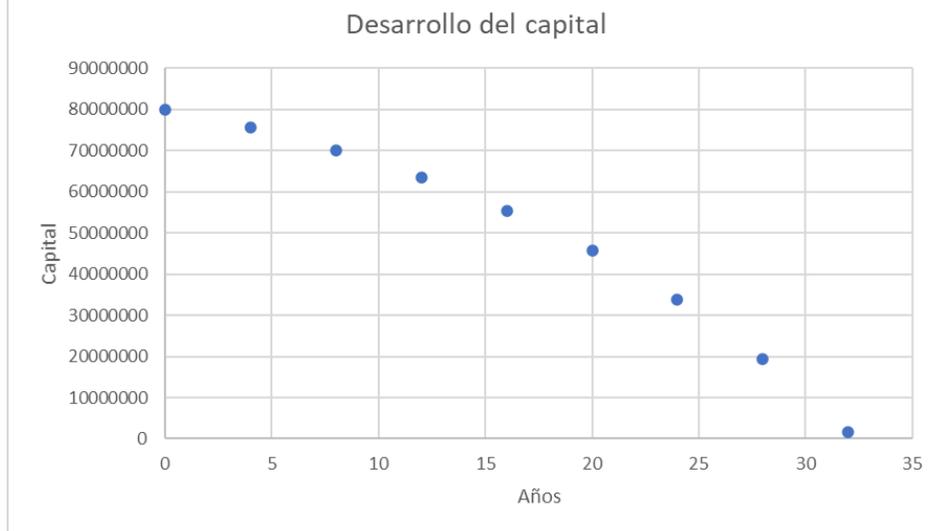
Práctica independiente

Se sugiere realizar un trabajo personal considerando la situación B en el cual se retira mensualmente la pensión, pero el capital disminuido se sigue invirtiendo en el mercado financiero logrando ganancias anuales de un 5%. Se calcula con una pensión de \$400 000, calculando los intereses anuales en vez de intereses mensuales y la tasa de interés se considera constante sobre todo el periodo de tiempo.

Acción	Resultado esperado																																							
<p>Elaboración de la función que modela la situación</p>	<p>El capital en disminución C se modela mediante la función afín con la ecuación</p> $C(t) = 80\,000\,000 - 4\,800\,000 \cdot t$ <p>La variable t representa los años y el monto de \$4 800 000 equivale al retiro anual de \$400 000 mensuales.</p> <p>El desarrollo del capital restante y siempre disminuido K se modela mediante la ecuación</p> $K(t) = C(t) \cdot 1,05. \text{ (5\% intereses anuales } 100\% + 5\% = 1,05)$ $C(1) = 80\,000\,000 - 4\,800\,000 \cdot 1 = 75\,200\,000$ $K(1) = 75\,200\,000 \cdot 1,05 = 78\,960\,000$																																							
<p>Verificación por medio de cálculos recursivos</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Año</th> <th>Capital restante $C(t)$ en \$</th> <th>Capital $K(t)$ restante aumentado por intereses en \$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>80 000 000</td> <td>-----</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>$80\,000\,000 - 4\,800\,000 = 75\,200\,000$</td> <td>$75\,200\,000 \cdot 1,05 = 78\,960\,000$</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>$78\,960\,000 - 4\,800\,000 = 74\,160\,000$</td> <td>$74\,160\,000 \cdot 1,05 = 77\,868\,000$</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>$77\,868\,000 - 4\,800\,000 = 73\,068\,000$</td> <td>$73\,068\,000 \cdot 1,05 = 76\,721\,400$</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>$76\,721\,400 - 4\,800\,000 = 71\,921\,400$</td> <td>$71\,921\,400 \cdot 1,05 = 75\,517\,470$</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>$75\,517\,470 - 4\,800\,000 = 70\,717\,470$</td> <td>$70\,717\,470 \cdot 1,05 = 74\,253\,344$</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>$74\,253\,344 - 4\,800\,000 = 69\,453\,344$</td> <td>$69\,453\,344 \cdot 1,05 = 72\,926\,011$</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>$72\,926\,011 - 4\,800\,000 = 68\,126\,011$</td> <td>$68\,126\,011 \cdot 1,05 = 71\,532\,312$</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>$71\,532\,312 - 4\,800\,000 = 67\,732\,312$</td> <td>$67\,732\,312 \cdot 1,05 = 70\,068\,928$</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>$70\,068\,928 - 4\,800\,000 = 65\,268\,928$</td> <td>$65\,268\,928 \cdot 1,05 = 68\,532\,374$</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>$68\,532\,374 - 4\,800\,000 = 63\,732\,374$</td> <td>$63\,732\,374 \cdot 1,05 = 66\,918\,993$</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>$66\,918\,993 - 4\,800\,000 = 62\,118\,993$</td> <td>$62\,118\,993 \cdot 1,05 = 65\,224\,943$</td> </tr> </tbody> </table>	Año	Capital restante $C(t)$ en \$	Capital $K(t)$ restante aumentado por intereses en \$	0	80 000 000	-----	1	$80\,000\,000 - 4\,800\,000 = 75\,200\,000$	$75\,200\,000 \cdot 1,05 = 78\,960\,000$	2	$78\,960\,000 - 4\,800\,000 = 74\,160\,000$	$74\,160\,000 \cdot 1,05 = 77\,868\,000$	3	$77\,868\,000 - 4\,800\,000 = 73\,068\,000$	$73\,068\,000 \cdot 1,05 = 76\,721\,400$	4	$76\,721\,400 - 4\,800\,000 = 71\,921\,400$	$71\,921\,400 \cdot 1,05 = 75\,517\,470$	5	$75\,517\,470 - 4\,800\,000 = 70\,717\,470$	$70\,717\,470 \cdot 1,05 = 74\,253\,344$	6	$74\,253\,344 - 4\,800\,000 = 69\,453\,344$	$69\,453\,344 \cdot 1,05 = 72\,926\,011$	7	$72\,926\,011 - 4\,800\,000 = 68\,126\,011$	$68\,126\,011 \cdot 1,05 = 71\,532\,312$	8	$71\,532\,312 - 4\,800\,000 = 67\,732\,312$	$67\,732\,312 \cdot 1,05 = 70\,068\,928$	9	$70\,068\,928 - 4\,800\,000 = 65\,268\,928$	$65\,268\,928 \cdot 1,05 = 68\,532\,374$	10	$68\,532\,374 - 4\,800\,000 = 63\,732\,374$	$63\,732\,374 \cdot 1,05 = 66\,918\,993$	11	$66\,918\,993 - 4\,800\,000 = 62\,118\,993$	$62\,118\,993 \cdot 1,05 = 65\,224\,943$
Año	Capital restante $C(t)$ en \$	Capital $K(t)$ restante aumentado por intereses en \$																																						
0	80 000 000	-----																																						
1	$80\,000\,000 - 4\,800\,000 = 75\,200\,000$	$75\,200\,000 \cdot 1,05 = 78\,960\,000$																																						
2	$78\,960\,000 - 4\,800\,000 = 74\,160\,000$	$74\,160\,000 \cdot 1,05 = 77\,868\,000$																																						
3	$77\,868\,000 - 4\,800\,000 = 73\,068\,000$	$73\,068\,000 \cdot 1,05 = 76\,721\,400$																																						
4	$76\,721\,400 - 4\,800\,000 = 71\,921\,400$	$71\,921\,400 \cdot 1,05 = 75\,517\,470$																																						
5	$75\,517\,470 - 4\,800\,000 = 70\,717\,470$	$70\,717\,470 \cdot 1,05 = 74\,253\,344$																																						
6	$74\,253\,344 - 4\,800\,000 = 69\,453\,344$	$69\,453\,344 \cdot 1,05 = 72\,926\,011$																																						
7	$72\,926\,011 - 4\,800\,000 = 68\,126\,011$	$68\,126\,011 \cdot 1,05 = 71\,532\,312$																																						
8	$71\,532\,312 - 4\,800\,000 = 67\,732\,312$	$67\,732\,312 \cdot 1,05 = 70\,068\,928$																																						
9	$70\,068\,928 - 4\,800\,000 = 65\,268\,928$	$65\,268\,928 \cdot 1,05 = 68\,532\,374$																																						
10	$68\,532\,374 - 4\,800\,000 = 63\,732\,374$	$63\,732\,374 \cdot 1,05 = 66\,918\,993$																																						
11	$66\,918\,993 - 4\,800\,000 = 62\,118\,993$	$62\,118\,993 \cdot 1,05 = 65\,224\,943$																																						

12	$65\,224\,943 - 4\,800\,000 = 60\,424\,943$	$60\,424\,943 \cdot 1,05 = 63\,446\,190$
13	$63\,446\,190 - 4\,800\,000 = 58\,646\,190$	$58\,646\,190 \cdot 1,05 = 61\,578\,500$
14	$61\,578\,500 - 4\,800\,000 = 56\,778\,500$	$56\,778\,500 \cdot 1,05 = 59\,617\,425$
15	$59\,617\,425 - 4\,800\,000 = 54\,817\,425$	$54\,817\,425 \cdot 1,05 = 57\,558\,296$
16	$57\,558\,296 - 4\,800\,000 = 52\,758\,296$	$52\,758\,296 \cdot 1,05 = 55\,396\,211$
17	$55\,396\,211 - 4\,800\,000 = 50\,596\,211$	$50\,596\,211 \cdot 1,05 = 53\,126\,022$
18	$53\,126\,022 - 4\,800\,000 = 48\,326\,022$	$48\,326\,022 \cdot 1,05 = 50\,742\,323$
19	$50\,742\,323 - 4\,800\,000 = 45\,942\,323$	$45\,942\,323 \cdot 1,05 = 48\,239\,439$
20	$48\,239\,439 - 4\,800\,000 = 43\,439\,439$	$43\,439\,439 \cdot 1,05 = 45\,611\,411$
21	$45\,611\,411 - 4\,800\,000 = 40\,811\,411$	$40\,811\,411 \cdot 1,05 = 42\,851\,982$
22	$42\,851\,982 - 4\,800\,000 = 38\,051\,982$	$38\,051\,982 \cdot 1,05 = 39\,954\,581$
23	$39\,954\,581 - 4\,800\,000 = 35\,154\,581$	$35\,154\,581 \cdot 1,05 = 36\,912\,311$
24	$36\,912\,311 - 4\,800\,000 = 32\,112\,311$	$32\,112\,311 \cdot 1,05 = 33\,717\,927$
25	$33\,717\,927 - 4\,800\,000 = 28\,917\,927$	$28\,917\,927 \cdot 1,05 = 30\,363\,823$
26	$30\,363\,823 - 4\,800\,000 = 25\,563\,823$	$25\,563\,823 \cdot 1,05 = 26\,842\,014$
27	$26\,842\,014 - 4\,800\,000 = 22\,042\,014$	$22\,042\,014 \cdot 1,05 = 23\,144\,115$
28	$23\,144\,115 - 4\,800\,000 = 18\,344\,115$	$18\,344\,115 \cdot 1,05 = 19\,261\,321$
29	$19\,261\,321 - 4\,800\,000 = 14\,461\,321$	$14\,461\,321 \cdot 1,05 = 15\,184\,387$
30	$15\,184\,387 - 4\,800\,000 = 10\,384\,387$	$10\,384\,387 \cdot 1,05 = 10\,903\,606$
31	$10\,903\,606 - 4\,800\,000 = 6\,103\,606$	$6\,103\,606 \cdot 1,05 = 6\,408\,786$
32	$6\,408\,786 - 4\,800\,000 = 1\,608\,786$	$1\,608\,786 \cdot 1,05 = 1\,689\,225$
33	$1\,689\,225 - 4\,800\,000 = -3\,110\,775$	

Elaboración de un gráfico para representar la situación



Elaboración de respuestas

Luego de 33 años se acaba el capital y si se tiene 65 años, al momento que se acabe el capital la persona podría tener 98 años, según la esperanza de vida actual en Chile, para mujeres de 82 años y para hombres de 77 años, se podría pensar en un ajuste del retiro mensual, aumentándolo un poco más.

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Elabora la función que modela la situación	Elabora una ecuación que tiene información de la situación.	Elabora una ecuación que corresponde a la información de la situación.	Elabora una ecuación que corresponde a la información de las diferentes situaciones.
Verificación	Elabora una planilla de cálculo o tabla con datos.	Elabora una planilla de cálculo o tabla con datos que corresponde a la situación.	Elabora una planilla de cálculo o tabla con datos que corresponde a la función.
Elaboración de gráficos	Elabora un gráfico utilizando algunos datos.	Elabora un gráfico utilizando los datos de la situación.	Elabora un gráfico que permite hacer predicciones sobre el desarrollo del capital según la situación.
Elaboración de respuestas	Escribe una frase de respuesta incluyendo algunos datos.	Elabora una respuesta utilizando parte de los datos que se han calculado previamente.	Elabora una respuesta utilizando los datos obtenidos en pasos anteriores y complementa con información relevante según la situación.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que la habilidad de representar implica expresar ideas matemáticas de diferentes formas y transferir desde un tipo de representación a otra. En este caso la idea matemática a representar es el decrecimiento y se distingue entre el caso decrecimiento lineal y decrecimiento no lineal, que corresponde a un decrecimiento exponencial. Se sugiere no incluir la terminología de exponencial dado que esta función será tratada en otro módulo.

Actitudes: El desarrollo de la actitud de valorar el uso de las TIC para representar y compartir la información se puede integrar en esta actividad por medio del uso de tecnologías que faciliten el tratamiento de la información. También, se puede integrar alguna tecnología de comunicación que permita compartir el trabajo realizado entre los estudiantes de la clase. Eventualmente, se podría integrar una pregunta donde se pueda averiguar algo sobre la esperanza de vida usando TIC.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo personal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo personal e independiente de otros:



Independencia

Pensando las soluciones y los caminos para obtener soluciones por cuenta propia.



Confianza en lo que se sabe

Generar seguridad en lo que se hace en cada paso. La confianza como facilitador de explicaciones propias y para explicar a otros.



Trabajar a su propio nivel

En ciertos momentos es necesario saber dónde se está y trabajar al propio ritmo.



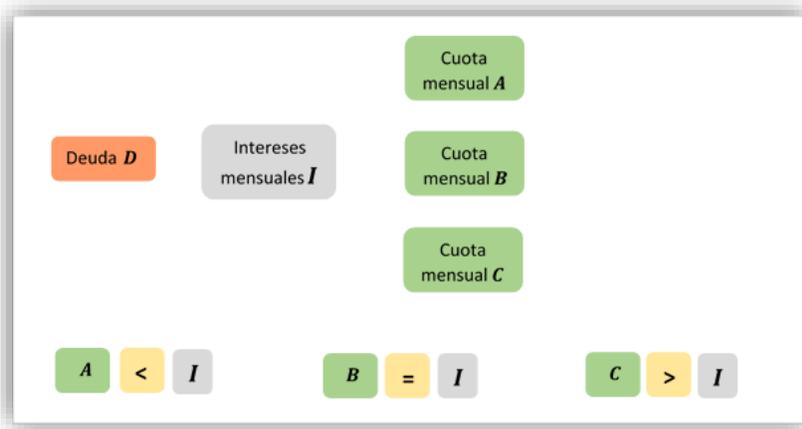
Practicar la autoregulación

Cada tarea requiere de concentración y de regular en qué momento volverse a un compañero o maestro para pedir ayuda directa.

Anexo situaciones

Situación de amortiguación de crédito de consumo

Un crédito es un negocio financiero entre un **prestador** (que presta dinero) y un **prestatario** (que recibe dinero). En los montos de dinero hay tres componentes: la **deuda** (el monto prestado), los **intereses** a pagar mensualmente y la **cuota** para pagar mensualmente. En el esquema de abajo se presentan tres opciones entre las cuotas mensuales **A**, **B**, **C** y los intereses mensuales **I**.



- $A < I$ En este caso la cuota mensual no cubre los intereses y la deuda sigue aumentando con el monto que falta.
- $A = I$ En este caso la cuota mensual cubre los intereses, pero la deuda se mantiene constante.
- $A > I$ En este caso la cuota mensual supera los intereses y con el monto que sobra se reduce paso a paso la deuda hasta llegar a una amortización de la deuda.

Para la renovación de una casa y el ahorro de energía se piensa cambiar todas las ventanas por termo-paneles lo que requiere una inversión de \$5 000 000. Los dueños de la casa consideran tomar un crédito bajo las siguientes condiciones:

- Tasa mensual de interés de 1,5% que se aplica siempre a la deuda restante al inicio del mes en consideración.
- Sin costos laterales, como seguros, gastos notariales, otros.
- La familia piensa poner a disposición una cuota mensual de \$150 000 para amortizar la deuda de \$5 000 000.

Hoja de trabajo

1. Verifica que la cuota de \$150 000 es suficiente para poder amortizar la deuda.

Determinar 1,5% de \$5 000 000.

$$0,015 \cdot \$5\,000\,000 = \$75\,000.$$

Con la cuota mensual de \$150 000 se superan los intereses y con el resto de \$75 000 se reduce la deuda en el primer paso que llega a \$4 925 000.

2. Completa la tabla utilizando el modelo recursivo y la aproximación a la unidad.

Mes	Saldo inicial al mes en \$	Intereses en \$	Amortización en \$	Cuota en \$	Saldo final al mes en \$
1	5 000 000	75 000	75 000	150 000	4 925 000
2	4 925 000	73 875	76 125	150 000	4 848 875
3	4 848 875	72 733	77 267	150 000	4 771 608
4	4 771 608	71 574	78 426	150 000	4 693 182
5	4 693 182	70 398	79 602	150 000	4 613 580
6	4 613 580	69 204	80 796	150 000	4 532 784
7	4 532 784	67 992	82 008	150 000	4 450 776
8	4 450 776	66 762	83 238	150 000	4 367 538
9	4 367 538	65 513	84 487	150 000	4 283 051
10	4 283 051	64 246	85 754	150 000	4 197 297
11	4 197 297	62 959	87 041	150 000	4 110 256
12	4 110 256	61 654	88 346	150 000	4 021 910
13	4 021 910	60 329	89 671	150 000	3 932 239
14	3 932 239	58 984	91 016	150 000	3 841 223
15	3 841 223	57 618	92 382	150 000	3 748 841
16	3 748 841	56 233	93 767	150 000	3 655 074
17	3 655 074	54 826	95 174	150 000	3 559 920
18	3 559 920	53 399	96 601	150 000	3 463 319
19	3 463 319	51 950	98 050	150 000	3 365 269
20	3 365 269	50 479	99 521	150 000	3 265 748
21	3 265 748	48 986	101 014	150 000	3 164 774
22	3 164 774	47 472	102 528	150 000	3 062 246
23	3 062 246	45 934	104 066	150 000	2 958 180
24	2 958 180	44 373	105 627	150 000	2 852 553
25	2 852 553	42 788	107 212	150 000	2 745 341
26	2 745 341	41 180	108 820	150 000	2 636 521
27	2 636 521	39 548	110 452	150 000	2 526 069
28	2 526 069	37 891	112 109	150 000	2 413 960
29	2 413 960	36 209	113 791	150 000	2 300 169
30	2 300 169	34 503	115 497	150 000	2 184 672
31	2 184 672	32 770	117 230	150 000	2 067 442
32	2 067 442	31 012	118 988	150 000	1 948 454
33	1 948 454	29 227	120 773	150 000	1 827 681
34	1 827 681	27 415	122 585	150 000	1 705 096
35	1 705 096	25 576	124 424	150 000	1 580 672
36	1 580 672	23 710	126 290	150 000	1 454 382
37	1 454 382	21 816	128 184	150 000	1 326 198
38	1 326 198	19 893	130 107	150 000	1 196 091
39	1 196 091	17 941	132 059	150 000	1 064 032
40	1 064 032	15 960	134 040	150 000	919 992
41	919 992	13 800	136 200	150 000	783 792
42	783 792	11 757	138 243	150 000	645 549
43	645 549	9 683	140 317	150 000	505 232
44	505 232	7 578	142 422	150 000	362 810
45	362 810	5 442	144 558	150 000	218 252
46	218 252	3 274	146 726	150 000	71 526
47	71 526	1 073		72 599	0

3. Elabora una respuesta para la cantidad de meses o años en que se pagará la deuda.

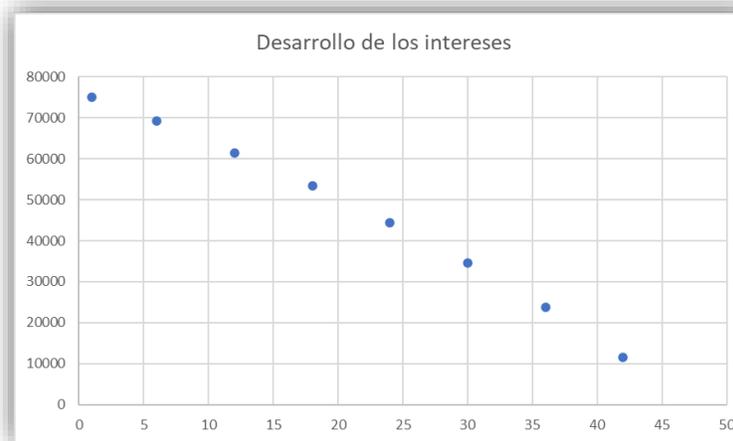
Respuesta: Con el pago de 46 cuotas a \$150 000 más la última cuota de \$72 599 se amortiza la deuda.

4. Elabora un gráfico mediante una planilla de cálculo que representa el desarrollo de la deuda cada 6 meses hasta la amortización para verificar el comentario. (ver 6° columna de la tabla)



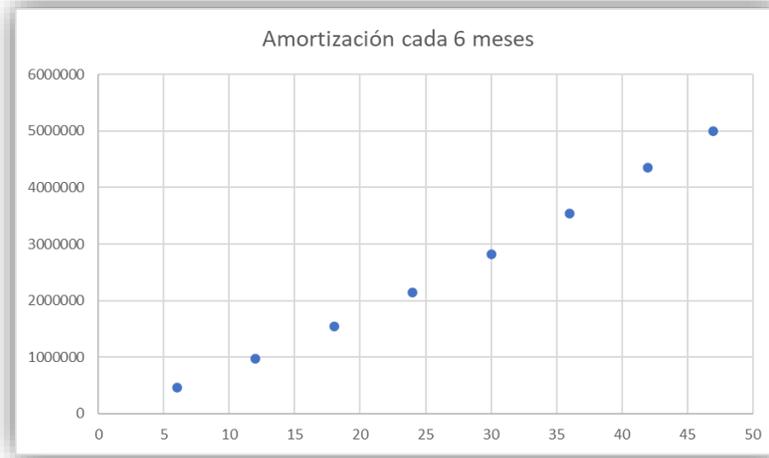
Se verifica que el desarrollo del saldo es decreciente pero no afín.

5. Elabora un gráfico mediante una planilla de cálculo como EXCEL que representa el desarrollo del monto de los intereses cada 6 meses hasta la amortización para verificar el comentario. (Ver la 3° columna de la tabla)



Se verifica que el desarrollo del monto de los intereses es decreciente pero no afín.

6. Elabora un gráfico mediante una planilla de cálculo como EXCEL que representa el desarrollo de las amortizaciones cada 6 meses hasta la amortización de la deuda y descríbelo. (Ver la 4° columna de la tabla)



Se verifica que el desarrollo de las amortizaciones es creciente pero no afín.

Módulo obligatorio 2

Visión panorámica

Gran idea

El modelado de situaciones o fenómenos que involucra la función exponencial permite tomar decisiones respecto a temas relevantes para las personas y las comunidades.

Objetivos de aprendizaje

- OA3.** Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**
- OA4.** Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones y tomando decisiones razonadas que contribuyan al bien común. **(Modelar)**
- OA7.** Variar parámetros o condiciones, comparando los cambios en los resultados obtenidos y pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**
- OA8.** Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Función exponencial
- Crecimiento y decrecimiento
- Planilla de cálculo
- Ecuaciones exponenciales
- Modelo discreto y modelo continuo

Tiempo estimado
6 semanas (24 horas)

Propósito del módulo obligatorio 2

En el módulo 2 de la asignatura de matemática del Nivel 2 de Educación Media, se espera que los estudiantes comprendan el *modelado de situaciones o fenómenos que involucra la función exponencial permite tomar decisiones respecto a temas relevantes para las personas y las comunidades*. Entendiendo que la comprensión se logra cuando el estudiante realiza varios procesos desde lo experiencial y lo intuitivo hasta lo abstracto y simbólico de la matemática. Este módulo considera situaciones reales que promueven el acercamiento al crecimiento o decrecimiento exponencial. En este nivel se espera una aplicación de conocimientos adquiridos en niveles anteriores, como también una ampliación del pensamiento funcional y el uso de planillas de cálculo para facilitar el desarrollo de las actividades.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 2 desarrollan las habilidades que permiten comprender los modelos de crecimiento y decrecimiento exponencial. Especialmente, este módulo tiene foco en la habilidad de modelar y resolver problemas, en la habilidad de modelar se encuentra la selección y ajuste de modelos de crecimiento exponencial según las condiciones iniciales, como también la evaluación de modelos bajo los criterios de pertinencia y proyección de la situación. En este módulo los estudiantes comienzan con la noción de potencia y lo puntual para extenderla dentro de un proceso de crecimiento a la función real continua, luego integran la noción de parámetros iniciales y variable según el tiempo para describir la función exponencial. Las situaciones que trabaja este módulo contemplan el crecimiento de una población y su relación con la función recursiva, el crecimiento de hongos, el crecimiento de algas, el crecimiento de un capital y la propagación de un rumor, como también el decrecimiento de la temperatura y el crecimiento logístico.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 2 desarrollan las actitudes del siglo XXI del ámbito de las Maneras de pensar, las Maneras de trabajar y las maneras de vivir en el mundo, promoviendo la actitud de perseverar frente a tareas o metas específicas que se presentan en las actividades, orientando hacia la toma de decisiones razonadas que contribuyan al bien común y que tengan un sustento en los conocimientos matemáticos, promoviendo la proactividad por medio de la orientación hacia el cambio y anticipando panoramas. Se espera que los estudiantes de EPJA piensen con flexibilidad para reelaborar sus ideas y pensamientos, integrando las nociones de variable y parámetros como un primer paso para la reelaboración del modelo que se piensa inicialmente.

Ruta de Aprendizaje del Módulo obligatorio 2

¿Cómo tomar decisiones construyendo modelos con la función exponencial?

Actividad de desempeño 1: Seleccionar y ajustar modelos de crecimiento exponencial según la situación y sus condiciones iniciales.

Actividad de desempeño 2: Variar parámetros o condiciones del modelo exponencial para comparar resultados y modelar la situación real y determinar matemáticamente el valor de un crecimiento en cualquier instante.

Actividad de desempeño 3: Evaluar modelos exponenciales comparándolos con

la realidad para determinar valores de un determinado momento o determinar el momento en que se obtiene una cierta cantidad.



Actividad de desempeño 4: Seleccionar y ajustar modelos de crecimiento exponencial para que responda de mejor manera a la realidad, evaluando el proceso y comprobando los resultados para obtener un modelo logístico en su forma recursiva.

Actividad de desempeño 1

Propósito

En esta actividad se busca seleccionar y ajustar modelos de crecimiento exponencial según la situación y sus condiciones iniciales. Para esto, el estudiante debe comparar al inicio situaciones lineales y exponenciales, dadas de manera creciente y discretas, para luego seleccionar un modelo exponencial en el que se ha multiplicado una constante. El ajuste de modelos se trabaja desde la variación y comparación de una misma situación de crecimiento discreto a la cual se van cambiando las condiciones iniciales.

Objetivo de Aprendizaje

OA3. Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

Conocimiento esencial

- Potencias
- Función exponencial
- Crecimiento y decrecimiento natural
- Planilla de cálculo.

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

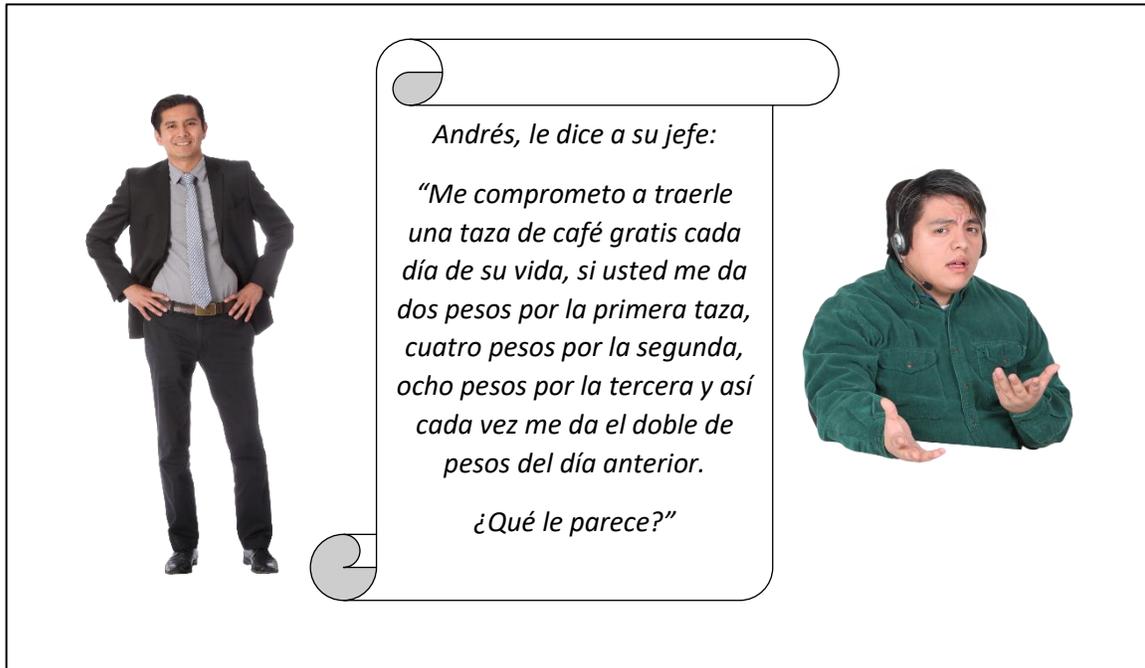
En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- El significado de las potencias.
- La identificación de un comportamiento lineal
- La elaboración de gráficos a partir de tablas de datos.
- La elaboración de gráficos a partir de la función expresada algebraicamente.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes una versión modificada del cuento del tablero de ajedrez y los granos de arroz, para iniciar una conversación y levantar una conjetura sobre el desenlace de la historia, sobre la conveniencia del trato que ofrece Andrés y sobre el día en que será rentable la propuesta de Andrés. Relevar el uso de las potencias para expresar lo que ocurre cada día y según el contexto expresar la función lineal del gasto de café considerando el mismo precio del café por varios días.



El docente plantea algunas preguntas que pueden ayudar a levantar conjeturas sobre el desenlace de la historia:

- ¿Cómo podemos expresar la cantidad de pesos que se entrega cada día a Andrés?
- ¿Podría el jefe pagar el servicio de café gratis después de dos meses?
- ¿Qué pasaría luego de 5 semanas?
- ¿Cuál es la regularidad que se describe en la situación?

Conexión interdisciplinar
Educación financiera
OA3 Nivel 1 y 2 EM

Construcción de conocimiento

Para introducir la selección y el ajuste de modelos se sugiere complementar las respuestas de los estudiantes elaborando una tabla para mostrar el desarrollo de la historia y la construcción del modelo tanto del gasto del dinero diario en la compra del café como las ganancias que tendría Andrés.

A continuación, presentamos una posible tabla con las ganancias diarias y los gastos de café, se ha supuesto un costo de \$600 pesos en el café, la cual se puede construir a partir de las respuestas de los estudiantes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096
600	1 200	1 800	2 400	3 000	3 600	4 200	4 800	5 400	6 000	6 600	7 200

13	14	15	16	17	18	19	20
8 192	16 384	32 768	65 536	131 072	262 144	524 288	1 048 576
7 800	8 400	9 000	10 600	11 200	11 800	12 400	13 000

Comparar estos resultados con las conjeturas que se hicieron al inicio y conversar sobre lo que ocurre con el crecimiento lineal, correspondiente a los costos diarios del café, con el crecimiento exponencial, el cual a partir del día 14, comienza a crecer más rápidamente y de manera “brusca” en comparación con el modelo lineal.

Considerar la primera parte de la tabla para expresar el resultado utilizando potencias:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096
2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}

Y responder sobre lo que tendría que pagar el jefe al cabo de un mes y las posibilidades de pagar lo acordado en dos meses o el resto de la vida:

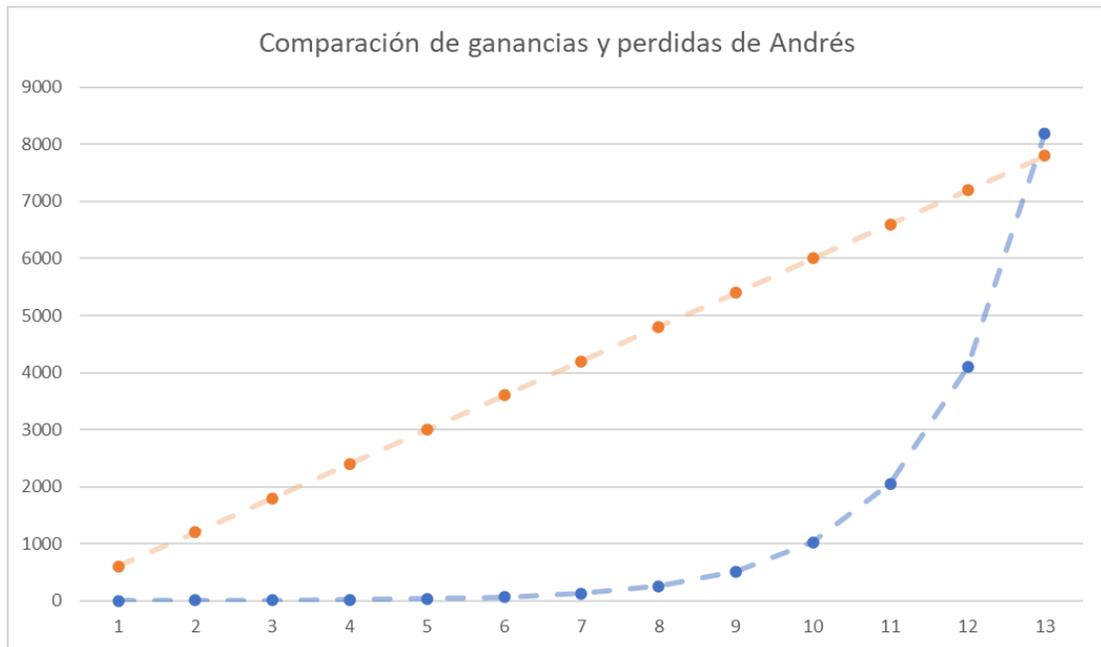
$$2^{30} = 1\,073\,741\,824$$

$$2^{60} = 1\,152\,921\,504\,606\,846\,976$$

Si n es la cantidad de días que le quedan por vivir al jefe entonces 2^n sería la cantidad de pesos que tendría que pagar por el café y $f(n) = 2^n$ describe el comportamiento de la situación de ganancias de Andrés.

Práctica guiada

Se sugiere ejemplificar la elaboración del gráfico a partir de los datos de la tabla para comparar el crecimiento lineal y exponencial, indicando el significado de cada punto y el sentido de hacer la línea que une los puntos, que en este caso cumple con la idea de dar proyección a lo que ocurrirá cada día, pero que no se trata de una función continua.



Ejemplificar la variación de las condiciones iniciales en la situación de las ganancias de Andrés, este proceso permitirá al estudiante apreciar las regularidades, para luego seleccionar el modelo y reconocer lo que se mantiene constante en la expresión algebraica y lo que varía según el tiempo, variable de la expresión, en este caso, lo que varía según los días.



Andrés, le dice a su jefe:

“Me comprometo a traerle una taza de café gratis cada día de su vida, si usted me da diez pesos por la primera taza, veinte pesos por la segunda, 40 pesos por la tercera y así cada vez me da el doble de pesos del día anterior.

¿Qué le parece?”



Se sugiere explicar la elaboración de una tabla de valores que incluya ambas situaciones de ganancias de Andrés, haciendo la relación entre la multiplicación por 5 de la primera fila para obtener la segunda.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048
$5 \cdot 2^1$	$5 \cdot 2^2$	$5 \cdot 2^3$	$5 \cdot 2^4$	$5 \cdot 2^5$	$5 \cdot 2^6$	$5 \cdot 2^7$	$5 \cdot 2^8$	$5 \cdot 2^9$	$5 \cdot 2^{10}$	$5 \cdot 2^{11}$
10	20	40	80	160	320	640	1 280	2 560	5 120	10 240

Explicar la elaboración de la expresión algebraica de la función g con la cual se puede determinar la ganancia de Andrés bajo estas nuevas condiciones y comparar con la función $f(n) = 2^n$ que describe el comportamiento de la situación de ganancias de Andrés en la primera situación. Considerando que la variable n representa la cantidad de días.

Primera situación							
Días	1	2	3	4	5	...	n
Ganancia en pesos	2	4	8	16	32
Expresión algebraica	$1 \cdot 2^1$	$1 \cdot 2^2$	$1 \cdot 2^3$	$1 \cdot 2^4$	$1 \cdot 2^5$...	$1 \cdot 2^n$

La función que describe el comportamiento de la primera situación es

$$f(n) = 1 \cdot 2^n = 2^n$$

Segunda situación							
Días	1	2	3	4	5	...	n
Ganancia en pesos	10	20	40	80	160
Expresión algebraica	$5 \cdot 2^1$	$5 \cdot 2^2$	$5 \cdot 2^3$	$5 \cdot 2^4$	$5 \cdot 2^5$...	$5 \cdot 2^n$

La función que describe el comportamiento de la segunda situación es

$$g(n) = 5 \cdot 2^n$$

Se sugiere comparar ambas situaciones por medio de un gráfico, relevando el tipo de crecimiento, el uso de la línea punteada para unir los puntos y diferenciando con el crecimiento lineal.

Práctica independiente

Se sugiere hacer estaciones con diferentes situaciones para comparar, en cada caso, se espera que el estudiante elabore tablas, gráficos y expresiones algebraicas para las funciones que describen la situación.

