D. 6.000

XIV ENCUENTRO NACIONAL DE INVESTIGADORES EN EDUCACIÓN

DE LA TEORÍA A LA ACCIÓN....

CENTRO DE PERFECCIONAMIENTO, EXPERIMENTACIÓN E INVESTIGACIONES PEDAGÓGICAS.

LAS CALCULADORAS GRAFICAS APOYANDO EL DESCUBRIMIENTO GUÍADO INDUCTIVO DE GENERALIZACIONES MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA SUPERIOR

Hernán E. González Guajardo

Universidad de Santiago de Chile

Secretario Nacional de la

Sociedad Chilena de Educación Matemática

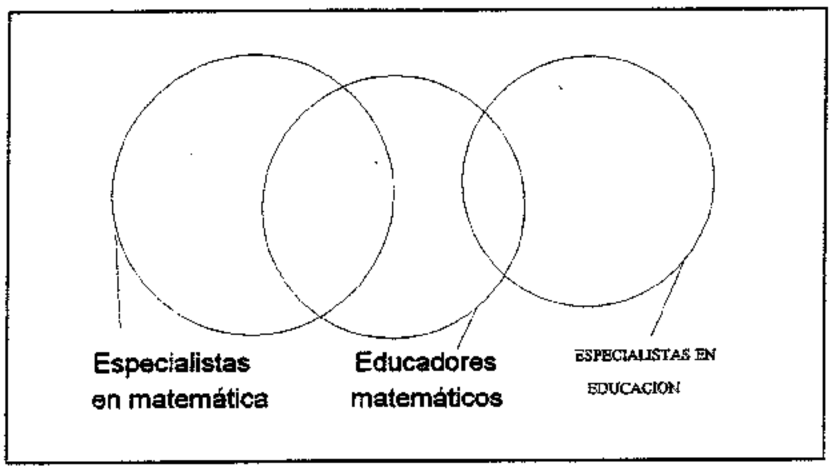
24 al 26 de Septiembre de 1997.

(Este trabajo fué realizado en el marco de un Proyecto de Investigación DICYT).

INTRODUCCION.

La práctica educativa que se observa con bastante frecuencia en varios establecimientos de Enseñanza Media en Chile, pone en evidencia, en forma reiterada, una clara tendencia a sobre enfatizar los contenidos matemáticos por sobre otros aspectos que deberían ser considerados propios del quehacer del profesor de matemática (Alvarez, M. y otros, 1991; González, E. y otros, 1991). En efecto, no resulta difícil aceptar que a cada profesión o actividad existe asociado un ámbito principal para su quehacer o dominio, y que éste debería ser el lugar donde se generan sus principales preocupaciones y motivaciones y en donde se llevan a cabo sus principales construcciones y logros profesionales.

Concretamente, el ámbito del quehacer del profesor de matemática muestra una intersección no vacía con otros ámbitos, como por ejemplo, el de los investigadores matemáticos o especialistas matemáticos cuyo principal quehacer profesional consiste en un esfuerzo permanente por ampliar las fronteras de esta ciencia. También los ingenieros matemáticos y varios otros científicos cuya preocupación prioritaria la constituye la matemática, poseen ámbitos de sus respectivos quehaceres profesionales que se intersectan con el del profesor de matemática:



Sin embargo, el que exista esta intersección no vacía, no debe implicar que la preocupación prioritaria de los haceres profesionales pueda y deba coincidir. Más aún, no resultaría aceptable tal coincidencia para dos o más profesiones o actividades con propósitos distintos. Esto indica con claridad que estas actividades profesionales, si bien es cierto puedan poseer cierta intersección en su quehacer, sus preocupaciones prioritarias y objetivos determinan campos o dominios del hacer, claramente distintos y distinguibles.

Si nos centramos en los los dominios del hacer del profesor de matemática y en los dominios del hacer de aquellos otros profesionales que se preocupan del desarrollo de la matemática, es aceptable pensar que su intersección corresponda a aquellas preocupaciones por los conocimientos matemáticos, por las relaciones y funciones inherentes a ese tipo de pensamiento, por la lógica de sus razonamientos, etc. En otras palabras, por los CONTENIDOS O CONOCIMIENTOS MATEMATICOS que conforman la ciencia y que para el profesor de matemática constituye una especie de entramado básico que va a utilizar para construir su quehacer profesional. Esta es la intersección del dominio del hacer compartido por profesores de matemática y por especialistas en la ciencia matematica.

Pero, si bien es cierto que existe esta intersección -y es bueno que así sea- también deben quedar establecidas las diferencias que permiten caracterizar estos dos dominios del hacer profesional. La parte principal del dominio del hacer del profesor de matemática debe considerar las diversas preocupaciones relacionadas con los problemas de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática y que emergen estrechamente interrelacionados con múltiples fenómenos psicológicos y sociales. Es el conocimieton matemático contextualizado y valorizado a través de sus aportes y aplicaciones.

Sin embargo, y aquí aparece lo paradojal de la realidad observada en Chile, las interacciones verbales de lo que aprenden y de los que enseñan, muestra claras evidencias de un sobre-énfasis en los contenidos por sobre aquellas preocupaciones que presumiblemente deberían constituir el centro del quehacer profesional de los profesores: los problemas de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática.

Es pertinente mencionar aquí la frecuencia con que se hace uso del verbo "pasar" [1] en las conversaciones entre estudiantes, entre profesores y entre profesores y estudiantes chilenos.
Frases o preguntas como:

- ¿el profesor **te pasó** geometría?
- a mí me falta todavía **pasar** ecuaciones cuadráticas en el 3° año B.
- ¿ el año pasado **les pasaron** a Uds. los números complejos?
- a este profesor le falta bastante materia **por pasar** en ese curso.

son altamente frecuentes en tales conversaciones y ellas reflejan una clara preocupación por los contenidos más que por las habilidades y destrezas (los principales propósitos educativos) a lograr como efecto

---

[1] En Chile, "pasar materia" equivale a dar materia y tiene una connotación que no implica más allá de la acción que ejecuta un profesor al escribir en la pizarra mientras los estudiantes traspasan esta escritura a sus cuadernos. Es una especie de formalización de la temática cubierta, sin implicaciones didácticas mayores.

del proceso de enseñar. Esto último queda de manifiesto al observar que dicho verbo forma frases con sentido si se lo emplea en conexión con nombres de contenidos. En cambio, dicho sentido no existe si se lo emplea en conexión con habilidades generales o específicas. Por ejemplo:

- ¿pasaste la habilidad para resolver problemas que involucren lugares geométricos?.

- con este curso aún no he logrado pasarle la capacidad para resolver ecuaciones logarítmicas.

resultan frases carentes de sentido.

También es frecuente observar que los problemas que comentan los profesores fuera de clases, no corresponden exactamente al ámbito de su quehacer prioritario, sino más bien reflejan preocupaciones y motivaciones con claras connotaciones contenidistas. Esto se refleja en lo desafiantes que resultan para los profesores de matemática los problemas geométricos o algebraicos con que a veces los estudiantes los tratan de poner a prueba o aquellos problemas matemáticos que hemos encontrado en algún libro o que otro colega nos ha planteado. Esto no estaría mal porque saber más matemática claramente debe ser un objetivo de cada profesor de matemática. Sin embargo, el peso de esta preocupación debería dimensionarse adecuadamente. Por el contrario, problemas de educación matemática, propios de nuestro quehacer profesional, rara vez constituyen preocupaciones con altas dósis de motivación que nos lleven a analizarlo y discutirlo con nuestros colegas fuera del aula. Una posible explicación de este fenómeno la constituye el hecho de que este tipo de problemática, por su connotación social, presenta serias restricciones en su comunicación verbal y una multidimensionalidad de interrelaciones, lo que ocurre en mucho menor grado con los problemas provenientes de la matemática para los cuales existen códigos de comunicación precisos y los entes que intervienen, al no poseer características humanas, son muy manipulables, estables y los resultados de sus relaciones son previsibles con márgenes probabilísticos bastante altos.