Algunas de las estaciones que se sugieren para esta actividad son:

Estación	Material	Instrucción
El doble versus el triple	Tarjeta con la situación de Andrés de doblar cada día los pesos. Tarjeta con la situación de Andrés de triplicar cada día los pesos. Hoja de trabajo.	Compara elaborando tablas, gráficos y ecuaciones las situaciones de ganancia de Andrés. Responde a la pregunta ¿Habrà un momento en que ambas ganancias coincidan?
El triple y diferentes condiciones iniciales	Tarjeta con la situación de Andrés de triplicar cada día los pesos. Tarjeta con la situación de Andrés de triplicar y de comenzar con \$10 000. Hoja de trabajo.	Compara elaborando tablas, gráficos y ecuaciones las situaciones de ganancia de Andrés. Responde a la pregunta ¿Habrà un momento en que ambas ganancias coincidan?
El triple y las condiciones iniciales del doble	Tarjeta con la situación de Andrés de triplicar cada día los pesos. Tarjeta con la situación de Andrés de doblar y de comenzar con \$10 000. Hoja de trabajo.	Compara elaborando tablas, gráficos y ecuaciones las situaciones de ganancia de Andrés. Responde a la pregunta ¿Habrà un momento en que ambas ganancias coincidan?
Determinando el tiempo más conveniente	Tarjeta con la presentación de dos situaciones de ganancia de Andrés en forma funcional. Hoja de trabajo.	Compara las dos situaciones y determina cual será el tiempo razonable en cada caso para hacer una propuesta más justa al jefe de Andrés.
Relacionando el gráfico con la función	Pares de tarjetas, unas con gráficos de funciones exponenciales, discretas y crecientes, otras tarjetas con la expresión algebraica de la función en términos de n .	Junta las tarjetas según corresponda.
Imaginando nuevas condiciones iniciales	Tarjetas con las palabras triplicar, doblar, cuadruplicar, quintuplicar y otras de condiciones iniciales, 1 peso, 5 pesos, entre otras, de las cuales se pueden elegir dos.	Imagina una situación según las tarjetas seleccionadas y escríbela, presenta en un gráfico las posibles ganancias que podrías tener según la historia que te imaginaste.
La mejor condición inicial	Tarjeta con la presentación de una situación de ganancia de Andrés en forma funcional. Hoja de trabajo.	Determina la mejor condición inicial en la situación para que el jefe y Andrés tengan una ganancia justa.

Se sugiere hacer variaciones de estas estaciones relacionadas con la situación creciente, discreta, tiempo, condiciones iniciales de pago por el café y con las necesidades del curso según el diagnóstico inicial.

Para retroalimentar la actividad e integrar la selección de modelos según las diferentes situaciones, se sugiere utilizar la diana:



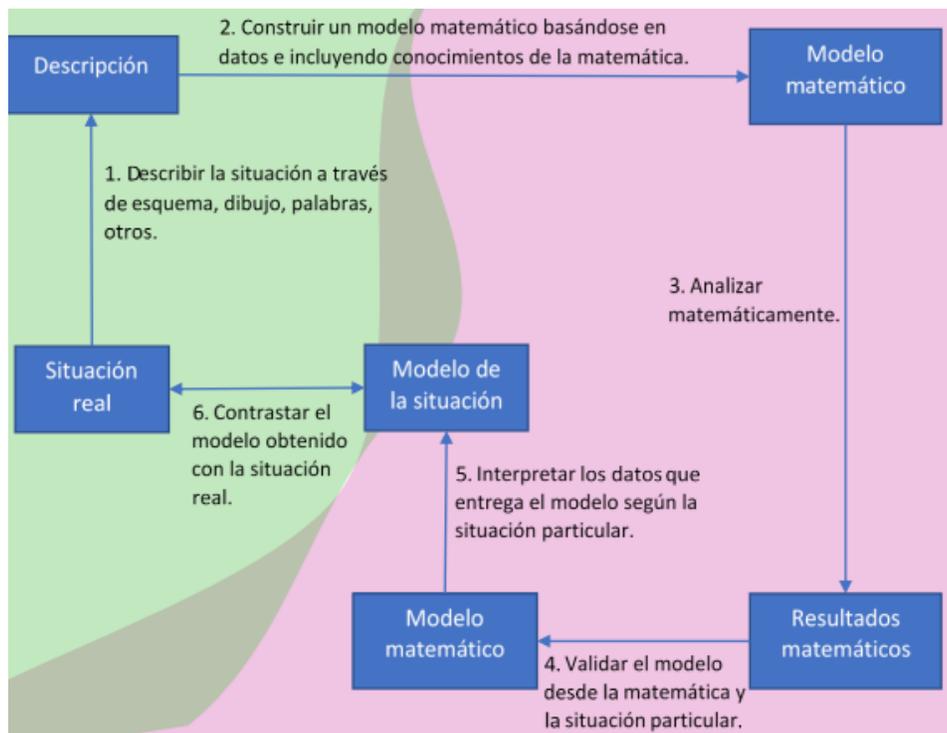
Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Elaborar tablas	Elabora tablas con datos extraídos desde la situación.	Elabora tablas con datos extraídos desde la situación, siguiendo un patrón multiplicativo.	Elabora tablas con datos extraídos desde la situación, siguiendo un patrón y utilizando las potencias.
Elaborar gráficos	Elabora un gráfico que podría tener algunos datos que describen la situación.	Elabora un gráfico que corresponde a los datos de la tabla.	Elabora un gráfico que corresponde a los datos de la tabla y que describe la situación.
Transferir	Escribe una expresión algebraica.	Escribe una función considerando algunos elementos de la tabla.	Transfiere desde los datos de la tabla a la expresión algebraica de una función exponencial.
Dar sentido a la función exponencial	Da sentido a la expresión $f(n) = 2^n$ para valores de n enteros positivos, utilizando el término doble.	Da sentido a la expresión $f(n) = a^n$ para valores de a y n enteros positivos, utilizando los términos de doble, triple, entre otros.	Da sentido a las expresiones $f(n) = a^n$ y $f(n) = c \cdot a^n$ para valores de c , a y n enteros positivos en diferentes situaciones, variando la constante y utilizando los términos de doble, triple, entre otros.
Contextos	Describe las situaciones utilizando palabras propias.	Describe las situaciones utilizando palabras propias y las potencias.	Describe las situaciones utilizando palabras propias, las potencias y expresiones tales como crecimiento exponencial o diferenciando con el crecimiento lineal.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que la habilidad de modelar se desarrolla en un ciclo de 6 pasos, ciclo que se presenta en la ficha pedagógica de habilidades https://www.curriculumnacional.cl/docente/629/articles-248164_recurso_pdf.pdf:

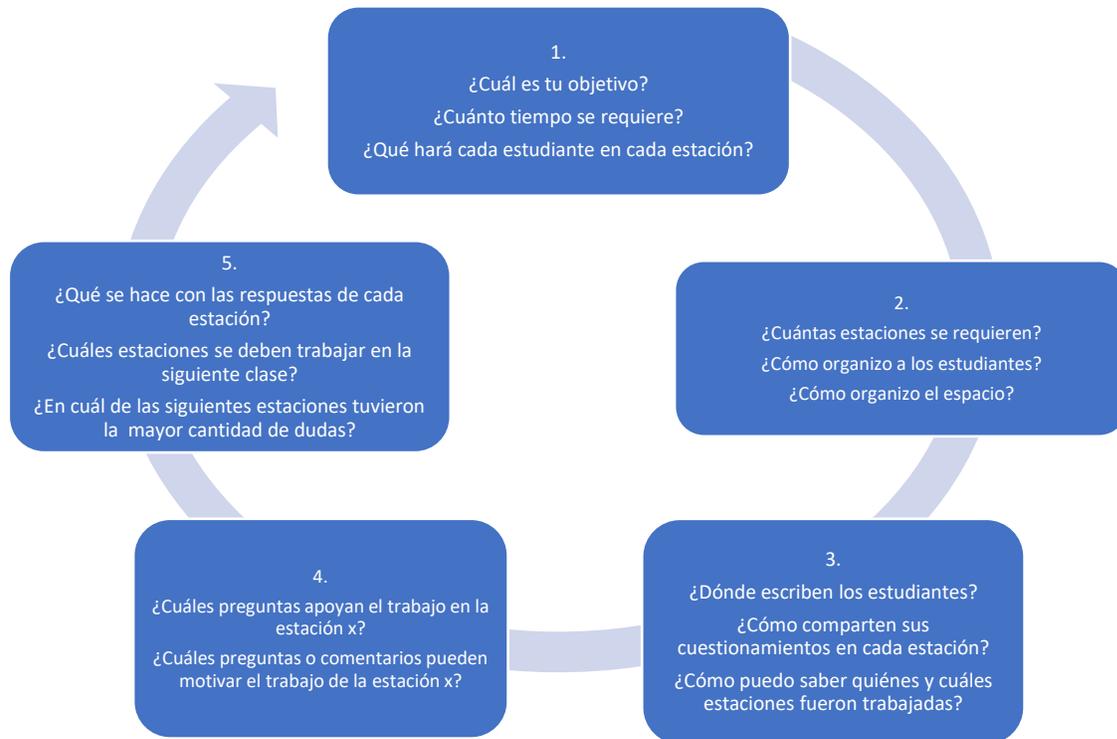


La selección y el ajuste de modelos son habilidades que contribuyen fuertemente a los pasos 3 y 4, entendiendo que en esta actividad se realiza un proceso guiado y bajo condiciones especiales de la situación real.

Se sugiere planificar un módulo cero que considere la operatoria con racionales y raíces propuestas en el módulo 1 del Nivel 1 de Educación Media, teniendo como la obtención de una solución numérica a un determinado problema. También, se sugiere incluir las proporciones directas, la función lineal que fueron trabajadas en el módulo 2 del Nivel 3 de Educación Básica y la función cuadrática trabajadas en el módulo 2 del Nivel 1 de Educación Media, enfocándose principalmente en resolver problemas contextualizados. Para el desarrollo de la habilidad de resolver problemas dentro de este módulo introductorio, se sugiere utilizar la secuencia procedimental disponible en la ficha pedagógica de la habilidad de resolver problemas en https://www.curriculumnacional.cl/docente/629/articles-248151_recurso_pdf.pdf, también se puede revisar la infografía de la misma habilidad, que se encuentra disponible en https://www.curriculumnacional.cl/docente/629/articles-248152_recurso_pdf.pdf

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de perseverancia en torno a metas, se sugiere ofrecer tiempo para la elaboración de tablas y gráficos, estos pueden ser realizados con plantillas de cálculo o con otras opciones de programas en línea. Permita a sus estudiantes ser tenaces y aguantar las tareas de elaboración de tablas y gráficos, aunque no estén tan motivados, indicando que es importante desarrollar la costumbre del trabajo y que, en este caso, lo que se recibe a cambio es aprendizaje.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo en estaciones: se sugieren las siguientes preguntas para guiar la implementación de las estaciones.



Actividad de desempeño 2

Propósito

Esta actividad busca que el estudiante varíe parámetros y condiciones iniciales, comparando los cambios en los resultados de problemas asociados a la función exponencial. Para esto, el estudiante traspasa de la forma recursiva del crecimiento porcentual constante al crecimiento exponencial, el cual modela las mismas situaciones, pero permite determinar los valores sin recorrer todos los instantes anteriores. Además, el estudiante compara utilizando tablas, gráficos y la expresión algebraica de la función exponencial para relevar el impacto del crecimiento exponencial según el tipo de porcentaje.

Objetivo de aprendizaje

OA7. Variar parámetros o condiciones, comparando los cambios en los resultados obtenidos y pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

- Función exponencial
- Modelo discreto y modelo continuo
- Planilla de cálculo

Tiempo estimado

6 horas

Conocimientos previos

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Elaboración de funciones exponenciales discretas de la forma $C(n) = a \cdot q^n$
- La elaboración de gráficos a partir de tablas de datos.
- La elaboración de gráficos a partir de la función expresada algebraicamente.
- Interés compuesto y la función recursiva.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes la situación de crecimiento de una población, en particular el crecimiento de la cantidad de habitantes de una ciudad, comentando lo que se entiende sobre tasa de crecimiento constante y la forma que tienen algunas personas o instituciones de estimar la cantidad en periodo de tiempo.



Conexión interdisciplinar
Historia, Geografía y
Ciencias sociales
OA2 Nivel 2 EM

El docente plantea algunas preguntas que pueden ayudar a la conversación:

- ¿Cómo podemos explicar el crecimiento de los habitantes de una ciudad?
- ¿Podemos pensar que el crecimiento de una población es un crecimiento lineal?
- ¿Qué entendemos por tasa de crecimiento?

Construcción de conocimiento

Para construir el conocimiento, variando parámetros o condiciones para resolver un problema, se sugiere comenzar especificando la cantidad de habitantes y el porcentaje de crecimiento. Considerar el conocimiento sobre el crecimiento porcentual constante y el modelo recursivo para estimar la cantidad de habitantes que habrá en un periodo de tiempo. Por ejemplo, comenzando con una cantidad de 100 000 habitantes de la ciudad, con un porcentaje de crecimiento anual de 8% y 5 años como tiempo para la estimación.

Explicar la elaboración de la tabla en base al crecimiento porcentual constante y su relación con la función exponencial, diferenciando entre el modelo recursivo que requiere siempre del año anterior y el modelo que permite determinar desde el inicio la cantidad de habitantes para cualquier tiempo.

Año	Relación entre crecimiento porcentual constante y función exponencial	Resultado
0	$f(0) = 100\ 000$ $f(0) = 100\ 000 \cdot 1,08^0$	100 000
1	$f(1) = 100\ 000 = 100\ 000 + 0,08 \cdot 100\ 000 = 100\ 000 \cdot (1 + 0,08)$ $= 100\ 000 \cdot 1,08$ $f(1) = 100\ 000 \cdot 1,08^1$	108 000
2	$f(2) = [100\ 000 \cdot 1,08] \cdot 1,08 = 100\ 000 \cdot [1,08 \cdot 1,08] = 100\ 000 \cdot 1,08^2$ $f(2) = 100\ 000 \cdot 1,08^2$	116 640
3	$f(3) = [100\ 000 \cdot 1,08^2] \cdot 1,08 = 100\ 000 \cdot [1,08^2 \cdot 1,08] = 100\ 000 \cdot 1,08^3$ $f(3) = 100\ 000 \cdot 1,08^3$	125 971
4	$f(4) = [100\ 000 \cdot 1,08^3] \cdot 1,08 = 100\ 000 \cdot [1,08^3 \cdot 1,08] = 100\ 000 \cdot 1,08^4$ $f(4) = 100\ 000 \cdot 1,08^4$	136 049
5	$f(5) = [100\ 000 \cdot 1,08^4] \cdot 1,08 = 100\ 000 \cdot [4 \cdot 1,08] = 100\ 000 \cdot 1,08^5$ $f(5) = 100\ 000 \cdot 1,08^5$	146 933
...		
n	$f(n) = [100\ 000 \cdot 1,08^{n-1}] \cdot 1,08 = 100\ 000 \cdot [1,08^{n-1} \cdot 1,08] = 100\ 000 \cdot 1,08^n$ $f(n) = 100\ 000 \cdot 1,08^n$	

Verificar con ejemplos la coincidencia de ambos modelos utilizando la calculadora:

$$f(3) = 100\ 000 \cdot 1,08^3 = 125\ 971,2 \approx 125\ 971$$

$$f(4) = 100\ 000 \cdot 1,08^4 = 136\ 048,896 \approx 136\ 049$$

$$f(5) = 100\ 000 \cdot 1,08^5 = 146\ 932,8077 \approx 14\ 933$$

Explicar la expresión general de la función exponencial que modela el crecimiento en el tiempo de una cantidad C que comienza con el valor inicial a y que crece en un porcentaje p en el tiempo t , que se considera como una variable continua.

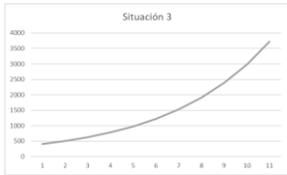
$$C(t) = a \cdot q^t$$

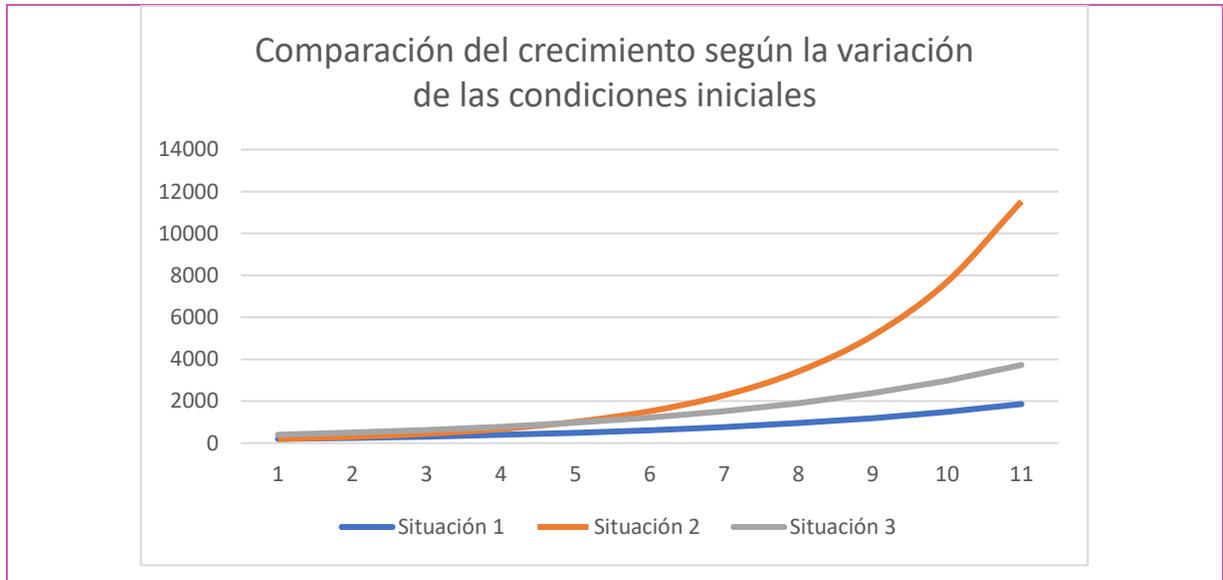
Explicar la forma de obtener q en términos de p que es el porcentaje de crecimiento y sugerir el trabajo en decimales para facilitar el trabajo.

$$q = 1 + \frac{p}{100} \quad \Rightarrow \quad C(t) = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

Práctica independiente

Se sugiere un trabajo personal de resolución de problemas en las cuales los estudiantes deban variar parámetros o condiciones iniciales para dar una respuesta a un problema de crecimiento exponencial. La tabla que se presenta a continuación puede ser utilizada como plantilla para completar, dejando algunas de las casillas desocupadas según sea el contexto del curso y necesidades del trabajo personal.

¿Cuál es el valor de la cantidad C que comienza con el valor inicial a y que crece en un porcentaje p en el tiempo t ?			
Condiciones iniciales	$a = 200$ y una razón de crecimiento de 1,25 en horas	$a = 200$ y una razón de crecimiento de 1,5 en horas	$a = 400$ y una razón de crecimiento de 1,25 en horas
Expresión algebraica de la función	$C(t) = 200 \cdot 1,25^t$	$C(t) = 200 \cdot 1,5^t$	$C(t) = 400 \cdot 1,25^t$
Valor a la sexta hora	$C(6) = 200 \cdot 1,25^6$ $= 200 \cdot 3,815$ $\approx 200 \cdot 3,81$ ≈ 762	$C(6) = 200 \cdot 1,5^6$	$C(6) = 400 \cdot 1,25^6$
Gráfico			
¿Qué situación crece más rápido?			
A medida que el porcentaje de crecimiento sea más grande, la función crecerá más rápido, al inicio el crecimiento no es tan brusco, pero pronto crece muy rápidamente. Las tres situaciones son de crecimiento exponencial, con valores iniciales diferentes y porcentajes de crecimiento diferentes. El valor inicial cuando aumenta marca una diferencia en el crecimiento, pero es muy leve en comparación con el efecto que produce una variación en el porcentaje.			



Para retroalimentar la actividad de variación de parámetros y condiciones iniciales, se sugiere utilizar la escalera metacognitiva:

ESCALERA METACOGNITIVA

¿EN QUÉ OTRAS OCASIONES PUEDO USARLO?
En todas las situaciones de crecimiento exponencial, para calcular valores en cualquier momento del tiempo.

¿QUÉ ME HA RESULTADO MÁS FÁCIL, MÁS DIFÍCIL, MÁS NOVEDOSO?
Lo más difícil ha sido relacionar la función recursiva con la función exponencial, lo más fácil es elaborar la tabla y el gráfico, lo más novedoso ha sido ver como afecta variar los parámetros de la función.

¿CÓMO LO APRENDÍ?
Elaborando la tabla, graficando y variando las condiciones iniciales, esto me permitió ver de qué forma cambia el crecimiento.

¿QUÉ APRENDÍ?
La función exponencial para describir el crecimiento porcentual constante.

Robert Swartz

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Variar las condiciones iniciales	Realiza cambios numéricos al inicio de la situación.	Varía las condiciones iniciales de la situación identificando con el nombre correspondiente.	Varía las condiciones iniciales de la situación identificando con el nombre correspondiente y según las instrucciones dadas.
Comparar los resultados	Elabora gráficos que incluyen más de una función.	Compara los resultados por medio de gráficos e interpreta los valores que están en la expresión algebraica de la función.	Compara los resultados elaborando una respuesta escrita, interpretando las curvas del gráfico y los valores que están en la expresión algebraica de la función.
Relacionar la función recursiva y exponencial	Elabora tablas de funciones recursivas y calcula valores de la función exponencial.	Relaciona el procedimiento algebraico de funciones recursivas con el cálculo de valores de la función exponencial.	Relaciona el procedimiento algebraico de funciones recursivas con la función exponencial dando sentido al exponente en términos del procedimiento algebraico.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que la habilidad de resolver problemas se puede desarrollar en varios pasos, en particular en esta actividad se da el foco a la variación de las condiciones iniciales y a la comparación de los resultados por medio de gráficos y de las expresiones algebraicas de la función.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de perseverancia en torno a metas, se sugiere ofrecer tiempo para la elaboración de tablas y gráficos, estos pueden ser realizados con plantillas de cálculo o con otras opciones de programas en línea. Permita a sus estudiantes ser tenaces y aguantar las tareas de elaboración de tablas, gráficos y respuestas escritas, aunque no estén tan motivados, indicando que es importante desarrollar la costumbre del trabajo y que, en este caso, lo que se recibe a cambio es aprendizaje.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo personal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo personal e independiente de otros:



Independencia

Pensando las soluciones y los caminos para obtener soluciones por cuenta propia.



Confianza en lo que se sabe

Generar seguridad en lo que se hace en cada paso. La confianza como facilitador de explicaciones propias y para explicar a otros.



Trabajar a su propio nivel

En ciertos momentos es necesario saber dónde se está y trabajar al propio ritmo.



Practicar la autoregulación

Cada tarea requiere de concentración y de regular en qué momento volverse a un compañero o maestro para pedir ayuda directa.

Actividad de desempeño 3

Propósito

Esta actividad busca evaluar modelos y evaluar el proceso para comprobar los resultados en situaciones de crecimiento natural exponencial. Los modelos que se presentan permiten determinar matemáticamente el valor de un crecimiento en cualquier instante y elaborar así ecuaciones exponenciales para determinar tiempos en los cuales se tiene una cierta cantidad. Así, se resuelven ecuaciones exponenciales por medio del logaritmo y usando la calculadora.

Objetivo de Aprendizaje

OA4. Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones y tomando decisiones razonadas que contribuyan al bien común. **(Modelar)**

OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

- Función exponencial
- Crecimiento y decrecimiento natural
- Planilla de cálculo
- Ecuaciones exponenciales

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Resolver ecuaciones mediante operaciones inversas.
- Elaboración de ecuaciones de funciones exponenciales de la forma $C = a \cdot q^t$, sin obtener el resultado.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes varias situaciones de crecimiento para clasificar aquellas que se consideran de crecimiento exponencial.



Algunas de las preguntas que pueden orientar la clasificación son:

- ¿Qué tipo de crecimiento podría estar involucrado?
- ¿Hay diferencias con un crecimiento lineal?
- ¿Qué ocurre con el crecimiento de un periodo a otro?
- ¿Cómo podemos describir estos crecimientos?

Conexión interdisciplinar

Ciencias naturales
OA1 y OA4 Nivel 2 EM

Construcción de conocimiento

Para construir el conocimiento de evaluar modelos de crecimiento exponencial comparándolos entre sí y con la realidad, se sugiere comenzar con el deterioro de frutas producida por el moho, especie microscópica del reino de los hongos filamentosos (Ascomiceta y Zigomiceto), que también son utilizadas como fuente biológica de ciertos antibióticos. Este tipo de crecimiento se denomina crecimiento natural.

Se sugiere proponer la medición en periodos iguales de tiempo del avance en centímetros cuadrados del moho de un limón o de otra fruta, registrar por medio de fotos y de la pregunta:

¿Cómo está creciendo el área cubierta de mohos en este limón?





En base a los datos o de mediciones de las fotos, se puede decir que el crecimiento no puede ser lineal y que una buena conjetura sería que el crecimiento fuera exponencial, si se considera en la primera foto aproximadamente un cuarto del área del limón cubierta, la segunda foto la mitad y la tercera foto la superficie entera, el crecimiento puede ser exponencial.

Para construir la evaluación de proceso y comprobar los resultados, se sugiere entregar datos de una situación más controlada y explicar el procedimiento para determinar valores en un determinado momento. Por ejemplo:

Con fines científicos se está cultivando en una placa de Petri un cultivo de mohos. Se inyectó un cultivo inicial que cubrió 2cm^2 de la superficie de la solución nutritiva. Después de un día la superficie cubierta alcanzó un área de $3,5\text{cm}^2$. Se considera un crecimiento natural permanente en todo el proceso.



Explicar la elaboración de la expresión algebraica a partir de los datos entregados, indicando que la superficie inicial es de 2cm^2 y al momento siguiente es de $3,5\text{cm}^2$ así la razón de crecimiento se obtiene calculando:

$$\frac{3,5\text{cm}^2}{2\text{cm}^2} = 1,75$$

Se insertan estos parámetros en la función exponencial general de $C(t) = a \cdot q^t$ para obtener:

$$C(t) = 2 \cdot 1,75^t$$

Explique la evaluación que se hace del parámetro $t = 4$ para obtener la respuesta a la pregunta ¿Qué superficie de moho se tiene al instante 96hrs?

$$96\text{h} = 4\text{días}$$

$$C(4) = 2 \cdot 1,75^4 \approx 2 \cdot 9,4 \approx 18,8$$

Explique la evaluación que se hace de la cantidad $C = 12\text{cm}^2$ para obtener la respuesta a la pregunta ¿En qué instante la superficie del cultivo llegó a 12cm^2 ?

Los datos son $C = 12\text{cm}^2$ y la función es $C(t) = 2 \cdot 1,75^t$

$$12 = 2 \cdot 1,75^t \quad | : 2$$

$$6 = 1,75^t \quad | \log$$

$$\log 6 = \log 1,75^t \quad | \text{propiedad } \log a^b = b \cdot \log a$$

$$\log 6 = t \cdot \log 1,75 \quad | : \log 1,75$$

$$\frac{\log 6}{\log 1,75} = t \quad \text{Se calculan los logaritmos}$$

$$\frac{0,77815125}{0,2430380348} \approx 3,2$$

En aproximadamente 3,2 días la superficie cubierta llega a 12cm^2

Comprobar:

$$2 \cdot 1,75^{3,2} \cong 11,988 \approx 12$$

Práctica independiente

Los estudiantes trabajan de manera personal eligiendo uno de los dos problemas que se presentan a continuación:

Problema 1: Crecimiento natural de algas en agua dulce.



Bahía interior de Puna (lago Titicaca, Perú)

La foto muestra las lentejas de agua (lemna minor) que tienen un crecimiento natural, el cual es exponencial en el aumento de la superficie hasta que se acaben las condiciones favorables para este crecimiento. Las lentejas de agua tienen un alto grado de proteínas vegetales que pueden servir de alimentación en la cría de animales. El dueño de una cría grande de cerdos quiere remplazar una parte de la alimentación de los cerdos estimada en **1 500 toneladas** de biomasa, la cual necesita a más tardar

en dos meses más. En el terreno de su propiedad hay un tanque de agua de una superficie de 35ha. Antes de empezar con el cultivo de lentejas de agua, el dueño recopiló información científica obtenida, entre otros, de un proyecto de cultivo de lentejas de agua realizado en la bahía interior de Puna.

Según la profundidad del tranque, la temperatura media y del valor pH del agua, el dueño de la cría puede contar con un rendimiento de $6kg$ por m^2 cubierto de lentejas de agua. Se empieza el cultivo con $2m^2$ y se cuenta con aumento diario de la superficie de 25% con respecto al día anterior.

¿En qué tiempo se logran las 1 500 toneladas?

Momento 1	Momento 2	Momento 3
Función exponencial general: $f(t) = a \cdot q^t$ Valor inicial $a = 2$ Razón de crecimiento $q = 1,25$ Función: $f(t) = 2 \cdot 1,25^t$	$1\ 500\ t = 1\ 500\ 000kg$ Área necesaria en m^2 $1\ 500\ 000 : 6 = 250\ 000$ $250\ 000m^2 = 25ha$	Se evalúa $250\ 000m^2$ en la ecuación $f(t) = 2 \cdot 1,25^t$ resulta: $250\ 000 = 2 \cdot 1,25^t$ $\Leftrightarrow 1,25^t = 125\ 000$ Despejando la incógnita t resulta $t = \frac{\log 125\ 000}{\log 1,25} \approx \frac{5,097}{0,097} \approx 52,55$
Respuesta: En aproximadamente 53 días se logra la meta.		
Comprobar: $2 \cdot 1,25^{53} \cong 273,691$ Se sobrepasa lo solicitado, esto se debe a las aproximaciones que se van haciendo en los pasos de cálculo.		

Problema 2: La inversión de dinero conveniente.

Se invierte un capital de **\$500 000** en una cuenta de ahorro que rinde 8% anuales de intereses compuestos. Se puede realizar el retiro del capital en cualquier instante, previo aviso de 24h, considerando el crecimiento del capital como un continuo en el lapso de días.

¿En cuántos días se logra un capital de **\$700 000**?

Momento 1	Momento 2	Momento 3
Función exponencial general: $f(t) = a \cdot q^t$ Valor inicial $a = 500\ 000$ Razón de crecimiento $q = 1 + \frac{8}{100} = 1,08$ Función: $f(t) = 500\ 000 \cdot 1,08^t$	Se evalúa 700 000 en la ecuación $f(t) = 500\ 000 \cdot 1,08^t$ resulta: $700\ 000 = 500\ 000 \cdot 1,08^t$ $\Leftrightarrow 1,08^t = 1,4 \quad \log$ Despejando la incógnita t resulta $t \cdot \log 1,08 = \log 1,4$	4,37 años se debe transformar a días: $4,37 \cdot 365 = 1\ 595$

$t = \frac{\log 1,4}{\log 1,08} \approx 4,37$
Respuesta: En 1 595 días desde la inversión se logran los \$700 000, aproximadamente 4 años y cuatro meses.
Comprobar: $f(t) = 500\,000 \cdot 1,08^{4,37}$ $f(t) = 500\,000 \cdot 1,3998$ $f(t) = 699\,900 \approx 700\,000$

Para retroalimentar la actividad de comprobar resultados en una ecuación exponencial, se sugiere utilizar la lista de chequeo:



LISTA DE CHEQUEO

DURANTE O LUEGO DE LA ACTIVIDAD

	Logrado	Todavía puedo mejorar
Criterio 1: Elaborar la función que modela la situación particular	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Criterio 2: Evaluar las cantidades en la función	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Criterio 3: Resolver una ecuación exponencial	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Criterio 4: Elaborar una respuesta	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Mueve el ticket a la casilla que corresponda

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Función	Elabora una función lineal o potencia.	Elabora una función exponencial utilizando los datos de la situación.	Elabora una función exponencial que modela el comportamiento descrito en la situación.
Ecuación exponencial	Resuelve ecuaciones lineales o cuadráticas.	Resuelve ecuaciones exponenciales utilizando la calculadora.	Resuelve ecuaciones exponenciales utilizando la calculadora y que corresponden a la respuesta de la situación.
Respuesta	Elabora una respuesta con datos numéricos.	Elabora una respuesta con el resultado de la ecuación.	Elabora una respuesta con el resultado de la ecuación y comprueba evaluando en la función.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que la habilidad de modelar es un ciclo de al menos 6 pasos y que uno de ellos es evaluar modelos para seleccionar el que mejor modela la situación y elaborar la función correspondiente. En conjunto con la habilidad de modelar, esta actividad busca resolver problemas y evaluar el proceso realizado, comprobando los resultados que se obtienen de una ecuación exponencial que permite determinar los periodos de tiempo en los cuales se cumple lo que se busca. Se sugiere enfatizar en la ecuación exponencial tanto el uso de la calculadora como la escritura de los pasos que se van haciendo para obtener el resultado.

Actitudes: se sugiere apoyar el desarrollo de la actitud de pensar con flexibilidad para reelaborar usando el proceso de resolver la ecuación exponencial junto con la comprobación de los resultados, ya que dependiendo de lo que se obtenga el estudiante tendrá que revisar su propio desarrollo y reelaborar en el caso que se tenga una diferencia muy grande en la comprobación. En cuanto a la toma de decisiones, la elección del modelo es un primer acercamiento, este es determinante para comenzar y modelar la situación, un segundo paso, en la toma de decisiones se pueden fomentar en esta actividad por medio de las preguntas: ¿Cuántos días será prudente tener una fruta podrida dentro del refrigerador? ¿cambia esta decisión, si tenemos una sandía? ¿Cuánto tiempo se requiere para el cultivo de las lentejas de agua? ¿qué otra decisión debería tomar el dueño del criadero? ¿Qué es más conveniente en el caso de la inversión de capital, más días o comenzar con otra cantidad inicial?

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo personal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo personal e independiente de otros:



Independencia

Pensando las soluciones y los caminos para obtener soluciones por cuenta propia.



Confianza en lo que se sabe

Generar seguridad en lo que se hace en cada paso. La confianza como facilitador de explicaciones propias y para explicar a otros.



Trabajar a su propio nivel

En ciertos momentos es necesario saber dónde se está y trabajar al propio ritmo.



Practicar la autoregulación

Cada tarea requiere de concentración y de regular en qué momento volverse a un compañero o maestro para pedir ayuda directa.

Actividad de desempeño 4

Propósito

Esta actividad busca encontrar limitaciones del modelo exponencial y comparar los resultados según la situación correspondiente a limitado o logístico. El estudio de la función exponencial y la modelación de situaciones tiene sus diferencias, las cuales vienen dadas por el tipo de crecimiento, decrecimiento y la población finita o disponibilidad infinita, considerando los términos de saturación y que el crecimiento logístico es un tipo de crecimiento limitado. Ambos modelos se construyen desde su modelo recursivo y para el caso del crecimiento logístico se sugiere considerar según el contexto, la expresión algebraica que considera la función exponencial en base e .

Objetivo de Aprendizaje

OA4. Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones y tomando decisiones razonadas que contribuyan al bien común. (**Modelar**)

OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. (**Resolver problemas**)

Conocimiento esencial

- Función exponencial
- Crecimiento y decrecimiento natural
- Planilla de cálculo
- Resolver ecuaciones exponenciales
- Crecimiento limitado
- Crecimiento logístico

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

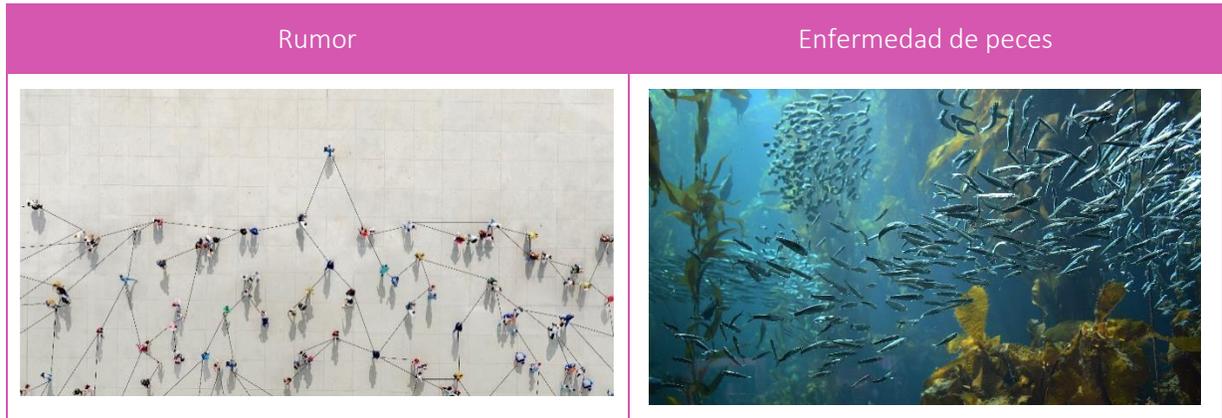
En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Elaboración de expresiones algebraicas de funciones recursiva.
- Elaboración de gráficos a partir de tablas.
- La elaboración de gráficos a partir de la función expresada algebraicamente.
- Resolver ecuaciones exponenciales.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta dos situaciones de crecimiento exponencial para comparar entre sí y con la realidad, para luego ver en detalle sus limitaciones. La primera situación se relaciona con la propagación de un rumor y la segunda con la propagación de una enfermedad en una población de peces.



Les pide comentar y conversar en base a las siguientes preguntas:

- ¿La propagación de rumor es exponencial igual que el crecimiento natural?
- ¿Cómo se podría describir la propagación de una enfermedad?
- ¿Cuáles podrían ser la diferencia en el comportamiento de estos fenómenos?
- ¿Cuáles son las limitaciones en cada situación?

Conexión interdisciplinar

Ciencias naturales
OA1 y OA4 Nivel 2 EM

Construcción de conocimiento

Para introducir la comparación de modelos se sugiere elaborar una tabla donde se van realizando los diferentes pasos de revisión de los modelos y su comparación con los supuestos reales. Se sugiere comenzar con un contexto y condiciones iniciales, para luego precisar el modelo y compararlo.