Esta particular preocupación por los contenidos, en detrimento de las habilidades esperadas en los estudiantes como resultados del proceso de enseñanza de la matemática, resulta inapropiada y peligrosa al descuidar la esencia misma del proceso de enseñanza-aprendizaje.

EL MARCO CONCEPTUAL.

El quehacer del que aprende o enseña maremática puede interpretarse como un conjunto estrictamenmte secuenciado de quehaceres o actividades agrupados en tres categorías o clases de acciones didácticas que comprometen estrechamente al que se enseña y al que aprende. Esta especie de cadena de haceres matemáticos que desemboca en el hacer terminal, posee una secuencia y una continuidad que le otorga una naturaleza sistémica al conjunto de haceres. Ahora bien, si cada hacer que se da en el sujeto que está "haciendo matemática" en ese instante (aprendiendo o enseñando) es el reflejo de una o de un subconjunto de habilidades específicas, entonces el sistema así planteado es un conjunto de <u>habilidades matemáticas específicas, estrictamente secuenciadas en la acción</u>. Determinar las etapas de esta secuencia así como sus interrelaciones sistémicas y también sus principales componentes, permite realizar un interesante aporte al proceso del hacer matemático que constituye la esencia de lo que conocemos como el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Estas tres categorías también las podemnos encontrar en un conjunto de acciones organizadas tras la consecución de un determinado fin y que se caracterizan por preguntas o frases típicas (González, H., 1993):

1a. fase <------> ¿qué es?, ¿qué son?, ¿de qué están hechos?, ¿qué forma tienen?, ¿hay subconjuntos notables en ellas? ¿porqué ese nombre?, ¿quién fué su inventor o descubridor?

2a. fase <------> ¿cómo se relacionan?, ¿cómo se arman?, ¿qué reglas existen definidas para estos objetos?, ¿cómo se juega?, ¿qué propiedades hay que considerar? ¿porque estas propiedades y no otras? ¿qué restricciones de manipulación hay?

3a. fase <------> Usémoslo, empecemos a jugar, apliquémoslo, veamos como funcionan estas reglas y propiedades. "El movimiento se prueba andando". Practiquemos.

El hacer matemático, como tantos otros haceres, que desarrolla el ser humano, responde o sigue también estas tres etapas:

El proceso del hacer matemático comienza con un exámen reflexivo de aquellas "piezas fundamentales" que constituyen el conjunto de referencia que permitirá, posteriormente, construir los aprendizajes o haceres de las próximas dos etapas. Pero, ¿cuáles son estas "piezas fundamentales" equivalentes a los objetos básicos de nuestro símil? Claramente la respuesta a esta pregunta señala a los <u>CONCEPTOS MATEMATICOS</u> o <u>IDEAS MATEMATICAS</u>, (González, H.; 1990, 91, 92).

Todo quehacer racional se funda en el conocimiento, apropiación significativa y uso de estas especies de "partículas básicas del conocer" o "ladrillos del conocimiento", que son las ideas o conceptos.

Ellas son las que nos permiten elaborar conocimiento organizado y comunicarlo. Además, ¿qué conocimiento no se elabora o se asimila sobre otro u otros pre-existentes? (Ausubel, 1969).

La segunda categría del constructo corresponde a la enseñanza y aprendizaje de las GENERALIZACIONES MATEMATICAS . Estas generalizaciones, están construidas básicamente con conceptos matemáticos, de tal forma que su comprensión y utilización para resolver lo planteado en las pruebas, tiene como condición necesaria, el aprendizaje significativo de esos conceptos. No obstante, la realidad muestra que muchos estudiantes pueden aplicar estas generalizaciones y resolver problemas, sin que necesariamente hayan logrado un aprendizaje significativo de los conceptos involucrados. Esto último es lo corresponde a las actuaciones descritas como "actuaciones mecánicas" que claramente involucran un quehacer matemático de bajo nivel taxonómico, pobre, poco relevante, intrascendente, poco formativo, con escasa o nula de necesidad de decisión y que constituye un engaño tanto para el que aprende como para el que enseña.

La tercera categoría de las acciones didácticas corresponde a la APLICACION DE LAS GENERALIZACIONES MATEMATICAS en la solución de situaciones problemáticas concretas. Las categorías de quehaceres asociados a esta etapa del quehacer matemático parecen ser las más consideradas en los procesos de enseñanza, tal vez porque se asume que su naturaleza terminal involucra o contiene a los quehaceres de las dos etapas anteriores. Al revisar las pruebas nacionales y las que aplican los profesores en sus aulas se observa que la mayoría de las ítemes o preguntas van encaminados a gatillar o provocar quehaceres matemáticos de esta tercera etapa que los profesores de matemática utilizan para inferir la calidad del proceso de aprendizaje de la matemática.

Si fijamos la atención en las **generalizaciones matemáticas** que constituyen los elementos básicos de la segunda etapa del constructo propuesto (teoremas, corolarios, axiomas, criterios, fórmulas, algoritmos, propiedades, etc.) observamos que se trata de "objetos matemáticos" construídos con conceptos, que poseen variables y conjuntos dominios para cada una de estas variables y a las cuales es posible asociarles un determinado valor de verdad. Esto último indica que se trata , en esencia, de proposiciones lógicas cuyo valor de verdad es susceptible de probar deductivamente.

Resumiendo, las generalizaciones matemáticas son "objetos" matemáticos que se caracterizan por:

- a) Estar construidas utilizando conceptos matemáticos como componentes básicos.

- b) En su estructura se consideran una o más variables.

- c) Cada una de las variables involucradas posee un conjunto dominio determinado. Luego, a cada generalización matemática es posible asociarle tantos conjuntos dominios como variables ella considera.

- d) Poseen el cuantificador universal que aparece explícita o implícitamente en el cuerpo de su enunciado.

- e) Es posible asociarles un valor de verdad V ó F que las convierte en proposiciones lógicas. El resultado de esta asociación es posible probarlo deductivamente y constituye uno de los quehaceres más privilegiados por los especialistas matemáticos porque ello requiere la aplicación exitosa del método deductivo que es parte de la esencia de esta ciencia.

- f) Cada generalización matemática posee dos conjuntos de capacidades asociadas a ella: las de tipo A y que corresponden a aquellas capacidades "de entrada" necesarias para poder aplicar la generalización, y las de tipo B que corresponden a aquellas "nuevas" capacidades que adquiere la persona que es capaz de usar adecuadamente la generalización.

En efecto, un buen símil para una generalización matemática es el de una herramienta al alcance de una persona determinada: para usar adecuadamente una herramienta se **requiere** disponer de ciertas condiciones o requerimientos mínimos en términos de capacidades y de infraestructura (red eléctrica si la herramienta es eléctrica, banco de trabajo, etc.). Estas serían análogas a las capacidades de entrada de Tipo A ya mencionadas.

Una vez que las condiciones mínimas para "operar" la herramienta se han satisfecho, el que la persona disponga de dicha herramienta, la deja en condiciones de realizar **quehaceres que antes no era capaz de llevar a cabo** con la eficiencia y calidad que ahora sí puede imprimirle a su acción. Estas últimas son las capacidades análogas a las de Tipo B mencionadas anteriormente.

Esta connotación que pueden tener las generalizaciones matemáticas en términos de "herramientas" para el quehacer matemático es importante desde el punto de vista didáctico porque permite interpretar el aprenizaje matemático como un conjunto de ciclos iterados y de riqueza y complejidad crecientes donde cada uno de estos ciclos está compuesto de la secuencia estricta: conceptos-generalizaciones-aplicaciones de las generalizaciones a situaciones concretas.

Observaciones de aula en la Enseñanza Media, dejan en evidencia que los estudiantes sólo logran interpretar las generalizaciones matemáticas como fórmulas o esquemas rígidos de operación, con validez universal (no logran reconocer los dominios donde están definidas sus variables), de naturaleza exclusivamente geométrica (como si no existieran las generalizaciones algebraicas o de otra área dentro de la matemática) y exclusivamente con valores de verdad verdadero asociado a ellas. Esta última connotación errada, por razones no del todo estudiadas hasta el momento, aparece como contradictoria con el hecho concreto detectado con cierta frecuencia, donde los estudiantes usan y aplican generalizaciones falsas que ningún profesor les ha enseñado. Es frecuente en los primeros niveles universitarios chilenos encontrar muchos alumnos que usan la generalización:

$$k[f(x)] = f(kx) \quad \forall\, x \in \mathrm{Dom}\, f$$

con $f(x) = \mathrm{Ln}\, x$ por ejemplo. De esta manera transforman expresiones como $2\mathrm{Ln}\,(\frac{1}{2}x)$ en $\mathrm{Ln}(x)$. Lo mismo ocurre si $f(x)$ es una función trigonométrica. En la Enseñanza Media también se ha detectado casos análogos, con otras generalizaciones.

Además, tanto profesores como estudiantes establecen acuerdos implícitos relacionados con la prueba del valor de verdad de las generalizaciones matemáticas. En efecto, en muchas aulas chilenas se observa que los profesores no involucran a sus estudiantes en procesos demostrativos deductivos aduciendo que "los estudiantes no se encuentran en condiciones de desarrollo psico-biológico adecuado para tareas de tal envergadura". Por su parte los estudiantes, al percibir que en las pruebas no hay preguntas relacionadas con este tipo de proceso, tampoco hacen esfuerzos para desarrollar sus capacidades deductivas limitándose a copiar en sus cuadernos las demostraciones hechas por su profesor sin ninguna cuota de trabajo intelectual agregado. Esto último tiende a reforzar la conducta o decisión del profesor y se produce un ciclo con realimentación propia y muy fuerte. Es así como este ciclo auto generado y auto sostenido se constituye en otro aporte al currículum oculto.

Por otra parte, en virtud de una segunda dimensión, toda generalización puede concebirse como **(ii) una plantilla para probar calces** que permite verificar, para una situación dada, si en ella ocurren o no las condiciones requeridas por la generalización. Esto constituye generalmente un conocimiento importante sobre la situación y que didácticamente permite al estudiante hacer un uso no tradicional de la generalización. Se ha detectado en las aulas chilenas de Enseñanza Media que los estudiantes no logran usar los teoremas de Euclides, por ejemplo, como plantillas para concluir si un triángulo es no rectángulo.

Asociada a cada generalización matemática existe un conjunto importante de capacidades o quehaceres propios, algunas de las cuales se exhiben a continuación:

De tipo expositivas:

1) Reconocer una generalización de entre otros entes matemáticos.
2) Determinar los conceptos involucrados en una generalización matemática.
3) Distinguir las variables involucradas en una determinada generalización matemática.
4) Explicitar los conjuntos dominios de cada una de las variables involucradas en una generalización matemática.
5) Analizar las condiciones requeridas para que una determinada

generalización matemática pueda operar.

6) Reconocer las capacidades requeridas para usar una determinada generalización matemática.
7) Reconocer cuáles son las nuevas capacidades adquiridas al aprender significativamente un determinada generalización matemática.
8) Capacidad para instanciar adecuadamente una determinada generalización matemática.
9) Reconocer que de generalizaciones verdaderas sólo pueden inferirse instancias verdaderas.
10) Reconocer que de generalizaciones falsas pueden inferirse instancias tanto falsas como verdaderas.
11) Usar las instancias como mapas de acción o como plantillas de calce.
12) Desarrollar justificaciones de generalizaciones matemáticas utilizando:
    - instancias familiares
    - el prestigio de profesores y científicos
    - el reconocimiento de la imposibilidad de encontrar contra-instancias (el caso de las conjeturas matemáticas).
    - usando contra-instancias.
    - usando argumentos deductivos válidos.
13) Reconocer una determinada generalización de entre un conjunto de ellas.
14) Reparar una determinada generalización matemática.
15) Completar procesos de demostración deductiva.
16) Justificar las inferencias de un proceso de demostración deductivo.
17) Dado un problema específico de aplicación y un conjunto de generalizaciones matemáticas, determinar cuál o cuáles de ella(s) son pertinentes al problema.

etc.

<u>De tipo por descubrimiento guiado inductivo</u>:

1) Operar correctamente con transformaciones sobre objetos gatilladores del descubrimiento (mediciones y/o operaciones matemáticas básicas).
2) Descubrir patrones a partir de la observación de casos específicos.
3) Instanciar generalizaciones matemáticas descubiertas usando los casos específicos dados u otros inventados.
4) Hipotetizar a partir de la observación de casos específicos.

<u>De tipo por descubrimiento guiado deductivo</u>:

5) Recordar las generalizaciones de partida asociadas a otra generalización por descubrir.
6) Establecer las relaciones esperadas entre generalizaciones de partida y la buscada o por descubrir.
7) Reconstruir el proceso de demostración por argumento válido a partir de una generalización descubierta deductivamente
8) Utilizar provechosamente las pistas dadas por el profesor.
9) Realizar exitosamente las tareas entregadas por el profesor (a los estudiantes que descubren rápidamente la generalización).

Al observar las categorías de capacidades o quehaceres recién señalados, se observa que una de ellas corresponde al **descubrimiento guíado inductivo**. Si bien es cierto que anteriormente se relacionaron los procesos deductivos como propios del quehacer matemático, didácticamente también tienen alta importancia los procesos inductivos, especialmente porque ellos requieren capacidades de observación y búsqueda de regularidades o patrones que la experiencia muestra les es más fácil de lograr a aquellos estudiantes que se están iniciando en el descubrimiento guíado.

El descubrimiento guíado inductivo requiere por parte del profesor:

a) Seleccionar un conjunto de instancias de la generalización a descubrir, que sean familiares para el estudiante y representativas de los dominios de las variables asociadas.

b) Diseñar y producir la forma cómo las instancias seleccionadas serán presentadas a los estudiantes. El nivel de desarrollo que ellas presentarán, las instrucciones, los objetivos, y el general, la diagramación del material que recibirá el estudiante.

c) Las aplicaciones para los estudiantes de descubrimiento rápido y las pistas para los de descubrimiento lento.

d) La aseveración de la generalización al término de la sesión de descubrimiento.

e) El monitoreo y conducción de la sesión.

Precisamente, en el contexto del descubrimiento guiado inductivo, el uso de recursos de aprendizaje que la modernidad pone en nuestro alcance, cobran una alta relevancia. Y este contexto es el que sustenta la experiencia que se muestra a continuación.

LA EXPERIENCIA.

Considerando que las calculadoras gráficas poseen muy importantes características al servicio de los procesos inductivos algunas de las cuales son:

- Permite un feedback inmediato y personalizado.
- Fácil de transportar
- No depende de una fuente de energía externa
- Facilita la exploración numérica
- Permite el testeo numérico y de expresiones lógicas en forma inmediata.
- Posee claros y bien definidos mesones de trabajo: cálculos, gráficos, estadística, programación, etc.
- Es un instrumento ideal para promover el descubrimiento inductivo de generalizaciones matemáticas.
- Permite la detección de expresiones tautológicas.
- Facilita la instanciación de generalizaciones algebraicas y geométricas.
- Permite realizar aproximaciones intuitivas a conceptos matemáticos variados.
- Facilita la modificación de roles en el que aprende y en el que enseña.
- Permite la instanciación de generalizaciones matemáticas (teoremas, propiedades) con datos reales, usando interfases para recibir información proveniente de sensores acústicos, químicos, ópticos, etc.
- No atenta contra la auto-estima del usuario: su feedback, junto con ser inmediato, es personal y silencioso.
- Obliga a modificar el rol de la evaluación.
- Permite y facilita la comparación de procesos.
- Comparándola con el computador, puede señalarse 3 criterios favorables:

a) su relación costo-beneficio (1 es a 10) ;
b) el no requerir de software
c) su transportabilidad.

se diseñó un conjunto de tres Sesiones de descubrimiento guiado inductivo haciendo uso de calculadoras gráficas Texas TI 82 para estudiantes de primer nivel de matemática de la Facultad de Ciencia de la Universidad de Santiago de Chile. Las hipótesis que se pusieron a prubea fueron:

H1: El estudiante universitario puede interactuar progresiva y exitosamente con calculadoras gráficas sin requerir de sesiones especiales que lo pongan en situación de manipular dichas máquinas.