Rumor	Enfermedad de peces
En un barrio de 7 000 habitantes nace el rumor de que uno de ellos haya sacado el loto. Se estima que esta noticia se propaga en las redes sociales de tal manera que en cada hora un 12% de la población, que todavía no conoce el rumor, se percate de él.	En un estanque de piscicultura hay 500 peces de los cuales se estiman 50 contagios con piojos de agua (<i>asellus aquaticus</i>). La propagación de los piojos de agua en los peces se estima en 0,06% por día. Este porcentaje se aplica al producto entre la cantidad de peces contagiados y los peces todavía no contagiados.
<ul style="list-style-type: none"> • La cantidad de las personas informadas sigue aumentando, pero con un aumento que es cada hora menor. • La población que se entera del rumor tiene la limitación a 7 000 personas. 	<ul style="list-style-type: none"> • El crecimiento logístico es una combinación entre un crecimiento exponencial con crecimiento limitado • Al inicio los recursos están disponibles infinitamente después se disminuyen y el

	crecimiento pasa a una fase lineal y después se convierte en un crecimiento limitado
¿Cómo se puede expresar la cantidad C de las personas informadas mediante la limitación o saturación $S = 7\,000$ de la población?	¿Cómo se puede expresar la cantidad C de los peces contagiados con la saturación de $S = 500$ de la población?
$C = 7\,000 - M$ <p>El porcentaje con el cual se disminuye la cantidad M de las personas es de $100\% - 12\% = 88\%$.</p> <p>Esto se expresa con un factor de decrecimiento de</p> $q = 0,88$ <p>La disminución de M se expresa con la función $M(t) = 7\,000 \cdot 0,88^t$</p> <p>Así, la ecuación resulta $C(t) = 7\,000 - M(t)$</p> $C(t) = 7\,000 - 7\,000 \cdot 0,88^t$ $C(0) = 7\,000 - 7\,000 \cdot 0,88^0 = 0$ $C(1) = 7\,000 - 7\,000 \cdot 0,88^1 = 840$ $C(2) = 7\,000 - 7\,000 \cdot 0,88^2 \approx 1\,579$ $C(3) = 7\,000 - 7\,000 \cdot 0,88^3 \approx 2\,230$ $C(4) = 7\,000 - 7\,000 \cdot 0,88^4 \approx 2\,802$ $C(5) = 7\,000 - 7\,000 \cdot 0,88^5 \approx 3\,306$	$C(0) = 50$ $C(1) = 50 + 0,0006 \cdot 50 \cdot 450 = 50 + 14 = 64$ $C(2) = 64 + 0,0006 \cdot 64 \cdot 436 = 64 + 17 = 81$ $C(3) = 81 + 0,0006 \cdot 81 \cdot 419 = 81 + 20 = 101$ $C(4) = 101 + 0,0006 \cdot 101 \cdot 399 = 101 + 24 = 125$ $C(5) = 125 + 0,0006 \cdot 125 \cdot 375 = 125 + 28 = 153$ $C(6) = 153 + 0,0006 \cdot 153 \cdot 347 = 153 + 32 = 185$ $C(7) = 185 + 0,0006 \cdot 185 \cdot 315 = 185 + 35 = 220$ $C(8) = 220 + 0,0006 \cdot 220 \cdot 280 = 220 + 37 = 257$ $C(9) = 257 + 0,0006 \cdot 257 \cdot 243 = 257 + 37 = 294$ $C(10) = 294 + 0,0006 \cdot 294 \cdot 206 = 294 + 36 = 330$ $C(11) = 330 + 0,0006 \cdot 330 \cdot 170 = 330 + 36 = 366$ $C(12) = 366 + 0,0006 \cdot 366 \cdot 134 = 366 + 29 = 395$ $C(13) = 395 + 0,0006 \cdot 395 \cdot 105 = 395 + 25 = 420$ $C(14) = 420 + 0,0006 \cdot 420 \cdot 80 = 420 + 20 = 440$ $C(15) = 440 + 0,0006 \cdot 440 \cdot 60 = 440 + 16 = 456$ $C(16) = 456 + 0,0006 \cdot 456 \cdot 44 = 456 + 12 = 468$ $C(17) = 468 + 0,0006 \cdot 468 \cdot 32 = 468 + 9 = 477$ $C(18) = 477 + 0,0006 \cdot 477 \cdot 23 = 477 + 7 = 484$ $C(19) = 484 + 0,0006 \cdot 484 \cdot 16 = 484 + 5 = 489$ $C(20) = 489 + 0,0006 \cdot 489 \cdot 11 = 489 + 3 = 492$ $C(21) = 492 + 0,0006 \cdot 492 \cdot 8 = 492 + 2 = 494$
¿Cómo se ve en un gráfico este comportamiento?	

<p>¿Cuál es la expresión algebraica de la función exponencial en general?</p>	
$C(t) = S - S \cdot q^t$ $q = \frac{100 - p}{100} = 0, (100 - p)$	$B(t) = \frac{S}{1 + (S - 1) \cdot e^{-kt}}$
<p>¿Cuál es la expresión algebraica de la función recursiva en general?</p>	
$C(t + 1) = C(t) + q \cdot [S - C(t)]$	$C(t + 1) = C(t) + k \cdot C(t) \cdot [S - C(t)]$
<p>¿Según el modelo es posible llegar a la saturación?</p>	
$C(t) = S - S \cdot q^t$ $7\,000 = 7\,000 - 7\,000 \cdot 0,88^t$ $0 = -7\,000 \cdot 0,88^t$ <p>No es posible que el modelo llegue a la saturación.</p>	$B(t) = \frac{S}{1 + (S - 1) \cdot e^{-kt}}$ $500 = \frac{500}{1 + (499) \cdot e^{-kt}}$ $1 + 499 \cdot e^{-kt} = \frac{500}{500}$ $e^{-kt} = 0$ <p>No es posible que el modelo llegue a la saturación.</p>

Práctica guiada

Para guiar la comparación de modelos se sugiere profundizar en el modelo logístico, su forma recursiva y las partes de la curva del gráfico que lo describen. Para esto, se sugiere explicar el desarrollo de un crecimiento logístico por medio del crecimiento de la población de contagios de gripe.

¿Cómo se describe el contagio por gripe de forma logística?



Una forma de describir estos contagios es por medio de los valores de una tabla, la cual se puede obtener por mediciones reales de los individuos contagiados, al momento de comenzar se le denomina tiempo 0, el tiempo transcurrido puede estar en segundos, horas o días, el pensamiento es continuo.

t	0	1	2	3	4	5	6
Contagios	1 135	1 302	1 530	1 780	2 075	2 451	2 984

Se sugiere incluir el término saturación, por ejemplo, presentando una condición previa, en este caso suponer que a mayor cantidad de tiempo el número de contagiados se mantendrá constante en $S = 50\,000$.

Explicar el uso de una planilla de cálculo para obtener una mayor cantidad de datos, indicando que la forma recursiva permitirá determinar el factor k en la ecuación recursiva de $B(t + 1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot [S - B(t)]$, el cual será ingresado en la segunda fila como una fórmula.

$$B(t + 1) = B(t) + k \cdot B(t) \cdot [S - B(t)]$$

con $S = 50\,000$

$$1\,302 = 1\,135 + k \cdot 1\,135 \cdot [50\,000 - 1\,135]$$

Se despeja a la variable k

$$1\,302 - 1\,135 = k \cdot 1\,135 \cdot [50\,000 - 1\,135]$$

$$k = \frac{167}{1\,135 \cdot 48\,865} = 0,000003011082858$$

$$\approx 0,000003$$

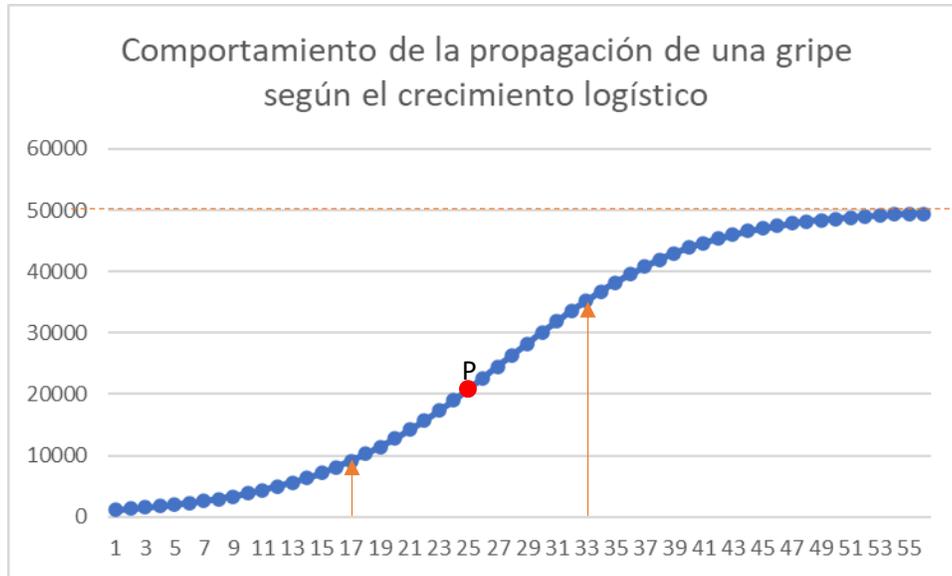
$$B(t + 1) = B(t) + 0,000003 \cdot B(t) \cdot [50\,000 - B(t)]$$

En la planilla de cálculo se ingresa el primer valor y luego en la segunda fila se ingresa la expresión recursiva:

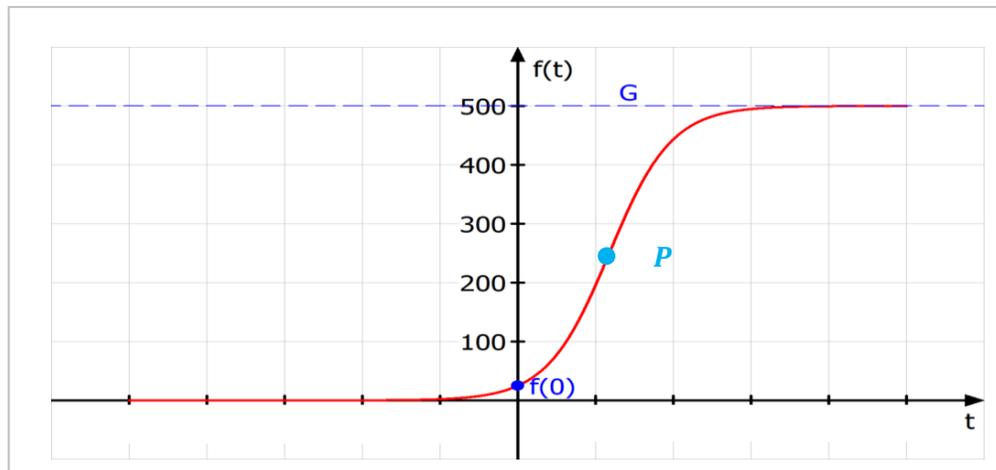
	B	C	D
	1135		
	1301,385325		

A	B
8	3335,671272
9	3802,641855
10	4329,657878
11	4922,868747
12	5588,595149
13	6333,187234
14	7162,837538
15	8083,344444
16	9099,824738
17	10216,37802
18	11435,71158
19	12758,74182
20	14184,19661
21	15708,25181
22	17324,24205
23	19022,49027
24	20790,2984
25	22612,13364
26	24470,02793
27	26344,18531
28	28213,76481
29	30057,77996

La elaboración del gráfico en esta parte de la actividad se puede utilizar para marcar y describir los momentos por los cuales transcurre el crecimiento logístico, primera etapa exponencial y segunda etapa de un crecimiento limitado.



En general, el crecimiento logístico tiene la forma:



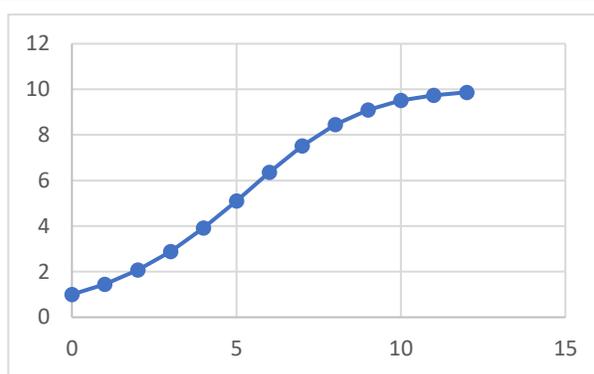
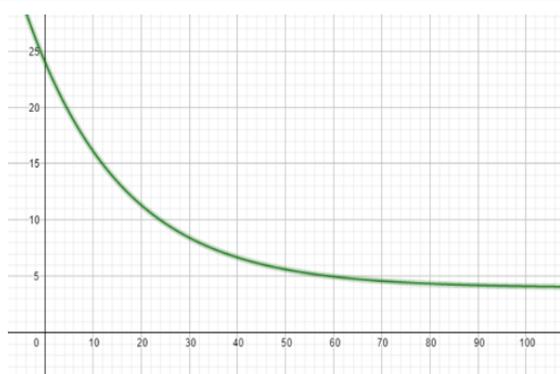
Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo de pares, donde cada integrante trabaja las situaciones según el crecimiento o decrecimiento logístico o limitado. Una posible estructuración para el trabajo en pares se puede visualizar en la siguiente tabla:

¿Crecimiento limitado o crecimiento logístico?	
Se quiere refrigerar un vaso con jugo de cerezas de 24°C . Se pone el vaso en un refrigerador cuya temperatura es de 4°C . El factor de disminución de la temperatura es de $4,9\%$ que siempre se refiere a la diferencia entre la	Un pozo tiene una superficie de 10m^2 . Se observa un cubrimiento de la superficie del pozo con algas que tiene ya un área de 1m^2 . Se supone un crecimiento logístico con porcentaje de crecimiento de un 5% diario.

temperatura del refrigerador y la temperatura del jugo.	
¿Las condiciones son limitadas o ilimitadas?	
Es una condición inicial limitada, la temperatura del refrigerador es la temperatura de la cual la temperatura del jugo no puede bajar más.	Se pueden suponer al inicio ilimitadas, ya que el crecimiento dependerá de las condiciones del pH del agua, luego a medida que crece, el tamaño de la superficie del lago pondrá límites al crecimiento.
¿Cómo se describe algebraicamente el desarrollo?	
<p>Por medio de la expresión general:</p> $p = 4,9\%$ <p>Nos permite determinar el factor de decrecimiento</p> $100\% - 4,9\% = 95,1\% = 0,951$ <p>Así, el factor de decrecimiento es</p> $q = 0,951$ <p>La temperatura límite corresponde a la saturación</p> $S = 4^\circ$ <p>Temperatura inicial del jugo</p> $D(0) = 24^\circ C$ <p>Expresión particular</p> $D(t) = 4 + [D(0) - 4] \cdot 0,951^t$ $D(t) = 4 + [24 - 4] \cdot 0,951^t$ $D(t) = 4 + 20 \cdot 0,951^t$	<p>De manera recursiva:</p> $B(t + 1) = B(t) + 0,05 \cdot B(t) \cdot [10 - B(t)]$ <p>con $B(0) = 1$</p> $B(1) = 1 + 0,05 \cdot 1 \cdot 9 = 1 + 0,45 = 1,45$ $B(2) = 1,45 + 0,05 \cdot 1,45 \cdot 8,55 = 1,45 + 0,62 = 2,07$ $B(3) = 2,07 + 0,05 \cdot 2,07 \cdot 7,93 = 2,07 + 0,82 = 2,89$ $B(4) = 2,89 + 0,05 \cdot 2,89 \cdot 7,11 = 2,89 + 1,03 = 3,92$ $B(5) = 3,92 + 0,05 \cdot 3,92 \cdot 6,08 = 3,92 + 1,19 = 5,11$ $B(6) = 5,11 + 0,05 \cdot 5,11 \cdot 4,89 = 5,11 + 1,25 = 6,36$ $B(7) = 6,36 + 0,05 \cdot 6,36 \cdot 3,64 = 6,36 + 1,16 = 7,52$ $B(8) = 7,52 + 0,05 \cdot 7,52 \cdot 2,48 = 7,52 + 0,93 = 8,45$ $B(9) = 8,45 + 0,05 \cdot 8,45 \cdot 1,55 = 8,45 + 0,65 = 9,10$ $B(10) = 9,10 + 0,05 \cdot 9,10 \cdot 0,90 = 9,10 + 0,41 = 9,51$ $B(11) = 9,51 + 0,05 \cdot 9,51 \cdot 0,49 = 9,51 + 0,23 = 9,74$ $B(12) = 9,74 + 0,05 \cdot 9,74 \cdot 0,26 = 9,74 + 0,13 = 9,87$

¿Cómo se describe gráficamente el desarrollo?



¿Cómo se determinan otros valores dado un determinado tiempo transcurrido?

Determinar el instante en el cual la temperatura del jugo disminuyó a 10°C.

Según el gráfico el jugo se enfría a la temperatura de 10°C en el instante de aproximadamente 24min.

Cálculo del instante:

Según la siguiente ecuación:

$$10 = 4 + 20 \cdot 0,951^t \quad | - 4$$

$$6 = 20 \cdot 0,951^t \quad | : 20$$

$$\frac{6}{20} = 0,951^t \quad | \text{Calcular}$$

$$0,3 = 0,951^t \quad | \log$$

$$\log 0,3 = \log 0,951^t \quad | \log a^n = n \cdot \log a$$

$$\log 0,3 = t \cdot \log 0,951$$

$$t = \frac{\log 0,3}{\log 0,951} = 23,96384661 \approx 24$$

A los 24 minutos se logra disminuir en 10°C la temperatura del jugo.

Determinar el instante en el cual se logran 8m² de algas.

Según el desarrollo recursivo se debería tener esta cantidad de metros cuadrados después de los 7 días.

Considerando que el índice $k = 0,5$ y que

$$B(t) = \frac{S}{1 + (S - 1) \cdot e^{-kt}}$$

Se tiene que:

$$8 = \frac{10}{1 + 9 \cdot e^{-0,5t}}$$

$$1 + 9 \cdot e^{-0,5t} = \frac{10}{8}$$

$$9 \cdot e^{-0,5t} = 1,25 - 1$$

$$9 \cdot e^{-0,5t} = 0,25 \quad | \cdot \frac{1}{9}$$

$$e^{-0,5t} = \frac{0,25}{9} \quad | \text{dividir}$$

$$e^{-0,5t} = 0,028 \quad | \ln$$

$$-0,5 \cdot t = \ln 0,028$$

$$t = \frac{\ln 0,028}{-0,5} \approx 7,16$$

Entonces, el resultado coincide, ya que debería crecer 8 metros cuadrados después de los 7 días. Este resultado coincide con el valor de la forma recursiva.

Se sugiere terminar el trabajo de pares promoviendo una conversación entre ellos, basada en la comparación y en la explicación de la aplicación de uno u otro modelo, algunas de las preguntas que pueden motivar la conversación de pares son:

- ¿Qué tiene de diferente tu modelo con el mío?
- ¿Por qué obtuviste este resultado?
- ¿Cómo obtuviste esta expresión?
- ¿Cómo diferenciar lo recursivo en estas situaciones?

Para retroalimentar la actividad de pares, se sugiere utilizar la estrategia Valoro - Sugiero:

ESTUDIANTE A ESTUDIANTE

VALORO - SUGIERO

DURANTE O LUEGO DE LA ACTIVIDAD

VALORO DE TU TRABAJO...

La elaboración de la tabla con tanto detalle, el orden que utilizaste hasta el final.

Que me hayas explicado el paso a paso en cada celda.

TE SUGIERO..

Ser igual de ordenado en la elaboración del gráfico. Nos faltaron detalles, como el nombre de los ejes.

Continuar explicando, si sigues así podrías llegar a ser profe...

<https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios para cada grupo:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Crecimiento limitado	Determinan valores utilizando la fórmula dada.	Determinan valores utilizando la forma recursiva del crecimiento limitado.	Determinan valores utilizando la forma recursiva del crecimiento limitado e interpretan el comportamiento del gráfico cuando corresponde a un crecimiento limitado.
Crecimiento logístico	Determinan valores utilizando la fórmula dada.	Determinan valores utilizando la forma recursiva del crecimiento logístico.	Determinan valores utilizando la forma recursiva del crecimiento logístico e interpretan el comportamiento del gráfico cuando corresponde a un crecimiento logístico.
Situaciones y el crecimiento limitado	Identifican variables y parámetros que permiten elaborar la fórmula del crecimiento limitado.	Identifican variables y parámetros que permiten elaborar la fórmula del crecimiento limitado, elaborando tablas y gráficos que describen la situación de crecimiento limitado.	Modelan la situación identificando variables y parámetros y elaborando la fórmula, tablas y gráficos que corresponden al comportamiento de crecimiento limitado de la situación.
Situaciones y el crecimiento logístico	Identifican variables y parámetros que permiten elaborar la fórmula del crecimiento logístico.	Identifican variables y parámetros que permiten elaborar la fórmula del crecimiento logístico, elaborando tablas y gráficos que describen la situación de crecimiento logístico.	Modelan la situación identificando variables y parámetros y elaborando la fórmula, tablas y gráficos que corresponden al comportamiento de crecimiento logístico de la situación.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: El crecimiento limitado se da en situaciones en las cuales la fuente o el origen del crecimiento se agota. Así, el crecimiento de la venta de un producto nuevo dentro de una población se delimita si se considera que por hogar o familia se adquiere solamente un ejemplar. El crecimiento porcentual constante, asociado a la función exponencial, se refiere siempre a las familias que todavía no han comprado este producto. Por lo tanto, el crecimiento limitado se acerca a la saturación que es la cantidad de familias de la población. Por otra parte, el crecimiento logístico une un crecimiento exponencial con un crecimiento limitado. Por ejemplo, en el fenómeno de la propagación de un virus, en la parte inicial del fenómeno se puede observar aproximadamente un crecimiento exponencial porque el efecto de disminución de la población no contagiada no tiene tanta influencia.

Pero con el curso de tiempo se llega a una inflexión y el crecimiento, hasta entonces exponencial, se convierte en un crecimiento limitado como se puede ver en los gráficos en la forma de una s.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de trabajar colaborativamente se sugiere integrar la entrega de los resultados parciales, tales como tablas y gráficos. Trabajar colaborativamente en matemática significa resolver problemas por partes, donde cada colaboración que se realiza contribuye a formular una respuesta, donde cada idea se evalúa grupalmente para clasificarla o reorientarla según el problema o situación, es decir, es pensar en conjunto sobre los caminos y procedimientos para lograr el objetivo, se sugiere motivar el trabajo colaborativo indicando que todas las ideas y contribuciones son bienvenidas cuando se evalúan entre todos.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo grupal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo grupal en esta actividad:



Actividad dentro del horario de clases, el trabajo colaborativo y cómo ocurre debe ser observado en clases.

Entregar instrucciones precisas sobre lo que se espera al término del trabajo, entregar una rúbrica con los criterios y dejar uno o dos minutos para revisar la comprensión de las instrucciones.

La evaluación es grupal y se sugiere no evaluar hasta que se comprenda que la idea es contribuir para el logro de un objetivo común.

Decida con anterioridad la forma de organizar los grupos, ya sea de forma aleatoria o por coincidir con las propuestas o por nivel de comprensión del tema, considere siempre la cantidad de participantes por grupo y cantidad de la clase.

Decida con anterioridad los momentos en que los participantes del grupo se escuchan y toman las primeras decisiones para organizar lo que hará cada uno, como también el momento en que los grupos se escuchan entre sí.

Módulo obligatorio 3

Visión panorámica

Gran idea

La geometría provee herramientas claves que permiten resolver problemas de visualización espacial y construcción en ambientes digitales.

Objetivos de aprendizaje

OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, valorando el uso de las TIC. **(Representar)**

OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas).**

Conocimientos esenciales

- Volumen de figuras 3D.
- Superficie de figuras 3D.
- Vistas de figuras 3D concretas, pictóricas y simbólicas.
- Proyecciones paralelas y perpendiculares a un plano: alzada, lateral y planta.
- Proyección en perspectiva.
- Ángulos centrales.
- Arcos, sectores y cuerdas.
- Geometría analítica 2D.
- Rectas, secantes y tangentes a la circunferencia

Tiempo estimado
6 semanas (24 horas)

Propósito del módulo obligatorio 3

En el módulo 3 de la asignatura de matemática del Nivel 2 de Educación Media, se espera que los estudiantes comprendan que la geometría provee herramientas claves que permiten resolver problemas de visualización espacial y construcción en ambientes digitales. Entendiendo que la comprensión se logra cuando el estudiante realiza varios procesos desde lo experiencial hasta lo abstracto y simbólico de la matemática, expresado en este caso por el dibujo técnico con sus especificaciones. Este módulo considera situaciones reales que promueven el uso del dibujo y de escalas para describir, diseñar y aplicar de manera completa las figuras 3D.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 3 desarrollan las habilidades de visualización espacial que permiten comunicar y comprender de mejor manera una figura 3D. En particular, este módulo desarrolla las habilidades de representar, resolver problemas y argumentar y comunicar. Por una parte, se requiere expresar ideas geométricas de paralelismo y perpendicularidad, como también relaciones entre la circunferencia, la esfera y las rectas secantes y tangentes, utilizando o aplicando conocimientos básicos de la geometría, para finalmente construir proyecciones de figuras 3D. Por otra parte, se realizan demostraciones simples de resultados utilizando las relaciones que hay en la circunferencia y conocimientos sobre área y volumen, demostraciones que son trabajadas en pasos de argumentos en la resolución de problemas. Se espera que los estudiantes evalúen el proceso y comprueben los resultados y soluciones dadas, ya sea comparando los objetos reales con las proyecciones y los planos que han dibujado, como también revisando los datos obtenidos con las condiciones del problema geométrico.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 3 desarrollan las actitudes del siglo XXI del ámbito de las Maneras de pensar, las Maneras de trabajar y las maneras de vivir en el mundo, promoviendo la actitud de valoración del uso de las TIC para la elaboración de dibujos como para buscar y completar información sobre el dibujo técnico; trabajando con empatía poniéndose en el lugar del otro y en lo que se vería desde su punto de vista, respetando a los otros y sus producciones, realizando críticas constructivas para mejorar los diseños de figuras 3D. En las maneras de pensar, se espera que el estudiante piense con flexibilidad para reelaborar sus dibujos y diseños, para obtener con prolijidad un modelo real o a escala y que se identifique con su imagen mental que tiene del objeto.

Ruta de Aprendizaje del Módulo obligatorio 3

¿Cómo podemos resolver problemas de visualización espacial y diseño de objetos?

Actividad de desempeño 1: Representan objetos 3D de manera concreta, pictórica o simbólica utilizando material concreto o planillas 2D para generar imágenes mentales y visualizaciones de los objetos 3D.

Actividad de desempeño 2: Expresan objetos 3D utilizando las nociones de paralelismo y perpendicularidad para realizar dibujos de vistas en 2D de objetos 3D.

Actividad de desempeño 3: Realizan demostraciones simples de resultados

utilizando secuencias de argumentos basados en las relaciones métricas entre ángulos, arcos, cuerdas y secantes en la circunferencia.



Actividad de desempeño 4: evalúan y comprueban resultados de problemas en 3D utilizando la reducción a 2D y la aplicación de las nociones

de geometría analítica para rectas y circunferencias.

Actividad de desempeño 1

Propósito

En esta actividad se busca que los estudiantes representen objetos 3D de manera concreta, pictórica o simbólica utilizando material concreto o planillas 2D. Para esto, el estudiante genera imágenes mentales y representaciones concretas, pictóricas o simbólicas que permitirán comunicar la forma de ciertos objetos y encontrarán situaciones cotidianas o laborales que requieran de la comunicación de la forma de estas figuras 3D en planillas 2D de sus vistas.

Objetivo de Aprendizaje

OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, valorando el uso de las TIC.
(Representar)

Conocimiento esencial

- Vistas laterales, frontal, desde atrás, base y desde arriba.
- Vistas de figuras 3D concretas, pictóricas y simbólicas.

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

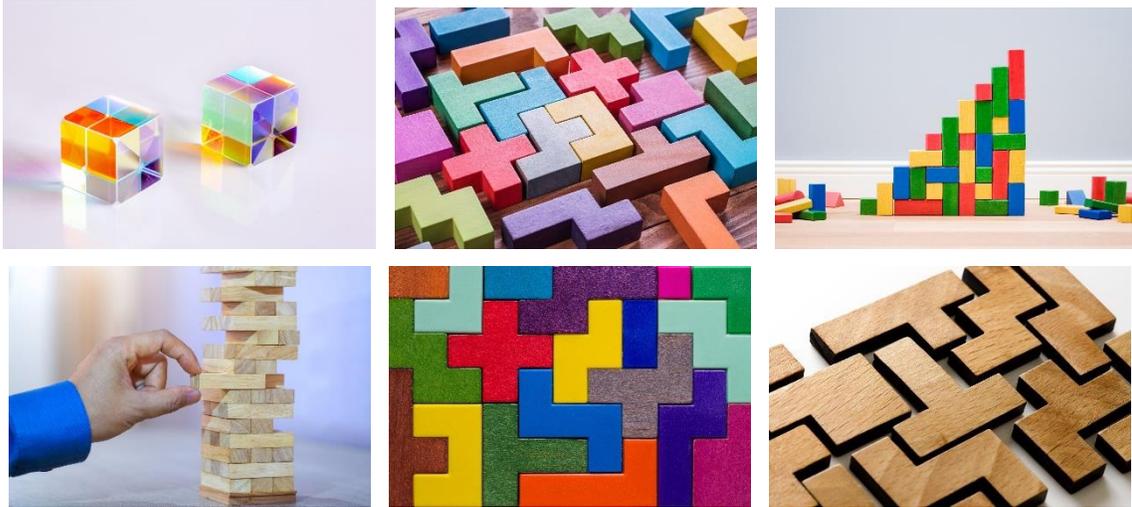
En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Reconocer imágenes de figuras 2D que se obtienen por reflexión.
- Reconocer imágenes de figuras 2D que se obtienen por rotación.
- Reconocer imágenes de figuras 2D que se obtienen por traslación.
- Identificar los elementos de una reflexión, como eje de simetría y distancia de un punto al eje de simetría.
- Identificar los elementos de una rotación, como centro y ángulo de rotación.
- Identificar los elementos de una traslación, como avance en tantas unidades a la derecha o izquierda y avance en tantas unidades hacia arriba o abajo.
- Uso del plano cartesiano para dibujar figuras 2D.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta algunas situaciones en las cuales se necesita describir un objeto a otra persona, momentos en los cuales se requiere de precisión para hacerlo y la necesidad de expresar nuestras imágenes mentales a otros mediante un dibujo o representación pictórica o simbólica de una figura 3D.



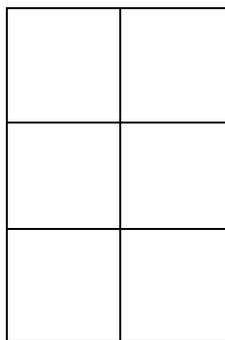
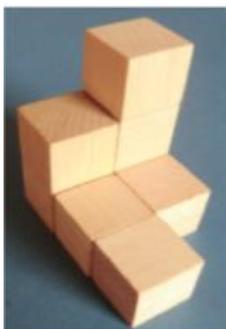
Para generar una conversación sobre la necesidad de describir objetos en ciertas situaciones, se sugieren algunas de las siguientes preguntas:

- ¿En qué situaciones se requiere describir una figura 3D?
- ¿Cómo nos podemos comunicar con personas con alguna discapacidad visual, auditiva, sensorial?
- ¿Cómo podemos formar ciertas figuras utilizando solo cubos?
- ¿Cómo podemos representar con precisión las vistas de una figura?

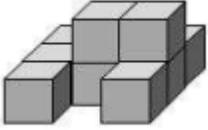
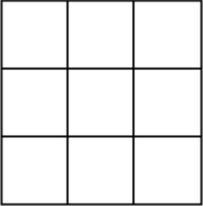
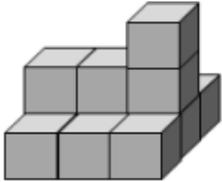
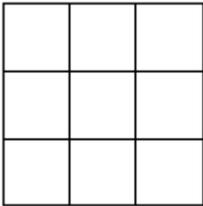
Conexión interdisciplinar
Emprendimiento y
Empleabilidad
OA4 Nivel 1 y 2 EM

Construcción de conocimiento

Para introducir la representación de objetos y figuras 3D con fines de describir a otras personas la forma y estructura de la figura, se sugiere presentar una figura 3D compuesta de cubos y solicitar realizar una mirada imaginaria hacia la base y marcar en la planilla las cuadrículas que están ocupadas, anotando la cantidad de cubos que están encima de los cubos basales.



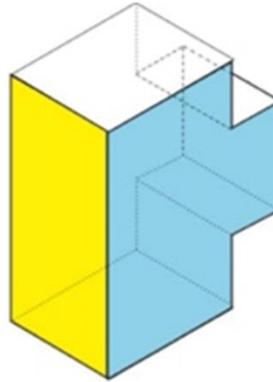
Se sugiere determinar la base de diferentes figuras 3D formadas por cubos, haciendo una relación con un edificio de cubos o maqueta de edificios y anotando la cantidad de cubos que están encima de cada cuadrícula, diferenciando las diferentes posibilidades de respuestas.

Representación concreta	Plantillas para la base del edificio	→	Posibles soluciones de representaciones pictóricas-simbólicas																			
			<table border="1" data-bbox="894 415 1097 621"> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	1	0	1	1	2	2	1	0	1	<table border="1" data-bbox="1122 426 1325 627"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	1	1	1	1	2	2	1	0	1
1	0	1																				
1	2	2																				
1	0	1																				
1	1	1																				
1	2	2																				
1	0	1																				
			<table border="1" data-bbox="894 674 1097 879"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	0	0	1	2	2	3	1	1	1	<table border="1" data-bbox="1122 684 1325 886"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	0	1	1	2	2	3	1	1	1
0	0	1																				
2	2	3																				
1	1	1																				
0	1	1																				
2	2	3																				
1	1	1																				
			<table border="1" data-bbox="894 905 1097 1110"> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	1	0	1	2	2	3	1	1	1	<table border="1" data-bbox="1122 915 1325 1117"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	1	1	1	2	2	3	1	1	1
1	0	1																				
2	2	3																				
1	1	1																				
1	1	1																				
2	2	3																				
1	1	1																				

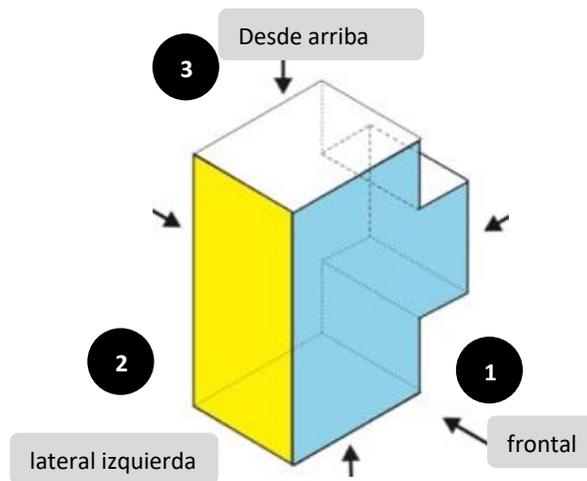
Práctica guiada

Para guiar la representación de diversos objetos utilizando diferentes formas de representación, se sugiere utilizar las distintas vistas del objeto: vista lateral izquierda, vista frontal del objeto y vista desde arriba.

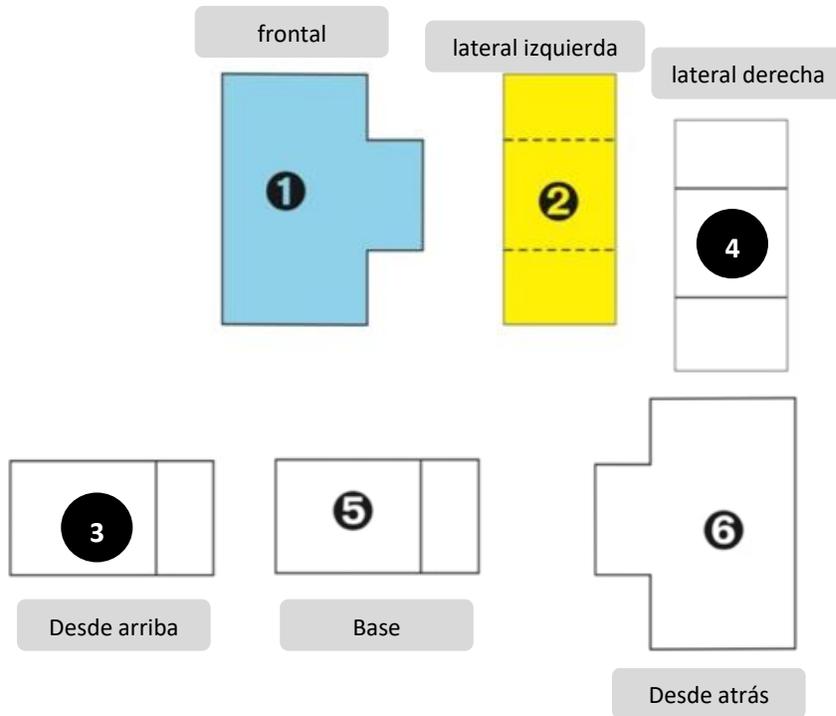
¿Cómo podemos describir esta figura?



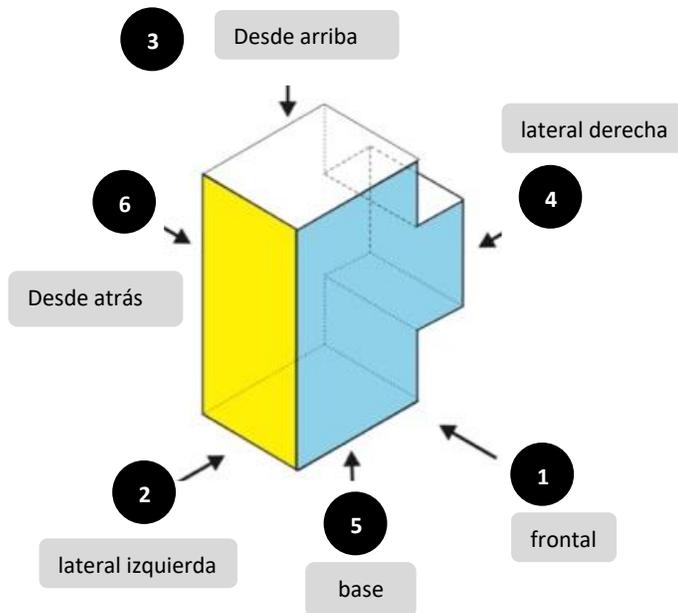
Se sugiere identificar las vistas de la figura 3D cuyas direcciones indican las flechas y rotular el dibujo con los números y direcciones de las vistas correspondientes.