H2: Con estas máquinas, es posible diseñar sesiones de descubrimiento guiado inductivo para, practicamente cualquier generalización matemática considerada en los programas de matemáticas superiores iniciales.

H3: La reacción de los estudiantes al uso de este medio instruccional evidenciará niveles favorables de motivación.

Para poner a prueba estas hipótesis se seleccionaron tres sesiones distintas de entre las planificadas para el curso de Matemática Básica de la Carrera Licenciatura en Educación Matemática y Computación de la Facultad de Ciencia y que forma profesores de Estado en Matemática y Computación y Licenciados en Educación Matemática y Computación.

Las tres sesiones seleccionadas aleatoriamente y sin criterios predeterminados contemplaron los siguientes contenidos asociados:

Sesión 1: La función logaritmo; dominio y recorrido; su relación con la función exponencial; comparación de las gráficas de ambos tipos de funciones; composición de ambos tipos de funciones; logaritmo de un producto y de un cuociente; logaritmo de una potencia; logaritmo de una raiz.

Sesión 2: El seno de la suma de dos ángulos; el seno de la diferencia de dos ángulos; el coseno de la suma de dos ángulos; el coseno de la diferencia de dos ángulos; la tangente de la suma y la diferencia de dos ángulos.

Sesión 3: El coseno del ángulo doble; influencia del factor k real en la gráfica de y= ksen x cuando k adopta valores enteros 2, 3,4, etc.; lo mismo para la función y = kcos x; amortiguamiento y puntos de amortiguamiento para funciones la forma y = xsen x o de la forma y = (1/x)sen x ó de la forma y = e^{-x}sen 3x y otras análogas; estudio del comportamiento de f(x) y de su gráfica cuando x se acerca o tiende a ciertos valores del dominio (intuición para la idea de límite).

Para cada una de estas tres sesiones se diseñó y confeccionó un folleto llamado TALLER CON CALCULADORA N°1, 2 Y 3 QUE RECIBIÓ CADA ESTUDIANTE JUNTO A UN EJEMPLAR DE CALCULADORA GRÁFICA Texas TI-82 (en la sección anexos se exhibe cada uno de estos 3 folletos).

Durante las sesiones, algunas de las cuales fueron filmadas en parte, el investigador y una persona ayudante del equipo estuvieron respondiendo las escasas preguntas que el grupo formuló, lo que muestra que el material recibido poseía un grado aceptable de información y auto-referencia.

LOS RESULTADOS.

En el Taller N° 1 pretendió poner a prueba la posibilidad de generar descubrimiento guiado inductivo utilizando como medio principal el uso de las Calculadoras Texas TI-82. La carrera seleccionada, como ya se adelantó, forma Licenciados en Matemática y Computación otorgando, después de dos cursos semestrales de Práctica Docente, el título de Profesor de Estado en Matemática y Computación. Este título profesional los habilita para dar clases de matemática y computación, principalmente en establecimientos de Enseñanza Media del país.

El Taller estaba conformado por un conjunto de actividades presentadas en 11 hojas tamaño carta, incluyendo la portada, la que recogía los datos del estudiante, presentaba los objetivos y daba las instrucciones básicas para el uso de las máquinas.Las actividades del Taller fueron organizadas en 10 experimentos, de los cuales 5 de ellos requerían que el estudiante emitiera una hipótesis como resultado de un proceso inductivo llevado a cabo.

El primer Taller fue insertado en una sesión de 90 minutos, justo después de otra sesión tradicional donde el profesor discutió con ellos:

- la función exponencial, Dominio y Recorrido
- gráfica de la función
- la base e y como aproximar dicho número
- resolución de ecuaciones exponenciales

Para la sesión de Taller los estudiantes fueron avisados que desarrollarían un trabajo con máquinas calculadoras y que éste reemplazaría al habitual control escrito semanal que se les aplicaba y que por lo tanto sería también evaluado de igual forma (con calificaciones entre 1 y 7). Asistieron a la experiencia 27 (82%) estudiantes de los 33 inscritos oficialmente.

La primera actividad del Experimento 1 corresponde al chequeo de la situación de entrada de los estudiantes.

La siguiente tabla describe cada uno de los experimentos y exhibe los resultados descriptivos de ellos:

TABLA N° 1: Descripción de los experimentos propuestos y porcentaje de respuestas que evidencian el logro de las diferentes actividades de aprendizaje involucradas en el Taller N° 1.

N°	EXPERIMENTO Actividad de Aprendizaje involucrada	% de Respuestas exitosas
1	Graficar la función exponencial de base 2 e interpretar el Dom. y el Rec. a partir de la gráfica (Chequeo de la situación de entrada).	85.19
	Graficar la función inversa de la exponencial de base 2 e interpretar el Dom. y Rec. a partir de la gráfica.	74.07
2	Graficar la función exponencial de base 1.5 e interpretar el Dom. y el Rec. a partir de la gráfica.	74.07

	Graficar la función inversa de la exponencial de base 1.5 e interpretar el Dom y Rec. a partir de la gráfica.	66.67
3	Graficar la función exponencial de base 0.7 e interpretar su Dom. y Rec. a partir de la gráfica.	77.78
	Graficar la función inversa de la exponencial de base 0.7 e interpretar su Dom. y Rec. a partir de la gráfica.	74.07
	Emitir una hipótesis sobre los Dom. y Rec. de las funciones exponencial y sus correspondientes inversas.	55.56
4	Graficar las funciones exponencial de base e y Ln x. Luego comparar sus gráficas y determinar el Dom. y Rec. de ellas	74.07
5	Graficar las funciones: exponencial de base 10, log. de base 10 y la función identidad y=x y luego comparar sus gráficas y enunciar una hipótesis sobre sus Dom. y Rec.	37.03
	Determinar Dom. y Rec. de la ffunc. exp. de base e	70.37
	Determinar Dom y Rec de y=ln x	74.07
	Determinar de la func. expo. de base 10	77.78
	Determinar Dom y Rec de la función y=log x	70.37
6	Determinar 10 elevado a 3 y log en base 10 de 1000	92.59
	Determinar 10 elevado a 1.8 con log en base 10 de lo que resultó al calcular 10 elevado a 1.8	88.89
7	Comparar e elevado a 2.18 con Ln 2.18	92.59
	Emitir una hipótesis a partir de los resultados obtenidos en estos dos últimos experimentos.	29.63
	Determinar el Log en base 10 de una potencia de 10 con exponente irracional. Igual para una potencia de e elevado al Ln de una expresión irracional. (sin usar la máquina)	44.44
8	Determinar los log en base 10 de 2, 5 y 10.	100.00
	Descubrir una relación entre estos resultados	59.26
	Determinar Ln de 3, 4 y 12.	100.00
	Descubrir una relación entre estos resultados	59.26
	Emitir una hipótesis a la luz de estos resultados.	55.56
9	Determinar el log en base 10 de 6, 3 y 2	100.00
	Descubrir una relación entre estos resultados	55.56
	Determinar Ln de 15, 3 y 5.	96.29
	Descubrir una relación entre estos resultados.	59.26

	Emitir una hipótesis a la luz de estos resultados.	59.26
10	Proponer una expresión para el log. en base 10 y en base e de una potencia de exponente natural.	29.63
	Verificar con el test lógico de la máquina dicha expresión	37.03
	Usando la hipótesis propuesta determinar, sin usar la máquina, el log en base 10 y en base e de la raíz enésima de x.	18.52

Se observa que el nivel más alto de logro corresponde al uso de la máquina para calcular logarítmos de números dados, tanto en base 10 como en base e. Por otra parte, los más bajos porcentajes de logro corresponden a las actividades donde había que emitir alguna hipótesis.

Cabe hacer notar que estos estudiantes no conocían la máquina y, naturalmente no tenían ningún tipo de entrenamiento previo en ella. Durante la aplicación de este primer Taller y durante los primeros 15 minutos hubo varias preguntas sobre el manejo de la máquina y sus resultados. Luego las preguntas menguaron bastante y esporádicamente hubo estudiantes que muchas veces preguntaron sobre cómo escribir en las hojas. El grado de concentración de todos los asistentes fué muy alto y se mantuvieron durante toda la sesión trabajando con la máquina y sobre sus hojas.

El tiempo de que dispusieron fué muy adecuado. Faltando 15 minutos antes de terminar la sesión varios comenzaron a devolver voluntariamente sus hojas y la máquina.

Las siguientes Tablas exhiben los resultados obtenidos con la aplicación de los dos siguientes Talleres. El % de logro corresponde a quehaceres matemáticos realizados en forma absolutamente correcta por los estudiantes:

Tabla N° 2. Descripción de los experimentos propuestos en el segundo taller y los resultados obtenidos en su aplicación.

Exp.	Tarea involucrada	% de logro
1	Calcular sen 60, sen 138, sen 60 + sen 138 y sen (60+138)	68
	Obtención de una conclusión	64
2	Testear el valor de verdad de sen(60+138)= sen 60 + sen 138	76
	Expresar que es F el enunciado sobre sen de una suma	44
3	Calcular sen y cos de 60, 11, 138 y 73	92
	Determinar generalización 1	84
4	Testear las fórmulas sen(60+11)=sen 60 cos 11 + sen 11 cos 60	64
	Interpretar el resultado de un test	32
	Modificar e interpretar una expresión	48
	Obtener generalización 2	56
	Obtener generalización 3	52

5	Calcular cos y sen de 60, 11, 138 y 73	76
	Determinar generalización 4	68
	Testear fórmula	32
	Interpretar resultados	36
6	Determinar generalización 6	28
	Testear fórmula	12
	Concluir resultados	16
7	Determinación generalización 7	04
	Determinación generalización 8	04

Tabla N° 3. Descripción de los experimentos propuestos en el tercer taller y los resultados obtenidos en su aplicación.

Exp.	Tarea involucrada	% de logro
1	Determinación de máx. para $y=\text{sen } x - \cos 2x$	82
	Determinación de x donde f(x) es máx.	18
	Completación de tabla	25
	Determinación de unidad sobre eje x	09
	Interpretar el valor de sen $(-3\pi/2 - \cos(-3\pi)$	41
2	Determinación de máx. y mín.	41
	Graficar $y=\text{sen } x$, $y=\cos x$ e $y=\text{sen } x + \cos x$	36
3	Interpretación de la intersección y de los conceptos de amplitud y frecuencia	00
	Idem anterior, pero ahora para $y=\text{sen } x$, $y=\text{sen } 2x$, $y=\text{sen } 3x$	00
5	Completar inecuación	27
	Interpretar lim 1/x sen x cuando x crece indefinidamente	32
6	Determinación del punto de amortiguamiento para $f(x)=e^{-x}$ sen 3x	50
7	Respuestas sobre tendencias, inecuación y verificación de punto de intersección	05
8	Interpretación visual de 4 límites.	05

Se observa que los logros en general, tienden a disminuir a medida que se avanza con los talleres 2 y 3 en tópicos matemáticos más complejos y que requieren mayor capacidad de reflexión y análisis.Conductas relacionadas con interpretación a partir del análisis de gráficas de funciones no son logradas por nadie del grupo experimental en el tercer taller.

Pese a la disminución general que experimentaron las tasas de logros en los últimod talleres, el grado de concentración que se logra en la actividad con calculadoras se mantiene igual de alto y la disposición de los estudiantes para trabajar con este medio de la modernidad es muy favorable.

Finalmente se puede afirmar que las tres principales hipótesis exploratorias planteadas se cumplen, lo que muestra que la posibilidad de lograr descubrimiento guiado inductivo con las calculadoras gráficas en tópicos matemáticos relacionados con trigonometria y funciones, es una realidad. De la misma manera queda en evidencia en esta exploración de conceptos tan importantes como es el caso de LIMITE de una función de una variable real pueden ser muy bien aproximados de manera intuitiva, gracias a la manipulación de calculadoras gráficas.

BIBLIOGRAFIA.

ALVAREZ, F., Marianela; CAMPOS A., Olga; HERNANDEZ M., Fabiola; "Opiniones de profesores de matemática de enseñanza media y de enseñanza superior sobre conceptos matemáticos". Trabajo para optar al grado de Licenciado en Educación Matemática y Computación. USACH, 1991.

AUSUBEL, David y ROBINSON, Floyd
"School Learning. An Introduction to Educational Psychology"
Holt Rine Hart and Winston, USA, 1969

GONZALEZ GUAJARDO, Hernán.
"Estudio Comparativo de Conceptos Matemáticos basado en Opiniones de Profesores de E. Media y E. Superior"
VII Jornada Nac. de Educación Matemática. Valdivia, 1991.

GONZALEZ GUAJARDO, Hernán.
"Diagramas de flujo como una herramienta para enseñar conceptos matemáticos"
Congreso de Profesores Metodológos. Universidad de Playa Ancha de Ciencias de la Educación. Valparaíso, Mayo de 1992.

GONZALEZ Guajardo, Hernán
"Algunas consideraciones sobre la enseñanza de los conceptos Matemáticos"
Revista de Ciencia y Educación de la EFPEM
Universidad de San Carlos de Guatemala. Vol. 4.2. Guatemala, Agosto de 1990.

GONZALEZ Guajardo, Hernán
Sobre la enseñanza de los conceptos matemáticos"
Revista de Educación N° 175, Ministerio de Educación; 27-32. Chile, 1990.

GONZALEZ Guajardo, Hernán y otros
"Un estudio descriptivo sobre conceptos matemáticos en profesores de Enseñanza Media y Enseñanza Superior"
XI Encuentro Nacional de Investigadores en Educación.
Septiembre de 1991, Lo Barnechea, Chile.

GONZALEZ Guajardo, Hernán
"Un criterio para clasificar habilidades matemáticas"
Revista EDUCACION MATEMATICA
Vol. 5, N°1, Abril 1993, México.

GONZALEZ Lasseube, Enrique; VILLARROEL Valenzuela, Francisco; GONZALEZ Guajardo, Hernán
"Estudio Descriptivo acerca de la Enseñanza de Conceptos Matemáticos en la Enseñanza Media".
VII Jornada Nacional de Educación Matemática, Valdivia, 1991, Chile

o O o

ANEXOS

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPTO. DE MATEMATICA Y C. DE LA COMP.

Carrera : 4500 L.E.M. y C
Asignatura : Matemática
Código : 1832 A-01
Profesor : Sr. H. González
Ayudante : Srta. Andrea G.
Diseño Taller: Sra. I. Torres.
Periodo : 1er. semestre 1996

TALLER CON CALCULADORAS N°1

Estudiante:

Calculadora N°: **Fecha:**

Propósito:

Este taller es una actividad que pretende apoyar tu aprendizaje matemático mediante el uso de calculadoras gráficas. Consta de actividades llamadas experimentos sobre funciones trigonométricas para suma y diferencia de ángulos.

Instrucciones:

1) Completa la información que se solicita en esta página. El N° de la calculadora que recibiste lo encontrarás en el reverso de ella, y consta de 8 dígitos.

2) A continuación da vuelta la página y comienza a trabajar, siguiendo las instrucciones que allí aparecen y completa los recuadros.

3) El trabajo es individual.

4) Terminada la sesión debes entregar la calculadora y este folleto. Tu desempeño será evaluado de acuerdo a las respuestas que hayas hecho. Dispones de los 90 minutos de la sesión.

Instrucciones de uso de la calculadora:

1) Para encender la calculadora pulsa **ON**. Para apagarla pulsa **2nd** **OFF**.
2) Para variar contraste pulsa **2nd** **▲** (para aumentarlo) o **2nd** **▼** (para disminuirlo).
3) Para limpiar la pantalla principal, pulsa **CLEAR**.