Realizar el dibujo de forma manual o usando alguna herramienta de dibujo, de las 3 vistas indicadas y generando de manera mental las 3 vistas que nos son visibles.

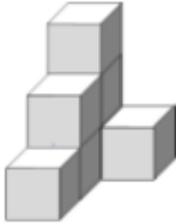
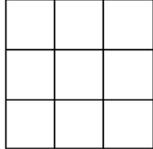
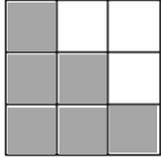
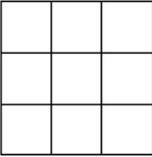
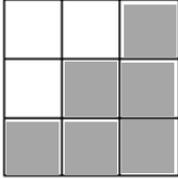
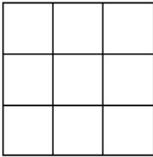
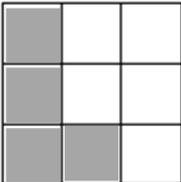
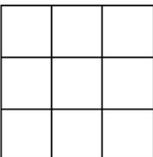
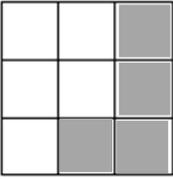
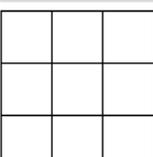
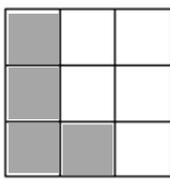


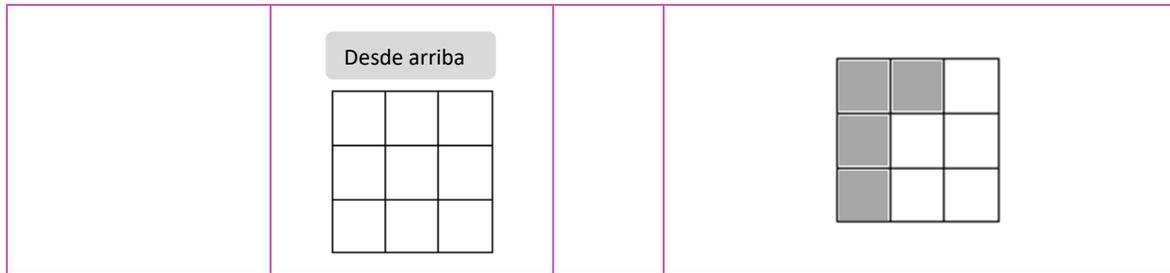
Se sugiere relevar el proceso inverso de reconstrucción de la figura 3D a partir de las figuras 2D de cada vista, para esto se puede considerar un trabajo con material concreto o con dibujos manuales.



Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo de pares, donde cada integrante trata de describir las tarjetas de figuras 3D que se le asignan, verbalizando la vista y la cantidad de cubos que la componen y usando plantillas, también se pueden hacer juegos de asociación de plantillas con figuras y de rapidez de la visualización. Una posible estructuración para el trabajo en pares se puede visualizar en la siguiente tabla:

Representación concreta	Plantillas para las diferentes vistas del edificio	→	Posibles soluciones de representaciones pictóricas-simbólicas
	<p>lateral izquierda</p> 		
	<p>lateral derecha</p> 		
	<p>frontal</p> 		
	<p>base</p> 		
	<p>Desde atrás</p> 		



Para retroalimentar la actividad y el aprendizaje de la representación de figuras 3D en figuras 2D se sugiere, se sugiere utilizar la retroalimentación grupal:

RETROALIMENTACIÓN GRUPAL




CRITERIOS CON MAYOR PORCENTAJE DE LOGRO

Representar objetos según las vistas frontal, lateral izquierda y desde arriba.

CRITERIOS CON MENOR PORCENTAJE DE LOGRO

Representar objetos 3D en vistas 2D que nos son visibles, la base, lateral derecha y desde atrás.

SUGERENCIAS PARA MEJORAR

Si es posible tomar el objeto y rotarlo para ver todas las vistas y representar cada una de ellas. Si no es posible mover el objeto, entonces describir verbalmente lo que se piensa que está detrás, sobre y al costado no visible.

<https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Vistas	Representa con una figura 2D al menos una vista visible de un objeto 3D.	Representa con una figura 2D las tres vistas visibles y al menos una de las vistas no visibles de un objeto 3D.	Representa con una figura 2D las tres vistas visibles y las tres vistas no visibles de un de un objeto 3D.
Plantillas	Usa las plantillas numéricas para indicar la cantidad de cubos que hay sobre la base.	Usa las plantillas numéricas para indicar la cantidad de cubos que hay sobre la base, realiza dibujos y plantillas de sombreado para describir la forma de las vistas visibles del objeto 3D.	Usa las plantillas numéricas para indicar la cantidad de cubos que hay sobre la base, realiza dibujos y plantillas de sombreado para describir la forma de las 6 vistas del objeto 3D.
Verbalización	Describe verbalmente una de las caras visibles.	Describe verbalmente las tres caras visibles y una no visible.	Describe verbalmente las tres caras visibles y describe todas las posibilidades de las no visibles.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que la habilidad de representar en geometría se basa en las nociones espaciales que permiten describir un objeto 3D y dibujarlo en figuras 2D según la cantidad de caras que tenga. Se sugiere incluir lo concreto y las figuras que tienen 6 caras y que corresponden a las 6 vistas que se ven y que se quieren visualizar. También, se sugiere trabajar aquellas representaciones en 2D de figuras de 3D, que en la visualización mental podrían tener más de una solución, este trabajo de desarrollo de la capacidad espacial permite a los estudiantes comprender las nociones básicas del dibujo técnico y su relación con la geometría escolar. Además, se sugiere especificar el uso de la línea punteada en el caso de los dibujos de las vistas, las cuales se utilizan para indicar que hay un corte o cambio en la cara paralela o detrás de la vista que se está representando.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de valoración del uso de las TIC, se sugiere el uso de programas de libre acceso que representen objetos en 3D y que permitan mover la figura para tener todas sus vistas.

Orientaciones para organizar e implementar el juego de roles: se sugieren las siguientes indicaciones para guiar la implementación del trabajo de pares con un juego de roles:

1.	2.	3.
<ul style="list-style-type: none"> •Elabore tarjetas con figuras 3D y otras con plantillas y otras con posibles soluciones. •Determine el tiempo de dedicación a la práctica independiente. 	<ul style="list-style-type: none"> •Organice la clase y el espacio para el trabajo en pares. Identifique si es necesario elaborar material en el caso de que sean tres personas. •Determine cómo y cuándo se hará el cambio de descripciones o si se dará una instrucción general de trabajo de pares. 	<ul style="list-style-type: none"> •Organice el proceso del juego indicando dónde se hacen las anotaciones. •Determine lo que se hará con los resultados y con la entrega de las respuestas. No es necesario que se haga una presentación de los resultados.

Actividad de desempeño 2

Propósito

En esta actividad se busca que los estudiantes representen objetos 3D de manera concreta, pictórica o simbólica comenzando con objetos de la realidad y proyectándolos paralelamente y dirigidas verticalmente a planos para generar un sistema de 3 planos paralelos entre sí. Para esto, el estudiante trabaja con el modelo de caja para llegar a representaciones cartesianas 3D y a especificaciones del tipo de proyección que se utiliza para compararlas entre ellas. También, se comparan las proyecciones proyectivas.

Objetivo de Aprendizaje

OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, valorando el uso de las TIC.
(Representar)

Conocimiento esencial

- Vistas laterales, frontal, desde atrás, base y desde arriba.
- Proyecciones paralelas y perpendiculares a un plano: alzada, lateral y planta.
- Proyecciones proyectivas.

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

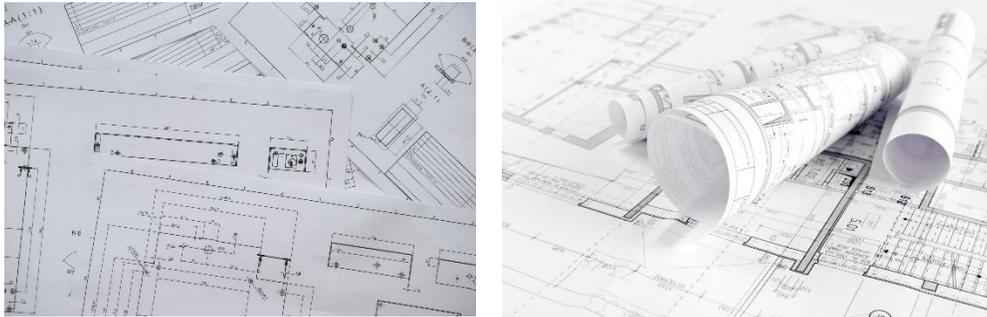
En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Reconocer imágenes de figuras 2D que se obtienen por reflexión.
- Reconocer imágenes de figuras 2D que se obtienen por rotación.
- Reconocer imágenes de figuras 2D que se obtienen por traslación.
- Identificar los elementos de una reflexión, como eje de simetría y distancia de un punto al eje de simetría.
- Identificar los elementos de una rotación, como centro y ángulo de rotación.
- Identificar los elementos de una traslación, como avance en tantas unidades a la derecha o izquierda y avance en tantas unidades hacia arriba o abajo.
- Uso del plano cartesiano para dibujar figuras 2D.
- Rotación alrededor un punto

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes la situación de planos de casas o departamentos, para introducir al tema de la descripción de objetos o figuras 3D. Se sugiere relevar la complejidad de un plano elaborado por un profesional técnico y las intenciones comunes de descripción que se quiere lograr en esta clase, las cuales pretenden lograr una comprensión en ciertas situaciones de la lectura de planos de viviendas.



Algunas de las preguntas que pueden motivar la base de la descripción de figuras 3D son:

- ¿Qué objetivo tienen los planos?
- ¿Cómo podemos describir una figura 3D?
- ¿En qué casos es necesario hacer representaciones de figuras 3D?
- ¿Qué tan complejas pueden llegar a ser estas representaciones?

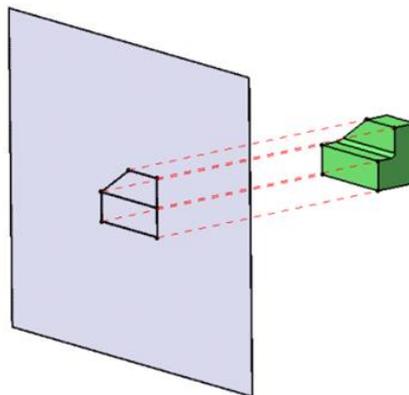
Conexión interdisciplinar

Emprendimiento y
Empleabilidad
OA4 Nivel 1 y 2 EM

Construcción de conocimiento

Para construir el conocimiento sobre las proyecciones paralelas se sugiere presentar la siguiente situación de proyección y comentar en comparación con las representaciones de vistas de una figura 3D que fueron trabajadas en las clases anteriores.

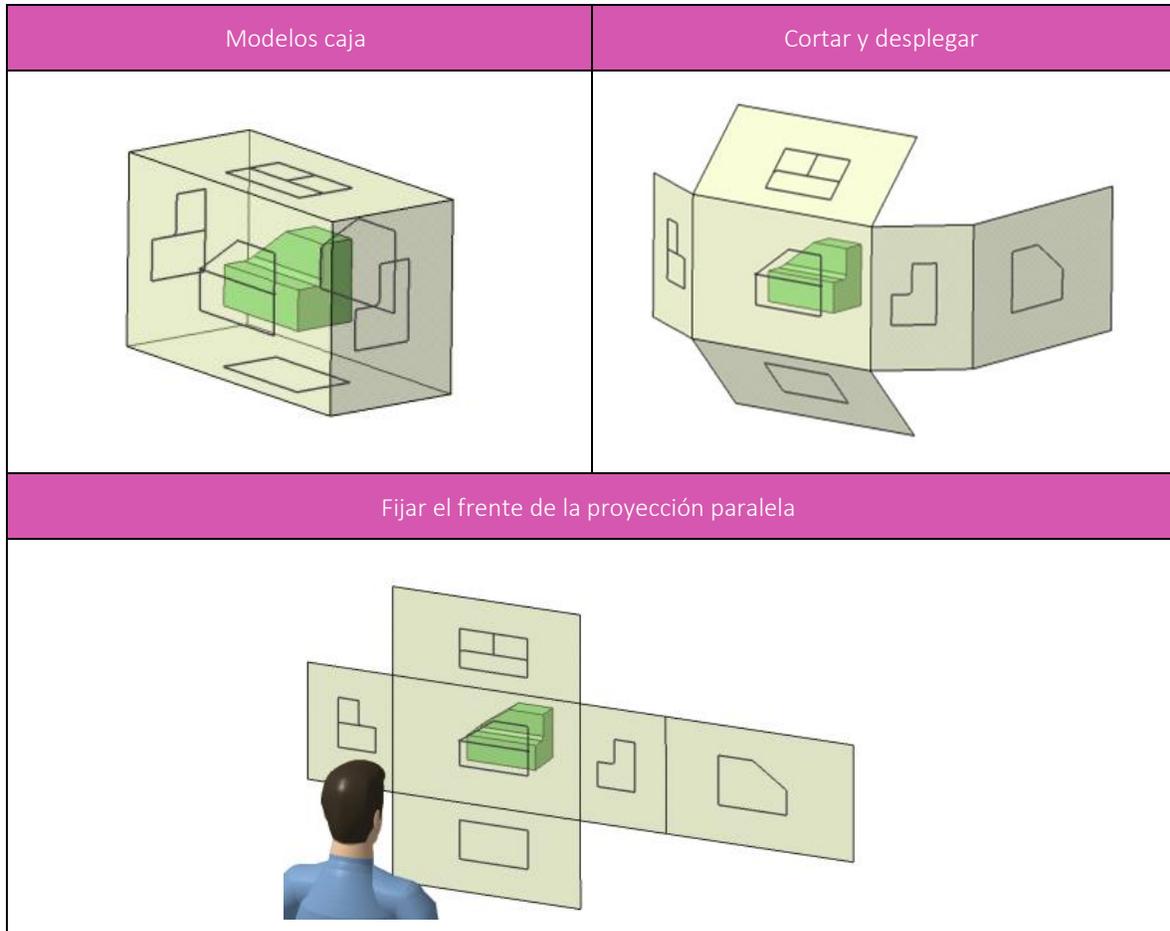
¿Qué se está haciendo para representar el objeto?



Para guiar a los estudiantes en la elaboración de respuestas, se sugiere tener presente que una respuesta intuitiva podría ser que se proyecta la figura 3D a una pantalla que está al frente y que es paralela al lado frontal de la figura 3D. Las líneas de proyección son paralelas entre sí e intersectan verticalmente con la pantalla, al cual se le denomina plano. La figura proyectada tiene la misma forma y orientación que la vista frontal de la figura 3D. Esta proyección se denomina proyección alzada al frente.

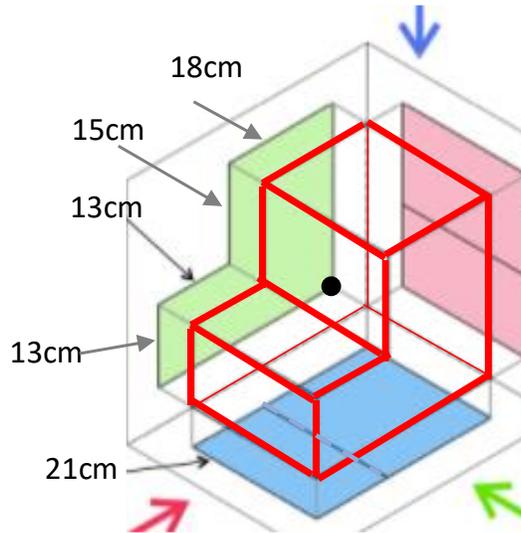
¿Cómo se realiza la proyección paralela del objeto?

Relevar los diferentes casos de proyección utilizando el modelo caja y utilizando las nociones de proyección paralela, lados, aristas, cortar y desplegar.

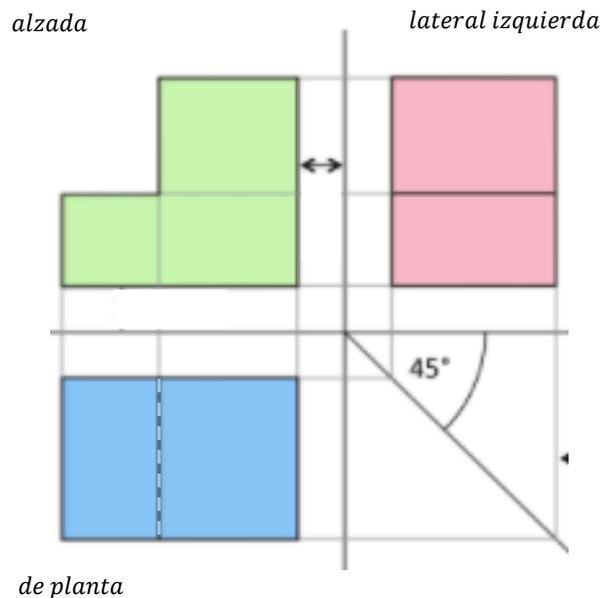


Práctica guiada

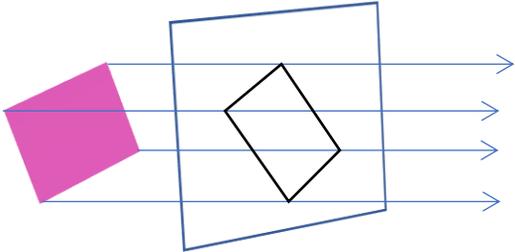
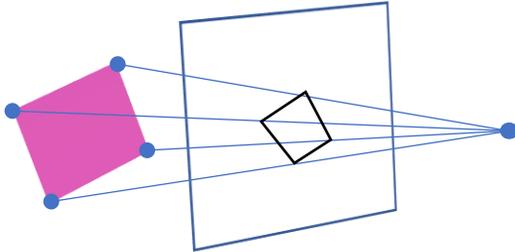
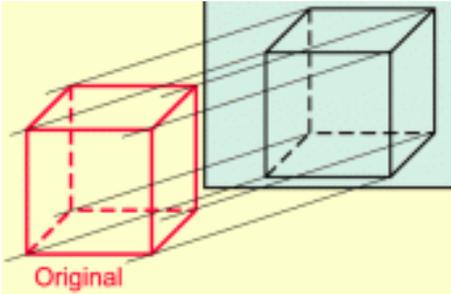
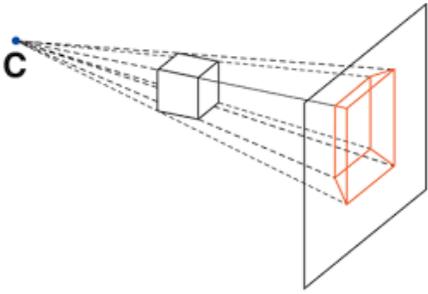
Para guiar el aprendizaje de las proyecciones paralelas se sugiere introducir el gráfico en 3D, para esto se sugiere presentar una figura 3D con las aristas marcadas en rojo y sus tres proyecciones: *alzada*, que corresponde a la vista de frente y que se encuentra de color verde, *lateral izquierda* que se encuentra de color rosado y *de planta* o base que se encuentra de color celeste.



A partir de este dibujo, se sugiere dibujar un sistema de coordenadas para las tres proyecciones: *alzada*, *lateral* y *base*. Relevando que el punto negro corresponde al punto negro en el dibujo inicial y las flechas dobles, indican la diferencia entre los lados próximos y a los ejes. Se sugiere completar la construcción aplicando la reflexión según un eje de simetría.



Para comprender las diferencias entre las diferentes representaciones, se sugiere motivar a los estudiantes para comparar la *proyección perspectiva* y la *proyección paralela* por medio de la representación de un riel de ferrocarriles utilizando ambas proyecciones.

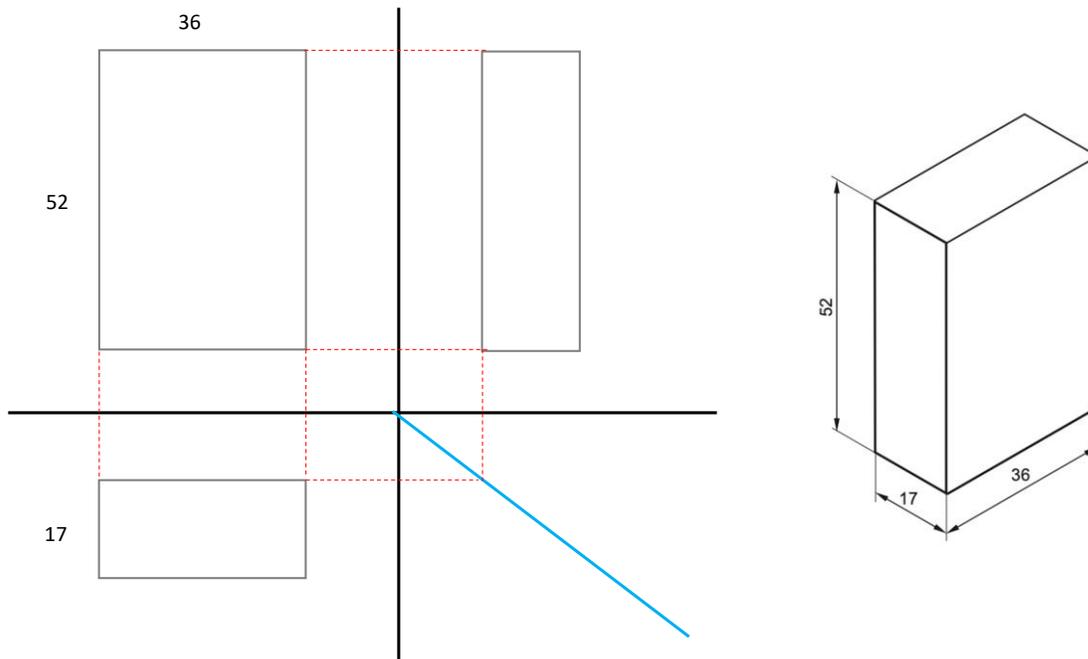
Proyección paralela	Proyección perspectiva
	
<p>¿Cuáles son sus diferencias y similitudes?</p>	
<ul style="list-style-type: none"> • Imagen en 2D de un objeto 3D. • Las rectas proyectivas son paralelas. • Los pares de rectas que son paralelos en la realidad siguen siendo paralelos en la imagen 2D. • Las distancias equidistantes en la realidad siguen siendo equidistantes. 	<ul style="list-style-type: none"> • Imagen en 2D de un objeto 3D. • Las rectas proyectivas no son paralelas. • Las rectas proyectivas interceptan todas en un punto, denominado centro de la perspectiva. • Las rectas que son paralelas en la realidad se cortan en un punto de fuga.
<p>Otros ejemplos</p>	
	

Práctica independiente

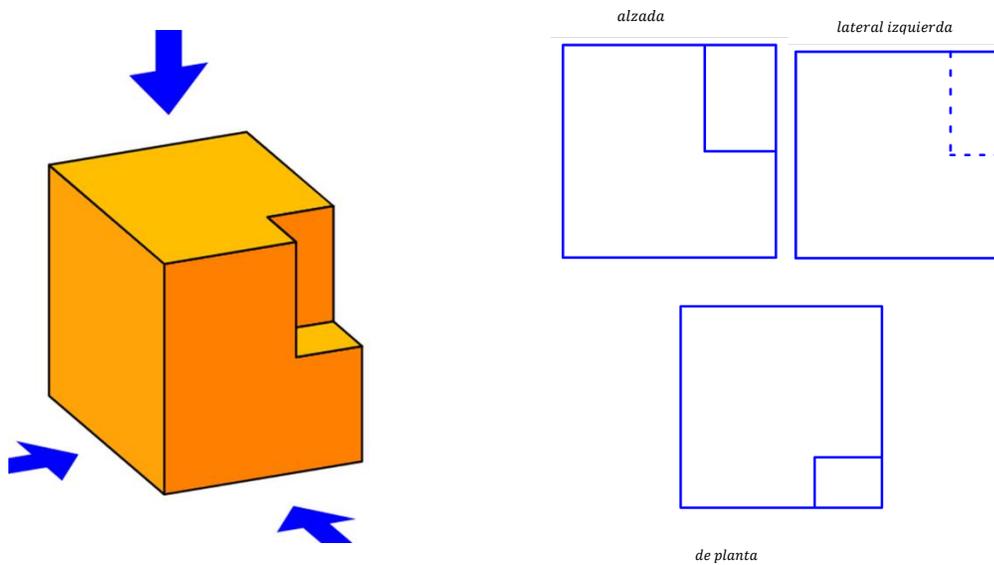
Se sugiere un trabajo personal de representación de diferentes objetos o bien de diferentes figuras utilizando la proyección paralela y comparando en algunos casos con la proyección perspectiva. Los dibujos se pueden realizar de forma manual utilizando regla y papel o utilizando programas de fácil acceso para los estudiantes.

Algunos ejemplos que pueden ser utilizados como modelo en esta práctica independiente son problemas de trabajo inverso, es decir, entregar la proyección y esperar que ellos reconstruyan según los datos. Por

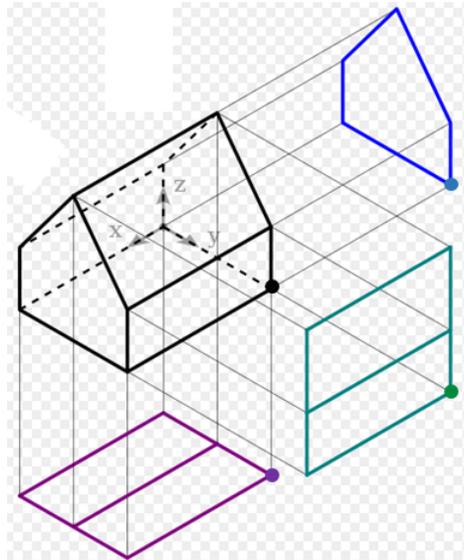
ejemplo, en el recuadro de abajo se muestra el dibujo técnico de un prisma recto con el área basal de un rectángulo. Reconstruye la figura 3D en proyección isométrica con las medidas que se indican en *mm*.



Se sugiere, incluir en esta práctica problemas de proyecciones *alzada*, *lateral izquierda* y *de planta* de figuras 2D que representan figuras 3D, por ejemplo, en el dibujo se ve una figura 3D, comenzar tomando las medidas y luego elabora en un plano las tres proyecciones.



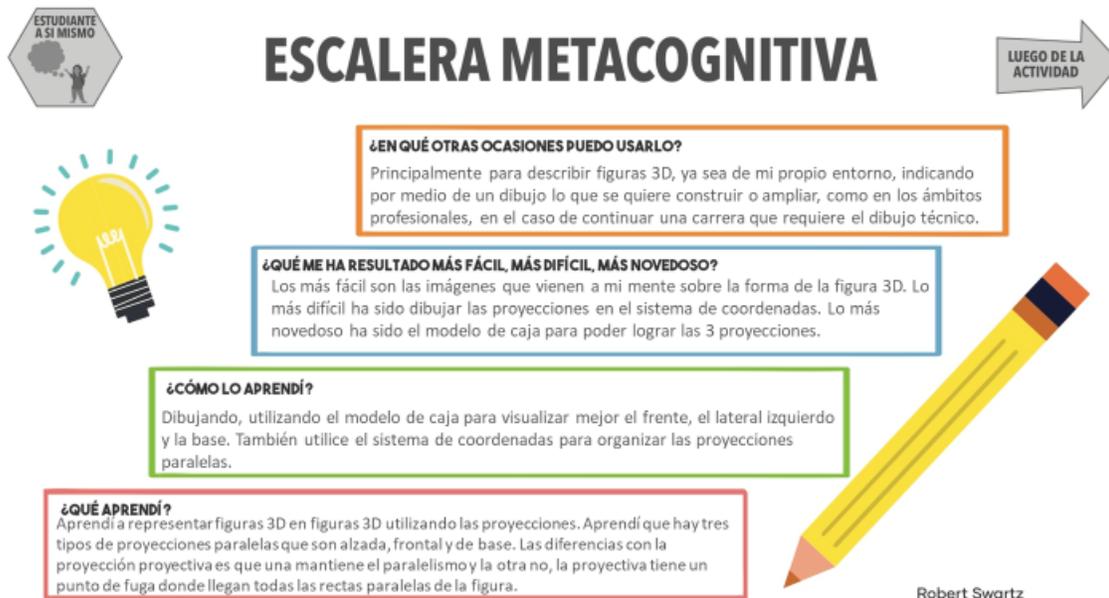
También, se sugiere incluir figuras más complejas que están en contexto, por ejemplo, en el recuadro de abajo se muestran las tres proyecciones *alzada*, *lateral izquierda* y *de planta* de una casa. Se puede reconstruir o presentar las tres proyecciones en un sistema de coordenadas.



Si el contexto lo permite, se sugiere incluir preguntas de comparación, por ejemplo:

¿Será una buena proyección paralela frontal?	
proyecto arquitectónico <i>Kubus Huis</i> (Casas de cubos) en Rotterdam, Países Bajos.	
¿Cómo lo harías tú?	

Para retroalimentar el trabajo personal en la actividad de representación de figuras 3D en figuras 2D utilizando las proyecciones, se sugiere utilizar la escalera metacognitiva:



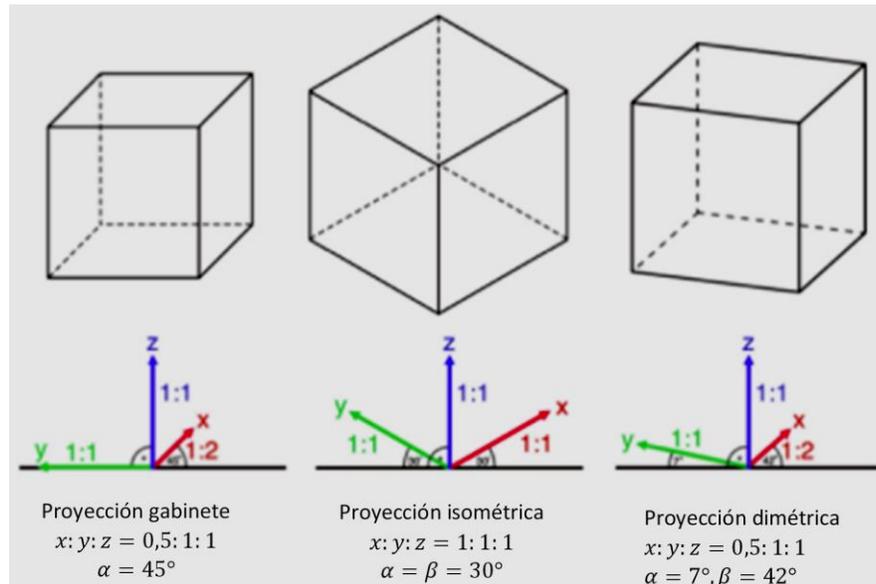
Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Modelo caja	Utiliza el modelo caja para esquematizar la figura 3D.	Utiliza el modelo caja para generar las 6 proyecciones de la figura 3D.	Utiliza el modelo caja para generar las 6 proyecciones de la figura 3D y realiza el trabajo inverso de reconstruir el objeto a partir de las 6 proyecciones paralelas.
Sistema de coordenadas	Utiliza el sistema de coordenadas para esquematizar algunas vistas de la figura 3D.	Utiliza el sistema de coordenadas para generar las 3 proyecciones de la figura 3D, alzada, base y lateral.	Utiliza el sistema de coordenadas para generar las 3 proyecciones de la figura 3D y realiza el trabajo inverso de reconstruir el objeto a partir de las 3 proyecciones paralelas.
Proyecciones	Identifica características de una de las dos proyecciones.	Identifica las características de las dos proyecciones en figuras 2D dadas.	Identifica las características de las dos proyecciones en figuras 2D, diferenciando en la elaboración de proyecciones paralelas o proyectivas propias.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que la habilidad de representar permite expresar las imágenes mentales de figuras 3D utilizando nociones geométricas. Esta actividad presenta una oportunidad para trabajar las proyecciones estandarizadas, utilizando el sistema de coordenadas y los ángulos de inclinación del plano. Para esto, se sugiere considerar ejemplos con figuras regulares y con foco en el desarrollo de la capacidad espacial.



Para el caso de las diferentes modalidades de EPJA Tercera jornada, Centros de Educación Integrada de Adultos, Establecimientos Educacionales al interior de Recintos Penitenciarios y al interior de Unidades Militares, se sugiere considerar tanto el trabajo con programas geométricos de libre disposición, como también el trabajo manual de los dibujos, para esto se sugiere utilizar papel milimétrico, el uso de reglas y transportadores, como también considerar en este caso un tiempo mayor para la elaboración rigurosa y detallada de las vistas.

Se sugiere planificar un módulo cero que considere las traslaciones, rotaciones y reflexiones de figuras en el plano o en el espacio, enfocándose en dibujar en el plano cartesiano y en la habilidad de representar. Para el desarrollo de la habilidad de representar dentro de este módulo introductorio, se sugiere utilizar la secuencia procedimental disponible en la ficha pedagógica de la habilidad de representar en https://www.curriculumnacional.cl/docente/629/articles-248166_recurso_pdf.pdf, también se puede revisar la infografía de la misma habilidad, que se encuentra disponible en https://www.curriculumnacional.cl/docente/629/articles-248168_recurso_pdf.pdf

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de valoración del uso de las TIC, se sugiere el uso de programas de libre acceso que representen objetos en 3D, que permitan mover la figura para tener todas sus vistas y que generen proyecciones en el sistema de coordenadas.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo personal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo personal e independiente de otros:



Independencia

Pensando las soluciones y los caminos para obtener soluciones por cuenta propia.



Confianza en lo que se sabe

Generar seguridad en lo que se hace en cada paso. La confianza como facilitador de explicaciones propias y para explicar a otros.



Trabajar a su propio nivel

En ciertos momentos es necesario saber dónde se está y trabajar al propio ritmo.



Practicar la autoregulación

Cada tarea requiere de concentración y de regular en qué momento volverse a un compañero o maestro para pedir ayuda directa.

Actividad de desempeño 3

Propósito

En esta actividad se busca que los estudiantes evalúen modelos, los comparen entre sí y con la realidad para generar definiciones y proposiciones de la geometría. Para esto, el estudiante trabaja con las relaciones métricas entre ángulos, cuerdas, sectores, secantes y tangentes en situaciones 2D que se obtienen por proyección de algunos objetos o situaciones en 3D. La actividad está orientada hacia la capacidad espacial, las normas de representaciones y las nociones básicas del dibujo técnico.

Objetivo de Aprendizaje

OA4. Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones y tomando decisiones razonadas que contribuyan al bien común. **(Modelar)**

OA5. Fundamentar conjeturas usando conocimientos matemáticos, trabajando colaborativamente. **(Argumentar y comunicar)**

Conocimiento esencial

- Arcos y sectores circulares en dependencia del ángulo central
- Volumen de cilindros rectos con base que son parte de un círculo.
- Figuras compuestas y estimación a cilindros.

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Cálculo de volumen de prismas.
- Identificación de ángulos centrales.
- Identificación de sectores de una circunferencia.
- Diferencia entre cuerda y radio.
- Cálculo del área y del perímetro de una circunferencia.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes situaciones de diseño o elaboración de material industrial en las cuales se requiere el conocer el ángulo central, inscrito y semi - inscrito de una circunferencia, como también las relaciones entre arco, cuerda y ángulo de una circunferencia.



Algunas de las preguntas que pueden motivar la introducción de los conceptos relacionados a la circunferencia son:

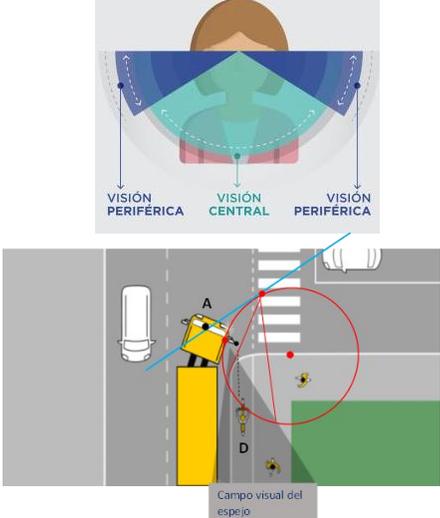
- ¿Qué tienen en común estas figuras?
- ¿De qué manera se utilizan los ángulos?
- ¿Qué relaciones habrá entre ángulos y circunferencias?
- ¿Por qué podría ser útil saber sobre estas relaciones para el diseño o reparación de objetos de nuestro hogar?

Conexión interdisciplinar
Emprendimiento y
Empleabilidad
OA2 Nivel 1 y 2 EM

Construcción de conocimiento

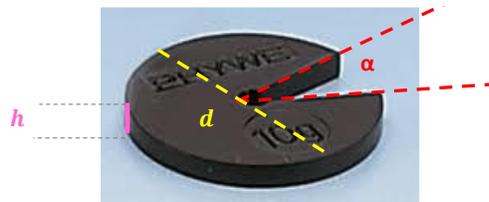
Para construir el conocimiento de evaluar modelos geométricos, comparándolos entre sí y con la realidad, se sugiere comenzar con una situación y desarrollarla para generar nuevas definiciones y proposiciones matemáticas que luego pueden ser transferidas a otras situaciones. En la siguiente tabla se presenta una propuesta de desarrollo para la construcción del conocimiento.

Situación inicial	Esquema	Conocimiento geométrico que se quiere generar
Elaboración de material industrial con ciertas características.	<p>Diagram showing a circular metal piece with a central angle $\alpha = 30^\circ$ marked by dashed blue lines. A red horizontal line is drawn across the top of the circle.</p>	<p>Ángulo central. Sector. Cuerda.</p>

<p>Condiciones del tránsito y accidentes</p>		<p>Sector. Recta tangente a una circunferencia. Ángulos inscritos. Ángulos semi – inscritos.</p>
<p>Diseño de objetos plegables</p>	<p>Proyecciones laterales, ángulos de apertura y posiciones de vértices para hacer nuevos pliegues.</p> 	<p>Proposición del ángulo inscrito y central, el central es el doble cuando están subtendidos por la misma cuerda.</p>

Práctica guiada

Para guiar a los estudiantes en el aprendizaje de la evaluación de modelos y su fundamentación en proposiciones geométricas, se sugiere relacionar el ángulo central y el sector con objetos de la industria que requieren de sacados de sectores de círculos para cumplir con la masa normada. Relevando las figuras 3D que componen el objeto, en particular el cilindro al cual se le ha sacado un prisma circular, que se componen de un sector circular y que tiene la misma altura h que el cilindro original. Considerar ejemplos numéricos, por ejemplo, que el prisma circular tiene un ángulo central de $\alpha = 30^\circ$.