AHORA DA VUELTA LA PAGINA Y COMIENZA A TRABAJAR

EXPERIMENTO N°1:

Usando la calculadora, grafica la función exponencial $y=2^x$. Para ello, usa el siguiente procedimiento:

- Pulsa $\boxed{\text{Y=}}$. En Y_1= escribe 2 $\boxed{\wedge}$ $\boxed{\text{X,T,}\theta}$
- Si hubiera otra función, bórrala pulsando $\boxed{\text{CLEAR}}$.
- Pulsa $\boxed{\text{GRAPH}}$ para visualizar el gráfico de $y=2^x$.

En la pantalla principal aparecerá:

$Y_1=2^x$
$Y_2=$
$Y_3=$
$Y_4=$
$Y_5=$
$Y_6=$
$Y_7=$
$Y_8=$

¿Cuál es el dominio y recorrido de $y=2^x$?

Dom 2^x = $\boxed{\quad\quad}$ Rec 2^x = $\boxed{\quad\quad}$

Usando la calculadora, grafica la función inversa de $y=2^x$. Para ello, usa el siguiente procedimiento:

- Pulsa $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{PRGM}}$, para desplegar el menú DRAW.

-Desplázate con la tecla $\boxed{\blacktriangledown}$, para seleccionar la opción 8 **DrawInv**. Pulsa $\boxed{\text{ENTER}}$.

- Pulsa $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{VARS}}$ 1 (para seleccionar Function) 1 (para seleccionar Y_1).

- Pulsa $\boxed{\text{ENTER}}$. En la pantalla aparecerá: DrawInv Y_1

¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función inversa de $y=2^x$?

Dom Inversa de 2^x= [ ] Rec Inversa de 2^x= [ ]

EXPERIMENTO N°2:

Usando la calculadora, grafica la función exponencial $y=1.5^x$. Para ello, usa el siguiente procedimiento:

- Pulsa **Y=**. Borra la función definida en Y_1=

-Repite el Experimento N° 1.

Ahora que tienes a la vista las gráficas de $y=1.5^x$ y de su inversa, ¿cuál es el dominio y el recorrido de $y=1.5^x$?

Dom 1.5^x= [ ] Rec 1.5^x= [ ]

¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función inversa de $y=1.5^x$?

Dom Inversa de 1.5^x= [ ] Rec Inversa de 1.5^x= [ ]

EXPERIMENTO N°3

Usando la calculadora, grafica la función exponencial $y=0.7^x$. Para ello, usa el siguiente procedimiento:

- Pulsa **Y=**. Borra la función definida en Y_1=

- Repite el Experimento N° 1.

¿Cuál es el dominio y el recorrido de $y=0.7^x$?

Dom $0.7^x=$ Rec $0.7^x=$

¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función inversa de $y=0.7^x$?

Dom Inversa de $0.7^x=$ Rec Inversa de $0.7^x=$

Escribe una hipótesis que relacione los dominios y recorridos de la función exponencial con su inversa:

EXPERIMENTO N°4:

Ahora, grafica la función exponencial $y=e^x$ y la función $y=\ln x$. Para ello, usa el siguiente procedimiento:

- Pulsa **Y=**. Borra la función definida en $Y_1=$. Escribe la función $y=e^x$ en Y_1, usa las teclas **2nd** **LN** **X,T,θ**. Pulsa **ENTER**.

- En Y_2 define la función y=lnx., usa las teclas [LN] [X,T,θ].

- Pulsa [GRAPH] para visualizar el gráfico de las funciones $y=e^x$ y y=lnx.

¿Qué observas comparando este resultado con los obtenidos en las Experiencias 1, 2 y 3?

¿Cuál es el dominio y recorrido de $y=e^x$?

Dom e^x =

Rec e^x =

¿Cuál es el dominio y recorrido de y=lnx?

Dom lnx=

Rec lnx=

EXPERIMENTO N°5:

Usando la calculadora, grafica la función exponencial $y=10^x$ y su función inversa. Para ello, usa el siguiente procedimiento:

- Borra las funciones definidas en Y_1 e Y_2, y escribe $Y_1=10^x$ e $Y_2=\log x$.

- Define $Y_3=x$.

- Pulsa **GRAPH** para visualizar las gráficas.

A la luz de estas experiencias formaliza una proposición respecto de las gráficas de las funciones e^x y $\ln x$, 10^x y $\log x$, y la recta $y=x$.

Proposición:

¿Cuál es el dominio y recorrido de $y=e^x$?

Dom e^x = ______ Rec e^x = ______

¿Cuál es el dominio y recorrido de $y=\ln x$?

Dom $\ln x$ = ______ Rec $\ln x$ = ______

¿Cuál es el dominio y recorrido de $y=10^x$?

Dom 10^x = ______ Rec 10^x = ______

¿Cuál es el dominio y recorrido de $y=\log x$?

Dom $\log x$ = ______ Rec $\log x$ = ______

EXPERIMENTO N° 6:

-Vuelve a la pantalla principal pulsando las teclas **2nd** **MODE**.

- Escribe 10 **^** 3 **ENTER**, en la pantalla aparecerá 1000.

- Escribe log 1000 y luego pulsa ENTER

¿Qué aparece ahora en tu pantalla?

- Borra con **CLEAR** y repite el experimento con 10 **^** 1.8 **ENTER**, ¿qué aparece en pantalla?

Completa:

$10^{1.8}=$ $\boxed{}$

log $\boxed{}$ = $\boxed{}$

EXPERIMENTO N° 7:

- Borra con $\boxed{\textbf{CLEAR}}$ y repite el Experimento N°6 para $e^{2.18}$, usa las teclas $\boxed{\textbf{2nd}}$ $\boxed{\textbf{LN}}$.

¿qué aparece en pantalla? Completa:

$$e^{2.18} = \boxed{}$$

$$\ln \boxed{} = \boxed{}$$

¿Qué hipótesis puedes enunciar a partir de estos dos últimos experimentos?

Hipótesis:

De acuerdo a la hipótesis anterior y <u>sin</u> usar calculadora, completa:

$$\log(10^{\sqrt[3]{2}}) = \boxed{}$$

$$e^{\ln(\sqrt[4]{5})} = \boxed{}$$

EXPERIMENTO N°8:

Usando la calculadora, calcula:

a) $\log 2 =$ ☐

$\log 5 =$ ☐

$\log 10 =$ ☐

Busca una relación aritmética entre las dos primeras expresiones y la tercera:

☐

b) $\ln 3 =$ ☐

$\ln 4 =$ ☐

$\ln 12 =$ ☐

Busca la misma relación de a):

☐

¿Qué hipótesis se puede adelentar al observar estos resultados?

Hipótesis:

EXPERIMENTO N°9:

Usando la calculadora, calcula:

a) $\log 6 =$ $\boxed{}$

$\log 3 =$ $\boxed{}$

$\log 2 =$ $\boxed{}$

Busca una relación aritmética entre las dos primeras expresiones y la tercera:

$\boxed{}$

b) $\ln 15 =$ $\boxed{}$

$\ln 3 =$ $\boxed{}$

$\ln 5 =$ $\boxed{}$

Busca la misma relación de a).

$\boxed{}$

¿Qué hipótesis se puede adelantar al observar estos resultados?

Hipótesis:

EXPERIMENTO N° 10:

Considerando que $a^n = a\ a \ldots$ (n veces), y el resultado del experimento N°8.

¿Cuál sería una expresión equivalente para:

$\log x^n =$ $\boxed{}$

$\ln x^n =$ $\boxed{}$?

Verifica si es verdadera o falsa la igualdad que propones . Para ello, usa el siguiente procedimiento:

- En la pantalla principal escribe $\log X^n$, usa las teclas

  LOG **X,T,θ** **^** **ALPHA** N LOG X

- Ahora pulsa: **2nd** **MATH** **1**. Esto hace que a continuación de $\log X^n$ aparezca el signo igual. Luego escribe la expresión que obtuviste en el primer recuadro anterior, pulsa **ENTER**. La calculadora verificará la validez de tu igualdad. La máquina responderá 1 si tu relación es verdadera, 0 si es falsa.

Escribe el resultado completo que aparece en la pantalla: $\boxed{}$

Finalmente, sabiendo que : $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$

¿qué se esperaría para:

$\log \sqrt[n]{x} =$ $\boxed{}$

$\ln \sqrt[n]{x} =$ $\boxed{}$?

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPTO. DE MATEMATICA Y C. DE LA COMP.

Carerra	: 4500 L.E.M. y C
Asignatura	: Matemática
Código	: 1832 A-01
Profesor	: Sr. H. González
Ayudante	: Srta. Andrea G.
Diseño Taller	: Sra. I. Torres
Período	: 1er. semestre 1996

TALLER CON CALCULADORAS N° 2

Estudiante:

Calculadora N°: **Fecha:**

Propósito:

Este taller es una actividad que pretende que descubras inductivamente importantes generalizacines trigonométricas relacionadas con el ángulo suma, el ángulo diferencia y el ángulo doble, mediante el uso de la calculadora gráfica.

Instrucciones:

1) Completa la información que se solicita en esta página. El N° de la calculadora que recibiste lo encontrarás en el reverso de ella, y consta de 8 dígitos.

2) A continuación da vuelta la página y comienza a trabajar, siguiendo las instrucciones que allí aparecen y completa los recuadros.

3) El trabajo es individual.

4) Terminada la sesión debes entregar la calculadora y este folleto. Tu desempeño será evaluado de acuerdo a las respuestas que hayas hecho. Dispones de los 90 minutos de la sesión.

Instrucciones de uso de la calculadora:

1) Para encender la calculadora pulsa **ON**. Para apagarla pulsa **2nd** **OFF**.
2) Para variar contraste pulsa **2nd** **▲** (para aumentarlo) o **2nd** **▼** (para disminuirlo).
3) Para limpiar la pantalla principal, pulsa **CLEAR**.

AHORA DA VUELTA LA PAGINA Y COMIENZA A TRABAJAR

Un estudiante que conoce dos ángulos de medidas A y B desea determinar el seno de un ángulo cuya medida sea A+B. Para ésto él propone que:

$$\text{sen}(A+B) = \text{sen}A + \text{sen}B,\ \forall\ A,B \in \mathbb{R}.$$

EXPERIMENTO N°1

Usando la calculadora, completa la 3ra, 5ta y 6ta columna de la tabla:

A	B	A+B	senA	senB	senA+senB	sen(A+B)
60°	138°		0.866025404			

Recuerda que sen60° se obtiene asi :

SIN 60 2nd MTRX 1 ENTER

Al observar los resultados de estas tres columnas, ¿qué puedes decir?

De acuerdo a estos resultados preliminares de la tabla, ¿qué le puedes asegurar a ese estudiante?

EXPERIMENTO N°2

Usando la calculadora, testea el valor de verdad de la proposición anterior. Para ello, digita:

[SIN] [(] 60 [2nd] [MTRX] 1 [ENTER] [+] 138 [2nd] [MTRX] 1 [ENTER] [)] [2nd] [MATH] 1 [ENTER] [SIN] 60 [2nd] [MTRX] 1 [ENTER] [+] [SIN] 138 [2nd] [MTRX] 1 [ENTER] [ENTER]

Escribe lo que muestra la pantalla:

¿Qué puedes decir de este resultado respecto de lo que se le aseguró al estudiante al final del experimento N°1?

EXPERIMENTO N°3

Para facilitar el trabajo vamos a pedirle a la máquina que aproxime los resultados a 4 cifras. Para ello, pulsa:

[MODE] [▼] [▶] (hasta posicionarse sobre el 4 de la línea FLOAT) [ENTER] [2nd] [MODE].

De esta forma, ahora la calculadora entrega el valor 0,4695 para sen 28°, que es la aproximación decimal con 4 dígitos de sen 28° ≈ 0,469471563. Verifícalo.

Usando la calculadora, completa la siguiente tabla:

A	B	senA	cosB	(senA)(cosB)	cosA	senB	(cosA)(senB)	sen(A+B)
60°	11°							
138°	73°							

Al observar los resultados de las tres columnas remarcadas, ¿qué fórmula hipotética puedes plantear?

Fórmula 1: sen(A+B) =

EXPERIMENTO N°4

Aprovechemos la tecla TEST de la calculadora para verificar el valor de verdad de la fórmula recién propuesta, para ello teclea:

SIN (60 2nd MTRX 1 ENTER + 11 2nd MTRX

1 ENTER) 2nd MATH 1 ENTER SIN 60 2nd

MTRX 1 ENTER × COS 11 2nd MTRX 1 ENTER

+ COS 60 2nd MTRX 1 ENTER × SIN 11

2nd MTRX 1 ENTER ENTER

Anota lo que hay ahora en la pantalla:

¿Cómo interpretas esta pantalla?

Vuelve todo lo escrito anteriormente a modo edición, pulsando: **2nd** **ENTER**

Modifica uno de los signos + por - , presiona **ENTER** . ¿Qué ocurre?

Vuelve con **2nd** **ENTER** a modo edición, restaura el signo más (+) y cambie el 60° de cos 60° por 50°. presiona enter y ve qué ocurre.

Vuelve a modo edición y ahora cambia el valor del ángulo 60° por la variable x (tecla X,T,θ) y el ángulo 50° por cualquier otro valor en grados.

Escribe lo que aparece en pantalla:

¿Cuál es tu conclusión final después de ésto?

En la Fórmula 1 que descubriste, sustituye la medida del ángulo **B** por **-B** y usa el hecho que $\mathbf{sen(-\alpha) = -sen\,\alpha}$ y $\mathbf{cos(-\alpha) = cos\,\alpha}$. ¿Qué expresión obtienes? Escribela a continuación:

Fórmula 2: sen(A+ (-B))=sen(A-B)=

En la Fórmula 1 descubierta, sustituye B por A. Entonces:

Fórmula 3: sen (A+A)=sen2A=

EXPERIMENTO N°5

Usando la calculadora, completa la siguiente tabla:

A	B	cosA	cosB	(cosA)(cosB)	senA	senB	(senA)(senB)	cos(A+B)
60°	11°							
138°	73°							

Al observar los resultados de las tres columnas remarcadas, ¿qué fórmula hipotética puedes plantear?

Fórmula 4:

Escoje la variable x° (tecla X,T,θ 2nd MTRX 1 ENTER) para la medida del ángulo A y un valor (en grados cualquiera mayor que **10** para la medida del ángulo B. Verifica la expresión así formada usando el test de la calculadora (2nd MATH 1 ENTER).

Copia la pantalla que resulta:

¿Qué puedes concluir de ésto?

Ahora, sustituye B por A en la fórmula 4 recién descubierta. Entonces:

Fórmula 5: **cos(A+A) = cos2a =**

EXPERIMENTO N°6

Sabiendo que $sen(-\alpha) = -sen\alpha$ y $cos(-\alpha) = cos\alpha$, sustituye **cos(A+B)** por **cos (A-B)** y encuentra una nueva fórmula.

Fórmula 6:

Sustituyendo la medida del ángulo A por la medida en grados sexagesimales y la medida del ángulo B por cualquier otro valor mayor que **10**, también en grados sexagesimales, aplícale el test lógico de la calculadora y copia a continuación lo que aparece en la pantalla:

¿A qué conclusión te llevan estos resultados?

EXPERIMENTO N°7

Ahora que conoces las expresiones: sen(A+B) (Fórmula 1) y cos(A+B) (Fórmula 4) y simplificando por cosAcosB, completa:

Fórmula 7: $tg(A+B) = \dfrac{sen(A+B)}{cos(A+B)} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Repite lo mismo para **tg(A-B)**, usando las Fórmulas 2 y 6, y simplificando por cosAcosB.