Se sugiere guiar el cálculo del volumen del prisma circular que se sacó del cilindro, indicando los datos tales como el diámetro $d = 28mm$ y la altura de $h = 4mm$ y considerando $\pi = 3,14$.

Área del sector circular	$A = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot r^2\pi = \frac{1}{12} \cdot r^2\pi$
Volumen del prisma	$V = \frac{1}{12} \cdot r^2\pi \cdot h$
Aplicación con medidas	$V = \frac{1}{12} \cdot (14mm)^2\pi \cdot 4mm$ $\approx 205,1mm^3$

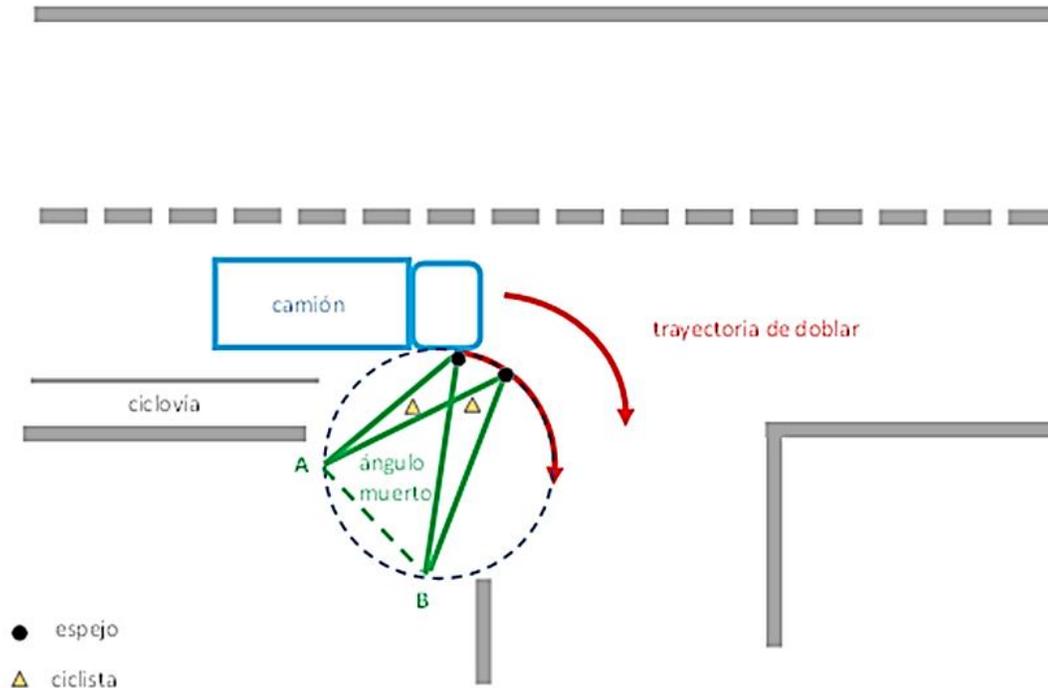
Para el cálculo de la masa de la figura 3D que se saca, se sugiere anotar la masa del objeto completo $m = 10g$, y el ángulo central de 30° , indicando que se trabaja sin considerar la densidad del material

Volumen del objeto 3D sin el sector.	$V_n = \frac{330^\circ}{360^\circ} \cdot r^2\pi \cdot h = \frac{11}{12} \cdot r^2\pi \cdot h$
Volumen del prisma sectorial	$V = \frac{1}{12} \cdot r^2\pi \cdot h$
Relación entre ambos volúmenes	$\frac{V}{V_n} = \frac{\frac{1}{12} \cdot r^2\pi \cdot h}{\frac{11}{12} \cdot r^2\pi \cdot h} = \frac{1}{11}$
Cálculo de la masa sectorial	$\frac{1}{11} \cdot 10g \approx 0,91g$

Comparar con sectores que tienen otros ángulos, suponiendo que el ángulo central se reduce a 15° y calcular la su masa del prisma circular. Relevar que el área de un sector circular es proporcional al ángulo central. Esto significa que el área del sector del ángulo central de 15° se reduce a la mitad y que las demás medidas se mantienen constante. Por lo tanto, la masa se reduce a la mitad que es $0,5 \cdot 0,91g = 0,455g$.

Se sugiere guiar otro tipo de problemas, por ejemplo, la situación de un camión que inicia la fase de doblar hacia la derecha y que al mismo tiempo un ciclista está circulando en la ciclovía paralela a la calle y quiere seguir sin cambiar su dirección. Suponiendo que el ciclista ya está en el ángulo muerto de la vista del conductor. Se supone que la trayectoria del camión en la fase de doblar es parte de una circunferencia.

¿Se mantiene el ciclista en el ángulo muerto del conductor?



¿Qué consejos se debe transmitir tanto al chofer como a los ciclistas?

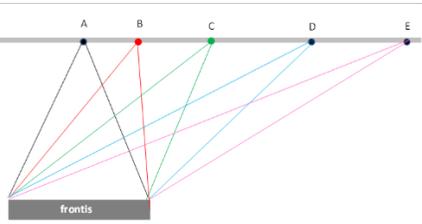
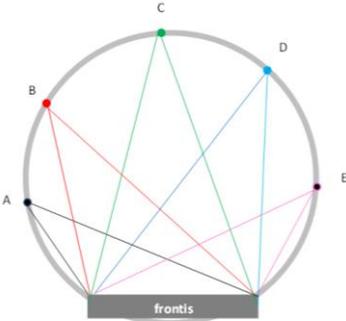
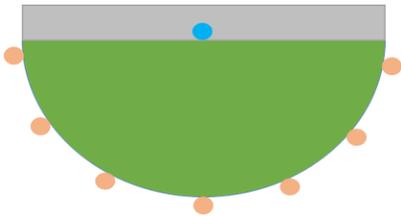
Se sugiere guiar a los estudiantes para obtener las siguientes respuestas:

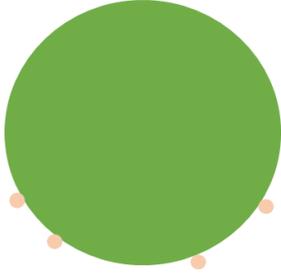
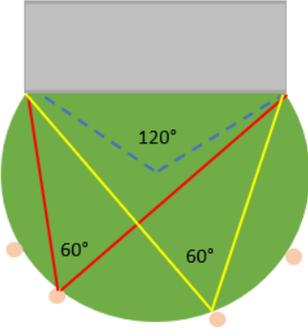
- El camión dobla en la trayectoria de una circunferencia y el espejo armado en el camión también sigue una circunferencia.
- El vértice del ángulo muerto está en el espejo y existe la cuerda \widehat{AB} imaginaria sobre la cual está el ángulo inscrito que coincide con el ángulo muerto.
- Avanzando en la fase de doblamiento el espejo sigue en la circunferencia y, según la propiedad del ángulo inscrito, mantiene su medida.
- El ciclista, avanzando en la ciclovía no sale de los ángulos muertos, que se generan.
- Se debe aconsejar al conductor que mire adicionalmente hacia atrás tornando su cabeza hacia el costado y hacia atrás para asegurarse que no haya nadie en el ángulo muerto. Aunque el conductor deba respetar al ciclista, el consejo para el ciclista es de poner máxima atención y no insistir en su prioridad al cruzar, se sugiere esperar hasta quedar en un ángulo visible.

Práctica independiente

Se sugiere hacer estaciones con diferentes situaciones para utilizar las propiedades del ángulo inscrito y central. en cada caso, se espera que el estudiante trabaje cada estación de manera personal y que elabore el desarrollo de cada problema, evaluando el modelo que se utilizará.

Algunas de las estaciones que se sugieren para esta actividad son:

Estación		Instrucción
¿Aumento o disminución?		<p>Este es el frente de un edificio y una calle paralela al frente. Los puntos representan vehículos que se alejan del frente. Los ángulos son ángulos de vista al frente.</p> <ul style="list-style-type: none"> Mide los ángulos en los vértices A, B, C, D y E. Describe una tendencia entre los ángulos.
¿Aumento o disminución?		<p>Este es el frente de un edificio y una calle circular. Los puntos representan autos que se desplazan en esta trayectoria circular. Los ángulos son ángulos de vista al frente.</p> <ul style="list-style-type: none"> Mide los ángulos en los vértices A, B, C, D y E. Describe una propiedad entre los ángulos.
¿Quién ve mejor en el anfiteatro?		<ul style="list-style-type: none"> Identifica y describe la forma del escenario y la tribuna para el público. Conjetura si el área verde tenía un uso o no. Identifica diferencias con los teatros del día de hoy. Determina ángulos inscritos y centrales.
¿Quién ve mejor en el anfiteatro?		<p>El modelo plano del anfiteatro tiene la forma de un semicírculo. Un actor representado en el centro del escenario con un punto azul tiene una relación geométrica especial con todos los espectadores, marcados en naranja.</p> <ul style="list-style-type: none"> Describe esta relación geoméricamente. Determina gráficamente bajo cuál ángulo todos los espectadores pueden ver el ancho total del escenario. Considerar solo el ancho del borde y no la profundidad.

		<p>El diseñador de escenarios quiere que todos los espectadores puedan ver el ancho del escenario bajo el mismo ángulo de 60°. Modela la situación gráficamente en forma aproximada.</p>
<p>Diseño de vistas según un ángulo</p>		<p>Describe esta situación utilizando la noción de espectadores, Frontis, escenario o espectadores. Determina ventajas o desventajas desde el arco en el cual se encuentran los puntos naranjos.</p>

Para retroalimentar la actividad de estaciones, se sugiere utilizar Valoro - Sugiero:



VALORO - SUGIERO

DURANTE O LUEGO DE LA ACTIVIDAD

VALORO DE TU TRABAJO...

El desarrollo ordenado de las respuestas a las preguntas y situaciones planteadas en cada estación.

Además, en cada situación lograste encontrar la relación entre los objetos y los ángulos inscritos o centrales.

TE SUGIERO..

Hacer proyecciones de los objetos, tanto frontal como lateral, así podrás tener al menos dos miradas del mismo objeto.

Las proyecciones te ayudarán a comprender los ángulos que están involucrados en aquellos objetos que son más complejos en 3D.

https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#recuadros_articulo_8495_2

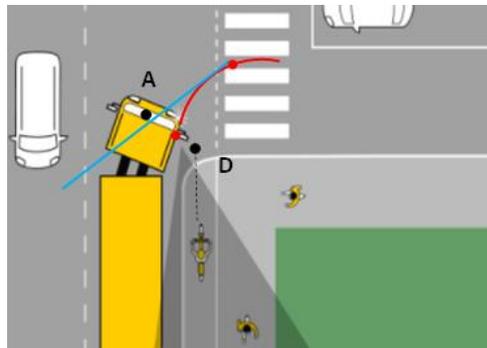
Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Ángulos inscritos	Dibuja ángulos inscritos	Dibuja e identifica la medida de ángulos inscritos que son iguales.	Relaciona la medida de ángulos inscritos que son iguales usando el criterio de subtender la misma cuerda
Ángulos inscritos y centrales	Dibuja ángulos centrales.	Dibuja e identifica ángulos centrales e inscritos que se subtienden con la misma cuerda	Relaciona el doble del ángulo inscrito con el ángulo central cuando se subtienden con la misma cuerda.
Situaciones	Dibuja esquemáticamente algunas de las partes de la situación.	Dibuja geoméricamente la situación identificando ángulos desde dos perspectivas.	Dibuja geoméricamente la situación identificando ángulos desde dos perspectivas para dar respuestas a las situaciones utilizando las relaciones entre los ángulos inscritos y centrales.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que la habilidad de modelar requiere de varios momentos, uno de ellos es la aplicación de las propiedades para justificar la construcción de objetos o describir con mayor precisión el fenómeno. Se sugiere considerar la situación del ángulo muerto con detalles y en lo posible experimentando de forma concreta con espejos las visiones que podría obtener un conductor para comprender mejor el fenómeno del ángulo muerto. También se sugiere hacer esquemas y proyecciones de la vista desde arriba.



Actitudes: para apoyar el desarrollo de la toma de decisiones razonadas y que contribuyen al bien común, se sugiere profundizar en el tipo de mensaje que le darían al conductor y al ciclista para evitar accidentes que tienen como base el ángulo muerto. También se sugiere profundizar en el cálculo de la masa normada para fines científicos y en la comprensión de la elaboración de teatros o anfiteatros desde el punto de vista geométrico. Para este último tema, se sugiere la visita de un arquitecto o diseñador técnico para hacer una entrevista que aporte a las proyecciones personales de vida.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo personal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo personal e independiente de otros:



Independencia

Pensando las soluciones y los caminos para obtener soluciones por cuenta propia.



Confianza en lo que se sabe

Generar seguridad en lo que se hace en cada paso. La confianza como facilitador de explicaciones propias y para explicar a otros.



Trabajar a su propio nivel

En ciertos momentos es necesario saber dónde se está y trabajar al propio ritmo.



Practicar la autoregulación

Cada tarea requiere de concentración y de regular en qué momento volverse a un compañero o maestro para pedir ayuda directa.

Actividad de desempeño 4

Propósito

En esta actividad se busca que los estudiantes evalúen modelos, los comparen entre sí y con la realidad para generar representaciones utilizando la geometría analítica. Para esto, el estudiante trabaja con la tangente y con ecuaciones analíticas de la recta y la circunferencia para dar respuestas a problemas de situaciones asociadas a la construcción y diseño de objetos industriales, de deporte o de uso cotidiano.

Objetivo de Aprendizaje

OA4. Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones y tomando decisiones razonadas que contribuyan al bien común. **(Modelar)**

Conocimiento esencial

- Arcos y sectores circulares en dependencia del ángulo central
- Volumen de cilindros rectos con base que son parte de un círculo.
- Figuras compuestas y circunferencias.

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- La expresión analítica de la recta.
- La tangente de la recta.
- Ecuaciones lineales.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes situaciones de diseño o elaboración de objetos en las cuales se requiere de una esfera y un cono, relevando en cada una de ellas la proyección frontal en 2D que permite visualizar las rectas tangentes y la circunferencia.



Algunas de las preguntas que pueden motivar el desarrollo de la proyección en 2D y algunas situaciones problemáticas son:

- ¿Qué figuras 3D tienen en común estos objetos?
- ¿Qué características tiene un buen gorro de cumpleaños?
- ¿Cómo se puede transferir la situación del 3D al 2D?
- ¿Cómo podemos utilizar la ecuación de la recta?

Conexión interdisciplinar

Emprendimiento y
Empleabilidad
OA2 Nivel 1 y 2 EM

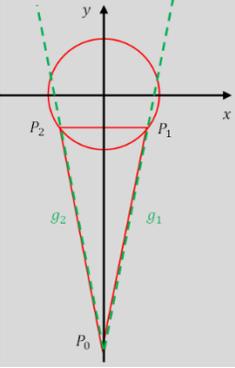
Construcción de conocimiento

Para construir el conocimiento de evaluar modelos geométricos, comparándolos entre sí y con la realidad, se sugiere comenzar con una situación que sea fácilmente transferible al plano cartesiano por medio de una proyección frontal. Por ejemplo, la de elaboración de una piñata con características de forma similares a un gorro.

¿cuáles son las características de esta piñata?



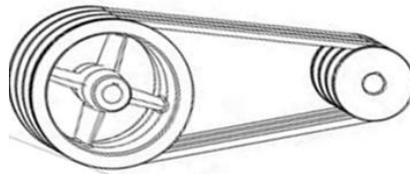
Se sugiere realizar otras preguntas, las cuales permiten construir las proyecciones y relacionar con geometría analítica.

Pregunta	Posible respuesta
¿Cómo se denominan las figuras geométricas 3D que se observan en la foto?	Cono y esfera.
¿Qué condiciones entre las medidas se deben cumplir para que la pelota no se hunda en este cuerpo?	El diámetro de la esfera debe ser mayor que el diámetro del área basal del cono.
¿Como se representa en 2D?	
¿Cómo se puede relacionar la situación con geometría analítica de rectas y circunferencias?	La esfera se convierte en un círculo con el mismo radio que la esfera y el cono se convierte en un triángulo isósceles cuya base tiene la medida del diámetro del área basal del cono. Los lados iguales del triángulo isósceles coinciden con las generatrices del cono.
¿Cuál podría ser un sistema cartesiano favorable para representar la situación con rectas y circunferencias?	Si se considera el perímetro del círculo, las rectas g_1 y g_2 que provienen del punto $P_0(0 y_0)$ son secantes de la circunferencia y el sistema cartesiano de coordenadas que tiene su origen en el centro de la circunferencia.
¿cómo se elabora la ecuación analítica de una circunferencia de radio r ?	La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$ que se puede despejar a la variable y . $y = \sqrt{r^2 - x^2}$
Si $P_0(0 y_0)$, $P_1(x_1 y_1)$ y $P_2(x_2 y_2)$ son los puntos generadores del triángulo isósceles ¿Cómo se obtienen las expresiones analíticas de las rectas g_1 y g_2 ?	Forma analítica de las ecuaciones con los pares de puntos P_0 y P_1 o P_0 y P_2 Recta g_1 : $\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \Leftrightarrow y = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \cdot (x - x_0)$ Recta g_2 : $\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y_2-y_0}{x_2-x_0} \Leftrightarrow y = \frac{y_2-y_0}{x_2-x_0} \cdot (x - x_0)$
¿Qué ubicación tienen las rectas g_1 y g_2 en comparación con la circunferencia?	Las rectas g_1 y g_2 son secantes de la circunferencia.

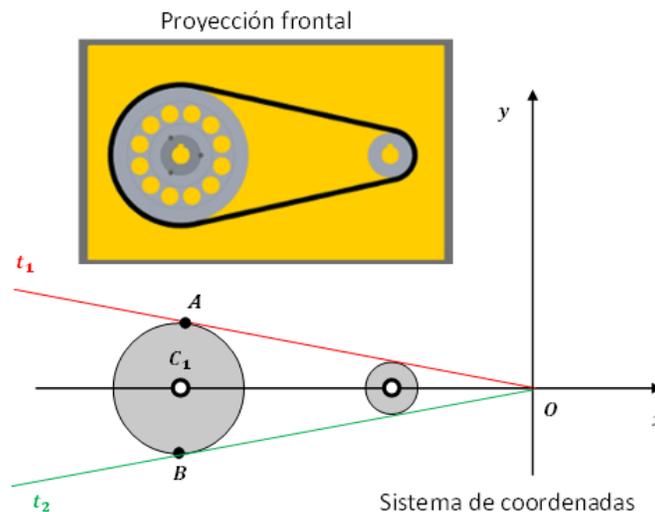
¿En qué casos g_1 y g_2 pueden ser tangentes?	Solamente en los casos en las cuales el lado basal del triángulo isósceles mide más que el radio de la circunferencia.
¿Qué diferencia hay entre este modelo y el que se genera con el gorro chino campestre?	Las rectas son tangentes al triángulo, quedando de esta manera toda la circunferencia dentro del triángulo. En la realidad, la esfera queda dentro del cono.

Práctica guiada

Para guiar el aprendizaje de la modelación de diferentes situaciones utilizando las proyecciones y la geometría analítica, se sugiere presentar un sistema de rotación formado por dos ruedas de diferente radio conectadas entre sí por una correa, que se utiliza frecuentemente en conducción de motores de autos, algunas bicicletas y máquinas.



Se sugiere realizar una proyección frontal del objeto 3D y a partir de este generar un sistema de coordenadas que sea conveniente para determinar las ecuaciones de las rectas tangentes, nominando rectas, puntos de intersección y centros de la circunferencia. En este caso, se quiere comprobar la perpendicularidad utilizando expresiones generales para la pendiente.

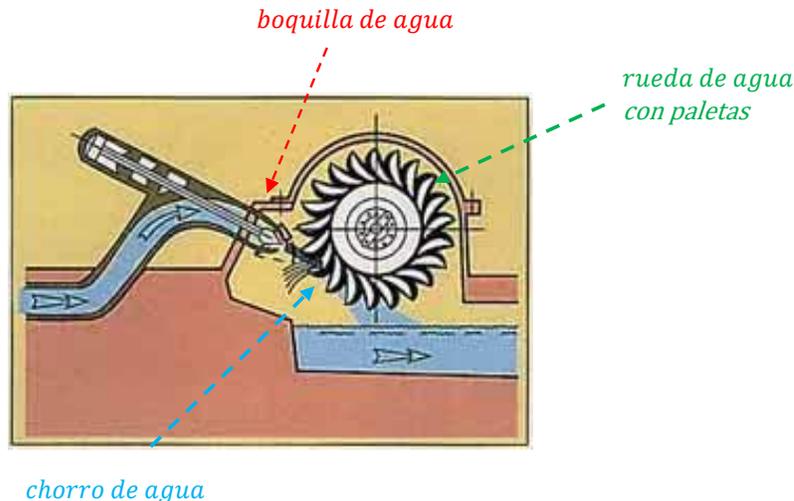


Guiar el desarrollo algebraico que permite determinar las ecuaciones de las rectas y de la pendiente, se sugiere considerar ejemplos numéricos para facilitar la comprensión del procedimiento general. Las ecuaciones de rectas según la representación en el plano cartesiano se obtienen utilizando el principio de la simetría.

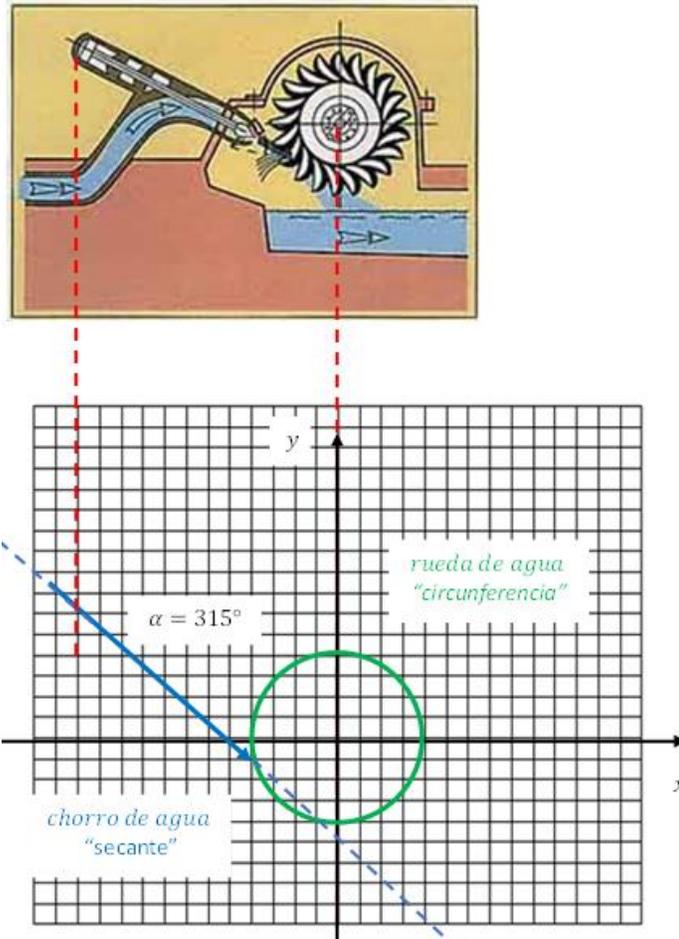
	Circunferencia grande C_1	Circunferencia pequeña C_2
Centros de las circunferencias	$C_1(x_1 0)$	$C_2(x_1 0)$
Rectas	$y = m_1 \cdot x$	$y = m_2 \cdot x$
Puntos de intersección con las rectas t_1 y t_2	$A(x_1 y_1)$	$B(x_1 -y_1)$
Pendientes	$m_1 = \frac{y_1}{x_1}$	$m_2 = \frac{-y_1}{x_1}$

La pendiente de la recta t_1 es negativa porque la coordenada x_1 es negativa y y_1 es positiva, por simetría la pendiente de la recta t_2 es positiva y se tiene que la pendiente de m_2 de la tangente t_2 es $-m_1$.

Se sugiere guiar la resolución de un problema más complejo manteniendo el foco en la habilidad de modelar, principalmente en la evaluación del modelo que se utilizará, en este caso, la proyección de rectas secantes y la expresión de la recta y circunferencia analítica. Para esto, se sugiere presentar el dibujo técnico 2D de una rueda de agua cuya rotación se origina por un chorro de agua que se inyecta mediante una boquilla de agua. Teniendo presente que la importancia de la rueda de agua para generar energía limpia, ya que este sistema se utiliza para generar corriente eléctrica.



Se sugiere continuar con el mismo procedimiento de transferir el dibujo técnico a un sistema de coordenadas conveniente para representar la situación. Modelar la situación real 3D con geometría analítica determinando las expresiones de las rectas y circunferencias en 2D. Para facilitar la comprensión, se sugiere considerar que la rueda del agua tiene un diámetro de $d = 2m$ y para obtener una efectividad óptima de movimiento el chorro tiene una inclinación desde el eje positivo de x de $\alpha = 315$ y está ubicado a $-1,25m$ del eje de la rueda de agua.



Relevar las medidas que se van a utilizar, indicando el radio de la circunferencia $r = 1m$, la escala a utilizar $1: 100$ y la ubicación del centro de la circunferencia en $O(0|0)$. Se sugiere utilizar la ecuación analítica de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1^2$ para despejar a la variable y .

$$y = \sqrt{1^2 - x^2}$$

Determinar la pendiente utilizando calculadora y las relaciones trigonométricas $m = \tan(315^\circ) = -1$ y el punto de intersección con el eje y el punto $P(0|-1,25)$, evaluando en la forma general $y = m \cdot x + c$. Para encontrar luego la intersección entre la recta y la circunferencia:

$$\sqrt{1^2 - x^2} = -x - 1,25 \quad |(\)^2$$

$$1 - x^2 = (-x - 1,25)^2$$

$$1 - x^2 = x^2 + 2,5x + 1,5625$$

$$2x^2 + 2,5x + 0,5625 = 0$$

Práctica independiente

Se sugiere un trabajo personal de resolución de problemas utilizando una hoja de trabajo en la cual los estudiantes desarrollan un problema siguiendo una guía de preguntas o instrucciones que permiten comprender la forma de aplicar lo aprendido. A continuación, se presenta una posible hoja de trabajo.

Hoja de trabajo

Nombre: _____ Fecha de entrega: _____

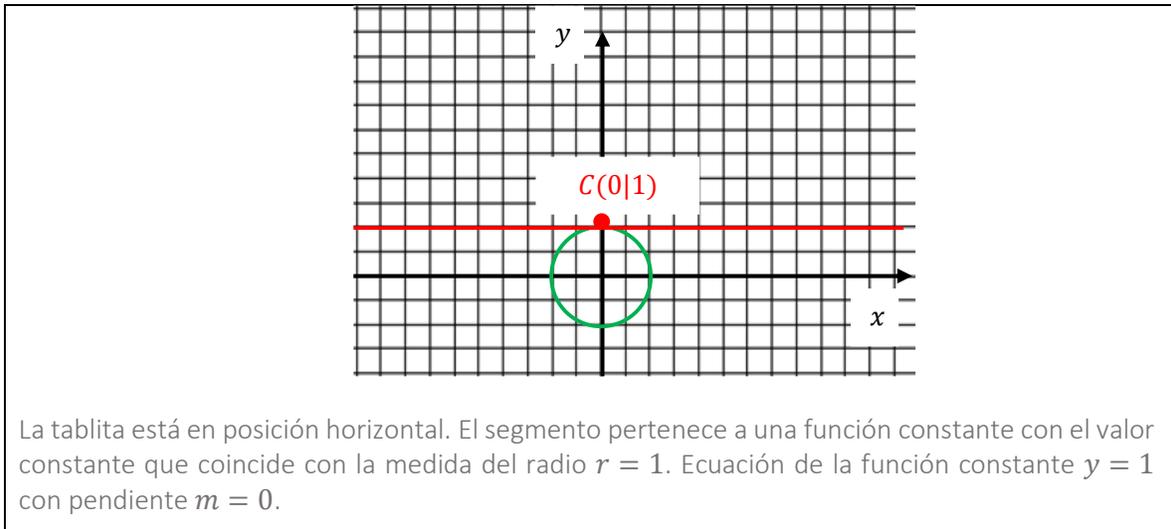
Contexto: Para fomentar el desarrollo del sentido del equilibrio con fines deportivos o de salud se utilizan aparatos llamados bolitas o rollos de equilibrio.



1. Si se hace una proyección de alzada de esta situación, ¿cómo se representan la bolita, la tablita y el suelo?

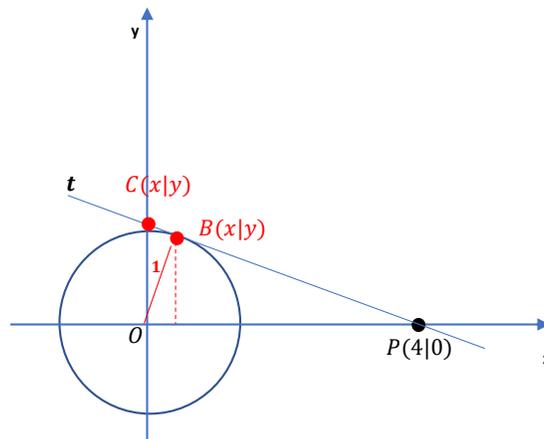
La bolita se convierte en una circunferencia, la tabla en una recta y el piso en el eje x . El origen del sistema de coordenadas es el centro de la circunferencia.

2. Si la persona sobre la tabla está en el equilibrio ¿cómo se representa esta situación matemáticamente?



3. Determina el punto que corta tangencialmente a la circunferencia, calculando distancias, áreas y considerando que la expresión analítica de la circunferencia en este caso es $x^2 + y^2 = 1$.

Considerando que el diámetro de la bolita es de $1dm = 10cm$, los cálculos se realizan en la unidad de dm para facilitarlos.



En el triángulo OPB se aplica Pitágoras para determinar la distancia y así tener una ecuación para las coordenadas del punto B .

$$OP^2 = 1^2 + BP^2$$

$$BP^2 = 4^2 - 1^2 = 15$$

$$BP = \sqrt{15}$$

Además, el área A_{Δ} del triángulo OPB se puede calcular como:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot y \cdot OP = \frac{1}{2} \cdot y \cdot 4 = 2y$$

Se obtiene la ecuación [1] $A_{\Delta} = 2y$

Además, el área A_{Δ} del triángulo OPB se puede calcular como:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot BP$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{15} = \frac{1}{2} \sqrt{15}$$

Se obtiene la ecuación [2] $A_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{15}$

Al igualar ambas ecuaciones para obtener la ordenada del punto B:

$$2y = \frac{1}{2} \sqrt{15} \rightarrow y = \frac{1}{4} \sqrt{15}$$

La abscisa del Punto B se calcula mediante la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

$$x = \sqrt{1 - y^2}$$

Evaluando $y = \frac{1}{4} \sqrt{15}$ en $x = \sqrt{1 - y^2}$ resulta $x = \sqrt{1 - (\frac{1}{4} \sqrt{15})^2} = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

El punto que corta tangencialmente a la circunferencia es $B(\frac{1}{4} | \frac{1}{4} \sqrt{15})$

4. Si la persona sobre la tabla está en desequilibrio y un extremo de la tabla toca el piso, determina la ecuación del objeto geométrico que es la imagen de la tabla en la vista de frente.

Si la tablita está en el desequilibrio, el gráfico pertenece a una función afín y debe ser tangente a la circunferencia que representa la esfera. Con las coordenadas de los puntos se determina la ecuación de esta recta.

La ecuación de la tangente se determina con los puntos $P(4|0)$ y $B(\frac{1}{4} | \frac{1}{4} \sqrt{15})$

$$m = \frac{\frac{1}{4} \sqrt{15} - 0}{\frac{1}{4} - 4} = \frac{\frac{1}{4} \sqrt{15}}{-\frac{15}{4}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$$

Con esta pendiente m y el Punto $P(4|0)$ se determina la ecuación de la tangente

$$y - 0 = m \cdot (x - 4)$$

$$y = -\frac{\sqrt{15}}{15} \cdot (x - 4)$$

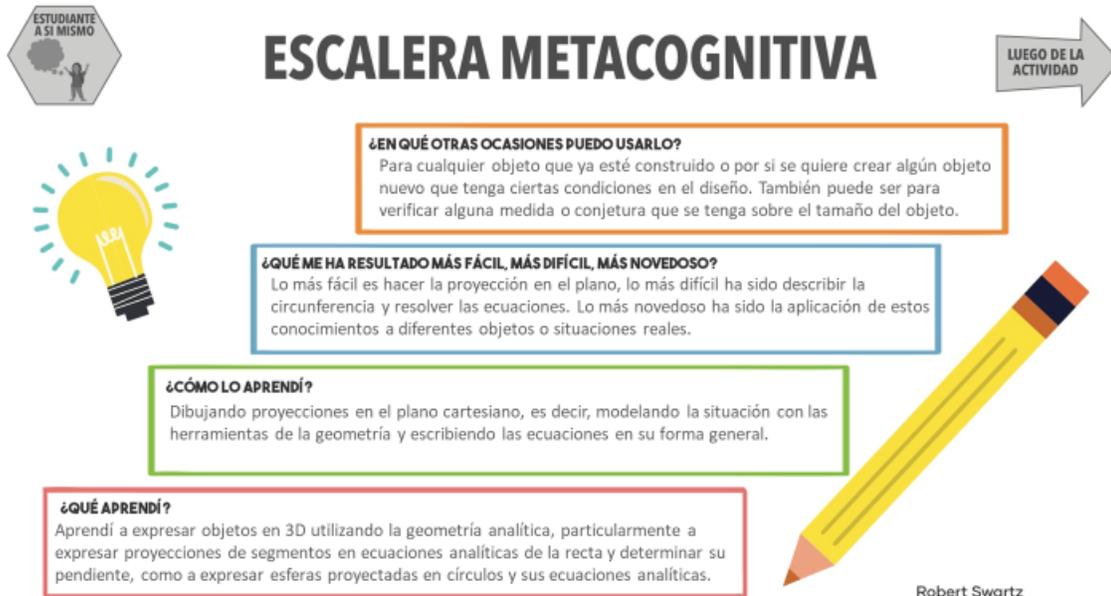
La intersección con el eje y se da para $x = 0$

$$y = -\frac{\sqrt{15}}{15} \cdot (-4)$$

$$y \approx 1,03$$

La tangente interseca el eje y en aprox. $(0|1,03)$

Para retroalimentar la actividad personal con la hoja de trabajo, se sugiere utilizar la escalera metacognitiva:



https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#recuadros_articulo_8495_2

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Proyecciones	Dibuja proyecciones de objetos 3D a 2D.	Dibuja proyecciones de objetos 3D a 2D utilizando las coordenadas del plano cartesiano.	Dibuja proyecciones de objetos 3D a 2D utilizando las coordenadas del plano cartesiano y que permiten modelar la situación y resolver un problema.
Expresiones analíticas	Expresa algebraicamente rectas y circunferencias.	Expresa algebraicamente rectas y circunferencias utilizando los datos del contexto.	Expresa algebraicamente rectas y circunferencias utilizando los datos del contexto y modelando la situación completa.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que la habilidad de resolver problemas se puede desarrollar en varios pasos, en particular en esta actividad se da el foco a la variación de los objetos y de las situaciones que se proyectan al plano cartesiano.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la toma de decisiones razonadas y que contribuyen al bien común, se sugiere profundizar en las posibilidades de transferir la habilidad de modelar en otros contextos que permitan contribuir al bien común. Algunas de las preguntas que se pueden hacer los estudiantes para ver una posible transferencia son: ¿Qué objeto o situación me gustaría proyectar en el plano cartesiano? ¿Qué problema me permite modelar analíticamente los objetos en 2D? ¿Qué quiero responder o cambiar con las proyecciones en el plano cartesiano? ¿Qué objetos podría construir utilizando esta técnica? ¿Con qué precisión me permite modelar este tipo de procedimientos? ¿Qué ventajas o desventajas tiene el trabajo numéricamente preciso?

Orientaciones para organizar e implementar la hoja de trabajo: se sugieren las siguientes orientaciones para implementar el uso de la hoja de trabajo:



Cantidad.

En una hoja de trabajo solo viene una idea a desarrollar, un solo contexto que tiene varias partes o bien varios problemas que apuntan a una misma idea.



Tiempo.

Idelamente la hoja de trabajo se realiza en la clase y no fuera de ella, las dudas que vayan apareciendo deben ser resueltas en la clase y no solo en casa.



Estructura.

Debe llevar nombre y fecha, se guarda en una carpeta para utilizarlas al momento de estudiar o de consultar por ejemplos. Se espera que no tengan más de 4 planas, incluido el desarrollo, se debe dar espacio en la misma hoja para el desarrollo, si es necesario incluir cuadrículas para facilitar la elaboración de gráficos, dibujos y esquemas.



Practicar la autonomía.

La hoja de trabajo requiere de concentración y de autonomía, esta debe tener las guías necesarias para un desarrollo independiente y para detectar los obstáculos personales del aprendizaje.

Módulo obligatorio 4

Visión panorámica

Gran idea

La estadística entrega herramientas que permite organizar y presentar características de la población.

Objetivos de aprendizaje

OA2. Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación y aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA7. Variar parámetros o condiciones, comparando los cambios en los resultados obtenidos y pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Medidas de posición cuartiles y quintiles
- Diagramas de cajón
- Histogramas

Tiempo estimado
6 semanas (24 horas)

Propósito del módulo obligatorio 4

En el módulo 4 de la asignatura de matemática del Nivel 2 de Educación Media, se espera que los estudiantes comprendan que *la estadística entrega herramientas que permiten organizar y presentar características de la población*. Entendiendo que la comprensión se logra cuando el estudiante realiza varios procesos desde lo experiencial, intuitivo hasta lo abstracto, pictórico y simbólico de la matemática. Este módulo considera situaciones cercanas a los estudiantes que son parte de la información y que se requieren para resumir la entrega de esta información. En este nivel se espera una aplicación de conocimientos básicos adquiridos en niveles anteriores, como también, ampliar el pensamiento estadístico.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 4 desarrollan las habilidades de representar y resolver problemas utilizando las medidas estadísticas de cuartiles y quintiles. En particular, los estudiantes representan un mismo contenido matemático, los cuartiles y quintiles transitando entre datos, tablas y gráficos y aprovechando las herramientas disponibles, como las planillas de cálculos que permiten organizar los datos y elaborar gráficos. Los estudiantes también varían parámetros o condiciones iniciales para comparar los cambios en los resultados obtenidos, habilidad que permite comprender de mejor manera la información que se elabora a partir de los datos. En este módulo los estudiantes comienzan con la noción de medidas de posición para continuar con histogramas y acercarse a una visualización de una distribución normal de los datos.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 4 desarrollan las actitudes del siglo XXI del ámbito de las Maneras de pensar y las Maneras de trabajar, promoviendo la actitud de perseverar frente a tareas o metas específicas que se presentan en las actividades, promoviendo la proactividad por medio de la orientación hacia el cambio y anticipando panoramas y aprovechando las herramientas disponibles, tanto para organizar los datos y elaborar gráficos como las planillas de cálculo, como también, acceder a las herramientas que permiten elaborar encuestas y acceder a los datos de manera segura y responsable.

Ruta de Aprendizaje del Módulo obligatorio 4

¿Cómo podemos resumir, organizar y presentar características de una población?

Actividad de desempeño 1:

Representar información de una población para visualizar las posiciones en cuartiles y quintiles.

Actividad de desempeño 2:

Representar información de dos poblaciones confeccionando diagramas de cajón utilizando las posiciones de cuartiles para comparar.



Actividad de desempeño 3:

Elaborar histogramas a base de un conjunto de datos para comparar diferentes poblaciones.

Actividad de desempeño 4:

Comparar la información obtenida a partir de cuartiles o quintiles con la información obtenida de gráficos de barras o histogramas.

Actividad de desempeño 1

Propósito

Esta actividad busca que el estudiante represente el contenido de cuartiles y quintiles transitando entre los niveles simbólicos a pictóricos. Para esto, el estudiante ordena datos para obtener la posición de cuartiles o quintiles, asociando los respectivos porcentajes o fracciones de la población y así generar una noción sobre dónde se encuentra cada uno en relación con un estadístico en particular. Se espera que el estudiante comprenda que las medidas de posición, cuartiles y quintiles entregan información adicional a las medidas de tendencia central como la media y moda.

Objetivo de Aprendizaje

OA1. Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación y aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

Conocimiento esencial

- Cuartiles
- Quintiles
- Planilla de cálculo.

Tiempo estimado

6 horas

Conocimientos previos

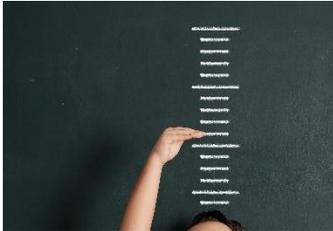
En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Aplicación de las medidas de tendencia central: media, mediana y moda.
- Presentación de datos en diagrama de barras.
- Frecuencias absolutas.
- Frecuencias relativas.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes diferentes situaciones en las cuales a los propios estudiantes les gustaría saber dónde están ubicados dentro de la población y en términos estadísticos.

¿Dónde me encuentro?		
según mi altura	según mi actividad física	según la cantidad de mi familia
		

Algunas de las preguntas que pueden motivar la conversación son:

- ¿Qué significado le damos a ser pequeños en términos estadísticos?
- ¿Dentro de qué grupo me puedo comparar en relación con mi actividad física?
- ¿Por qué podría ser importante saber la cantidad de miembros de mi familia?
- ¿Qué otros temas son interesantes de ver la posición en la que me encuentro?
- ¿Qué entendemos por una posición estadística?

Conexión interdisciplinar
Historia, Geografía y Ciencias sociales
OA2 Nivel 2 EM

Construcción del conocimiento

Para introducir la representación de información utilizando los cuartiles, se sugiere crear una lista de datos de las estaturas de al menos 13 estudiantes para luego ordenarlas, dividirla en cuatro partes porcentualmente iguales y definir los cuartiles, como el dato que se ubica en el 25%, 50% y el 75%. Por ejemplo, se pueden obtener los siguientes datos:

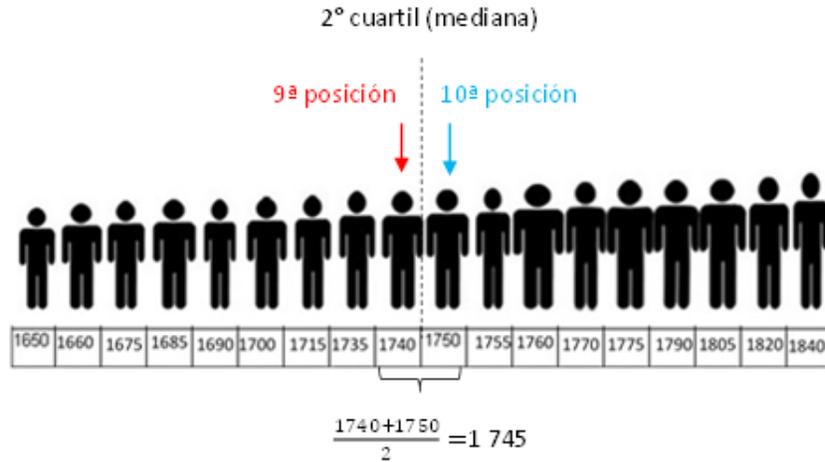
135cm, 139cm, 134cm, 144cm, 140cm, 140cm, 130cm, 138cm, 152cm, 139cm, 148cm, 145cm, 140cm

- orden de los datos de menor a mayor.

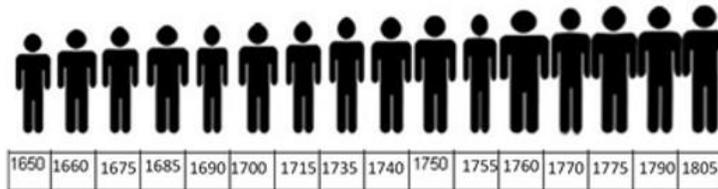
130cm, 134cm, 135cm, 138cm, 139cm, 139cm, 140cm, 140cm, 140cm, 144cm, 145cm, 148cm, 152cm

Se sugiere explicitar el procedimiento para determinar los cuartiles:

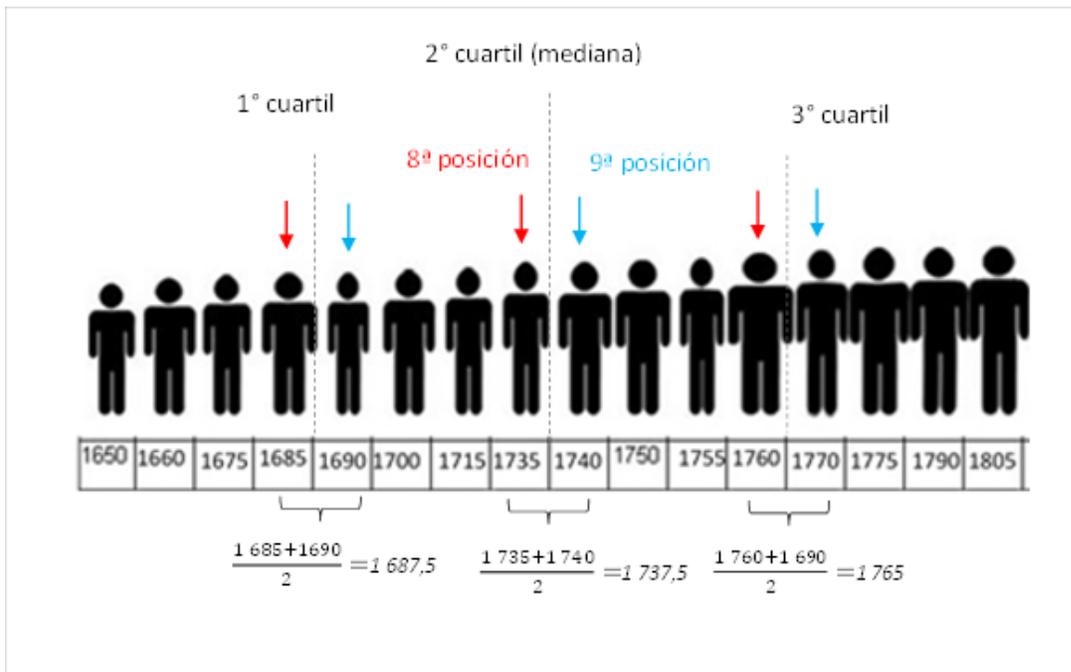
- Se divide el número n de la cantidad de datos por 4 . Resulta un número k .
- **1° cuartil:** Se multiplica $1 \cdot k$. Resulta k . Si k no es un número natural, se lo reemplaza por próximo número natural mayor que k .
- **2° cuartil:** Se multiplica $2 \cdot k$. Resulta s . Si s no es un número natural, se lo reemplaza por próximo número natural mayor que s .



¿Qué ocurre si la cantidad de datos es par y divisible por 4?



Se debe determinar el valor promedio que se encuentra entre la posición 8 y posición 9 y determinar el promedio entre los dos valores.

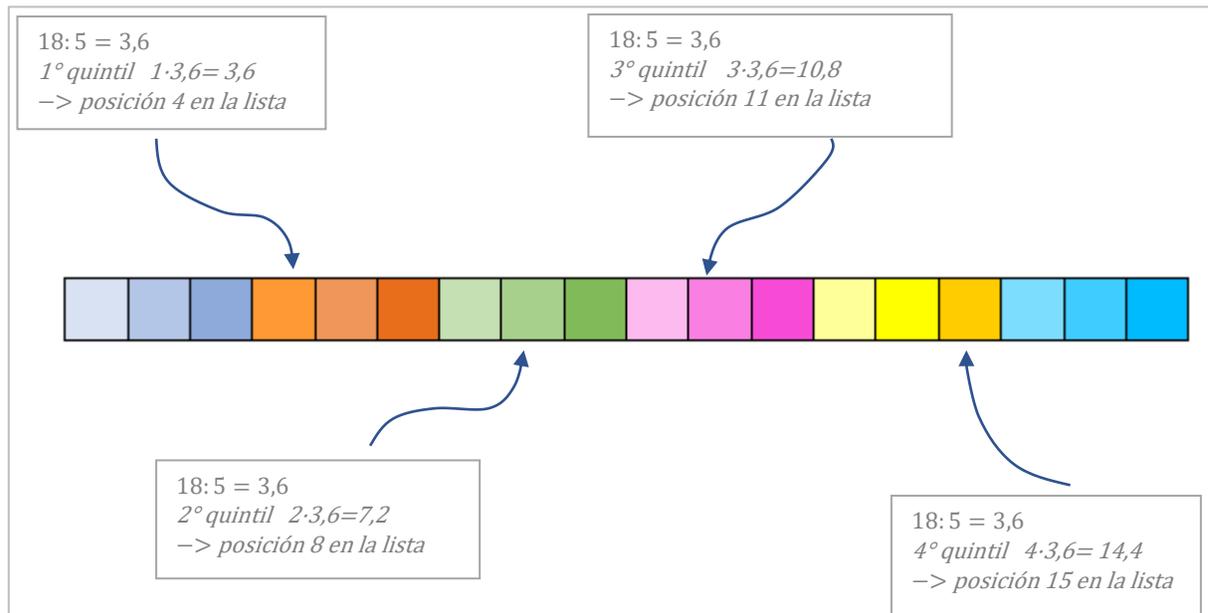


Para guiar el proceso de abstracción de las nociones de cuantiles, se sugiere presentar una cinta de 18 celdas de distintos colores y determinar las posiciones de las celdas que tienen a su lado izquierdo 20%, 40%, 60% y 80% de los colores y guiar por medio de las siguientes preguntas:

- ¿En cuántas partes hay que separar la cinta?
- ¿Por qué las posiciones se llaman cuantiles?
- ¿Qué procedimiento, similar al de determinar cuantiles, permite determinar los cuantiles?



Se sugiere relevar que el 20% coincide con $\frac{1}{5}$. Esto significa una subdivisión de la cinta en 5 partes iguales que se logra con 4 líneas de separación. Nombrar las posiciones como cuantiles e indicar que el nombre se debe a que se divide la cinta en cinco partes.



Se sugiere explicitar el procedimiento para determinar los cuantiles:

- Se divide el número n de la cantidad de datos por 5. Resulta un número k .
- **1° cuartil:** Se multiplica $1 \cdot k$. Resulta k . Si k no es un número natural, se lo reemplaza por próximo número natural mayor que k .
- **2° cuartil:** Se multiplica $2 \cdot k$. Resulta s . Si s no es un número natural, se lo reemplaza por próximo número natural mayor que s .
- **3° cuartil:** Se multiplica $3 \cdot k$. Resulta t . Si t no es un número natural, se lo reemplaza por próximo número natural mayor que t .
- **4° cuartil:** Se multiplica $4 \cdot k$. Resulta r . Si r no es un número natural, se lo reemplaza por próximo número natural mayor que r .

Práctica independiente

Se sugiere hacer estaciones con diferentes temas y datos que permitan determinar cuartiles y quintiles. En cada caso, se espera que el estudiante trabaje cada estación de manera personal y que utilice el procedimiento utilizado en la práctica guiada.

Algunas de las estaciones que se sugieren para esta actividad son:

Tema	Datos	Instrucción
Tiempo en minutos luego de recorrer 100 kilómetros de distancia en auto	52,1 – 53,5 – 53,8 – 54,7 – 55,9 – 56,7 – 56,8 – 58,9 – 59,6 – 59,8 – 60,1 – 60,4 – 60,5 – 60,7 – 60,7 – 60,8 – 60,8 – 60,8 – 60,9 – 62,1 – 63 – 63,5 – 63,7 – 63,7 – 63,8 – 63,9 – 64,7 – 65 – 65,4 – 66,7 – 67,8 – 70,3 – 71,5 – 73,2 – 73,9 – 74,8	Determinar cuartiles. Determinar quintiles ¿Qué piensas sobre comparar los cuartiles y los quintiles? ¿Qué porcentajes asocias a los quintiles?
Gramos de pan consumidos en un día por 25 personas	90 – 90 – 91 – 91 – 92 92 – 93 – 94 – 95 – 97 97 – 98 – 98 – 99 – 100 100 – 102 – 102 – 103 – 107 108 – 112 – 113 – 115 – 127	Determinar cuartiles. Determinar quintiles De qué manera se pueden relacionar las siguientes categorías con los cuartiles o los quintiles: muy poco – poco – suficiente – mucho
Cantidad de prendas de ropa que tienen las personas	5 – 7 – 8 – 8 – 8 – 8 – 8 – 9 – 9 – 10 – 10 – 11 – 11 – 12 – 13 – 13 – 14 – 14 – 15 – 15 – 15 – 16 – 16 – 17 – 17 – 18 – 19 – 20 – 20 – 21 – 21 – 21 – 21 – 22 – 22 – 23 – 23 – 24 – 30 – 30 – 32 – 38 – 39 – 41 – 44	Determinar cuartiles. Determinar quintiles De qué manera se pueden relacionar las siguientes categorías con los cuartiles o los quintiles: poco – suficiente – mucho
Cantidad de lápices en la casa	1 – 3 – 3 – 4 – 4 – 4 – 5 – 5 – 6 – 10 – 10 – 12 – 12 – 14 – 15 – 16 – 17 – 20 – 24 – 26 – 45 – 48 – 49 – 53	Determinar cuartiles. Determinar quintiles. ¿Dónde se encuentra tu casa según la cantidad de lápices y los cuartiles determinados?
Mensajes enviados en un día por jóvenes entre 18 y 24 años	0 – 0 – 0 – 4 – 4 – 5 – 6 – 6 – 7 – 7 – 8 – 8 – 9 – 9 – 10 – 15 – 16 – 21 – 23 – 23 – 24 – 25 – 26 – 27 – 27	Determinar cuartiles y algunas categorías que describan los cuatro sectores determinados por los cuartiles ¿Cuántos mensajes envías diariamente? ¿En qué posición te encuentras?

Para retroalimentar la actividad de comprobar resultados en una ecuación exponencial, se sugiere utilizar la lista de chequeo:



ESTUDIANTE A SÍ MISMO

LISTA DE CHEQUEO



DURANTE O LUEGO DE LA ACTIVIDAD

Mueve el ticket a la casilla que corresponda

Criterio 1: Determinar cuartiles	Logrado	Todavía puedo mejorar	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
Criterio 2: Determinar quintiles	Logrado	Todavía puedo mejorar	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
Criterio 3: Asociar porcentajes a los cuartiles y quintiles	Logrado	Todavía puedo mejorar	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
Criterio 4: Asociar criterios a las divisiones generadas por cuartiles o quintiles	Logrado	Todavía puedo mejorar	<input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Cuartiles	Divide la cantidad de datos por 4.	Divide la cantidad de datos por 4 y encuentra las 3 posiciones de los cuartiles.	Divide la cantidad de datos por 4, encuentra las 3 posiciones de los cuartiles y asocia las posiciones a los valores de los datos.
Quintiles	Divide la cantidad de datos por 5.	Divide la cantidad de datos por 5 y encuentra las 4 posiciones de los quintiles.	Divide la cantidad de datos por 5, encuentra las 4 posiciones de los quintiles y asocia las posiciones a los valores de los datos.
Porcentajes	Calcula porcentajes.	Calcula porcentajes asociados a los cuartiles, 25%, 50%, 75% o a los quintiles 20%, 40%, 60%, 80%.	Calcula porcentajes de la cantidad de datos y que están asociados a los cuartiles, 25%, 50%, 75% o a los quintiles 20%, 40%, 60%, 80%.

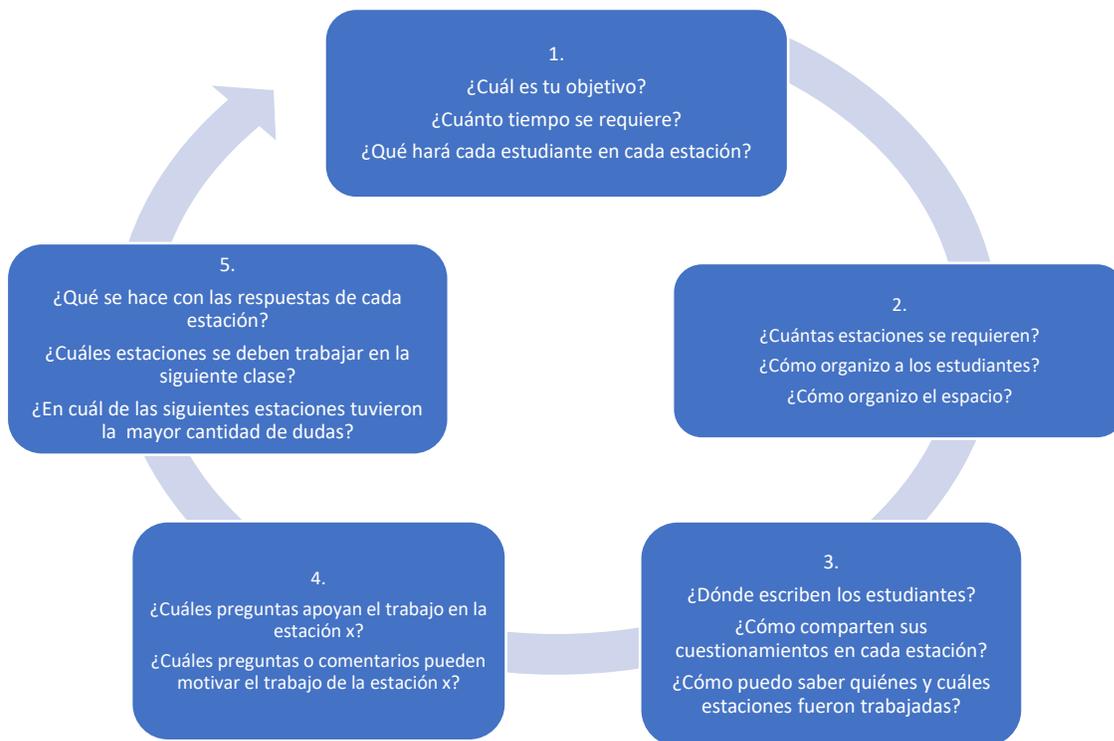
Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que la habilidad de representar incluye ciertos procedimientos que permiten generar gráficos, en este caso, se requiere determinar los cuartiles para generar el gráfico de cajón. La primera representación que el estudiante genera es la división en 4 partes de la cantidad de datos, la cual se relaciona con partes iguales porcentualmente, en las siguientes actividades se debe lograr el paso entre el valor del dato y su posición, como también dar un nuevo significado a las divisiones y a los cuartiles o quintiles. Así mismo, se sugiere mencionar que este tipo de trabajo estadístico se realiza para fines educativos con una cantidad pequeña de datos, pero que en la realidad se utiliza para una gran cantidad de datos, donde al menos se cuenta con más de 100 datos.

Se sugiere planificar un módulo cero que considere el cálculo de porcentajes usando la calculadora, para esto, se sugiere utilizar algunas de las actividades propuestas en el módulo 1 del Nivel 3 de Educación Básica.

Actitudes: se sugiere estimular que los estudiantes aprovechen de las herramientas disponibles, tanto como el uso de planillas de cálculos que permiten organizar los datos como la calculadora para facilitar los cálculos que se requieren en el procedimiento.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo en estaciones: se sugieren las siguientes preguntas para guiar la implementación de las estaciones.



Actividad de desempeño 2

Propósito

Esta actividad busca que los estudiantes representen los cuartiles elaborando diagramas de cajón, para visualizar completamente una situación entregada por partes y para comparar dos poblaciones según los cuartiles. Para esto, se consideran situaciones de antes o después, o con o sin una condición inicial. Se entregan diagramas de cajón para que los estudiantes los completen y se trabaja la estructura del diagrama de cajón.

Objetivo de Aprendizaje

OA1. Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación y aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA7. Variar parámetros o condiciones, comparando los cambios en los resultados obtenidos y pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

- Diagramas de cajón.

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Presentación de datos en diagrama de barras.
- División de cantidades en 4.
- Cálculo de porcentajes.
- Ubicación de valores en la recta numérica con o sin escalas.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta una situación deportiva, donde se requiere de la representación de los datos en la recta numérica y de los cuartiles para comprender la situación completa.

1 año



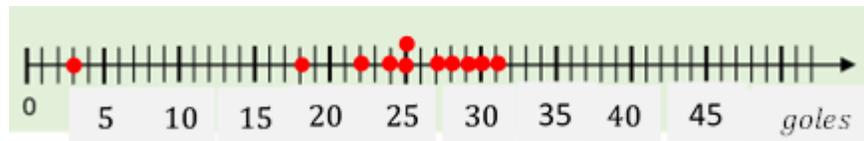
Jugador	Goles
1	31
2	22
3	24
4	29
5	25
6	25
7	27
8	28
9	18
10	3
11	30

Algunas de las preguntas que pueden orientar a la elaboración de un diagrama de cajón son:

- ¿Qué información entregan los datos?
- ¿Cómo se podría visualizar completamente la situación de estos 11 jugadores?
- ¿De qué manera ayudan los porcentajes?
- ¿Por qué sería bueno comparar a los jugadores con respecto a la mediana?

Construcción de conocimiento

Para introducir la representación de los datos elaborando el diagrama de cajón, se sugiere ubicar los datos en una recta numérica, relevando la posición que estos tienen según la cantidad de goles e indicando que esto corresponde a la frecuencia absoluta.

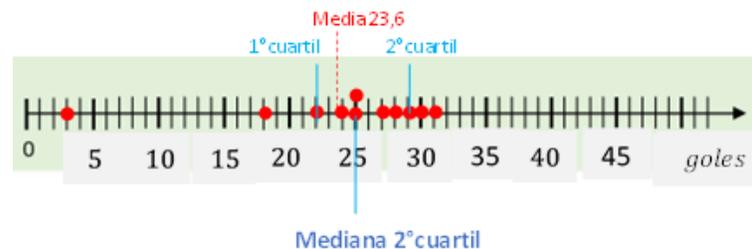


Algunas preguntas que se sugiere para comprender la distribución de los datos son:

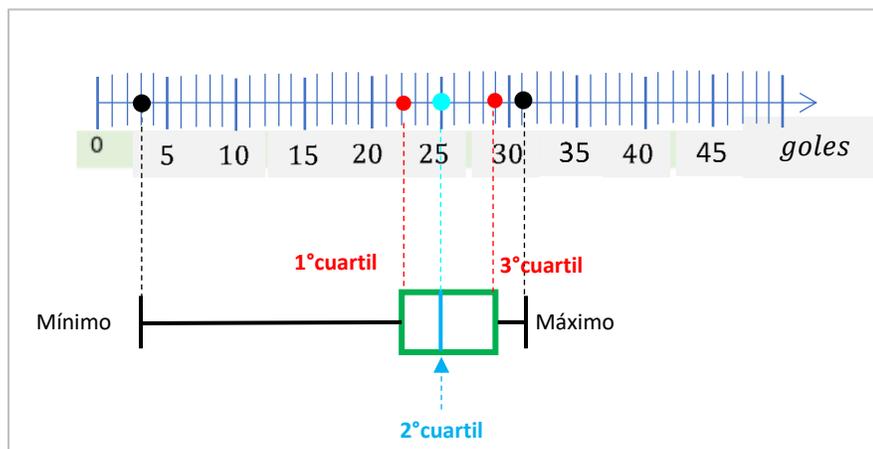
- ¿Qué influencia puede tener el dato de **3 goles** para la media?
- ¿Dónde ubicamos la media en la recta numérica?
- ¿Dónde ubicamos la mediana?
- ¿Qué nos dicen los cuartiles en esta situación?
- ¿Podemos decir que este es un equipo de goleadores?

Se sugiere relevar las respuestas en las cuales se podría decir que el promedio se ve afectado por la cantidad de goles tan bajos como 3 goles, este dato puede bajar el promedio y no será muy representativo del equipo. El promedio es de 23,6 goles y el procedimiento para calcular los cuartiles es:

- Ordenar los datos: 3, 18, 22, 24, 25, 25, 27, 28, 29, 30, 31
- Son $n = 11$ datos. $11 : 4 = 2,75$. Los cuartiles tienen las siguientes posiciones
- 1° cuartil $1 \cdot 2,75 = 2,75 \rightarrow$ posición 3, es el dato 22 goles
- 2° cuartil (mediana) $2 \cdot 2,75 = 5,5 \rightarrow$ posición 6, es el dato 25 goles
- 3° cuartil $3 \cdot 2,75 = 8,25 \rightarrow$ posición 9, es el dato 29 goles.



Para la elaboración del diagrama de cajón, se sugiere considerar los datos más importantes, que son los cuartiles, máximo, mínimo y marcar la media utilizando un color diferente.

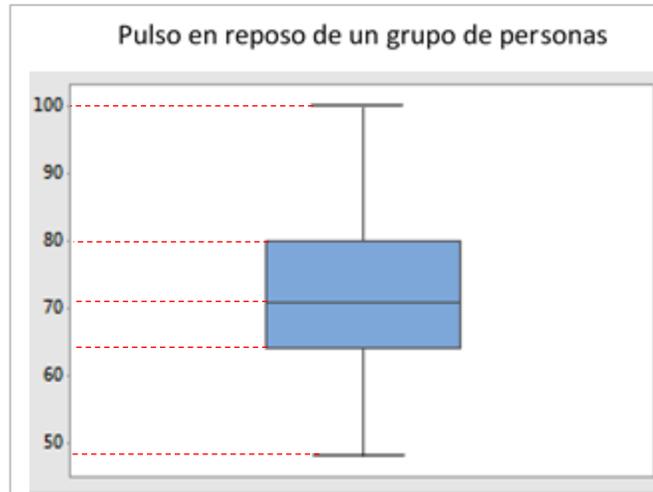


Se sugiere marcar y nominar las partes del diagrama de cajón:

- El diagrama de cajón se compone de 2 antenas y un cajón.
- El cajón tiene la forma de un rectángulo que se delimita por el 1° cuartil y el 3° cuartil. Este cajón contiene el 50% de los datos y en base a este se puede decir que el 50% del equipo hace durante el año entre 22 y 28 goles.
- La mediana o 2° cuartil divide el cajón en dos partes de las cuales cada una contiene un cuarto de los datos.
- La línea que une el mínimo con el lado izquierdo del cajón se llama antena tal como la línea que une el máximo con el lado derecho del cajón.

Práctica guiada

Para guiar la lectura y extracción de información sobre los datos de una población representada en un diagrama de cajón, se sugiere presentar un diagrama de cajón y marcar con líneas perpendiculares los cuartiles, el máximo y el mínimo.

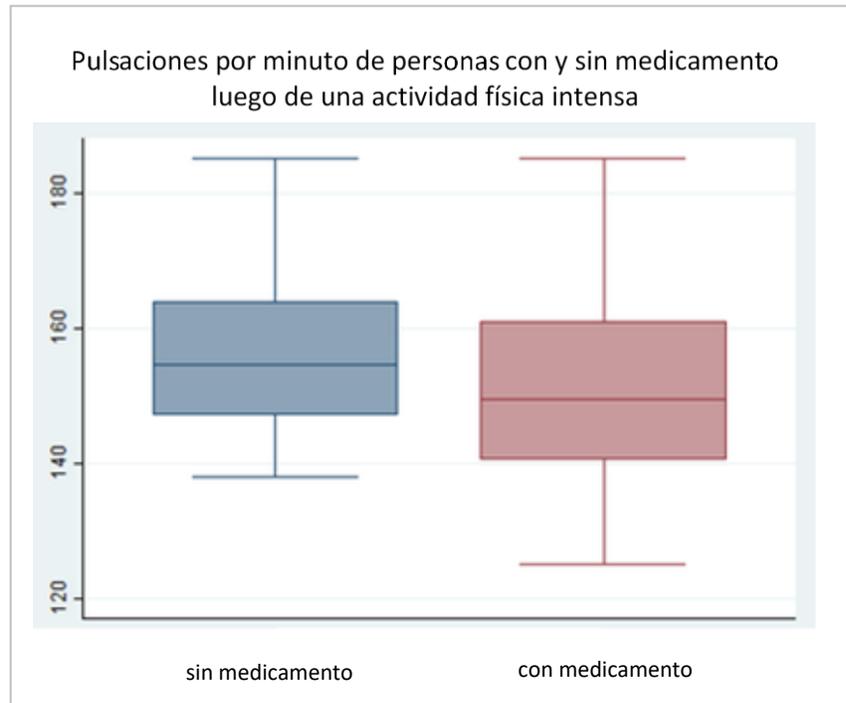


Para luego hacer un listado de datos y de interpretaciones del gráfico:

- El dato estadístico en consideración es el pulso, según el título pulsaciones por minuto en reposo de un grupo de personas.
- El valor mínimo es de aproximadamente 48 pulsaciones por minuto.
- El valor máximo es de 100 pulsaciones por minuto.
- El rango es de 48 a 100 que se calcula en $100 - 48 = 52$
- La mediana o 2° cuartil es de 70 pulsaciones por minuto, que significa que un 50% de la población tiene un pulso de reposo menor o igual a 70.
- El 1° cuartil es de aproximadamente 64 pulsaciones por minuto, que significa que un 25% de la población tiene un pulso de reposo menor o igual a 64 pulsaciones por minuto.
- El 3° cuartil es de 80 pulsaciones por minuto, que significa que un 75% de la población tiene un pulso menor o igual 80.
- El rango intercuartil va desde de 64 a 80 que significa que un 50% de la población tiene un pulso de reposo entre 64 y 80 pulsaciones por minuto. El valor del rango intercuartil es de $80 - 64 = 16$.

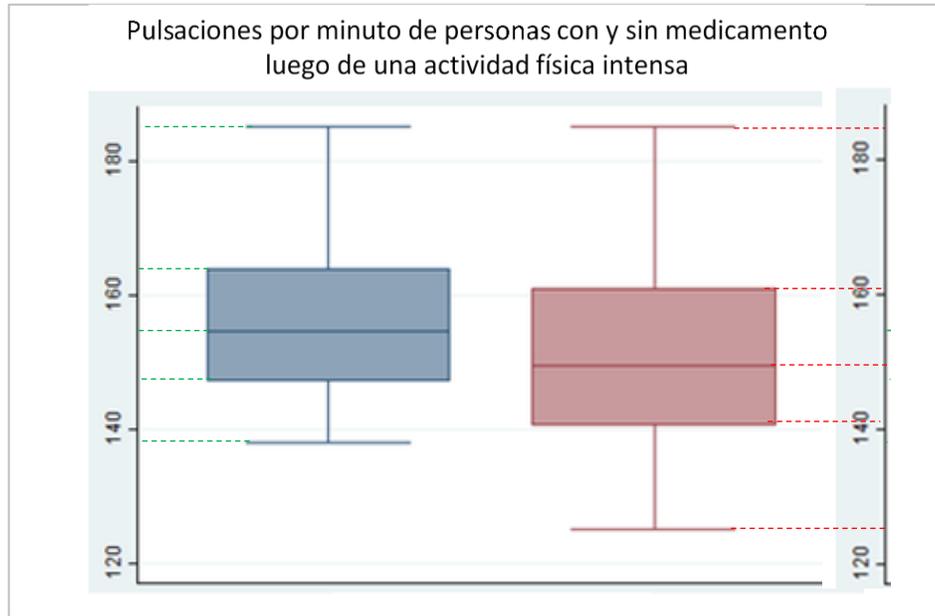
Para guiar la comparación de dos poblaciones se sugiere continuar con una variación de las condiciones iniciales, en este caso, luego de una actividad física intensa y con o sin medicamento.

¿Cómo se puede describir el efecto del medicamento?



En la primera parte, se puede esperar que los estudiantes revisen el gráfico sin hacer intervenciones que respondan desde lo que ven, por ejemplo:

- Hay personas a las cuales no le suben tanto las pulsaciones con el medicamento, esto es porque el valor mínimo es menor que en el grupo sin medicamento.
- El valor máximo en ambos grupos es igual, esto quiere decir que todas las personas pueden llegar al máximo de pulsaciones con la actividad física.
- El rango de las pulsaciones en el grupo con medicamento es mayor que en el grupo sin medicamento.
- Los tres cuartiles bajan a valores menores en el grupo con medicamento.
- En el grupo con medicamento el 50% de las personas tiene pulsaciones moderadas en un rango intercuartil entre aproximadamente 140 y 160 en comparación con el rango intercuartil 148 y 165 del grupo sin medicamento.
- Con todas las bajas de los valores de las medidas de posición, excepto del valor máximo, se puede constatar que el medicamento tiene un efecto sobre las pulsaciones de los participantes.



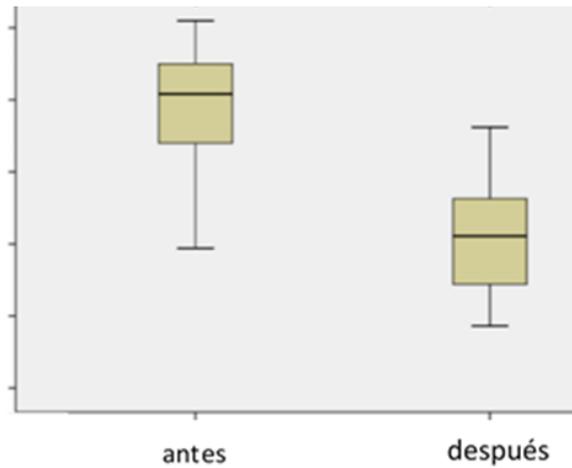
A partir de la intervención del diagrama de cajón, se sugiere elaborar una tabla con frases y valores o cálculos que acompañan estas frases.

Interpretaciones	Datos y cálculos de apoyo
Valor mínimo baja	de 138 a 124
Valor mínimo se mantiene	en 184
1° cuartil baja	de 145 a 140
2° cuartil o mediana baja	de 155 a 150
3° cuartil baja	de 164 a 161
Rango intercuartil cambia	de [145 ; 164] a [140 ; 160]

Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo de pares para encontrar un contexto y comparar dos diagramas de cajón. Cada uno de los integrantes lee e interpreta su propio diagrama de cajón y luego compara con lo que se ha obtenido en el otro diagrama. Luego ambos leen y buscan un contexto para un mismo diagrama de cajón.

¿Qué situación le podría ir a este gráfico?



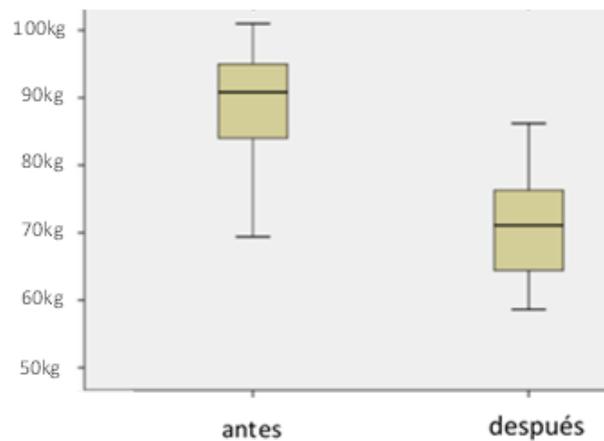
Antes de _____

Después de _____

Rotula cada eje, escribe un título, determina los valores especiales e interpreta

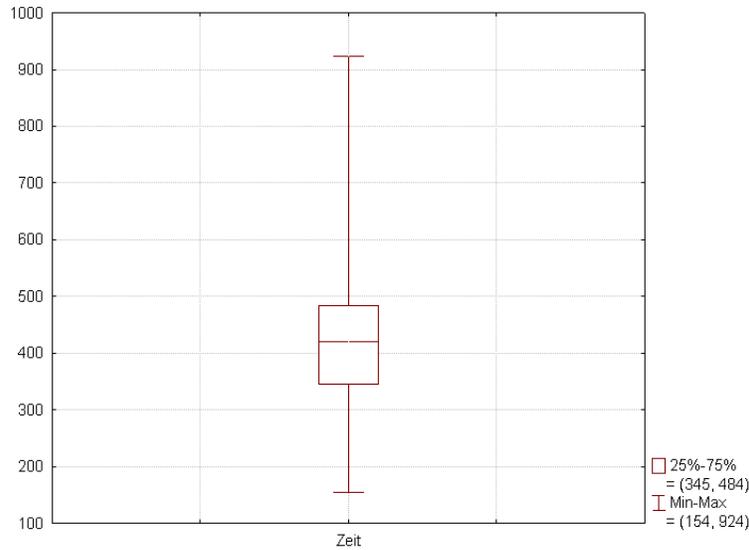
Ejemplos:

Peso de personas adultas después de una dieta



- Penales después de un entrenamiento especial.
- Cálculo mental después de unas clases especiales.
- Cantidad de ropa entre mujeres de 20 a 30 años y de 30 a 40 años.
- Tiempo de espera en un terminal de buses.
- Velocidades en una calle en reparación.

¿Qué contexto se podría considerar para este diagrama de cajón?



Von Schlurher – Propiedad propia, CC BY 3.0,

<https://www.curriculumnacional/link/https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6095643>

Interpreta según la situación escogida.

Para retroalimentar la actividad de pares, se sugiere utilizar la estrategia Valoro - Sugiero:



VALORO - SUGIERO

DURANTE O LUEGO DE LA ACTIVIDAD

VALORO DE TU TRABAJO...

El orden y claridad para elaborar un diagrama de cajón y para elaborar la tabla de valores.

La forma de calcular los cuartiles y de marcar con flechas dónde se encuentra cada cuartil, máximo y mínimo.

TE SUGIERO..

Utilizar diagramas horizontales y verticales.

Determinar primero el contexto y luego marcar los valores en el diagrama.

<https://www.curriculumnacional.cl/porta/Ddocumentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios para cada grupo:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Diagrama de cajón	Elabora un diagrama que tiene antenas y cajón.	Elabora un diagrama de cajón utilizando los datos del contexto.	Elabora un diagrama de cajón utilizando los datos del contexto y extrae información leyendo e interpretando un diagrama de cajón
Comparación	Escribe frases que tienen una estructura de comparación.	Escribe frases que comparan los datos y los cuartiles de dos poblaciones presentadas en diagramas de cajón.	Escribe frases y las acompaña de datos o cálculos, que comparan los datos y los cuartiles de dos poblaciones presentadas en diagramas de cajón.
Situación	Encuentra situaciones posibles de comparar.	Encuentra situaciones que pueden ser representadas por los diagramas de cajón dados en la actividad.	Encuentra situaciones que pueden ser representadas por los diagramas de cajón dados en la actividad y utiliza las unidades de medidas según el contexto.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que los estudiantes representan ideas y conceptos matemáticos utilizando, por ejemplo, la recta numérica, los gráficos y dibujos, en esta actividad los estudiantes utilizan representaciones como el diagrama de cajón y plantean situaciones para comparar dos momentos de la situación. La comparación y los efectos iniciales que se observan en la población son parte de la habilidad de resolver problemas, aunque el estudiante no tenga declarado un problema, las actividades lo están preparando para representar las partes como un todo y comparar dos poblaciones.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud del uso y aprovechamiento de las herramientas disponibles, se sugiere trabajar con reglas, calculadoras y planillas de cálculo, la primera para la elaboración prolija de diagramas de cajón de forma manual y para la intervención de los diagramas de cajón al marcar las rectas perpendiculares. La calculadora para facilitar los cálculos asociados a los cuartiles y la planilla de cálculo para la elaboración de diagramas de cajón usando tecnología digital. El trabajo de pares de comparación requiere del desarrollo de la perseverancia para encontrar contextos y proactividad para completar los gráficos e interpretar utilizando frases y datos los diagramas de cajón.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo grupal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo grupal en esta actividad:



Colaborar

- 

Actividad dentro del horario de clases, el trabajo colaborativo y cómo ocurre debe ser observado en clases.
- 

Entregar instrucciones precisas sobre lo que se espera al término del trabajo, entregar una rúbrica con los criterios y dejar uno o dos minutos para revisar la comprensión de las instrucciones.
- 

La evaluación es grupal y se sugiere no evaluar hasta que se comprenda que la idea es contribuir para el logro de un objetivo común.
- 

Decida con anterioridad la forma de organizar los grupos, ya sea de forma aleatoria o por coincidir con las propuestas o por nivel de comprensión del tema, considere siempre la cantidad de participantes por grupo y cantidad de la clase.
- 

Decida con anterioridad los momentos en que los participantes del grupo se escuchan y toman las primeras decisiones para organizar lo que hará cada uno, como también el momento en que los grupos se escuchan entre sí.

Actividad de desempeño 3

Propósito

En esta actividad se busca representar información mediante los diagramas de barra que se refieren a datos discretos y diferenciar con la representación de información estadística sobre datos continuos utilizando intervalos sobre los cuales se arman las barras. Los estudiantes transfieren los diagramas de barra en histogramas, comprenden que, en la mayoría de los casos, los histogramas tienen como ordenada a las frecuencias relativa y que estos permiten obtener información acerca del porcentaje del estadístico en relación con el total.

Objetivo de Aprendizaje

OA1. Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación y aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA7. Variar parámetros o condiciones, comparando los cambios en los resultados obtenidos y pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

- Histogramas.

Tiempo estimado

6 horas

Conocimientos previos

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Diagramas de barra.
- Frecuencia absoluta.
- Frecuencia relativa.
- Porcentajes.

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta una situación laboral, donde se requiere de la representación de los datos en un gráfico de barras o en otro que sea más adecuado y que permita abstraer y comprender la situación completa.



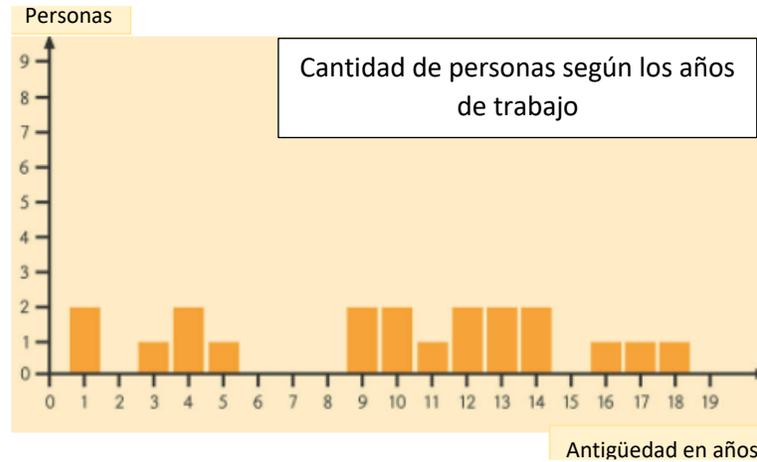
Algunas de las preguntas que pueden motivar la elaboración de un gráfico de barras:

- ¿Qué tipo de información se está entregando?
- ¿De qué otra forma se podría presentar?
- ¿Qué diferencias hay entre tablas y gráficos?
- ¿Qué otro tipo de gráfico podría ser más conveniente para representar los datos?

Conexión interdisciplinar
Emprendimiento y empleabilidad
OA3 Nivel 1 y 2 EM

Construcción de conocimiento

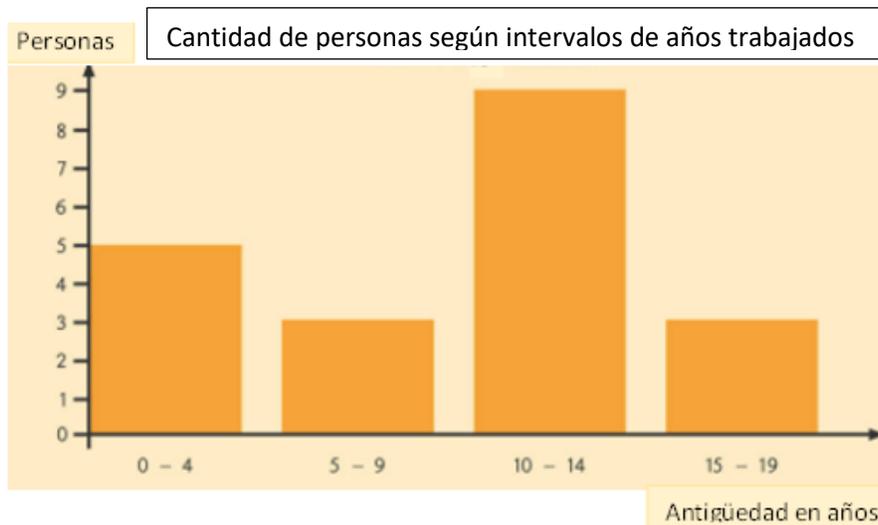
Para construir el conocimiento de representar y variar parámetros, se sugiere representar la información anterior en gráficos de barra y transferir a un histograma, variando la forma del intervalo a considerar y calculando la nueva frecuencia absoluta para cada intervalo.



Agrupar el personal en 4 grupos según los años trabajados: $[0 ; 4]$, $[5 ; 9]$, $[10 ; 14]$, $[15 ; 19]$ y calcular las nuevas frecuencias absolutas:

Intervalos años trabajados	Nueva frecuencia absoluta Cantidad de personas
$[0 ; 4]$	5
$[5 ; 9]$	3
$[10 ; 14]$	9
$[15 ; 19]$	3

Se sugiere guiar la elaboración del histograma, relevando el ancho de la barra como su característica principal y las notaciones generales.

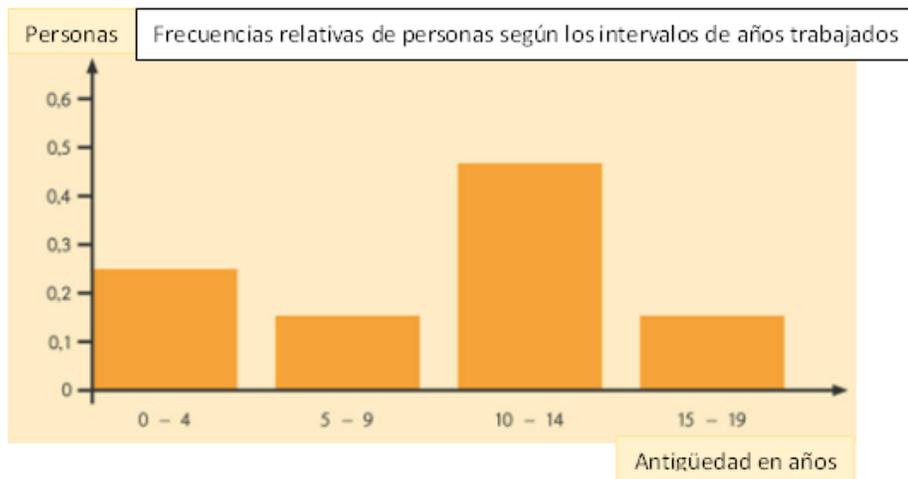


Transferir de este tipo de histogramas al histograma de las frecuencias relativas, ya que suele ser utilizado en muchas representaciones para referirse al total n de las personas.

Intervalos años trabajados	Frecuencia relativa ($n = 20$)
[0 ; 4]	$\frac{5}{20} = 0,25$
[5 ; 9]	$\frac{3}{20} = 0,15$
[10 ; 14]	$\frac{9}{20} = 0,45$
[15 ; 19]	$\frac{3}{20} = 0,15$

Relevar la propiedad de la suma de las frecuencias relativas:

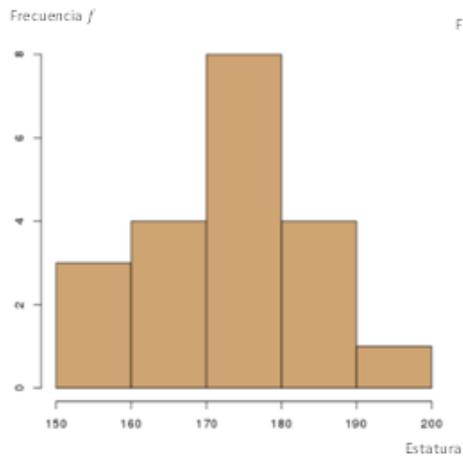
$$0,25 + 0,15 + 0,45 + 0,15 = 1$$



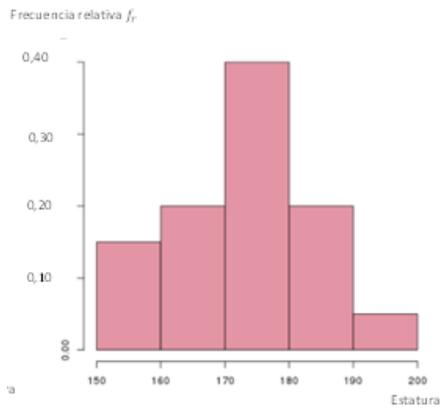
Práctica guiada

Para guiar a los estudiantes en la transferencia de representaciones y variar los parámetros, se sugiere realizar, a partir de una tabla, el mismo procedimiento de elaboración de histogramas de frecuencia absoluta y de frecuencia relativa basándose en un contexto de las alturas de 20 personas elegidas al azar.

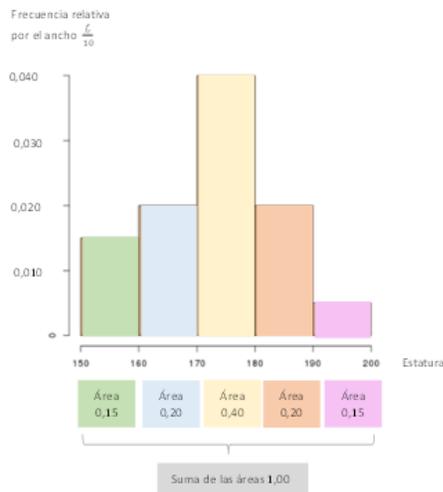
intervalo	[150 ; 160[[160 ; 170[[170 ; 180[[180 ; 190[[190 ; 200[
f	3	4	8	4	1
f_r	0,15	0,20	0,40	0,20	0,05



Histograma de frecuencias absolutas.



Histograma de frecuencias relativas.



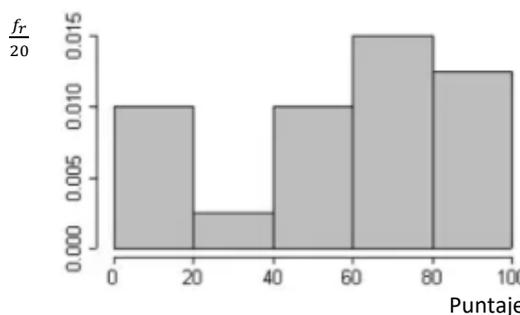
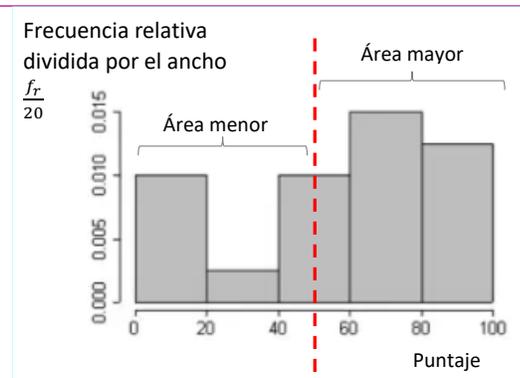
Histograma con las frecuencias relativas divididas por el ancho (10) del intervalo.

Con las frecuencias relativas divididas por el ancho del intervalo se obtiene que la suma de las áreas de los rectángulos es igual a 1.

Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo personal de descripción del procedimiento de transferencia para luego aplicar en otros contextos. En la tabla se muestra una posible estructura de esta práctica.

Aporte						Acción
<p>Un agricultor hizo un primer estudio de su nueva receta de mermelada de naranja y la presentó a 20 personas con el objetivo de cualificar su producto en una escala de 100 puntos.</p>						<p>Lectura comprensiva.</p> <p>Extraer datos:</p> <p>$n = 20$</p> <p>Escala de puntos: 100</p>
intervalo	[0; 20[[20; 40[[40; 60[[60; 80[[80; 100[Elaborar histograma de frecuencia absoluta.
f	4	1	4	6	5	
<p>Frecuencia f</p> <p>Puntaje</p>						<p>Interpretar el gráfico, elaborando frases que se sustentan en los datos absolutos:</p> <p>La mayoría de las personas, 6 de 20, dan entre 60 y 80 puntos a la mermelada de naranja.</p>
intervalo	[0; 20[[20; 40[[40; 60[[60; 80[[80; 100[Elaborar histograma de frecuencias relativas.
f_r	$\frac{4}{20} = 0,2$	$\frac{1}{20} = 0,05$	$\frac{4}{20} = 0,2$	$\frac{6}{20} = 0,3$	$\frac{5}{20} = 0,25$	
<p>Frecuencia relativa f_r</p> <p>Puntaje</p>						<p>Interpretar el gráfico, elaborando frases que se sustentan en los datos relativos:</p> <p>El 20% de las personas dan entre 0 y 20 puntos.</p>
intervalo	[0; 20[[20; 40[[40; 60[[60; 80[[80; 100[Elaborar histograma de frecuencias relativas que se dividen por el ancho del intervalo.
$\frac{f_r}{20}$	$\frac{0,2}{20} = 0,01$	$\frac{0,05}{20} = 0,0025$	$\frac{0,2}{20} = 0,01$	$\frac{0,3}{20} = 0,015$	$\frac{0,25}{20} = 0,0125$	

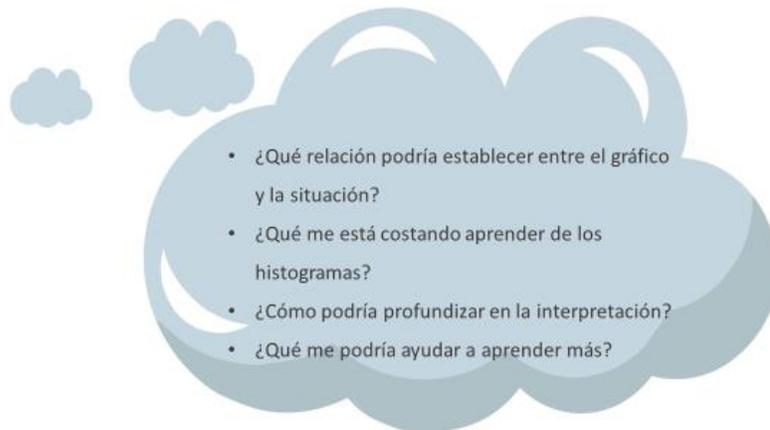
<p>Frecuencia relativa dividida por el ancho del intervalo</p> 	<p>Interpretar el gráfico, elaborando frases que se sustentan en los datos:</p> <p>Hay un área mayor de la frecuencia relativa desde los 40 puntos.</p>
<p>¿Es prometedor el resultado para una futura producción de la mermelada?</p>	<p>Interpretación del gráfico y del área de los rectángulos.</p>
<p>Frecuencia relativa dividida por el ancho</p> 	<p>Considerando los puntajes a partir de 50 como bueno, el estudio inicial es prometedor</p>

Para retroalimentar la actividad de transferencia de representaciones y variación de parámetros, se sugiere utilizar la pausa reflexiva:



PAUSA REFLEXIVA

DURANTE LA ACTIVIDAD



- ¿Qué relación podría establecer entre el gráfico y la situación?
- ¿Qué me está costando aprender de los histogramas?
- ¿Cómo podría profundizar en la interpretación?
- ¿Qué me podría ayudar a aprender más?

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Histogramas	Elabora gráficos de barras	Elabora histogramas de frecuencias absolutas y relativas.	Elabora histogramas de frecuencias absolutas y relativas, como también de áreas.
	Lee histogramas de frecuencia absoluta.	Lee e interpreta histogramas de frecuencia absoluta, relativa y de área.	Lee e interpreta histogramas de frecuencia absoluta, relativa y de área utilizando cantidades del intervalo, porcentajes y la noción de área igual a 1.
Transferencia	Elabora gráficos que son independientes de las tablas de frecuencia.	Transfiere desde un histograma de frecuencia absoluta a uno de frecuencia relativa y de uno de frecuencia relativa a un histograma de área.	Transfiere desde un histograma de frecuencia absoluta a uno de frecuencia relativa y de uno de frecuencia relativa a un histograma de área. Y viceversa guiándose por una tabla de valores.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que la habilidad de representar incluye la habilidad de transferir de un tipo de gráfico a otro o bien de un tipo de tabla a otra, esta actividad supone que los estudiantes ya han logrado hacer la transferencia desde la tabla al gráfico. También entendernos que la habilidad de resolver problemas se puede desarrollar en varios pasos, en particular en esta actividad se da el foco a la variación de las condiciones iniciales y a la comparación de los resultados por medio de histogramas.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de perseverancia en torno a metas, se sugiere ofrecer tiempo para la elaboración de tablas y gráficos, estos pueden ser realizados con planillas de cálculo o con otras opciones de programas en línea. Permita a sus estudiantes ser tenaces y aguantar las tareas de elaboración de tablas, gráficos y de respuestas escritas asociadas a la interpretación del gráfico. También, promueva el uso de las herramientas disponibles tanto para la elaboración manual de los histogramas como usando tecnología.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo personal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo personal e independiente de otros:



Independencia
Pensando las soluciones y los caminos para obtener soluciones por cuenta propia.



Confianza en lo que se sabe
Generar seguridad en lo que se hace en cada paso. La confianza como facilitador de explicaciones propias y para explicar a otros.



Trabajar a su propio nivel
En ciertos momentos es necesario saber dónde se está y trabajar al propio ritmo.



Practicar la autoregulación
Cada tarea requiere de concentración y de regular en qué momento volverse a un compañero o maestro para pedir ayuda directa.

Actividad de desempeño 4

Propósito

En esta actividad se hace una transferencia entre la información entregada en histogramas a diagramas de cajón y viceversa. Se reconocen ventajas y desventajas mutuas, se compara el tipo de información que entrega cada tipo de gráfico y se resuelven problemas asociados a la información y el contexto. Para esto, los estudiantes reconocen que los histogramas no traen información acerca de la posición y que determinando la suma de las áreas de los rectángulos de los histogramas se puede obtener la información del porcentaje e identificar la posición de cuartiles, quintiles o percentiles.

Objetivos de Aprendizaje

OA1. Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación y aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA7. Variar parámetros o condiciones, comparando los cambios en los resultados obtenidos y pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

- Histogramas
- Cuartiles
- Diagramas de cajón.

Tiempo estimado

6 horas

Diagnóstico

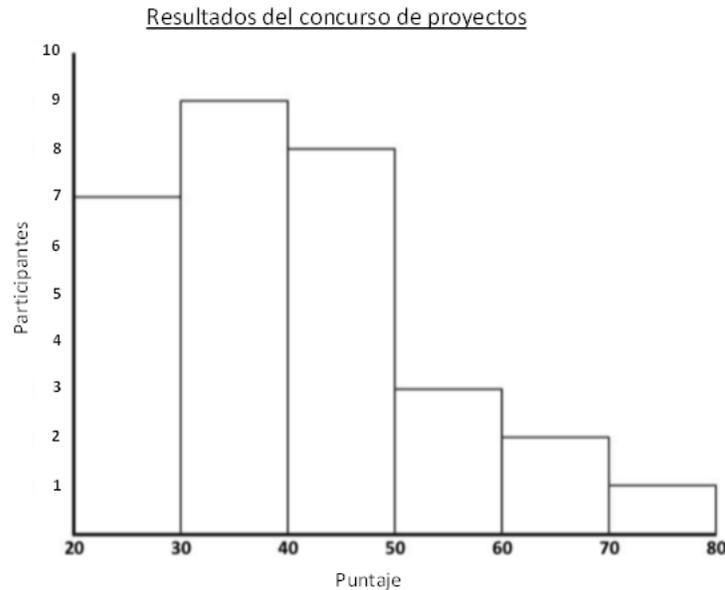
En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Histogramas
- Cuartiles y quintiles
- Porcentajes

Desarrollo de la actividad

Situación experiencial

El docente presenta a los estudiantes la situación de elegir según un puntaje y se aproxima a la noción de probabilidad utilizando la posición en la cual se encuentra el dato. En particular, se trabaja el puntaje en un certamen de proyectos, en el cual se puede obtener entre 0 y 80 puntos y se ha publicado los resultados obtenidos por los diferentes grupos participantes, en forma anónima en un histograma.



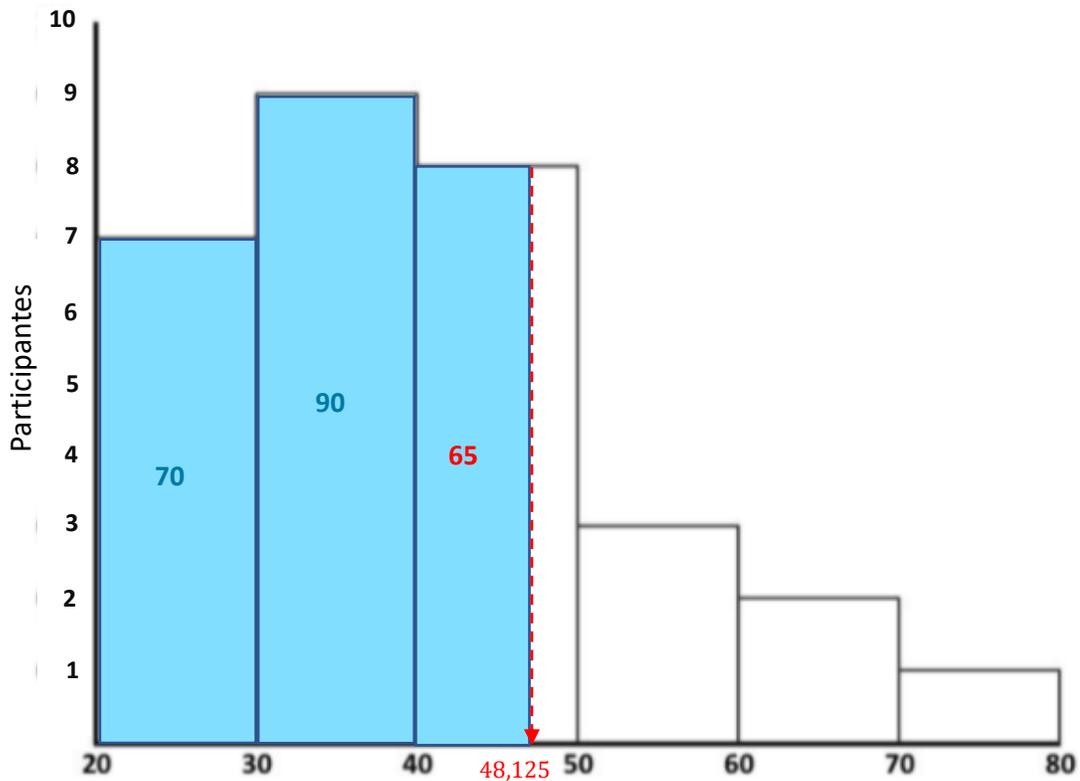
Si el grupo sobrepasa el 3° cuartil de los puntajes, se puede seguir en la 2ª ronda del certamen. El grupo de participantes de Jenny, Catrín y Andrés obtuvo 49 puntos ¿Pasan a la 2ª ronda?

Construcción de conocimiento

Se sugiere elaborar un procedimiento para determinar con seguridad si el grupo de Jenny, Catrín y Andrés están por encima del 3° cuartil y pueden seguir con el certamen. Procedimiento que permita relacionar el histograma con los cuartiles.

En el histograma se pueden ver solamente los puntajes repartidos en intervalos, queda el único procedimiento de determinar los cuartiles mediante el área de los rectángulos que se calculan mediante el producto de los valores del eje Y por el ancho de los intervalos que es 10. Se sugiere describir en conjunto con la clase el procedimiento descrito en el esquema.

Resultados del concurso de proyectos



Área 1: $7 \cdot 10 = 70$	Área 2: $9 \cdot 10 = 90$	Área 3: $8 \cdot 10 = 80$	Área 4: $3 \cdot 10 = 30$	Área 5: $2 \cdot 10 = 20$	Área 6: $1 \cdot 10 = 10$
------------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------

Suma de las áreas: $70 + 90 + 80 + 30 + 20 + 10 = 300$

Primer cuartil: $\frac{1}{4}$ del área $300: 4 = 75$

Tercer cuartil: $\frac{3}{4}$ del área $3 \cdot 75 = 225$

Área de los primeros 2 rectángulos: $90 + 70 = 160$

225 es el 75% del área total y después de 40 puntos faltan:

$$225 - 160 = 65$$

El área de 65 se obtiene al multiplicar $8 \cdot 8,125 = 65$

Entonces, después de 40 puntos se necesitan **8,125** puntos para marcar el 3° cuartil.

Con 49 puntos el grupo está por encima del 3° cuartil de 48,125 puntos y puede seguir en el certamen.

Práctica guiada

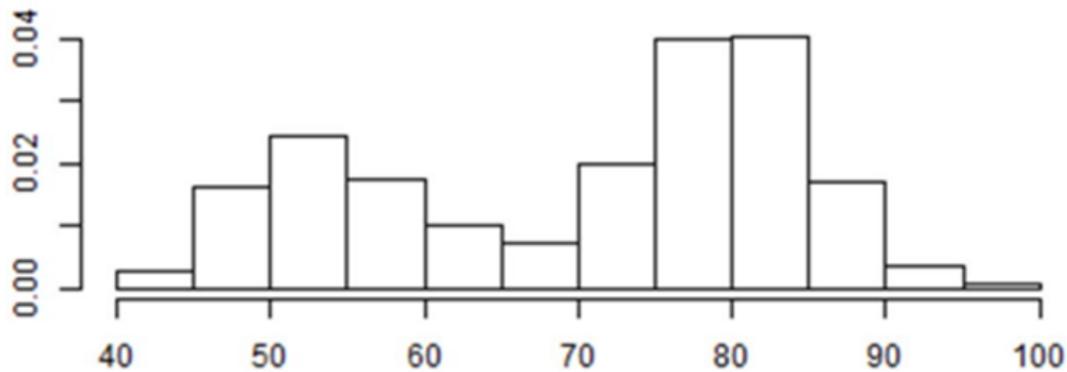
Se sugiere guiar a los estudiantes para que comprendan el uso del área y del por qué se trabaja con histogramas. Para esto se sugiere profundizar en el trabajo con histogramas y de las posibles situaciones en las cuales se hace conveniente trabajar con ellos, por ejemplo, en la erupción de un Geiser, el cual se repite en lapsos y que ocurren alrededor de 25 veces al día con tiempos de erupción que varían aproximadamente entre 1 y 5 minutos.

Conexión interdisciplinar

Ciencias naturales
OA2 Nivel 2 EM



Se sugiere guiar la lectura del histograma de área que corresponde a los lapsos, en la unidad de minutos, entre dos erupciones en un día, donde se agruparon los lapsos en intervalos de 5 minutos. El eje vertical, de las ordenadas, representa la frecuencia relativa de los lapsos dividida por el ancho 5 de los intervalos.



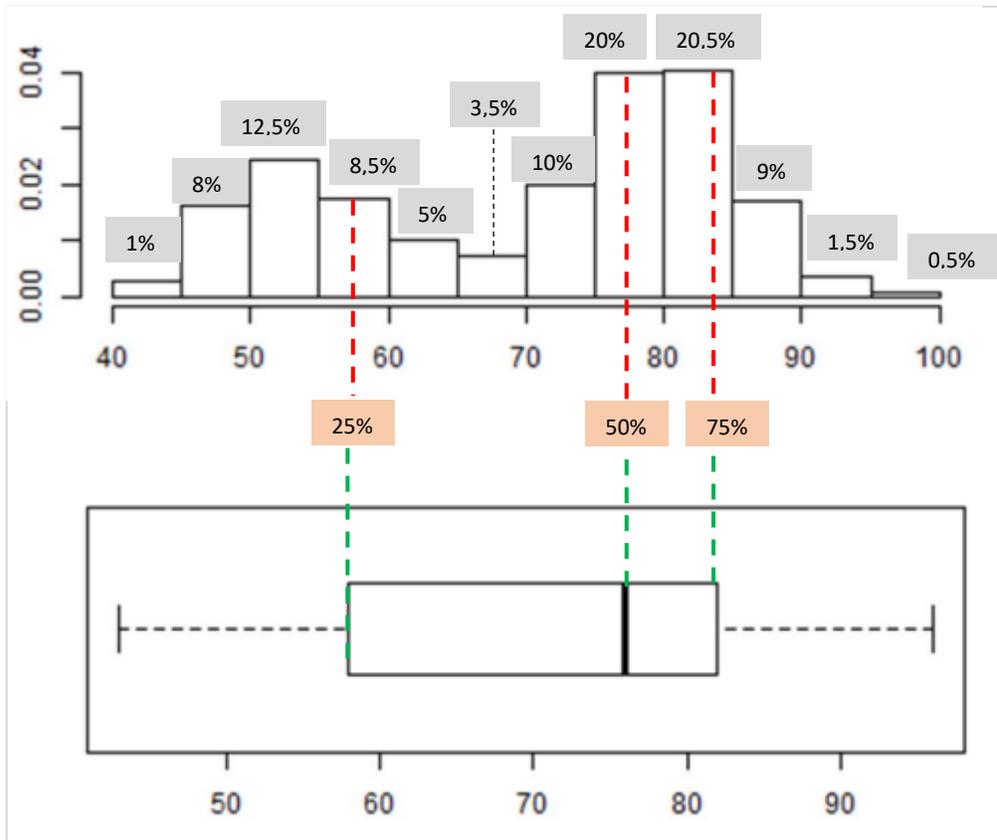
Guiar la obtención de los cuartiles a partir del histograma y considerando que la suma de las áreas es igual a 1 y mostrando un ejemplo particular del cálculo del porcentaje o de la frecuencia relativa para el intervalo entre 70 y 75 que en la lectura de las ordenadas se puede estimar el valor de 0,02 y multiplicando la ordenada por el ancho del intervalo para obtener el área, que es justamente la frecuencia relativa

$$0,02 \cdot 5 = 0,10 = 10\%.$$

Se sugiere guiar la elaboración de una tabla, estimando la ordenada y multiplicando por el ancho del intervalo, así se obtiene la frecuencia relativa y el área.

Intervalo	Estimación de la ordenada	Frecuencia relativa/área	Porcentaje
[40 ; 45[0,002	$0,002 \cdot 5 = 0,01$	1%
[45 ; 50[0,016	$0,016 \cdot 5 = 0,08$	8%
[50 ; 55[0,025	$0,025 \cdot 5 = 0,125$	12,5%
[55 ; 60[0,017	$0,017 \cdot 5 = 0,085$	8,5%
[60 ; 65[0,01	$0,01 \cdot 5 = 0,05$	5%
[65 ; 70[0,007	$0,007 \cdot 5 = 0,035$	3,5%
[70 ; 75[0,02	$0,02 \cdot 5 = 0,10$	10%
[75 ; 80[0,04	$0,04 \cdot 5 = 0,20$	20%
[80 ; 85[0,041	$0,041 \cdot 5 = 0,205$	20,5%
[85 ; 90[0,018	$0,018 \cdot 5 = 0,09$	9%
[90 ; 95[0,003	$0,003 \cdot 5 = 0,015$	1,5%
[95 ; 100[0,001	$0,001 \cdot 5 = 0,005$	0,5%

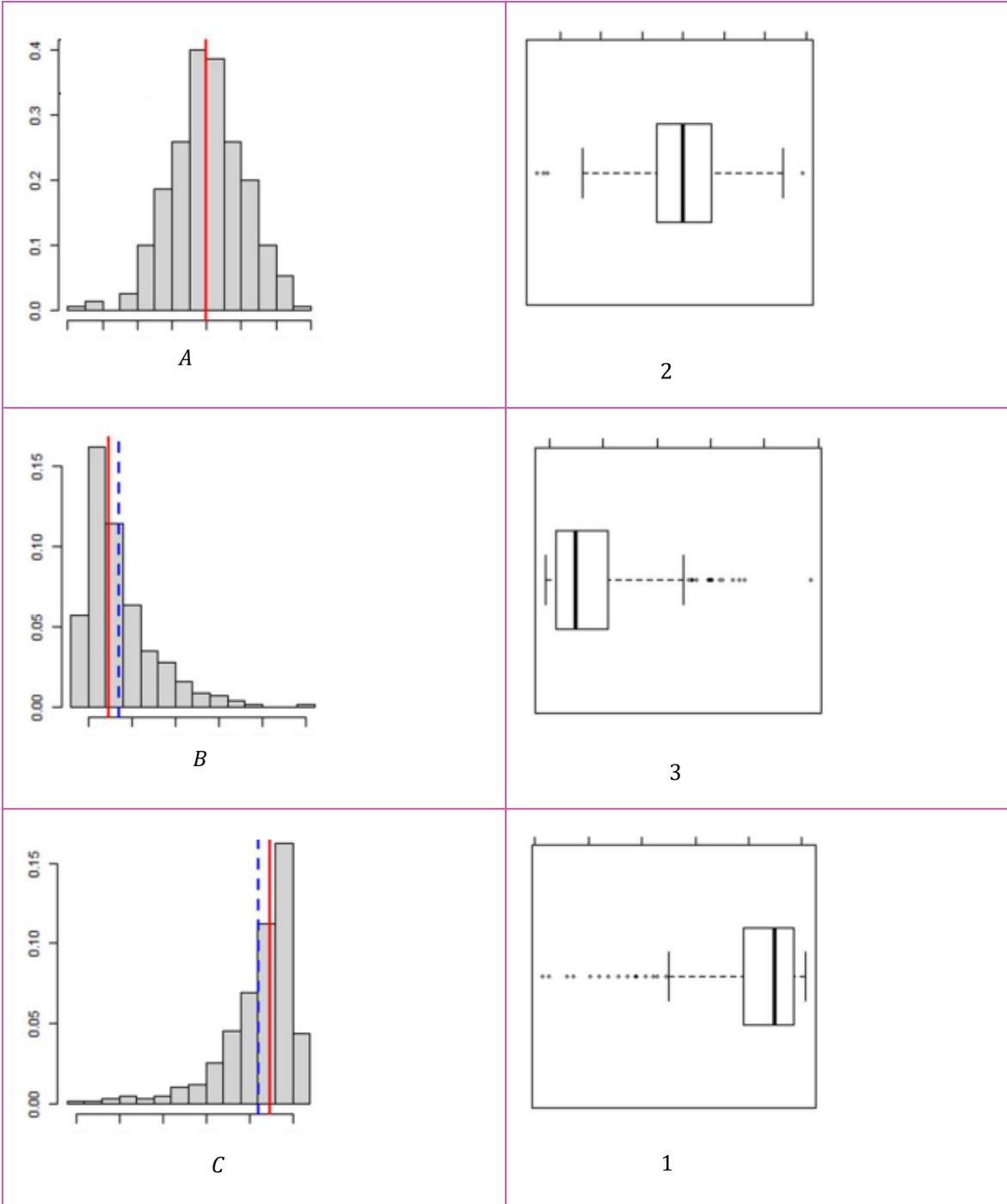
Se sugiere guiar el control de las estimaciones, verificando que la suma de los porcentajes es 100%. Guiar la forma de determinar los cuartiles utilizando el área de los rectángulos para ubicarlos en el eje de las abscisas y comparar con el diagrama de cajón que se obtiene en base a estas estimaciones. Algunas de los resultados a conversar son: el 1° cuartil se obtiene a los **58 minutos**, 2° cuartil **77 minutos**, 3° cuartil **84 minutos** ¿Qué nos dicen estos datos con respecto al comportamiento del Geiser? Destacando que para responder los cuartiles muestran las posiciones y que los histogramas muestran los momentos culmines o peaks del conjunto de los datos.



Práctica independiente

Se sugiere hacer un trabajo en grupo de asociación de histogramas con diagramas de cajón, como una especie de juego de naipes. En la siguiente tabla se muestran algunos ejemplos que se pueden utilizar para esta práctica.

Asociación de histogramas con diagrama de cajón: tres histogramas *A*, *B* y *C* y tres diagramas 1, 2 y 3 de cajón. Las líneas rojas representan la mediana en cada histograma y las líneas punteadas en azul representan las medias.



Para retroalimentar la actividad grupal de asociar histogramas de área con diagramas de cajón, se sugiere utilizar la estrategia Valoro - Sugiero:



VALORO - SUGIERO

DURANTE O LUEGO DE LA ACTIVIDAD

VALORO DE TU TRABAJO...

La forma de utilizar la regla para hacer las estimaciones de las alturas de las barras en el histograma.

La elaboración de la tabla para ordenar los cálculos cuando son todos similares.

TE SUGIERO..

Realizar el diagrama de cajón justamente debajo del histograma, así se puede apreciar mejor la ubicación de los cuartiles en el eje X.

Controlar la suma de las áreas en los histogramas de área y de los porcentajes cuando se buscan las frecuencias relativas.

<https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

Evaluación formativa

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar una rúbrica con los siguientes criterios para cada grupo:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Histogramas	Lee histogramas de frecuencias absolutas y relativas	Lee histogramas de frecuencias absolutas y relativas, extrayendo información para determinar la ubicación de los porcentajes.	Lee histogramas de frecuencias absolutas, relativas y de áreas, extrayendo información para determinar la ubicación de los porcentajes.
Histogramas y diagramas de cajón	Elabora histogramas o diagramas de cajón.	Elabora diagramas de cajón a partir de la información extraídas de los histogramas.	Elabora diagramas de cajón a partir de la información extraídas de los histogramas de área.
	Identifica las diferencias estructurales entre histogramas y diagramas de cajón.	Identifica las diferencias estructurales y conceptuales entre histogramas y diagramas de cajón, asociando cuando se marca la mediana.	Identifica las diferencias estructurales y conceptuales entre histogramas y diagramas de cajón, asociando histogramas y diagramas de cajón con o sin marcas de medidas estadísticas.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: entenderemos que la representación de la información y la lectura de estas representaciones permiten progresar en la habilidad de hacer transferencias, en esta actividad, se espera que el estudiante transfiera desde los histogramas al diagrama de cajón y relacione los cálculos de los cuartiles con el área de las barras de un histograma.

Actitudes: para apoyar el desarrollo de la actitud de trabajar colaborativamente se sugiere entregar a un grupo un tipo de gráfico, ya sea los histogramas o los diagramas de cajón y que se junten según corresponda. También, se pueden realizar juegos de cartas o de domino conceptuales que permiten a los estudiantes trabajar los conocimientos de manera visual.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo grupal: se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo grupal en esta actividad:



Colaborar

-  Actividad dentro del horario de clases, el trabajo colaborativo y cómo ocurre debe ser observado en clases.
-  Entregar instrucciones precisas sobre lo que se espera al término del trabajo, entregar una rúbrica con los criterios y dejar uno o dos minutos para revisar la comprensión de las instrucciones.
-  La evaluación es grupal y se sugiere no evaluar hasta que se comprenda que la idea es contribuir para el logro de un objetivo común.
-  Decida con anterioridad la forma de organizar los grupos, ya sea de forma aleatoria o por coincidir con las propuestas o por nivel de comprensión del tema, considere siempre la cantidad de participantes por grupo y cantidad de la clase.
-  Decida con anterioridad los momentos en que los participantes del grupo se escuchan y toman las primeras decisiones para organizar lo que hará cada uno, como también el momento en que los grupos se escuchan entre sí.

Módulos electivos

Módulo de Aprendizaje basado en Proyectos Visión panorámica

Gran idea

La geometría provee herramientas claves que permiten resolver problemas de visualización espacial y construcción en ambientes digitales.

Objetivos de aprendizaje

- OA1.** Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, valorando el uso de las TIC. **(Representar)**
- OA6.** Realizar demostraciones simples de resultados e identificar en una demostración, si hay saltos o errores, trabajando con empatía y respeto. **(Argumentar y comunicar).**
- OA8.** Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas).**

Conocimientos esenciales

- Volumen de figuras 3D.
- Superficie de figuras 3D.
- Vistas de figuras 3D concretas, pictóricas y simbólicas.
- Proyecciones paralelas y perpendiculares a un plano: alzada, lateral y planta.
- Proyección en perspectiva.

Tiempo estimado
6 semanas (24 horas)

Resumen del Proyecto

El proyecto interdisciplinario *Convivir con las aves para proteger su existencia* surge de la necesidad de tomar medidas para evitar los efectos de la construcción de viviendas que antes fueron utilizadas como un espacio de hábitat ornitológico. Aprender a vivir con las aves y dar soluciones de espacio compartido es una tarea del ser humano ecológicamente responsable. Este proyecto da la oportunidad de enfrentarse a un problema desde una perspectiva propositiva y activa. Los estudiantes proponen desde la sinergia para actuar de manera concertada y obtener un resultado mayor a la suma de los resultados particulares, entendiendo que una casa puede ser compartida por las aves.

Con estos antecedentes, se busca que los estudiantes propongan cómo se puede convivir o compartir la vivienda y las urbes con las aves, elaborando un diseño y un espacio concreto para las aves según las características de la especie que vive en la región.

Nombre del Proyecto

CONVIVIR CON LAS AVES PARA PROTEGER SU EXISTENCIA

Problema central

La construcción de inmobiliaria o de urbes en zonas que son habitadas por aves implica en algunos casos la desaparición de una especie y con esto daños al sistema ecológico. Aprender a convivir con las aves implica tener consideraciones especiales al momento de construir viviendas humanas o bien una vez que se ha observado el fenómeno de la falta de vivienda ornitológica, debemos dar una respuesta efectiva a este problema, construyendo un espacio de acuerdo con la especie que la requiere.

Propósito

En este proyecto se busca que los estudiantes propongan y elaboren un producto, en particular nidos o bebederos para pájaros que habitan en el entorno, dando una solución concreta al problema del desplazamiento del hábitat animal por construcción de inmuebles para humanos. La forma de abordar el proyecto corresponde a la identificación de una especie de aves, determinar sus condiciones de vida y sus necesidades de espacio para proyectar un nido o bebedero con las características de espacio que sean necesarias para la especie. El cálculo del volumen y estimaciones sobre este volumen será el paso principal para la planificación de nidos y bebederos, junto a este se encuentra el cálculo de superficie y del material disponible para crear su producto.

Se espera que los estudiantes describan las características de la especie, centrándose en la forma y en las necesidades que puedan tener, si viven solas, con familia o en banda, si requieren de un gran espacio para dormir o el mínimo para conservar el calor durante el invierno. Se espera que el estudiante aproveche las TIC para encontrar información y para elaborar un diseño de nido con las instrucciones para su elaboración. En este proceso, se espera que considere el concepto de volumen de un cuerpo para responder a las necesidades de las aves que espera que se aniden. En la etapa de diseño y elaboración del proyecto, se espera que el estudiante considere el concepto de superficie, el cual le permitirá dar respuesta al problema del uso de material, reciclado y conciencia de maximizar el uso del material para no desperdiciar demasiado.

Objetivos de Aprendizaje

Matemática

OA1. Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA8. Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Ciencias Naturales

OA2. Diseñar y desarrollar investigaciones científicas que permitan recoger evidencias y contrastar hipótesis pensando con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras, considerando:

- Las relaciones entre datos, información y variables.
- El uso adecuado de instrumentos y materiales para obtener datos confiables.
- La medición y el registro de evidencias usando herramientas tecnológicas o matemáticas. **(Planificar y conducir una investigación)**

Preguntas

- ¿Por qué es importante vivir en equilibrio con la naturaleza?
- ¿Qué beneficios trae la existencia armoniosa de pájaros para el ser humano?
- ¿Cuáles son las especies de aves que requieren de protección?
- ¿Qué podemos hacer para mejorar los espacios de las aves que viven en la cercanía?

Tipo de Proyecto Interdisciplinario

- Matemática
- Ciencias Naturales

Productos

- Plantilla de construcción de niales con instructivo y medidas.
- Niales elaborados para los distintos tipos de aves, incluyendo los murciélagos.
- Repartición estratégica de los niales dentro la comuna según el tipo de especies de la región.
- Afiche con los resultados para ser mostrados a la comunidad.

Habilidades y actitudes para el Siglo XXI

- Creatividad e innovación
- Pensamiento crítico
- Trabajo colaborativo
- Uso de la información

Recursos

1. Para el modelo abstracto: plantilla de la construcción de nidales con instructivo y medidas y afiche en formato digital.
2. Para el modelo concreto: material de construcción, reciclado o de fácil adquisición para elaborar el nidal, impresión del afiche si fuera necesario o papelógrafos y plumones para la elaboración manual.

Etapas

Fase 1. Identificación del problema.

En el momento inicial los estudiantes reflexionan sobre las aves y los efectos que tiene o ha tenido la construcción inmobiliaria en el hábitat de esta clase del reino animal.



Después se pide reflexionar acerca de la vida de las aves en el entorno urbano, fuera de su hábitat natural, y sobre las medidas de mejoramiento de la situación de las aves.

Se sugiere considerar las siguientes intervenciones por medio de preguntas para motivar la conversación y comprensión del problema:

- ¿Qué ha ocurrido con la forma de vivir de las aves?
- ¿Cómo podemos dar una solución proactiva?
- ¿Por qué entran al entretecho?

Se puede apoyar este proceso recontextualizando la situación al entorno de los estudiantes:

- Zonas metropolitanas, zonas urbanas, zonas campestres.
- Aves y murciélagos, tipo de especie, tamaño, forma y necesidades.

Al final de esta fase el estudiante ha recontextualizado a su entorno la problemática asociada a la existencia o no existencia de bebederos o nidos para los pájaros, ha reflexionado sobre la necesidad de enfrentar el problema de manera propositiva y tiene una idea de cómo solucionar el problema creando una infraestructura que les pueda servir a los pájaros.

Fase 2. Ubicación de los nidales.

En esta etapa, los estudiantes especifican las medidas de mejoramiento asociadas a la construcción de bebederos o nidales para los pájaros, concentrándose en la ubicación que pueden tener los nidales.

- ¿Se dispondrán aguadas o comederos para aves?
- ¿Es de fácil acceso para las aves y para la construcción?
- ¿Qué lugares podrían ser accesibles: casas, entretecho, cornisas, dispensadores en el jardín, en la plaza, en el parque, ¿en el árbol?
- ¿Qué exposición frente al sol deben tener los nidales?
- ¿Qué consideraciones de protección de depredadores deben ser consideradas para la altura del nidal?



Al término de esta etapa los estudiantes tienen seleccionado el lugar en el cual se quiere ubicar la infraestructura, esta decisión puede ser tomada de manera grupal o personal, tener la ubicación es determinante para pasar a la siguiente etapa, ya que depende del lugar la selección de la especie y el estudio de esta.

Fase 2. Determinación de la especie.

En esta etapa, los estudiantes investigan sobre las características de las especies que habitan en el lugar seleccionado y sobre la especie que se quiere proteger y anidar.

- ¿Cómo se puede obtener información acerca de las poblaciones de distintas aves en el barrio del colegio, en otros barrios de la ciudad o en mi pueblo?
- ¿Qué se ha podido observar en mi comunidad con respecto a las aves y murciélagos?
- ¿Dónde arman los nidales?
- ¿Cuántos nidales se requieren según la población de aves observadas en el entorno?
- ¿Qué ocurre si se favorece una especie frente a otra, rapaces versus palomas?

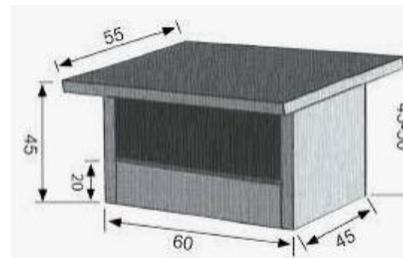
Al final de esta etapa los estudiantes han seleccionado la especie y tienen información sobre algunas de sus costumbres, cantidades y del lugar en el que habitan.

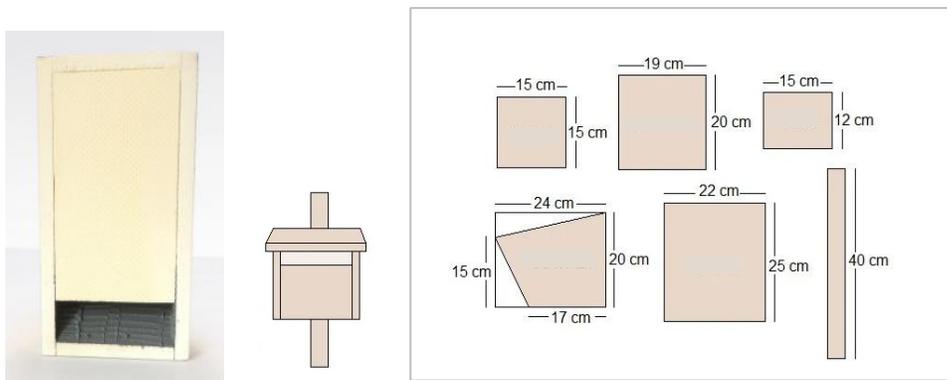
Fase 3. Confección del dibujo técnico de los nidales.

En esta etapa, se levanta información sobre las características de los nidales según la especie elegida y se elabora un diseño técnico 2D del nidal.

- ¿Qué características poseen los nidales naturales?
- ¿Qué características deben tener los nidales artificiales?
- ¿Cuánto espacio requiere la especie elegida?
- ¿Se pueden armar cámaras de observación que no molesten la nidada?

Algunos ejemplos que se pueden tener como idea para la confección del dibujo técnico.





Los estudiantes relacionan la investigación de las características de la especie con el conocimiento matemático para elaborar un nidal o bebedero. Las siguientes preguntas corresponden a una orientación para el proceso de guiar a los estudiantes en la elaboración del dibujo técnico.

- ¿De dónde se puede obtener información acerca de la dimensión de los nidales según el tipo de ave?
- ¿Cuál es la medida y cantidad promedio de los huevos?
- ¿Cuál es el tamaño promedio de un ave?
- ¿Qué estimación se puede utilizar para el cálculo del volumen, modelo esfera o de cono?
- ¿Cuál es el peso medio de un ave que sirve para fijar el nidal?
- ¿Cuáles son las diferentes vistas del nidal, alzada, lateral y de fondo?

Al final de esta etapa los estudiantes han calculado el volumen que se requiere para el nidal, han elaborado un diseño de bebedero o nidal y han realizado un dibujo técnico del bebedero o nidal, según las medidas necesarias para el bienestar de la especie.

Fase 4. Elaboración concreta del nidal

En esta etapa los estudiantes elaboran el nidal y consideran la cantidad de material que se requiere y el concepto de superficie y de maximizar el uso de los recursos disponibles.

- ¿Cuáles son los materiales más convenientes?
- ¿Cuáles son las medidas conociendo el espacio necesario para una nidada?
- ¿Cómo se puede promover una limpieza oportuna del nidal para reutilizarlo?
- ¿Qué infraestructura de herramientas para la confección de los nidales tiene el establecimiento?
- ¿Cuánto material necesito?
- ¿Cuánto material me sobra?
- ¿Qué tipo de material de fijación se requiere?
- ¿Cómo afecta el tiempo al material, madera, metal, frío, calor?
- ¿Qué se requiere para su instalación?

Al final de esta etapa los estudiantes han calculado la superficie del bebedero o nidal y han estimado el material necesario para su elaboración. Los estudiantes construyen durante esta etapa el bebedero o nidal, elaborando las instrucciones que deben acompañar al dibujo técnico. El producto queda listo para su instalación.

Fase 5. Elaboración del afiche y de su presentación

En esta etapa los estudiantes elaboran el afiche que será presentado a la comunidad.

- ¿Qué fecha dentro del calendario escolar del colegio será conveniente?
- ¿Cómo se puede incluir a la comunidad?
- ¿Se pueden incluir en el proyecto otras instituciones de la comuna?
- ¿Se podrá invitar a los departamentos de ornitología de universidades de la región o a clubes ornitológicos?
- ¿Qué elementos tendrá el afiche, fotos, dibujo técnico, datos del ave, permisos municipales?
- ¿Se presenta el equipo de estudiantes documento el proyecto?

Al final de esta etapa se han instalado bebederos o nidales y se han realizado registros de la actividad para incluirlas en el afiche. Los estudiantes elaboran un afiche para presentar el desarrollo del proyecto a la comunidad.

Fase 6. Interpretación y conclusiones

En esta etapa los estudiantes revisan críticamente el proyecto, ofrecen oportunidades para el futuro y revisan retrospectivamente el proceso del proyecto, acciones particulares y grupales que influyeron en el éxito o fracaso de las diferentes fases.

- ¿Cómo se pueden tomar medidas que documentan el efecto del proyecto, aunque estaría en el futuro?
- ¿Qué espero en el futuro del proyecto?
- ¿Cuáles podrían ser los márgenes esperados del proyecto?
- ¿Cuáles podrían ser los límites del proyecto?
- ¿Cuáles podrían ser los detalles no generalizables que tiene el proyecto en su éxito o fracaso particular?

Al final de esta etapa los estudiantes terminan la elaboración del afiche, revisan el dibujo técnico, las instrucciones de elaboración y eventualmente realizan el registro de uso del bebedero o nidal para ser presentado en el afiche.

Evaluación

Se sugiere la siguiente rúbrica de evaluación del proceso del proyecto:

Aspectos para evaluar	Puntaje por aspecto	Puntaje obtenido por alumno
Planteamiento del problema		
Identifica el problema que el grupo puede responder por medio de la ejecución de un proyecto.	3	
Identifica varios problemas que el grupo podría responder por medio de la ejecución de varios proyectos.	2	
Identifica un problema que no es posible de responder por medio de la ejecución de un proyecto.	1	
No identifica un problema.	0	
Determinación de la especie		
Averigua en diferentes fuentes sobre las especies de su entorno para conocer más sobre las aves, las características externas, la forma de vida y alimenticia de la especie para tomar una decisión fundamentada y coherente con el planteamiento del problema.	3	
Averigua en diferentes fuentes sobre las especies de su entorno para conocer más sobre las aves, las características externas, la forma de vida y alimenticia de la especie.	2	
Averigua sobre las especies de su entorno para conocer más sobre las aves, las características externas, la forma de vida y alimenticia de la especie.	1	
No averigua nada de la especie y se decide de manera aleatoria o por gusto por una especie.	0	
Ubicación del nidal		
Argumentan la ubicación del nidal basándose tanto en mediciones concretas como en criterios de protección de la especie, costumbres nocturnas o diurnas de la especie y cuidados de las construcciones de viviendas humanas.	3	
Argumentan la ubicación del nidal basándose solamente en uno de los criterios, por ejemplo, solo en las mediciones concretas o solo en la protección de la especie, solo en las costumbres nocturnas o diurnas de la especie o solo en los cuidados de las construcciones de viviendas humanas.	2	
Argumentan basándose en las creencias del grupo y en conveniencias prácticas que no se sustentan en alguno de los criterios.	1	
No utilizan argumentos de ningún tipo para la selección de la ubicación del lugar.	0	
Dibujo técnico		
Elabora el dibujo técnico considerando las características principales de las proyecciones, la comunicación de un diseño que todos pueden entender y del cálculo del volumen para la vivienda adecuada de la especie.	3	
Elabora el dibujo técnico considerando las características principales de las proyecciones y del cálculo del volumen para la vivienda adecuada de la especie.	2	
Elabora el dibujo técnico considerando las características principales de las proyecciones.	1	
No elabora un dibujo técnico.	0	

Elaboración del nidal		
Elabora un nidal siguiendo las instrucciones del dibujo técnico, calculando el área para maximizar la utilización del material y de los recursos, y utilizando materiales adecuados para la vivienda de una especie de aves.	3	
Elabora un nidal siguiendo las instrucciones del dibujo técnico, calculando el área para maximizar la utilización del material y de los recursos.	2	
Elabora un nidal siguiendo las instrucciones del dibujo técnico.	1	
No elabora un nidal.	0	
Cálculo del volumen y del área		
Realiza cálculos para determinar el volumen y superficie de una figura 3D, descomponiendo la figura en partes o estimando a figuras conocidas para utilizar las fórmulas de volumen y de superficie de cilindros, conos, esferas, conos truncados o prismas.	3	
Realiza cálculos para determinar el volumen de una figura 3D, descomponiendo la figura en partes o estimando a figuras conocidas para utilizar las fórmulas de volumen de prismas.	2	
Realiza cálculos para determinar el área de figuras 2D, descomponiendo la figura en partes o estimando a figuras conocidas para utilizar las fórmulas de área de triángulos, cuadrados, rectángulos y polígonos.	1	
No calcula áreas o volúmenes.	0	
Presentación de trabajos		
Organiza la presentación de su trabajo, incluyendo fechas de entrega, instalación, elaboración de afiche, imágenes, invitaciones, entrega de información cuantitativa, entrega del manual de elaboración del nidal y proyecta el futuro del o de los nidales dentro de la comunidad.	3	
Organiza la presentación de su trabajo, incluyendo fechas de entrega, instalación, elaboración de afiche, imágenes, invitaciones, entrega de información cuantitativa y entrega del manual de elaboración del nidal.	2	
Organiza la presentación de su trabajo, incluyendo fechas de entrega, instalación, elaboración de afiche, imágenes, invitaciones y entrega de información cuantitativa.	1	
No presenta su trabajo.	0	
Total		

Difusión final

Los estudiantes instalan en sus casas, en el colegio o en el lugar que han establecido como pertinente los nidales construidos.

Criterios de habilidades siglo XXI

Se sugiere usar rúbricas y criterios relacionados con habilidades del siglo XXI de Pensamiento creativo e innovación, Pensamiento crítico, y Trabajo colaborativo, como también de Diseño del proyecto y la Presentación del trabajo que se muestran en el texto metodología de Aprendizaje basado en Proyectos, páginas 21 a 29 en https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140166_recurso_pdf.pdf

Módulo de Aprendizaje Basado en problemas 4

Aprendizaje Basado en Problemas

La estadística entrega herramientas que permite organizar y presentar características de la población.

Objetivos de aprendizaje

OA2. Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación y aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA7. Variar parámetros o condiciones, comparando los cambios en los resultados obtenidos y pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Cuartiles
- Quintiles
- Planilla de cálculo

Tiempo estimado

6 semanas (24 horas)

Propósito

En este módulo electivo se busca desarrollar las habilidades de resolver problemas y representar utilizando la metodología del aprendizaje basado en problemas. Para esto, se propone el problema *e/ mejor clima para visitar mi ciudad*¹⁵ en un contexto relacionado con el clima de una ciudad y las preferencias que tienen las personas. Los estudiantes buscan y representan información utilizando gráficos conocidos y construyendo los gráficos de cajón para relevar ubicación de la información. Además, los estudiantes varían condiciones iniciales de fechas u ofrecimientos de fechas para satisfacer necesidades de autorrealización, como viajes de vacaciones.

Preparación

Para que los estudiantes se preparen para el problema se sugiere plantear el contexto del clima y su importancia para la toma de decisiones como las fechas para salir de vacaciones, el lugar donde hospedarse, el tipo de ropa que se debe llevar y los paisajes que se esperan encontrar. Ponerse en el lugar de una visita y pensar en las recomendaciones que se dan y que relacionan la ciudad donde se vive o se quiere visitar, con el clima y la entrega de una opinión informada y presentada para que sea comprensible para todos.

- ¿Qué consideraciones tendrías para hacer un viaje?
- ¿Qué consejos podrías dar a las personas que visitan tu ciudad?

En el sentido de modelar desde el propio entorno, se anima a los estudiantes a relacionarse conscientemente con su entorno, a proponer consejos para la ciudad y a considerar diferentes aspectos en la resolución de un problema, especialmente sobre el clima. Estas ideas y sus variaciones crean formas de pensar más complejas, que luego se pueden organizar y comunicar, especialmente en la fase de comparación de los resultados.

Presentación del problema

Para presentar el problema del módulo, se sugiere entregar el problema impreso y por medio de la escucha activa y lectura comprensiva, promover que los estudiantes registren detalles de la situación general y de su propia situación con respecto al clima de una ciudad.

Imagínate que eres un agente de turismo y que te han consultado sobre las fechas que recomendarías según el clima de tu ciudad o región para ir de vacaciones ¿Cómo describirías el clima de la ciudad? ¿Qué fechas recomendarías?

Algunas consideraciones para enfrentar el problema

- Acciones para enmarcar la búsqueda de información, por ejemplo, considerar la ciudad donde se vive, otra ciudad, la región completa, un mes determinado o un año.

¹⁵ Problema elaborado por Prof. Dr. Rita Borromeo-Ferri de la Universidad de Kassel, Alemania.

- Preguntas previas que permiten acercarse al problema, tales como ¿Cuál es el problema? ¿Cuál es mi postura previa sobre el tema? ¿Cómo puedo confirmar o refutar esta postura?
- Organización para enfrentarse al problema y las posibles variaciones que se pueden hacer al problema.

Los estudiantes asocian la situación del agente de turismo con sus propias experiencias y se hacen una idea mental de la situación y de los requerimientos. Esta etapa es previa e importante, porque se trata esencialmente de saber cuál es la pregunta, de modo que surjan pasos hacia la solución y la construcción del conocimiento.

Investigación

Los estudiantes averiguan sobre el clima de la ciudad o región que han elegido para recomendar, comparten la información con sus pares en caso de ser necesario. Organizan la información en tablas y gráficos conocidos, construyen el conocimiento sobre cuartiles y la división de los datos en cuatro partes para resaltar la ubicación de las temperaturas según los tramos de tiempo que se han elegido.

Desarrollo de la investigación

- Buscar datos de la temperatura de la ciudad o región.
- Organizar los datos en tablas.
- Determinar tramos de tiempo, 30 días, 90 días, 6 meses, 1 año.

Ejemplo para 30 días

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatura	7	10	12	16	16	17	18	20	22
Día	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Temperatura	29	23	19	20	21	18	17	15	29
Día	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Temperatura	22	23	8	25	24	23	23	25	26
Día	28	29	30						
Temperatura	27	19	16						

- Representar la información en gráficos conocidos.
- Organizar los datos en cuartiles.

Posibles soluciones al problema

Los estudiantes relacionan la media, la moda y la mediana de los datos a consejos sobre lo que se podría esperar sobre el clima en la ciudad, también determinan el rango, el mínimo y el máximo para relacionar con sugerencias para los visitantes según el problema que se hayan planteado al inicio y relacionan la diferencia entre el primer cuartil y el tercer cuartil con la variación del 50% de los datos.

Estadístico	Posibles frases para elaborar
Media	En promedio se puede esperar un promedio de _____ de temperatura para el mes de _____.
Moda	En general, para el mes de _____ se esperaría que la mayoría de los días tengan _____ de temperatura.
Mediana	Para el mes de _____ se esperaría que las temperaturas fueran menores a _____. Para el mes de _____ se esperaría que las temperaturas fueran mayores a _____.
Máximo	Se esperaría para el mes de _____ un máximo de temperatura de _____.
Mínimo	Es muy probable que el mínimo de temperatura para el mes de _____ sea de _____.
Rango	La temperatura para el mes de _____ podría variar unos _____.
Primer cuartil	El 25% de las temperaturas del mes de _____ deberían ser menores a _____. La mayoría de las temperaturas del mes de _____ deberían ser mayores a _____.
Tercer cuartil	El 25% de las temperaturas del mes de _____ deberían ser mayores a _____. La mayoría de las temperaturas del mes de _____ deberían ser menores a _____.
Diferencia entre el cuartil 3 y el cuartil 1.	Para el mes de _____ se puede decir que el 50% de los datos se mueven en _____. Se puede decir que las temperaturas en el mes de _____ varían (poco/mucho).

A partir de esta posible respuesta, se pueden incluir nuevos periodos de tiempo para hacer una comparación, o bien cambiar la ciudad y proponer un nuevo destino o una nueva fecha para las vacaciones. Las nuevas preguntas que pueden organizar esta etapa podrían ser:

- ¿He respondido al problema?
- ¿Qué variaciones se pueden hacer?
- ¿Qué es más aconsejable para este caso?
- ¿Necesito de nuevos datos?
- ¿Necesito apoyo de nuevos conocimientos?

Estas preguntas ayudan a repensar el problema y profundizar en la siguiente etapa, ya sea en la presentación de la información cómo en la ampliación del conocimiento, transfiriendo desde un ejemplo a la situación particular.

Evaluar una solución del problema

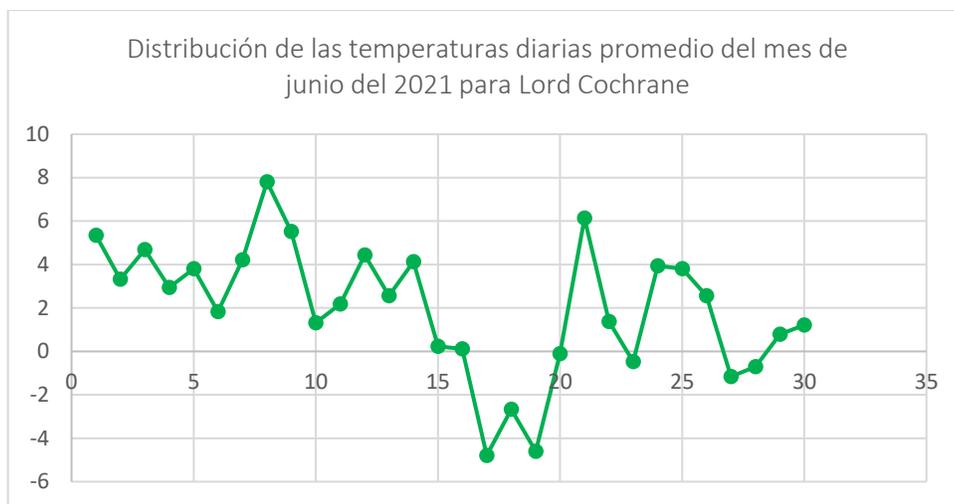
Los estudiantes evalúan una solución al problema y transfieren a su caso particular. Se sugiere relevar la representación utilizada para luego elegir la más adecuada según el problema seleccionado y la respuesta que se quiere presentar, este procedimiento se puede realizar de forma manual o con uso de planillas de cálculo.

Se sugiere presentar el desarrollo de una situación particular, por ejemplo, las temperaturas de la estación Lord Cochrane para el mes de junio 2021, las cuales se pueden obtener de la página web <https://www.curriculumnacional.cl/link/https://climatologia.meteochile.gob.cl/application/informacion/datosMensualesDelElemento/470001/2021/6/26> y las cuales se han trabajado en la planilla de cálculo Excel, para el caso de unas vacaciones en el mes de junio y sus recomendaciones sobre visitar la región en esa fecha.

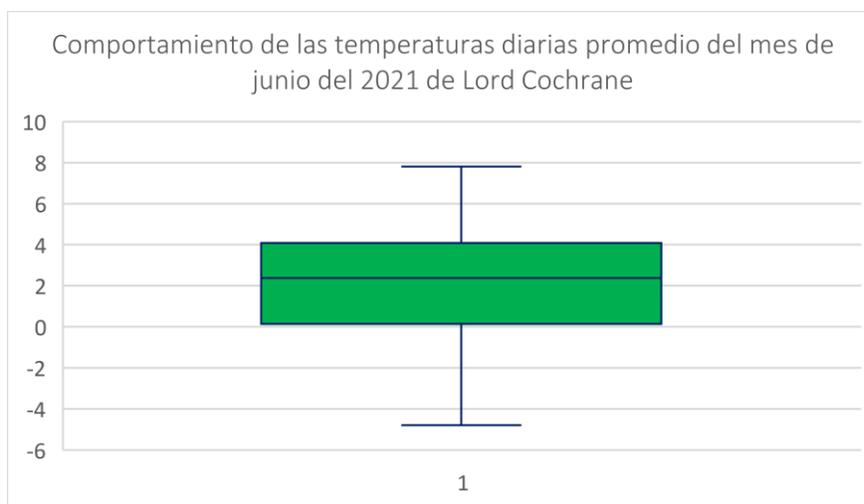
Tabla 1. Temperaturas diarias en promedio del mes de junio del 2021

Fecha	Ts (°C)										
01	5,34	06	1,88	11	2,18	16	0,11	21	6,13	26	2,57
02	3,31	07	4,22	12	4,43	17	-4,79	22	1,37	27	-1,17
03	4,68	08	7,80	13	2,57	18	-2,67	23	-0,47	28	-0,70
04	2,94	09	5,53	14	4,14	19	-4,6	24	3,94	29	0,78
05	3,80	10	1,31	15	0,24	20	-0,1	25	3,80	30	1,21

Se sugiere presentar el gráfico de línea para presentar la tendencia y comportamiento de las temperaturas para el mes de junio del 2021, esto permite visualizar si hay grandes variaciones en el mes y proyectar el comportamiento de días anteriores a este mes o los de inicios de agosto. También se podría utilizar para comparar el mes de enero con el mes de junio del mismo año, en caso de querer ofrecer un mes alternativo con temperaturas eventualmente más altas, también podría ser que en el problema haya una variación entre las fechas para el mes de junio y el mes de julio, en este caso, también se puede utilizar para comparar ambos meses.



Se sugiere presentar el gráfico de cajón para visualizar el comportamiento de las temperaturas para el mes en cuestión. Este tipo de gráfico permite formular frases relacionadas con la variación de la temperatura, los casos extremos y dónde se encuentra los tramos del 25%, 50% y 75% de temperatura.



Elaborar predicciones y ajustar las respuestas

Los estudiantes elaboran diferentes gráficos, frases y responden al problema, dando sugerencias sobre la ciudad para visitar, el periodo en el cual la visita pudiera ser más provechosa y el tipo de vestimenta o alojamiento que se debería acceder. Para esto, se elaboran predicciones y en las comparaciones se ajustan las respuestas, tanto desde la lectura de datos y gráficos como desde el cálculo del promedio, media, moda, rango y cuartiles.

En general, los resultados obtenidos en esta situación particular deben ser evaluados desde el sentido de realidad y asumiendo una postura razonada, para proponer en base a los datos reales.

- La comparación realizada por medio de la diferencia de valores debe ser interpretada bajo cada contexto particular. La elección final quedará en mano de los visitantes, la presentación de la

información debe ser lo bastante robusta para que se realice una toma de decisiones en base a los datos y no bajo supuestos.

- La consideración de algunos posibles cambios en la temperatura debería quedar expresada según el pronóstico, los datos son reales y solo en caso extremos se podría decir que de un año a otro el comportamiento de las temperaturas es similar.
- Los resultados obtenidos se evalúan bajo la pregunta ¿sirve esta información para dar consejos? ¿sirve esta información y su presentación a los visitantes de la ciudad para tomar una decisión?
- Un razonamiento que surge de los resultados de esta situación particular es presentar siempre una segunda opción, ya sea de lugar o de fechas para que la toma de decisión sea lo más segura posible de tener lluvia o días soleados, así se tiene un abanico de información y de posibilidades para elegir.
- La evaluación de los resultados debe tener la premisa de que todas las situaciones son diferentes y que cada caso es correcto, lo que se busca es la presentación adecuada de cada sugerencia y de cada frase para poder evaluar que sería lo mejor.

Comunicar

Los resultados obtenidos son comunicados y comparados entre ellos, por ejemplo, los que tienen la misma ciudad, los que tienen las mismas fechas para ver similitudes en los resultados o las variaciones en el procedimiento. También se puede reflexionar sobre la estructura de las frases, diferenciando en los datos obtenidos, algunas de las preguntas que pueden guiar la conversación son:

- ¿Qué tiene en común los gráficos o los resultados?
- ¿Qué pregunta nueva o diferente responde este gráfico en relación con el mío?
- ¿Qué estadísticos son utilizadas en mi respuesta en comparación con otros?

Se sugiere comunicar la información y las sugerencias utilizando alguna de estas posibilidades:

- | | |
|-----------|----------------|
| • Afiche | • Presentación |
| • Poster | • Informe |
| • Díptico | • Video |

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares: se sugiere precisar los momentos que sean de aplicación de conocimientos, como en el caso de la aplicación de las medidas de tendencia central y en el caso de construcción del conocimiento de representar información utilizando cuartiles. Podría ser el caso que un estudiante quiera trabajar con quintiles, esta medida estadística permite separar las temperaturas en 5 partes que tiene cada un 20% de los datos, esto permite tener un detalle aún más fino del comportamiento de la temperatura. En cuanto al gráfico se puede dar la oportunidad para elaborar su propio diagrama de cajón con un 60% de los datos dentro del cajón. Este razonamiento de querer representar el comportamiento de la temperatura utilizando la división de los datos, también puede dar origen a la necesidad de usar el área y la elaboración de histogramas para visualizar un comportamiento si hay un comportamiento normal de los datos.

Para focalizar el desarrollo de habilidades: Aunque esta actividad desarrolla varias de las habilidades de matemática, se sugiere focalizar el desarrollo en solo una de ellas, para esto se puede tener presente la siguiente estrategia interrogativa para enfocar el desarrollo de la habilidad de representar:

- ¿Qué es lo que quiero representar?
- ¿Con qué medios puedo representarlo?
- ¿Qué se requiere matemáticamente para poder transitar entre los diferentes niveles de representación?
- ¿Cuál es la nueva representación?
- ¿De qué otra manera se puede expresar la misma información?

Además, se recomienda poner a disposición de los estudiantes un organizador gráfico que puede ser utilizado como bitácora para el desarrollo del problema. Por ejemplo:

Descripción del problema propio:		
¿Cuáles son las variables del problema que voy a considerar?	¿Cuáles son los datos que hay disponibles en cada etapa?	¿Requiero de otros datos?



Conocimiento matemático para utilizar:	¿Cómo organizó la información?	¿Cuál es el modelo u operatoria que voy a seleccionar	¿Qué propiedades o relaciones puedo utilizar para pasar a la siguiente etapa?



¿Qué estaría faltando para tener una respuesta?	¿El resultado responde al problema?	¿Cómo explico y comunico mi respuesta?	Respuesta particular:

https://www.curriculumnacional.cl/docente/629/articles-248166_recurso_pdf.pdf