Fórmula 7: $\mathbf{tg(A-B)} = \dfrac{\mathbf{sen(A-B)}}{\mathbf{cos(A-B)}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Finalmente, deseamos preguntar tu opinión sobre los aspectos más positivos y más negativos que encontraste en este taller:

A) Los más positivos:

____

____

____

____

____

____

B) Los más negativos:

____

____

____

____

____

____

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPTO. DE MATEMATICA Y C. DE LA COMP.

Carerra : 4500 L.E.M. y C
Asignatura : Matemática
Código : 1832 A-01
Profesor : Sr. H. González
Ayudante : Srta. Andrea G.
Diseño Taller: Sra. I. Torres
Período : 1er. semestre 1996

TALLER CON CALCULADORAS N° 3

Estudiante:

Calculadora N°: **Fecha:**

Propósito:

a) Estudiar el efecto de los factores n y k sobre las gráficas de nf(kx) donde f es la función sen x ó cos x.
b) Estudiar el amortiguamiento de funciones trigonométricas.
c) Determinar algunos límites de funciones trigonométricas a través de sus gráficas.

Instrucciones:

1) Completa la información que se solicita en esta página. El N° de la calculadora que recibiste lo encontrarás en el reverso de ella, y consta de 8 dígitos.

2) A continuación da vuelta la página y comienza a trabajar, siguiendo las instrucciones que allí aparecen y completa los recuadros.

3) El trabajo es individual.

4) Terminada la sesión debes entregar la calculadora y este folleto. Tu desempeño será evaluado de acuerdo a las respuestas que hayas hecho. Dispones de los 90 minutos de la sesión.

Instrucciones de uso de la calculadora:

1) Para encender la calculadora pulsa [ON]. Para apagarla pulsa [2nd] [OFF].
2) Para variar contraste pulsa [2nd] [▲] (para aumentarlo) o [2nd] [▼] (para disminuirlo).
3) Para limpiar la pantalla principal, pulsa [CLEAR] y para borrar un caracter pulsa [DEL].

AHORA DA VUELTA LA PAGINA Y COMIENZA A TRABAJAR

EXPERIMENTO N° 1

Con la tecla **Y=**, ingrese en Y_1 la función **sen x - cos 2x**; grafíquela con **GRAPH**. ¿Cuál parece ser el mayor valor que adopta esta función? Resp: y=

¿Para qué valores de x parece ocurrir ésto?

Para ver mejor estos puntos, vamos a ampliar la pantalla con **ZOOM** y la opción 4 (Zdecimal) **ENTER**.

Con sus conocimientos sobre valores de funciones trigonométricas para ángulos especiales, complete la siguiente tabla:

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
sen x		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$			**- 1**		
cos 2x	1		- 1			0		0	
sen x - cos 2x									

Compare los resultados de la última fila con la gráfica de su calculadora.

Con la tecla **ZOOM** escoja la opción 7 (**ZTrig**) y **ENTER**.

¿Qué representa ahora cada unidad sobre el eje X? Resp:

Según la gráfica, ¿cuánto parece ser $sen\ \frac{-3\pi}{2} - \cos -3\pi$? Resp:

Verifíquelo tecleando:

SIN ((-) 3 2nd ^ ÷ 2) -

COS ((-) 3 2nd ^) ENTER

Copia lo que hay ahora en la pantalla:

EXPERIMENTO N°2:

Presione Y= y cambie la diferencia de funciones por una suma. Grafique con GRAPH.

¿Cuáles son los valores máximos y mínimos de esta nueva función?

máx=	**mín=**

Agregue ahora las siguientes funciones: en Y_2= **sin x** y en Y_3=**cos 2x**. Grafique ahora las 3 funciones usando ZOOM opción **ZTrig** ENTER . Para ver mejor las gráficas use a continuación ZOOM opción **ZBox** ENTER y con ◄ y ▲ ubíquese en x=**-5.2359** y=**4**, ENTER y luego con ► y ▼ ubíquese en x=**5.1050** y=**-2.0645** ENTER. Copie ahora en el siguiente cuadro las tres gráficas, indicando a que función corresponde cada una de ellas.

EXPERIMENTO N°3:

Vuelva a [Y=], borre Y_1, Y_2 e Y_3 y en su reemplazo escriba Y_1=cos x, y en Y_2 escriba 2cos x. Grafique con [GRAPH].

Ahora en Y_3 escriba 3cos x. Grafique.

Escriba en Y_4 la función -3cos x. ¿Qué observa? en términos de: a) intersección con los ejes, b) amplitud de la onda, c) frecuencia o período.

Resp a) b) c)

Vuelva con [Y=] y borre las 4 funciones con [CLEAR]. Ingrese ahora las funciones Y_1=sen x, Y_2=sen 2x, Y_3=sen 3x.Grafíquelas y de acuerdo a sus gráficas, conteste:

a) ¿Qué ocurre con sus intersecciones con el eje X?

b) ¿Qué ocurre con sus intersecciones con el eje Y?

c) ¿Qué ocurre con sus amplitudes?

d) ¿Y qué pasa con su períodos (frecuencia)?

Resp a) b) c) d)

EXPERIMENTO N°4:

Vuelva al menú de funciones con **Y=**, borre con **CLEAR** las 3 funciones anteriores y digite Y_1=xsen x. Antes de graficar con **ZOOM** elija la opción 6 **ZStandard**.

¿No le parece que la onda "se amortiguara al acercarse a 0?

Agregue ahora Y_2=-x y Y_3=x. ¿Se mejora ahora este efecto?

El que la gráfica de xsenx esté comprendida por las rectas y=-x e y=x indica que:

$$-|x| \leq x \operatorname{sen} x \leq |x|$$

Este es un caso de onda amortiguada en 0

EXPERIMENTO N°5:

Borre las anteriores funciones y digite: Y_1=(1/x) sen x ; Y_2=1/x ; Y_3=-1/x, pulse la tecla **ZOOM** y escoja la opción 4 **ZDecimal**.

Note que ahora la gráfica se amortigua hacia las direcciones opuestas. Complete la siguiente inecuación:

$$\boxed{} \leq \frac{1}{x} sen\ x \leq \boxed{}$$

¿Qué podría asegurar de (1/x) senx cuando x crece indefinidamente (hacia +∞ o hacia -∞)?

Resp

EXPERIMENTO N°6:

Borre las tres funciones anteriores y digite $Y_1=e^{-x}$**sen3x**, $Y_2=e^{-x}$ e $Y_3=-e^{-x}$. (Use la opción **ZDecimal** del ZOOM para una mejor presentación).

¿Hacia dónde se amortigua la onda de e^{-x}**sen 3x**?

Resp

Luego, ¿qué se puede asegurar de e^{-x}**sen 3x** cuando x crece indefinidamente?

Resp

EXPERIMENTO N°7:

Borre las funciones anteriores y grafique $Y_1=2^{-x/2}\cos x$, $Y_2=2^{-x/2}$ e $Y_3=-2^{-x/2}$. Responda: a) ¿Hacia dónde se amortigua?, b) ¿Qué ocurre con la función $2^{-x/2}\cos x$ cuando $x \to \infty$?, c) ¿Qué inecuación puede establecerse? d) Verifique que y_1 e y_3 se intersectan en $(-\pi, -2^{\frac{\pi}{2}})$.

Resp

a)

b)

c)

d)

EXPERIMENTO N° 8:

Cuando deseamos saber que ocurre con las imágenes de una función **f(x)** cuando x crece indefinidamente, lo expresamos así: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Análogamente, cuando x decrece indefinidamente, lo decimos así: $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Usando la función **Y=** de la calculadora y ayudándose de la opción **ZBox** de **ZOOM**, contesta:

a) $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} \operatorname{sen} x$ -

b) $\lim_{x \to -\pi/2} \operatorname{sen}^2 x =$

c) $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} \cos x =$

d) $\lim_{x \to -3\pi/2} |x| \cos x =$ (nota: para |x| teclee: **2nd** **x^{-1}** **X,T,θ**)

Finalmente, escribe a continuación los aspectos que a su juicio resultaron más positivos y más negativos de este taller:

A) Los <u>más positivos</u>:

B) Los <u>más negativos</u>: