



*Fondo de Investigación y Desarrollo En Educación - FONIDE
Departamento de Estudios y Desarrollo.
División de Planificación y Presupuesto.
Ministerio de Educación.*

“Propuesta metodológica de trabajo docente para promover competencias matemáticas en el aula, basadas en un Modelo de Competencia Matemática (MCM)”

Investigador Principal: Horacio Solar
Investigadores Secundarios: Lorena Espinoza; Francisco Rojas, Andrés Ortiz, Enrique González;
Rodrigo Ulloa;
Institución Adjudicataria: Universidad Católica de la Santísima Concepción
Proyecto FONIDE N° 511091

Diciembre 2011

INFORMACIÓN SOBRE LA INVESTIGACIÓN:

Inicio del Proyecto: 13 de diciembre 2010

Término del Proyecto: Diciembre 2011

Equipo Investigación:

Investigador Principal: Horacio Solar

Investigadores Secundarios: Lorena Espinoza; Francisco Rojas, Andrés Ortiz, Enrique González; Rodrigo Ulloa;

Monto adjudicado por FONIDE: \$16.127.372

Presupuesto total del proyecto:\$18.627.372

Incorporación o no de enfoque de género: NO

Comentaristas del proyecto: Leonor Varas y Alfonso Calderón.

“Las opiniones que se presentan en esta publicación, así como los análisis e interpretaciones, son de exclusiva responsabilidad de los autores y no reflejan necesariamente los puntos de vista del MINEDUC”.

Las informaciones contenidas en el presente documento pueden ser utilizadas total o parcialmente mientras se cite la fuente.

Esta publicación está disponible en www.fonide.cl

ÍNDICE

Resumen	4
1. Antecedentes.....	5
2. Preguntas y Objetivos de Investigación	9
3. Marco Teórico.....	10
3.1 Evolución del currículo	10
3.2 Modelo de Competencia Matemática (MCM)	12
3.2.1 Significado y recorridos de las competencias matemáticas	15
3.2.2 Enfoque epistemológico en educación matemática	22
3.2.3. Niveles de Complejidad Cognitiva	26
3.2.4. Competencias organizadoras del currículo.....	30
3.2.4.1. <i>Resolución de Problemas</i>	31
3.2.4.2. <i>Representación</i>	32
3.2.4.3. <i>Razonamiento y Argumentación</i>	34
3.2.4.4. <i>Cálculo y Manipulación de Expresiones</i>	35
3.2.5. Competencias en estudio	37
3.2.5.1. Modelización	37
3.2.5.2. Argumentación	38
3.2.5.3. Comunicación.....	39
3.3. Metodología de Trabajo Docente (MTD)	44
4. Metodología	49
4.1. Muestra.....	50
4.2. Variables.....	51
4.3. Diseño metodológico.....	52
4.3.1. En relación al Diseño e Implementación de una metodología de trabajo docente	52
4.3.2. En relación a la Evaluación de la metodología de trabajo docente	56
4.3.2.1. <i>Reflexión docente</i>	56
4.3.2.2. <i>Desempeño docente</i>	60
4.4. Validación de instrumentos iniciales.....	61
5. Análisis y Resultados.....	63
5.1. Diseño e implementación de una Metodología de Trabajo Docente	63
5.1.1. Descripción de los seminarios.....	63
5.1.2. Casos clínicos	66

5.2. Evaluación MTD: apropiación MCM : Reflexión	68
5.2.1 Concepciones del profesor.....	69
5.2.2. Componentes MCM	72
5.2.2.1. Grado de comprensión de las competencias	72
5.2.2.2. Grado de comprensión de la OM (campo aditivo).....	84
5.2.2.3. Grado de comprensión de las relaciones entre componentes del MCM ..	86
5.2.3. Reflexión sobre las prácticas.....	121
5.3. Evaluación MTD: apropiación MCM : Desempeño	144
5.3.1.Preparación de la enseñanza	144
5.3.2.Gestión de la enseñanza.....	156
6. Estudio del cambio en las prácticas de las profesoras.	170
6.1 Cambio en la reflexión	170
6.1.1. El caso de Mónica.....	172
6.1.2. El caso de Sonia.	176
6.1.3. El caso de Valentina.....	183
6.1.4.Trayectorias de reflexión	191
6.2. Cambio en el desempeño	192
6.2.1. Cambios en la preparación de la enseñanza.....	194
6.2.1.1. Caso Mónica	194
6.2.1.2. Caso Sonia.....	195
6.2.1.3. Caso Valentina	199
6.2.2 Cambios en la gestión de la enseñanza	202
6.2.2.1. Caso Mónica	202
6.2.2.2. Caso Sonia.....	203
6.2.2.3. Caso Valentina	204
6.2.3. Evolución del Desempeño.....	206
6.3. Articulación entre desempeño y reflexión	208
7. Conclusiones y proyecciones.....	212
7.1 Conclusiones de la investigación	212
7.2 Proyecciones	216
8. Recomendaciones para políticas públicas	217
9. Bibliografía.....	219

Resumen

Sobre la base del Modelo de Competencia Matemática (MCM), nuestra investigación busca generar procesos altamente reflexivos en profesores de primer ciclo básico, específicamente NB1, que les permitan impactar sobre su práctica de aula. Con tal fin, se desarrolla una metodología de trabajo docente basada en el trabajo colaborativo, llevado a cabo en un *seminario*, en cuyas sesiones participaran un grupo de profesoras. En el transcurso de éste, las profesoras estudian el MCM, y su implementación en el aula (casos clínicos), los cuales están contruidos a partir de organizaciones matemáticas nucleares en relación al campo aditivo en NB1. En dichas discusiones, se pretende ahondar en las herramientas, conocimientos y experiencias que necesita el profesor para diseñar y gestionar las situaciones en base al MCM. Por otra parte, se realizará un estudio de casos para analizar el impacto de la metodología de trabajo docente, a través del cambio que han evidenciado las profesoras. El análisis de los datos recogidos se centra tanto el proceso reflexivo como en el desempeño docente, variables que permiten obtener conclusiones sobre la apropiación de la metodología de trabajo docente mediado por el MCM. Los resultados muestran que los profesoras progresan en sus reflexiones ante tareas didáctico- matemáticas en la medidas que participan en diferentes instancias de reflexión, y a su vez progresan en algunos aspectos de su desempeño docente.

Palabras clave: Competencia Matemática, Formación continua de profesores, Prácticas reflexivas

1. Antecedentes

Actualmente, el enfoque por competencia es considerado en la comunidad internacional como una propuesta educativa que va más allá del aprendizaje de contenidos, y apunta a la formación de ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos, permitiéndoles identificar y entender el rol que juegan las matemáticas en el mundo (OCDE, 2003). Desde la elaboración del Proyecto DeSeCo de la OCDE, el cual se concentró en la elaboración de un listado de competencias clave, diversos países de la Comunidad Europea han utilizado el enfoque por competencias como sustento para sus reformas curriculares de la educación obligatoria (OCDE, 2005; Rychen y Salganik, 2006). Estas experiencias han influido también en diversas reformas en Latinoamérica, como el currículo colombiano, en que se destaca el desarrollo competencial como indispensable para la formación de ciudadanos (MEN, 2006). Por otra parte, y desde la perspectiva de la educación universitaria, el Proyecto Tuning dio paso a que las universidades modificasen su diseño curricular hacia un enfoque por competencias (González y Wagenaar, 2003).

En el ámbito escolar, destacan algunos proyectos en torno a la implementación del enfoque por competencia en matemática: (a) la reforma curricular portuguesa que propone una caracterización de las competencias matemáticas (Abrantes, 2001); (b) la incorporación de competencias matemáticas al currículum danés (Mogen Niss, 2002); y (c) el proyecto PISA que se apropia de las competencias propuestas por Niss para sustentar su marco teórico (OCDE, 2003). En estas tres experiencias, el listado de competencias matemáticas corresponde a procesos matemáticos tales como razonar, argumentar, representar, calcular, modelar, resolver problemas y comunicar. En base a esta caracterización de las competencias matemáticas por medio de procesos matemáticos, una de las contribuciones del enfoque por competencias al currículo de matemáticas es dotarle una estructura orientada al desarrollo de procesos matemáticos (Solar, 2009). Además, las competencias matemáticas, al sustentarse en procesos, se caracterizan por ser transversales a los núcleos temáticos y desarrollarse a largo plazo de manera cíclica en cada nivel educativo. Así, un enfoque por competencias es coherente con una estructura curricular que destaque los procesos matemáticos.

En el caso de Chile, se observa una transición desde el antiguo marco curricular (Mineduc, 2002), donde la noción de competencia no estaba explícitamente presente, al nuevo ajuste curricular, en el cual el enfoque por competencia se presenta de forma destacada (Solar, 2008). A modo de ejemplo, destacamos que en el área de Formación Diferenciada Técnico Profesional, los objetivos fundamentales se definen en términos de competencias (Mineduc, 2009b). En cuanto a las áreas científico-humanistas, si bien los objetivos fundamentales no se han formulado en estos términos, se concibe que los conocimientos, habilidades y actitudes seleccionados en los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios apunten a su desarrollo (Mineduc, 2009a). En el ajuste curricular de matemática, aprobado el año 2009 por el Consejo Nacional de Educación, se destaca la importancia de desarrollar procesos matemáticos, dentro de los cuales la resolución de problemas ya no se concibe como un eje en sí mismo, sino que es parte del razonamiento matemático, siendo trabajado transversalmente en los cuatro ejes de contenido actualmente presentes: Números, Álgebra, Geometría y Datos y Azar. Para evidenciar la importancia que tiene el razonamiento matemático en el currículo, presentamos un extracto de esta actualización curricular:

“Se buscará, a lo largo de todo el currículum, definir objetivos y proponer contenidos que apelen a las bases del razonamiento matemático, en particular a la resolución de problemas, incluyendo el desarrollo de habilidades tales como la

búsqueda y comparación de caminos de solución, análisis de los datos y de las soluciones, anticipación y estimación de resultados, búsqueda de regularidades y patrones, formulación de conjeturas, formulación de argumentos y diversas formas de verificar la validez de una conjetura o un procedimiento, el modelamiento de situaciones o fenómenos, para nombrar competencias centrales del razonamiento matemático. Se propone seleccionar situaciones, problemas y desafíos de modo que se favorezca la integración de las diferentes dimensiones de la matemática, para que alumnas y alumnos adquieran una visión integrada del conocimiento matemático y estén en condiciones de resolver problemas, establecer relaciones y argumentar acerca de su validez”.

(Mineduc, 2009a, p. 147).

Si bien se evidencia que el ajuste curricular destaca los procesos matemáticos, su presencia está lejos de articular el currículum, tal como lo proponen las tres experiencias nombradas anteriormente (Abrantes, 2001; Mogen Niss, 2002; OCDE, 2003). Una aproximación desde el enfoque por competencias al currículum, revaloraría los procesos matemáticos en la organización de éste. Así como en el ajuste curricular se destacan algunos procesos como parte del razonamiento matemático y de la resolución de problemas, se considera que hay otros procesos matemáticos no nombrados (e.g. representación matemática, argumentación, entre otros), que deben ser considerados como parte de los núcleos de aprendizaje.

Dada esta situación en el currículum nacional, en un estudio anterior (Lorena Espinoza et al., 2008) caracterizamos el marco curricular y los programas de estudio de primer ciclo básico correspondiente al subsector de matemáticas en función de competencias matemáticas. El trabajo desarrollado se basó en la elaboración de un Modelo de Competencia Matemática (MCM) que permitiera interpretar dicho marco en términos de las competencias y los procesos matemáticos.

El desarrollo del Modelo de Competencia Matemática (MCM) ha pasado por diversas etapas de consolidación. En una primera instancia se realizó una revisión en profundidad sobre la literatura que había sobre competencias matemáticas. La primera conclusión que se obtuvo fue que no hay un consenso en la noción de competencia matemática, ni hay una estructura concreta que permita explicar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas basándose en un enfoque por competencias. A partir de aquí, el primer propósito fue llegar a un acuerdo sobre el aspecto relevante y diferenciador de las competencias: organizar la matemática escolar no solo por contenidos tales como álgebra, geometría, aritmética, sino que también destacar los procesos matemáticos tales como: modelizar, resolver problemas, argumentar, razonar y comunicar.

Para tal propósito, el modelo debía articular los *contenidos* con los *procesos*. Por una parte, los contenidos matemáticos los estructuramos en términos de Organizaciones Matemáticas (Y Chevallard, 1999), basándonos en la Teoría Antropológico de lo Didáctico (TAD), ya que es un marco teórico que permite caracterizar detalladamente las estructuras matemáticas en la escuela. Por otra parte, se debe considerar que las competencias matemáticas son un objeto de logro en el largo plazo. De ahí que es relevante estudiar y articular su progreso con el estudio específico de los contenidos matemáticos. Dicho progreso o evolución de las competencias se caracterizó en términos de niveles de complejidad de la actividad, siguiendo la estructura piramidal sugerida por de Lange (1995b) y los grupos de competencia formulados en PISA (OCDE, 2003).

Teniendo estos elementos en consideración, el modelo se conforma por tres componentes principales:

- *Competencia matemática*: en base a los estándares propuestos por la NCTM(NCTM, 2000) y las competencias matemáticas propuestas por Abrantes (2001), Niss(1999) y PISA (OCDE, 2003) acordamos elegir y optar por *procesos matemáticos nucleares* que denominamos competencias matemáticas, las cuales organizan y articulan el currículo de matemáticas. Estas competencias están compuestas por procesos específicos presentes de forma transversal a los contenidos matemáticos(NCTM, 2000).
- *Organizaciones matemáticas*: consideramos contenidos matemáticos estructurados según tareas y técnicas matemáticas, variables didácticas y condiciones de realización de dichas tareas (Y Chevallard, 1999).
- *Niveles de complejidad cognitiva*: se definen tres niveles de complejidad, organizados en función de las tareas y los procesos que conforman la competencia: niveles de reproducción, conexión, reflexión. La expresión nivel de complejidad se adopta de los grupos de competencia de PISA (OCDE, 2003), basados en la pirámide propuesta por de Lange (1995a).

Este Modelo de Competencia Matemática (MCM) está sustentado en el enfoque “mathematical literacy” (OCDE, 2003), planteando una visión funcional de las matemáticas. El MCM ha sido puesto a prueba en otras investigaciones (Solar, 2009; Solar, Azcárate, y Deulofeu, 2009), para estudiar la modelización y la argumentación como una competencia. Para la elaboración del MCM, centramos nuestro trabajo en primero y segundo básico (NB1) en los ejes de números, operaciones, y resolución de problemas en cuanto a número y operaciones se refiere. Se lograron identificar cuatro competencias matemáticas en el currículum de estos niveles, compuestas cada una por un conjunto de procesos matemáticos: resolución de problemas, representación, razonamiento y argumentación, cálculo y manipulación de expresiones; identificándose, a su vez, las tareas matemáticas asociadas. Con este trabajo de caracterización se elaboró el instrumento “Matriz de Competencia”, que relaciona cada tarea con la competencia específica que desarrolla. Por medio del estudio de las variables didácticas involucradas, se determinó el nivel de complejidad cognitiva (reproducción, conexión, reflexión) según las condiciones de realización de la tarea matemática implicada. La última etapa de la investigación consistió en construir una página web en donde se plasmara el MCM y los instrumentos asociados, con tal de ponerlo a disposición de los profesores de matemáticas (<http://www.grupoklein.cl/fonide/web/>). La web presenta las características de cada componente del modelo de competencia y las matrices de competencia para cada tarea matemática considerada.

En base a los resultados obtenidos en el marco del proyecto FONIDE que desarrolló el Modelo de Competencia Matemática (Lorena Espinoza et al., 2008), el siguiente paso que nos hemos propuesto es estudiar cómo el profesor desarrolla un proceso de comprensión de las competencias matemáticas que ha de trabajar con sus estudiantes. Este estudio que proponemos aquí, surge de preguntas tales como: ¿Qué herramientas nuevas para la enseñanza le entrega al profesor de matemáticas el Modelo de Competencia Matemática (MCM)? ¿De qué manera puede el profesor modificar su práctica docente al considerar un modelo de estas características? ¿Cuáles son las condiciones para que un profesor

diseñe actividades que desarrollen el nivel de reflexión en los estudiantes? ¿Cuál es una forma adecuada para generar un proceso de apropiación del Modelo de Competencias Matemáticas (MCM)?

Si bien estas preguntas pueden ser más amplias que lo que se puede abordar en una investigación como la presente, no queremos dejar de mencionarlas, ya que nos orientan en la especificación de nuestros objetivos. En este sentido, buscamos desarrollar, implementar y evaluar una metodología de trabajo docente en torno al Modelo de Competencia Matemática (MCM) que promueva la reflexión pedagógica necesaria para impactar en las prácticas de aula. Consideramos necesario que antes de observar el desarrollo de las competencias en el estudiante, para lo cual se requerirían estudios longitudinales extensos temporalmente, es indispensable discutir con profesoras y profesores el modelo competencial propuesto, reflexionando sobre su gestión en el aula y en cómo se llevan a cabo y concretizan en actividades matemáticas relevantes. Considerando los resultados nacionales e internacionales relativos al conocimiento matemático de los profesores de educación básica, el desarrollo de modelos que contribuyan a la formación docente en aspectos altamente valorados por la comunidad internacional como lo es el enfoque por competencias, y presente en nuestros actuales documentos curriculares, permitiría mejorar éstos y otros indicadores, tanto a nivel del profesorado como de los propios estudiantes.

En este trabajo conjunto entre profesores e investigadores, es muy relevante el papel que juega la reflexión profesional, en este caso la reflexión de la práctica (Perrenoud, 2004; Schön, 1983). Estos procesos reflexivos permitirán al docente cuestionar su conocimiento profesional, tanto el relativo al conocimiento pedagógico general, como el referido al conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 1987). En este sentido, el análisis conjunto de experiencias clínicas de enseñanza, es decir, situaciones intencionalmente diseñadas para ser analizadas, se constituye como la herramienta fundamental de trabajo. Para el diseño de estas experiencias, se consideran organizaciones matemáticas nucleares del campo aditivo en NB1, y en particular aquellas tareas matemáticas nucleares que fueron presentadas en la matriz de competencias desarrollada en el Modelo de Competencia Matemática (MCM) (Lorena Espinoza et al., 2008). La reflexión y análisis de estas prácticas permitirán observar el nivel de comprensión de los profesores sobre las características que deben tener las situaciones didácticas y su implementación en el aula para el desarrollo de las competencias matemáticas. Para ello es muy relevante que no solo cuestionen dichas prácticas, sino que propongan y fundamenten alternativas de gestión según sus propias realidades de aula.

2. Preguntas y Objetivos de Investigación

Objetivo General: Desarrollar, implementar y evaluar una metodología de trabajo docente en torno al Modelo de Competencia Matemática (MCM) que promueva la reflexión pedagógica necesaria para impactar en las prácticas de aula.

Objetivos Específicos

1. Diseñar un proceso de estudio para los profesores del Modelo de Competencia Matemática (MCM), y construir casos clínicos fundamentados en el MCM, para el campo aditivo de NB1.
2. Desarrollar e implementar un seminario de trabajo docente basado en el análisis de las situaciones clínicas anteriores con profesores de matemática de NB1.
3. Identificar los elementos reflexivos que permiten caracterizar la comprensión del MCM en profesores de matemáticas de NB1.
4. Caracterizar el grado de apropiación del MCM a través del estudio de las prácticas docentes de los profesores.

3. Marco Teórico

En este capítulo se presentarán los sustentos teóricos que apoyan esta investigación, y permiten posicionarnos, comprender y analizar los cuerpos de datos obtenidos por medio de este trabajo. En el primer apartado se presenta cómo ha evolucionado el currículo de matemáticas a nivel internacional hacia un modelo por competencias, para luego pasar a describir el desarrollo que ha tenido el Modelo de Competencia Matemática que sustenta este trabajo. Finalmente, se presentan las componentes propias de la metodología de trabajo docente que se propone en esta investigación.

3.1 Evolución del currículo

En la década de los 60 en EEUU se institucionaliza la visión de la matemática moderna; así, por ejemplo, en el artículo de “*The Revolution in Mathematics*” de Marshall, M. publicado en la revista *Mathematical Monthly*, en octubre de 1961, se promueve la modernización de la matemática, defendiendo una concepción estructuralista de la matemática, la independencia de la matemática de las otras áreas y su naturaleza netamente abstracta (Kline, 1976).

La consolidada visión de la matemática moderna incidió directamente en las instituciones escolares, considerando todas las dimensiones del sistema, desde el currículo hasta el profesor. Armendáriz, Azcárate y Deulofeu (1993) señalan que dos conferencias, una en 1959 en Woods Hoole –Massachussets- y otra en 1963 en Cambridge, encaminarían la didáctica de las matemáticas a realizar un giro hacia la matemática moderna. Ambas conferencias proponían una enseñanza de las matemáticas como una disciplina estructurada de forma tal que las interrelaciones entre los conceptos quedaran puestas de relieve, así como las estructuras conceptuales que subyacen a los distintos procesos matemáticos. Morris Kline (1976) describe el paso a un currículo basado en la matemática moderna, como una gestión del aula jerárquica, con una priorización que pretendía mostrar una matemática estructurada, abstracta, y fundamentada en la representación conjuntista, en detrimento de una visión intuitiva de la actividad matemática, puesto que ya no se aceptaban demostraciones de índole geométrica, sin la rigurosidad que se estaba promoviendo por parte de la institución matemática.

Así, en EEUU a mediados de los 60s comenzó un proceso gradual de cambio (Howson, Keitel, y Kilpatrick, 1981) donde surgieron nuevas teorías, desde el campo de la psicología principalmente, que tratarían de explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en términos de procesos cognitivos. Howson et al. distinguen entre el enfoque estructuralista y el formativo. Un destacado defensor del estructuralismo es Bruner con su teoría de las representaciones; de igual modo, Piaget, es el máximo representante de la corriente formativa.

Pero la visión estructuralista no cumplió las expectativas, y se evidenció un fracaso de la matemática moderna en el intento de mejorar la comprensión de la matemática en las aulas (Kline, 1976). Así, se vivió un proceso de cambios en la visión de la educación matemática que se puede resumir en la frase: *Matemáticas, ¿construcción o descubrimiento?*

Con el paso del tiempo se desarrollaron diferentes puntos de vista; surgió el enfoque formalista de Piaget, sustentado en la idea de que el individuo es el elemento central en la construcción de significados. Piaget definió una secuencia de cuatro estadios que todos los seres humanos atravesamos en nuestro desarrollo cognitivo (Sensoriomotor, preoperacional, operaciones concretas y operaciones formales). Posteriormente la teoría

formalista incidiría en el surgimiento del constructivismo. *El Constructivismo* (Coll, 1989) es una visión que lleva a concebir el aprendizaje escolar como un proceso de construcción del conocimiento, y la enseñanza como una ayuda a este proceso de construcción. Particularmente, Wood et al. (Wood, Cobb, y Yackel, 1991) señala que las teorías psicológicas de Piaget y von Glasersfeld han influido en la concepción constructivista en didáctica de las matemáticas, al considerar procesos como el conflicto cognitivo, la abstracción reflexiva y la organización conceptual en el aprendizaje de las matemáticas.

Otra teoría que incidió en el constructivismo fue el enfoque social de Vigotsky. El psicólogo ruso desarrolló en los años 30s un enfoque que considera el entorno sociocultural de la persona. A partir de los años 80s esta teoría comienza a tomar fuerza en EEUU para describir los procesos de aprendizaje.

A fines de la década de los 70 el constructivismo empezó a insertarse prácticamente en la mayoría de las áreas sociales del conocimiento, y en particular, en la Educación Matemática. En los años 90s, ya varios países habían adoptado en sus currículos de matemáticas esta visión, siendo los pioneros EEUU e Inglaterra. En Sudamérica la inserción del constructivismo a la educación se produce a principios de los años 90s. Concretamente en Chile la reforma educativa de 1990 (Mineduc, 2006) tiene como pilar el enfoque constructivista del aprendizaje; esta reforma se ha desarrollado con implantaciones semejantes a la de España.

A finales del los 90s, en varios países donde a nivel oficial prevalecía el constructivismo, aun se manifestaba un descontento con la educación. En particular, en la enseñanza de la matemática existía la sensación de que el conjunto de esfuerzos que se habían promovido no parecían mostrar mejoras significativas. Esto puede ser debido, entre otras razones, a que las teorías psicológicas que daban buenos resultados en edades tempranas, no lograban traspasarlos a secundaria ni a la enseñanza superior.

Actualmente la orientación curricular de varios países ha adoptado otros criterios para organizar el currículo escolar. Bajo una postura general en que la enseñanza tiene como objetivo preparar ciudadanos críticos y reflexivos, para tal efecto, cada área de conocimiento ha considerado como variable la estructuración de los contenidos con una connotación de que los sujetos apliquen tales conocimientos en la vida cotidiana. Un marco que ha respondido a estas preocupaciones es el enfoque por *competencia*. De esta manera se ha incorporado el término competencias a los marcos curriculares de varios países. Por ejemplo en el caso de España, ha aparecido una prueba de evaluación denominada “competencias básicas”, cuyo propósito es evaluar las competencias que son necesarias en estudiantes de 6º primaria, 2º de ESO, y 4º de ESO. Se aplica en Matemáticas, Ciencias y en Lenguaje.

Pero, ¿por qué optar por un marco de competencias? Al respecto, Rico y Lupiáñez (2008) esbozan la idea de que un marco por competencias incentiva a: aprender a hacer, dar significado al aprendizaje, aprendizaje social, aprender a resolver situaciones complejas y cultivar un espíritu crítico. Por otra parte Zabala y Arnau (2007) plantean que la competencia ha de identificar aquello que necesita cualquier persona para dar respuesta a los problemas a los que se enfrentará a lo largo de su vida. Por tanto, competencia consistirá en la intervención eficaz en los diferentes ámbitos de la vida mediante acciones en las que se movilizan, al mismo tiempo y de manera interrelacionada, componentes actitudinales, procedimentales y conceptuales.

Antes de profundizar en el tema de las competencias, se expone en el siguiente apartado un inciso sobre “los objetivos”, dado que históricamente la formulación de objetivos ha

relevante en los currículos, y se mantiene en la actualidad en un gran número de ellos que siguen caracterizándose por objetivos de aprendizaje.

3.2 Modelo de Competencia Matemática (MCM)

El camino para desarrollar y consolidar un modelo de competencia matemática se ha conducido en varias direcciones. La opción de identificar la noción original de alfabetización matemática como competencia matemática no creemos que sea algo casual. La definición responde en gran medida a lo que se entiende en términos generales por competencia. Señalemos la definición de PISA:

Competencia matemática es una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.

(OCDE, 2006a)

Esta definición, que rescata el espíritu esencial de competencia, es amplia y general y, además, no alude a cómo se podría desarrollar la competencia. Hemos acordado utilizarla para referirnos a una noción general de la “competencia matemática”, y que en nuestro estudio usaremos como sinónimo de Alfabetización Matemática.

En cambio, el significado que se atribuye en la versión inglesa de Pisa a las competencias, es la que nosotros adoptamos. Las ocho competencias presentadas las interpretamos como *procesos matemáticos*.

Nos parece más acertado identificar esta noción de *proceso* con *competencia matemática específica*. Es el dominio de los procesos el que permite que la persona se desarrolle competentemente. De esta forma, la alfabetización matemática se logra mediante el desarrollo de competencias matemáticas. Algunos de estos procesos, que se asemejan a las competencias propuestas por Niss, son:

- *Resolver problemas* (aplicar conocimientos matemáticos, utilizar diversas destrezas y estrategias, o crear procedimientos no conocidos de antemano)
- *Representar* (evocar representaciones, traducir entre ellas, elegir entre varias según la situación)
- *Modelizar* (identificar un modelo, construir, reflexionar sobre el proceso)
- *Razonar y Argumentar* (formular conjeturas matemáticas, desarrollar y evaluar argumentos, elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y demostración)
- *Comunicar* (organizar el pensamientos comunicando, comunicar el pensamiento con coherencia, evaluar el pensamiento de los demás, usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas con precisión)

Algunas descripciones de los cinco procesos mencionados son extraídas de *Los Estándares* de la NCTM (2000). Esta propuesta de describir un currículo en términos de proceso, representa algo nuevo, ya que no hay indicios de propuestas curriculares de esta magnitud que describan el aula en términos de procesos. Para cada una de las cuatro

etapas educativas (Pre-K-2; 3-5; 6-8; 9-12) se describe como debería darse y cuál es el papel del profesor en el desarrollo del proceso. No obstante los apartados de descripción de estándares de contenido y procesos son diferentes, y no hay un apartado que los relacione. Para nosotros no cruzar los dos tipos de estándar, representa una carencia puesto que una planificación de una unidad didáctica que considere incorporar los procesos, lo más probable es que tienda a incorporarlos implícitamente a partir de los contenidos y no de manera explícita.

Retornando a PISA, su enfoque funcional considera prioritario el desarrollo de ciertos procesos cognitivos y capacidades en las fases de matematización. Las expectativas de aprendizaje se centran en delimitar esos procesos para enfrentarse con problemas matemáticos en contextos variados.

Finalmente recordemos la caracterización de Rico y Lupiáñez (2008) que representa una visión más global de competencia matemática:

La competencia matemática consiste en un saber hacer en la práctica mediante herramientas matemáticas. Consiste en utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible. Hace especial énfasis en aspectos sociales como la comunicación y la argumentación. Muestra cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana. Se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana.

(Rico y Lupiáñez, 2008)

Para nosotros, aunque estos elementos son importantes, constituyen solamente una parte de la filosofía por competencias. En nuestro modelo, destacar los procesos matemáticos permiten desarrollar las características de la competencia matemática, tales como poner en práctica las herramientas matemáticas, usarlas en variedad de contextos y situaciones reales, etc. Es por ello que aspectos como resolución de problemas, modelización, representación, argumentación y comunicación se consideran en nuestro modelo.

Siguiendo las ideas de Rico y Lupiáñez (2008), de que tanto PISA como los Estándares de la NCTM aportan aproximaciones significativas sobre el enfoque funcional, y sobre todo, un papel explícito de los procesos matemáticos o competencias matemáticas. Consideramos que los procesos matemáticos, deben tener un papel más destacado, y si queremos que resalten entre las expectativas sobre el aprendizaje, hay que establecer conexiones entre los objetivos específicos y las competencias matemáticas. Por tanto hay que disponer de una estructura o estrategia articuladora entre las expectativas de aprendizaje- objetivos específicos- y las competencias.

A partir de estos antecedentes, la investigación se sustenta en el Modelo de Competencia Matemática (MCM) (Lorena Espinoza et al., 2008; Solar, 2009) que permite interpretar el currículo articulando las competencias con la organización matemática. De este modo, el MCM considera tres componentes principales:

- *Competencia matemática*: en base a los estándares propuestos por la NCTM (2000) y las competencias matemáticas propuestas por Abrantes (2001), Niss (1999) y PISA (OCDE, 2003) acordamos elegir y optar por *procesos matemáticos nucleares* que

denominamos competencias matemáticas, las cuales organizan y articulan el currículo de matemáticas. Estas competencias están compuestas por procesos específicos presentes de forma transversal a los contenidos matemáticos (NCTM, 2000).

- *Organizaciones matemáticas*: consideramos contenidos matemáticos estructurados según tareas y técnicas matemáticas, variables didácticas y condiciones de realización de dichas tareas (Chevallard, 1999).
- *Niveles de complejidad cognitiva*: se definen tres niveles de complejidad, organizados en función de las tareas y los procesos que conforman la competencia: niveles de reproducción, conexión, reflexión. La expresión nivel de complejidad se adopta de los grupos de competencia de PISA (OCDE, 2003), basados en la pirámide propuesta por de Lange (1995).

Relación entre tareas matemáticas y procesos

Las expectativas de aprendizaje pueden formularse en términos de tareas matemáticas y procesos matemáticos. Adaptando las ideas de Rico y Lupiáñez (2008), las tareas y procesos poseen características comunes en el sentido de que ambos expresan lo que espera que logren, desarrollen y utilicen los estudiantes. Expresan una petición de mejora y desarrollo, reclaman un incremento de la riqueza cognitiva de los estudiantes. Tareas y procesos se basan en conocimientos y actuaciones.

Se pueden identificar algunas características que distinguen las tareas de los procesos:

- Las tareas tienen tanto un carácter específico relativo a un contenido como unas actuaciones del estudiante sobre un contenido matemático concreto; los procesos, en cambio, integran y aplican diversos conocimientos, movilizan una mayor riqueza cognitiva del estudiante, incluyendo actitudes, y se pone en juego abordar tareas complejas en situaciones complejas.
- Las tareas matemáticas tienen un ámbito de verificación a corto plazo, mientras que las competencias expresan expectativas de aprendizaje a largo plazo, a desarrollar a lo largo de todo un periodo de formación.

La relación entre tareas y competencias tiene una implicación de cara a la actuación del profesor cuando planifica sus clases. Nuevamente adaptamos la propuesta de Rico y Lupiáñez (2008) para señalar de qué manera implica al profesorado planificar por competencias:

- Permite establecer una relación entre el currículo global de todo nivel educativo con el nivel local relativo a un tema específico. Partiendo de directrices generales sobre las competencias que se expresan en el currículo general, su comprensión se pone de manifiesto en el aprendizaje de temas concretos.
- Se seleccionan cuales tareas nucleares deben desarrollar los estudiantes de un nivel para el alcance de un tema concreto. Con la descripción de tareas específicas. Los temas matemáticos se concretan en una serie de actuaciones que se espera que los estudiantes dominen al finalizar el aprendizaje de una unidad didáctica. Asimismo, se describe en qué medida cada una de estas tareas contribuye a cada una de las competencias matemáticas.

- Por último, los profesores disponen de criterios para estudiar, seleccionar y diseñar tareas sobre las que trabajarán los estudiantes relativos al tema concreto que se planifica.

Otro punto a resaltar es que las competencias orientan el diseño y selección de nuevas tareas, dado que expresan prioridades y expectativas de aprendizaje para las matemáticas. El desarrollo de competencias como Argumentar y Representar necesita de tareas que movilicen en los estudiantes determinadas capacidades, como por ejemplo, justificar la utilidad de los procedimientos empleados para alcanzar unos determinados resultados o relacionar diferentes representaciones. Estos cinco aspectos son lo que desarrollan el MCM.

Dado que el foco de atención en este apartado es desarrollar un marco que permita describir el modelo de competencia matemática (MCM) que sustenta la investigación, ahondaremos en cada uno de sus aspectos. Para ello en el apartado 3.2.1 se describe la puesta en marcha de diferentes proyectos en educación matemática en torno a las competencias, y se presentan distintos significados de competencia matemática que sirven de base para proponer un modelo de competencia matemática. Posteriormente, en el apartado 2.3.2, se explica el enfoque epistemológico en didáctica de las matemáticas, el cual permite estructurar y explicar la actividad matemática de aula. En el apartado 3.2.3 se abordarán los niveles de complejidad cognitiva como elementos que permiten explicar y estructurar la enseñanza, finalizando con el apartado 3.2.4 donde mostraremos las competencias organizadoras del currículo que sustentan el trabajo de este proyecto.

3.2.1 Significado y recorridos de las competencias matemáticas

Desde los orígenes de la primera definición de competencia matemática hasta el presente, han ido apareciendo una serie de definiciones y significados de la misma. En este apartado mostraremos cuatro nociones principales de *competencia*: comprensión, capacidad, alfabetización matemática, y proceso.

Comprensión y competencia

Una de las discusiones que se ha desarrollado en la literatura para definir el significado de competencia se centra en establecer su relación o incluso su contraposición con la noción de "comprensión". Para Godino (2002) la competencia atiende a un componente práctico -saber hacer-, mientras que la comprensión, a un componente teórico -saber qué hacer y por qué-. Tanto la competencia como la comprensión ponen en juego conocimientos. En el primer caso se trata de conocimientos de tipo procedimental, en el segundo, de tipo conceptual y argumentativo.

Por otra parte, Font (2001) plantea una dicotomía distinta al argumentar que la comprensión se puede entender como una *competencia* o como un *proceso mental*. En el primer caso, la comprensión se ve desde un punto de vista pragmático y se entiende el significado como el uso que se le atribuye en diferentes contextos. El "saber" un objeto matemático consiste en ser capaz de reconocer las propiedades y representaciones características, relacionarlas con el resto de objetos matemáticos y usarlas en toda una variedad de situaciones problemáticas prototípicas que son propuestas en el aula de

matemáticas. En el segundo caso, entender la comprensión como proceso mental, tiene como consecuencia que el significado objetivo se entiende como una mayor o menor correspondencia con un estado de cosas dadas previamente, mientras que el significado personal que atribuye un alumno se entiende como la integración de un nuevo contenido en los esquemas previos. Si se hace hincapié en el uso competente, la enseñanza y el aprendizaje se entienden en términos de competencias, mientras que si se hace hincapié en la integración del nuevo contenido en los esquemas del alumno de manera significativa, la enseñanza y el aprendizaje se entienden fundamentalmente en términos de objetivos que se han de lograr.

Capacidades y competencia

Argumentar, resolver problemas y representar, por citar algunas, son consideradas como competencias matemáticas. Dichas competencias son caracterizaciones, en términos de procesos, de la actividad matemática. Pero ¿cómo desarrollar estas competencias? Para varios autores (Gómez y Lupiáñez, 2007; Lupiáñez y Rico, 2006; Rico y Lupiáñez, 2008; Vergnaud, 2007) el desarrollo de las *capacidades* en el estudiante contribuye a la adquisición de competencias.

Lupiáñez y Rico (2006) describen la diferencia entre capacidad y competencia. Las competencias se conciben como desarrollables a largo plazo en la actividad matemática escolar (un semestre, un curso, un ciclo educativo), mientras que las capacidades es aquello que hay que adquirir en una actividad matemática concreta. De esta manera se utiliza el término capacidades para referirse a la actuación de un estudiante con respecto a cierto tipo de tarea.

Para Lupiáñez y Rico (2006), la descripción de PISA respecto a las competencias se asemeja a lo que son las capacidades, con la diferencia que ser competente en matemáticas es un objetivo a largo plazo. Lupiáñez y sus colaboradores han desarrollado un procedimiento para organizar una descripción del modo en el que unas capacidades específicas relacionadas con un tópico matemático, contribuyen al desarrollo de las competencias. De esta manera es posible establecer un vínculo entre la planificación a nivel local –de unas actividades específicas en un tema concreto– y el diseño curricular global –de una asignatura– (Lupiáñez y Rico, 2006).

En Rico y Lupiáñez (2008) se han especificado cuatro criterios que relacionan las capacidades y las competencias matemáticas.

- La definición y caracterización de cada una de las competencias matemáticas.
- El diseño curricular global de la asignatura, en incluso el nivel educativo en que se enmarca la planificación que se está realizando.
- La información que suministra el análisis del contenido matemático (que se ha realizado previamente).
- Las decisiones que el profesor toma a la hora de planificar sus actividades de clase.

Alfabetización matemática y competencia

Esta apreciación de la competencia matemática, significa situarla como un objetivo a desarrollar a largo plazo y que se esperan al finalizar la actividad escolar. Dicho

significado difiere al del apartado anterior (competente, en resolver problemas, representar, argumentar, calcular, etc.) puesto que si bien son a largo plazo, están pensados para ser evaluados al finalizar una unidad didáctica.

El término Alfabetización Matemática (Mathematical literacy) se utiliza en PISA para definir la evaluación en Matemáticas. En PISA se considera la competencia como dominio de estudio, equivalente a la noción de alfabetización matemática, y supone un modo global de entender y hacer matemática, como a su vez comprender la naturaleza del conocimiento matemático. Desarrollar la competencia matemática se convierte en la finalidad principal de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (OCDE, 2003).

Ser competente matemáticamente implica estas nociones que impulsan varios currículos, PISA y diversos proyectos. El discurso que gira en torno a Alfabetización Matemática es de una índole diferente a los significados de competencia descritos en los dos apartados anteriores. La Competencia Matemática, aquí entendida, se preocupa de dar orientaciones generales para la actividad matemática escolar, pero no está presente en lo que sería el diseño y puesta en marcha de un currículo por competencias, ya que eso depende directamente de los centros educativos. Considerar solamente la visión de Alfabetización Matemática de competencia, puede llevar a profesores y agentes educativos a discutir de qué manera poner en práctica dichas orientaciones sin tener herramientas y argumentos sólidos.

En el Proyecto MAT₇₄₇ de Paulo Abrantes, aunque la noción de competencia matemática que se utilizó tuvo principalmente un componente de alfabetización matemática, también tiene otra interpretación que se ilustra en el siguiente apartado.

Procesos y competencia

En la reforma competencial del currículo de matemática en la educación básica en Portugal (Abrantes, 2001), se propusieron siete aspectos clave de la actividad matemática escolar: *Pensar matemáticamente; Razonamiento y argumentación matemática; Comunicar matemáticamente; Demostrar; Resolver problemas; Uso de Tic y herramientas de apoyo; Abstracción.*

Esta lista sintetizada sugiere la idea de que potenciar los aspectos de la competencia matemática significa, es decir, potenciar *procesos matemáticos*. Estos procesos, identificados por Abrantes (2001) como competencias matemáticas, expresan los modos en que los estudiantes deben actuar cuando hacen matemáticas, es decir, los procesos a cuyo dominio debe estar orientada la formación. Estas competencias matemáticas enuncian expectativas de aprendizaje a largo plazo.

Desarrollar procesos no es una idea nueva; existen numerosos currículos y proyectos que, de alguna manera, han insertado los procesos, incluso en otros términos (habilidades, capacidades). Algunos casos que reflejan la idea de proceso son los siguientes:

- Niss (1999) elabora una propuesta de “ocho competencias matemáticas” que se deben considerar en la educación matemática escolar. Esas ocho competencias fueron adaptadas por el estudio PISA y calificadas como procesos matemáticos. (OCDE, 2003, 2006a). En el marco teórico de PISA (OCDE, 2003) se asocia Competencia Matemática a Alfabetización Matemática, y ya en el informe final (OCDE, 2005) se denomina a las competencias como *procesos*. Así, las ocho competencias adoptadas de Niss (2002), pasan a ser consideradas como procesos matemáticos

- Las ocho competencias han servido de inspiración tanto para reformas curriculares (Mogen Niss, 2002) como para formación de profesores (Lupiáñez y Rico, 2008).
- Varios marcos curriculares han incorporado procesos matemáticos en sus estructura curricular, dos ejemplos son: Canadá (Ministry of Education, 2005), Comunidad Autónoma de Catalunya (DOGC, 2007).

Una propuesta curricular de gran envergadura y que merece ser destacada, y que ha sido muy significativa para nuestro estudio, son los *Principios y Estándares para la Educación Matemática*¹, propuestos por la NCTM (2000). La estructura de los *Estándares* se organiza en tres apartados: *Principios*, *Estándares de Contenido* y *Estándares de proceso*.

- *Principios*: Describen las características particulares de una educación matemática de gran calidad. Estos son: Igualdad; Currículo; Enseñanza; Aprendizaje; Evaluación; y Tecnología.
- *Estándares de contenido*: Describen explícitamente los contenidos que se deberían aprender. Éstos aparecen organizados por ejes: Números; Álgebra; Geometría; Medida; Análisis de datos y probabilidad.
- *Estándares de proceso*: Ponen en relieve las formas de adquisición y uso de dichos contenidos. Estos son: Resolución de problemas; Razonamiento y prueba; Comunicación; Conexiones; y Representación.

Recorridos de las competencias

La puesta en marcha de la noción de competencia matemática se explica por medio de tres proyectos educativos en educación matemática de nevergadura nacional e internmacional. Ellos ilustran cómo se ha desarrollado el enfoque de competencia dentro del área de matemáticas.

- *Portugal: Proyecto MAT₇₄₇, de Paulo Abrantes*

Paulo Abrantes fue uno de los pioneros en reflexionar sobre las competencias y las matemáticas. A mediados de la década del 90' impulsa el proyecto MAT₇₈₉(Abrantes, 1994), cuyo espíritu se enfocaba en potenciar capacidades a los alumnos en situaciones inherentes a la vida diaria, que se concretó en los denominados "proyectos matemáticos"; este proyecto fue germen de una propuesta curricular en matemáticas (Ministério da Educação, 2001), diseñada, entre otros, por el propio Abrantes siendo director del Departamento de Educación de Básica del Ministerio de Educación de Portugal (1999-2002).

A partir de la experiencia curricular en Portugal, Abrantes plantea una caracterización de competencias matemáticas (Abrantes, 2001). Siguiendo a Perrenoud (1999), describe la competencia como la capacidad de improvisar, no como un acto espontáneo sino como resultado del aprendizaje, que tiene componentes tanto cognitivos como sociales y

¹ Nos referimos a la propuesta con el término *Estándares*

pragmáticos y que supone la utilización de conocimientos, destrezas y estrategias en una variedad de contextos.

Así, en el currículo portugués se adoptó el concepto de competencia poniendo énfasis en la integración de conocimientos, procedimientos y actitudes. Se proponen las siguientes competencias esenciales:

- Conocer, en un adecuado nivel, las ideas fundamentales, los métodos de las matemáticas, así como valorar las matemáticas.
- Desarrollar la capacidad de usar las matemáticas para resolver problemas, razonar y comunicar así como tener confianza para hacerlas.

Los aspectos principales de la competencia matemática fueron expresados así

La competencia matemática que todos los estudiantes deberían desarrollar en la educación básica integra actitudes, habilidades y conocimiento, e incluye:

- *La disposición para pensar matemáticamente, esto es, explorar situaciones problemáticas, buscar patrones, formular y probar conjeturas, generalizar, pensar lógicamente.*
- *El placer y la seguridad en sí mismo en el desarrollo de actividades intelectuales que implican el razonamiento matemático, y la concepción que la validez de una afirmación se relaciona con la coherencia de la argumentación lógica más que con alguna autoridad externa.*
- *La capacidad para discutir con otros y comunicar el pensamiento matemático, empleando tanto el lenguaje escrito como el oral.*
- *La comprensión de nociones tales como: conjetura, teorema y prueba, así como la comprensión de las consecuencias del empleo de definiciones diferentes.*
- *La disposición para intentar entender la estructura de un problema y la capacidad para desarrollar procesos de resolución de problemas, analizar errores e intentar estrategias alternativas.*
- *La capacidad para decidir sobre la plausibilidad de un resultado y usar, según la situación, procesos mentales computacionales, algoritmos escritos o dispositivos tecnológicos.*
- *La tendencia de ver y apreciar la estructura abstracta base de una situación, de la vida diaria, la naturaleza o el arte, implicando tanto elementos numéricos como geométricos.*

(Abrantes, 2001)

Para el desarrollo de estas competencias se ponen en juego situaciones matemáticas que potencien procesos matemáticos tales como el razonamiento, la argumentación, la construcción de modelos, la interpretación, etc. La incorporación de actividades que acentúen el desarrollo de procesos transversales al desarrollo de contenidos, es fundamental en una perspectiva por competencias.

Algunas de las características de las competencias matemáticas son (APM, 2001).

- La importancia de una situación problemática que de pie a generar una serie de razonamientos habilidades y actuaciones en el aula de matemáticas, tanto del los estudiantes como del profesor.
 - Buscar que “todos” los alumnos sean capaces de desplegar un conjunto de actitudes, capacidades y de conocimientos relativos a la matemáticas.
 - Tipos de estrategias para desarrollar tareas matemáticas en un contexto de competencias tales como un contexto de resolución de problemas; actividades de investigación o trabajo por proyectos
- *Dinamarca: Proyecto KOM; Niss*

El proyecto KOM (KOM: Competencias y Aprendizaje de las Matemáticas) (Mogen Niss, 2002), iniciado por el Ministerio de Educación de Dinamarca, tuvo como propósito crear una plataforma que llevara a cabo una reforma en la enseñanza de las matemáticas de la escuela a la universidad. Mogens Niss, director del proyecto, fue quien impulsó una caracterización del currículo de matemáticas en términos de competencia.

El proyecto KOM plantea que ser competente en el aspecto personal, profesional o social es dominar (en condiciones y circunstancias justas) los parámetros esenciales de la vida. *La competencia matemática* es la habilidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de situaciones y contextos intra y extra matemáticos, en los que éstas juegan o podrían jugar un papel.

El proyecto adoptó una propuesta elaborada anteriormente por Niss para identificar las competencias matemáticas (M. Niss, 1999), y se concretó en ocho competencias, agrupadas en dos partes.

El primer grupo de competencias tiene que ver con la habilidad de preguntar y contestar preguntas respecto a las matemáticas:

- Pensar matemáticamente
- Plantear y resolver problemas matemáticos
- Modelizar matemáticamente
- Razonar matemáticamente

El segundo grupo tiene relación con la destreza o habilidad en el manejo del lenguaje matemático y de las herramientas matemáticas:

- Representar entidades matemáticas
- Manejar símbolos y formalismos matemáticos
- Comunicarse en, con, y sobre la matemática
- Hacer uso de ayudas y herramientas (incluidas las tecnológicas)

Estas ocho competencias tienen que ver con procesos, actividades, y comportamientos mentales o físicos. Es decir el enfoque está en lo que los individuos pueden hacer.

Para Niss, estas competencias están estrechamente relacionadas. Forman un grupo en el

que continuamente se solapan. Sin embargo son distintas en el sentido en que sus centros de gravedad están claramente delineados y desunidos. Todas las competencias tienen una naturaleza dual pues tienen un aspecto *analítico* y uno *productivo*. El *aspecto analítico* de una competencia se enfoca hacia la comprensión, interpretación, revisión y evaluación de fenómenos y procesos matemáticos, como, por ejemplo, seguir y controlar una cadena de argumentos matemáticos o comprender la naturaleza y el uso de alguna representación matemática. Mientras que el *aspecto productivo* se enfoca hacia la construcción activa o consecución de procesos, como inventar una cadena de argumentos o la activación y el empleo de alguna representación matemática en una situación dada.

De acuerdo con Niss (2002) una competencia matemática sólo puede desarrollarse y puede ejercerse en el manejo de una disciplina. Esto implica que la relación se puede representar adecuadamente con una matriz cuyas filas son los temas escogidos para el nivel (referido curso escolar) y las columnas sean las ocho competencias. Entonces cada celda especificaría cómo la competencia correspondiente se manifiesta al tratar con el tema correspondiente al nivel educativo dado. Sin embargo, curiosamente la opción de elección de temas a incluir en el currículo, por lo general, no sale del enfoque por competencias. Más bien las competencias y las áreas temáticas matemáticas son vistas como ortogonales.

- *PISA*

En la elaboración del sector de Matemática en PISA, participó un equipo internacional de expertos en didáctica de las matemáticas, entre ellos Jan de Lange y Mogens Niss. El equipo propone un marco teórico para PISA que enlaza el marco del procesos de matematización desarrollado por de Lange (1999) y las competencias de Niss. En este ensamblaje desarrollan la noción de *mathematical literacy*, traducido al castellano como alfabetización matemática; sin embargo, en los documentos de PISA en versión castellana (OCDE, 2003, 2006b) se ha traducido como *Competencia Matemática*.

Para el equipo OCDE/PISA, el término “competencia matemática” se ha elegido con el fin de hacer hincapié en el carácter *funcional* del conocimiento matemático y en la posibilidad de aplicarlo de forma variada, reflexiva y perspicaz a una multiplicidad de situaciones de los más diversos tipos. Para que dicho uso sea posible y viable se requiere un considerable volumen de conocimientos y habilidades matemáticas fundamentales y, como es natural, dichas habilidades forman parte de la definición de competencia que considera este equipo.

PISA, al ser un marco con propósitos evaluativos, estructura una serie de elementos necesarios para evaluar la competencia matemática. Desde nuestra perspectiva, considerando el propósito de desarrollar las competencias matemáticas en un marco de enseñanza y no sólo de evaluación, rescatamos su visión sobre los *procesos matemáticos*. Para PISA, un individuo que tenga que emplear de forma satisfactoria la matematización dentro de una gran variedad de situaciones y contextos, intra y extramatemáticos, así como en el ámbito de las ideas clave, necesita poseer una serie de procesos matemáticos que, considerados en su conjunto, y dominados en mayor o menor grado, conforman el concepto de competencia matemática.

Los ocho procesos matemáticos que se caracterizan en PISA, son una adaptación muy fiel de la propuesta de Niss (1999) para la reforma curricular danesa (Mogen Niss, 2002). A continuación se presentan las competencias que el marco teórico de PISA utiliza:

- *Pensar y razonar.* Plantear y reconocer preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones matemáticas; entender y manipular el rango y los límites de ciertos conceptos matemáticos.
- *Argumentar.* Saber qué es una prueba matemática y cómo se diferencia de otros tipos de razonamientos; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos y construir y expresar argumentos matemáticos.
- *Comunicar.* Entender y hacerse entender en forma oral o escrita.
- *Construcción de modelos.* Estudiar los procesos de modelización (identificar, reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus procesos).
- *Plantear y resolver problemas.* Plantear, formular, definir y resolver diferentes tipos de problemas matemáticos utilizando una variedad de métodos.
- *Representar.* Traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre ellas; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particular.
- *Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.* Decodificar, interpretar y manipular el lenguaje formal y simbólico, entender su relación con el lenguaje natural, utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.
- *Empleo de material y herramientas de apoyo.* Conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TICs) que facilitan la actividad matemática, y comprender las limitaciones de estas ayudas y herramientas.

3.2.2 Enfoque epistemológico en educación matemática

Uno de los componentes del MCM, la organización matemática, se fundamenta en la corriente del que se ha denominado Enfoque Epistemológico en Didáctica de las Matemáticas, iniciado por Guy Brousseau en la década de los 70. Este enfoque se construye a partir de la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau, que actúa como núcleo generador del paradigma, y de los aportes de Yves Chevallard (Transposición didáctica; Teoría Antropológica de lo Didáctico), Michèle Artigue (Reproductibilidad de Situaciones), Régine Douady (Teoría Herramienta-Objeto) y de otros autores. Este enfoque constituye un marco teórico robusto, legitimado, que dispone de resultados sólidamente probados y es seguido por una parte importante de la comunidad científica internacional que investiga en esta área. Nos apoyamos especialmente en los últimos aportes de Teoría de Situaciones de Guy Brousseau (1990) y de Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard (Chevallard, 1999; L. Espinoza, Barbé, Bosch, y Gascón, 2005).

El enfoque epistemológico considera la didáctica de las matemáticas como la “ciencia de las condiciones de creación y difusión de los conocimientos matemáticos útiles a los hombres y a sus instituciones”. Postula que la investigación de cualquier problemática didáctica debe incorporar el análisis de los conocimientos matemáticos tal cual son reconstruidos en las instituciones de enseñanza, y su correspondiente proceso de transposición didáctica (Chevallard, 1997b). Este proceso consiste en las sucesivas adaptaciones que deben experimentar los conocimientos matemáticos para ser enseñados. El proceso transpositivo plantea la necesidad de ejercer una vigilancia

epistemológica sobre la distancia, necesaria, entre el saber matemático de referencia (saber-sabio) y el saber efectivamente enseñado.

Se sostiene que aprender matemáticas consiste esencialmente en hacer matemáticas y, por tanto, en la realización de una práctica. Aprender matemáticas comporta la realización de un proceso que sitúa en el corazón del quehacer del que aprende el estudio de problemas articulados entre sí, más allá de la sola resolución de problemas aislados y, en este sentido, consiste en “ocuparse de problemas”. Según la teoría Antropológica de lo Didáctico, este proceso de estudio está constituido por distintas dimensiones o momentos del trabajo que realizan profesor y alumnos, que van desde la exploración auténtica de problemas, a la justificación y sistematización de lo matemáticamente construido, pasando por el trabajo de rutinización de los procedimientos que permite a los estudiantes no solo resolverlos, sino que plantear nuevos problemas. Un postulado básico de la didáctica de las matemáticas plantea que, para que los estudiantes encuentren el verdadero sentido y significado de los contenidos matemáticos que estudian, deben necesariamente enfrentarse con las situaciones problemáticas características de cada uno de ellos, es decir situaciones que, sin recurrir a los conocimientos relativos a dichos contenidos, no podrían ser resueltas. En este sentido el trabajo de la didáctica consiste en recuperar y analizar las situaciones originarias que provocaron la emergencia y construcción de los contenidos matemáticos, para luego adaptarlas de tal forma que sean abordables por alumnos de una determinada institución de enseñanza (Bosch, Espinoza, y Gascón, 2003).

Por ello, uno de los propósitos de la didáctica de las matemáticas es justamente el de caracterizar las condiciones bajo las cuales los aprendizajes matemáticos específicos pueden desarrollarse y, en función de ellas, proponer situaciones, dispositivos, medios y orientaciones de gestión, para que se logren efectivamente en la escuela.

Un criterio central para elaborar situaciones de aprendizaje para tal efecto consiste en elegir aquellas que potencialmente puedan generar situaciones fundamentales (Brousseau, 1990). Esto es, una situación problemática que el niño enfrenta sin la intervención directa del profesor, a través de su interacción con un medio que le devuelve información sobre la adecuación de sus acciones frente al problema, cada vez que lo manipula. En este medio intervienen ciertas condiciones o variables didácticas que, al ser controladas adecuadamente por el profesor, “obligan” al niño a progresar en sus acciones hasta lograr la construcción del conocimiento matemático esperado.

La teoría de Situaciones Didácticas distingue, al interior del proceso de enseñanza-aprendizaje, los momentos en los que el alumno trabaja sin la intervención directa del profesor en condiciones generadas por él para que los niños construyan efectivamente matemáticas en el aula, de los momentos en que el profesor interviene directamente sobre el trabajo de los niños. En el primer caso, los alumnos se enfrentan a la exploración y estudio de problemas mediante la interacción con sus compañeros y con un medio, rigurosamente estructurado, que les devuelve información sobre la adecuación de las acciones realizadas frente al problema en estudio. Este tipo de situaciones, denominadas a-didácticas, resultan ser esenciales para que los estudiantes construyan conocimiento matemático significativo. En el segundo caso, se requiere de la intervención del profesor para institucionalizar, es decir sistematizar y legitimar el conocimiento, reconociéndolo como matemático. En este tipo de situaciones la participación del alumno también es central, pero requiere de la gestión directa del profesor, y por ello se denominan situaciones didácticas. Parte fundamental de la participación del alumno la constituye la validación de la producción de soluciones a las situaciones problemáticas abordadas. Por validación se entiende el proceso a través del cual un alumno puede determinar si su

producción ha sido adecuada o no y, especialmente, argumentar el por qué de su adecuación. Se trata de un modo de control de la producción sustentado en conocimiento matemático que es típico del quehacer matemático y que puede ser implementado en la escuela.

La teoría antropológica de lo didáctico, en adelante TAD, por su parte, adopta un punto de vista institucional de la problemática didáctica, situándola dentro del marco más general de las prácticas humanas.

Al considerar desde una perspectiva global el problema escolar en torno a las matemáticas, se observa que la sociedad se esfuerza por lograr condiciones de bienestar para sus miembros, y especialmente para las generaciones más jóvenes, a través de la creación y consecuente difusión de obras matemáticas, intentando por ello poner el conocimiento correcto en el lugar correcto. Según la TAD, hay principalmente dos formas de hacer esto. La primera ya ha sido ampliamente criticada: consiste en difundir obras alejadas de sus razones de ser, de sus sentidos originales, como si las obras fueran significativas por sí mismas. La segunda forma consiste en asumir que las obras “viajan” a través de la sociedad por la necesidad de resolver problemas o para revolver cuestiones. Básicamente, la situación puede ser resumida así: se plantea una cuestión Q y se intenta buscar una respuesta R. La cuestión podría ser, por ejemplo, “¿cómo podemos vivir juntos en paz?” o “¿cómo podemos realizar cálculos con números grandes?”, esto es con números con los que la calculadora de mi teléfono celular no puede trabajar. Estas cuestiones son cuestiones “prácticas”, porque responderlas equivale a proporcionar una “técnica”. La respuesta a la primera pregunta permitiría a la gente vivir juntos pacíficamente, y, en el segundo caso, permitiría a la gente realizar cálculos con grandes números de modo efectivo. Pero una respuesta no puede ser reducida sólo a la praxis; ésta requiere alguna forma de justificación, de modo que cualquier respuesta debe ser pensada como una parte de una obra completa, es decir de una organización que contenga sus elementos prácticos y teóricos. Así, para justificar una técnica de cálculo con números grandes, se tendrá que recurrir a la aritmética básica.

Así, se considera la matemática como una producción social y cultural que responde a cuestiones problemáticas planteadas; por tanto, cuando en la escuela se enseña cualquier contenido de las matemáticas, se está transmitiendo parte de una obra humana, se está transmitiendo cultura. De esta forma, la enseñanza debe plantearse la comunicación de un quehacer o una práctica que conserve los rasgos esenciales de la práctica matemática. Esto exige analizar cuáles son las formas de pensar y producir en matemática que pueden comunicarse a través de la escuela.

Una primera cuestión plantea que es necesario que las matemáticas sean estudiadas porque resuelven cuestiones problemáticas importantes, en particular para la vida. Esta exigencia es descrita como la necesidad de conservar la funcionalidad de los conocimientos, esto es, que respondan a una necesidad, y que sirvan para “hacer cosas”. Otra cuestión esencial es la de la justificación de las producciones por parte de los alumnos. La matemática brinda la posibilidad de tener un vínculo particular con la verdad. Los alumnos deben aprender a usar el conocimiento como medio para fundamentar su trabajo. Esto sería un modo de control de la producción sustentado en conocimiento matemático; es algo típico del quehacer matemático y es posible de comunicar a través de la escuela.

Para modelizar el conocimiento matemático, la TAD utiliza la noción de organización o praxeología matemática, o bien de obra matemática. Una organización matemática, en adelante OM, nace como respuesta a un tipo de cuestiones problemáticas y está constituida por cuatro categorías de elementos: tipos de tareas, elementos técnicos,

tecnológicos y teóricos. Las técnicas generan nuevos problemas y apelan a nuevos resultados tecnológicos que, a su vez, permiten desarrollar técnicas ya establecidas, así como abordar y plantear nuevas cuestiones (Chevallard, 1997a). Esta primera modelización hace referencia a una constitución estática o estructural de la actividad matemática.

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas aparecen como medios para la construcción de OM en la escuela; ambos procesos están incluidos dentro de un proyecto común que esta teoría denomina el proceso de estudio de las matemáticas (Chevallard, 1997a). Este proceso es modelizado a través de la teoría de los momentos didácticos. Esta segunda modelización hace referencia al aspecto dinámico o funcional de la actividad matemática, que puede ser descrita a través de seis momentos. Los momentos se distribuyen de forma dispersa a lo largo del proceso de estudio, pueden aparecer más de una vez en dicho proceso, e incluso pueden coexistir entre ellos. Estos momentos son: momento del primer encuentro, exploratorio, del trabajo de la técnica, tecnológico-teórico, de la institucionalización y de la evaluación.

A pesar de la relación intrincada que existe entre lo matemático y lo didáctico, parece razonable que el análisis de la actividad matemática empiece precisamente por el análisis de las OM que emergen de esta actividad (Chevallard, 2004). Así, en nuestra investigación analizamos las organizaciones matemáticas, tales como éstas han sido propuestas en los actuales programas de estudio del primer ciclo básico. Este análisis curricular ha permitido identificar las tareas matemáticas asociadas a los aprendizajes esperados, indicadores y actividades genéricas propuestas. Asimismo, se ha podido identificar las condiciones de realización de las tareas que, realizadas bajo dichas condiciones, promoverán que los alumnos alcancen dichos aprendizajes.

Cada organización matemática es el resultado de un proceso de estudio, realizado en el seno de una institución determinada. Dicha institución impone restricciones específicas para la realización del estudio; una estructura particular y unas condiciones de realización determinadas. Este segundo tipo de análisis, que aborda la dimensión fáctica, es realizado mediante las nociones de praxeología didáctica, tanto del profesor como del alumno, la teoría de los momentos didácticos y el contrato didáctico.

La noción de praxeología didáctica del profesor nos permite describir su actividad docente en términos de su componente práctica (el “saber-hacer” o praxis) y su componente teórica y justificadora (el “saber” o logos). Podemos distinguir, a su vez, dos niveles de análisis de dicha práctica. El primero se centra en estudiar los tipos de tareas y técnicas didácticas que utiliza el profesor para organizar y dirigir el proceso de estudio de una OM específica en una institución de enseñanza determinada. Al lado de las técnicas didácticas, se sitúan, en un segundo nivel, las tecnologías y elementos teóricos que permiten al profesor describir, justificar, organizar y dirigir su práctica. Análogamente, la noción de praxeología didáctica del alumno nos permite describir su actividad en términos de su componente práctica y su componente teórica.

Realizar el estudio de una OM forma parte de un proyecto común entre profesor y alumnos, que es establecido dentro del marco más amplio de una institución de enseñanza específica. En el desarrollo y evolución de dicho proceso se van estableciendo, a través de un proceso de negociación más o menos implícito entre los participantes de dicho proyecto, las normas que van a regir el funcionamiento y desarrollo del estudio. Se van negociando y estableciendo las cláusulas del contrato didáctico que adjudican y distribuyen las responsabilidades tanto al profesor como a los alumnos (Brousseau, 1990). Estas reglas delimitan qué cosas se pueden hacer durante el estudio de una OM determinada y cuáles no están permitidas. Así, cuando existe un proceder

más o menos generalizado en los estudiantes, es probable que dicho comportamiento obedezca a ciertas normas del contrato didáctico, o a las transgresiones de éstas, las que se designan como *rupturas de contrato*.

Se constata que el contrato didáctico está influenciado por las restricciones que la institución de enseñanza le impone. La práctica del profesor se encuentra sometida a todo tipo de imposiciones institucionales que gobiernan los aspectos generales que afectan el entorno del estudio, es decir, los aspectos no específicos del contenido matemático en estudio, y que constituyen el contrato escolar (Chevallard, 1997a). Estas imposiciones institucionales ejercen igualmente fuertes influencias sobre la práctica del alumno.

La didáctica de las matemáticas utiliza, en sus esfuerzos de modelización, un enfoque sistémico; considera el sistema didáctico formado por tres polos: el profesor, el alumno y el saber, y estudia las interacciones y fenómenos que se producen entre el profesor y el alumno, o un grupo de alumnos, a propósito de la transmisión de un saber matemático. Puesto que se trata de un proyecto social de aprendizaje, la acción de enseñar es intencionada, y está sujeta a las opciones culturales que realiza la institución escolar.

Lo que va a definir al alumno y al profesor como tales, es el proyecto del sistema didáctico, que consiste en pasar de un estado inicial a un estado final en relación con el saber. Las posiciones del alumno y el profesor son claramente asimétricas en el sistema didáctico, ya que en el estado inicial el profesor mantiene una relación privilegiada con el saber, en tanto que el alumno, si bien mantiene relación con el saber antes de la enseñanza, ésta es poco adecuada. En el estado final, el profesor desaparece y el alumno mantiene, de forma autónoma, una relación adecuada con el saber. Por ello, Brousseau afirma que el sistema didáctico contiene, desde el principio, el proyecto de su propia extinción.

3.2.3. Niveles de Complejidad Cognitiva

La discusión sobre niveles de complejidad en los problemas matemáticos se ha desarrollado principalmente bajo un punto de vista evaluativo. Dekker y Querelle (2002) aplican la Pirámide de De Lange (1995) para exponer criterios en la clasificación de actividades matemáticas en tres niveles de complejidad.

El modelo originalmente fue diseñado como un triángulo (figura 3.1) para adaptar el diseño de la prueba TIMSS en Holanda (Boertien y de Lange, 1994).

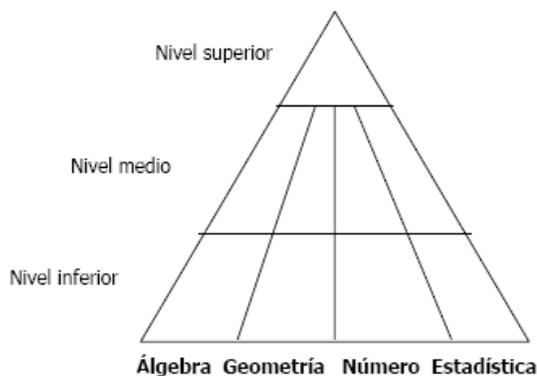


Figura 3.1: Modelo original de De Lange

Como se puede apreciar, horizontalmente se indican los distintos ejes curriculares de la matemática escolar y verticalmente se indican los niveles de complejidad, o niveles de competencia como denomina De Lange, que un alumno debe poseer para resolver correctamente un determinado problema (del nivel 1 para el más bajo al nivel 3 para el más alto).

La forma triangular se debe a la necesidad de indicar la cantidad de problemas y preguntas para cada uno de los tres niveles que deben incluirse en una prueba equilibrada, así como también representa la distribución de la ponderación en los distintos niveles. De este modo, la mayor cantidad de tiempo así como el mayor número de puntos deberán darse para las preguntas del nivel 1 (la base del triángulo). En la punta del triángulo están las preguntas del nivel 3, éstas deben aparecer en toda prueba que pretenda ser equilibrada pero en menor cantidad que los otros. Los problemas del nivel 3 son más difíciles de resolver y llevan más tiempo que aquellos en los que se evalúan habilidades básicas.

En la discusión de este modelo surgió el debate de que un problema de nivel superior no necesariamente tenía que ser difícil para el estudiante. Inversamente un problema de bajo nivel en complejidad podía ser difícil para los estudiantes. Por tanto se incorporó una tercera dimensión en el modelo. El grado de dificultad del problema, que permite hacer una distinción entre problemas simples y más difíciles dentro de un mismo nivel. El triángulo se convirtió en una pirámide (figura 3.2).

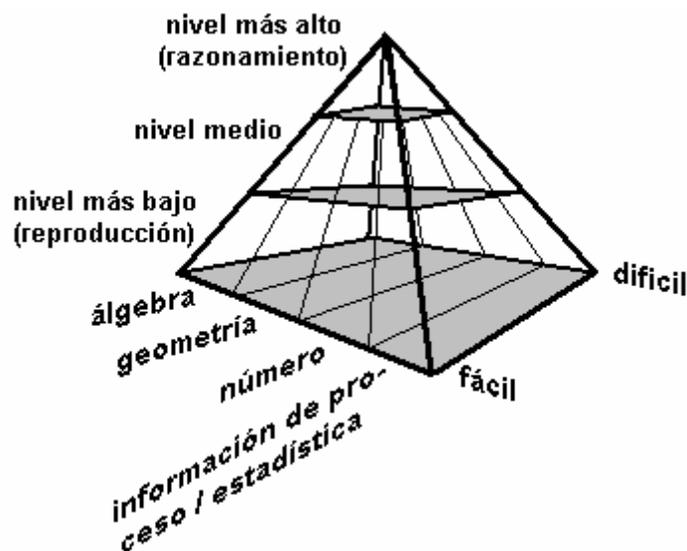


Figura 3.2: Pirámide de De Lange (de Lange, 1995)

A continuación se exponen los criterios para distinguir los tres niveles de complejidad.

- **Nivel 1 (N1): reproducción, procedimientos, conceptos y definiciones**

Las respuestas a problemas de N1 a menudo requieren conocimiento de datos y definiciones, procedimientos rutinarios y algoritmos estandarizados, que por lo general se han memorizado y practicado en clases anteriores. Un problema en N1 puede ser más simple o difícil. A menudo, una parte considerable de una prueba consistirá en problemas

de N1 para determinar si los estudiantes dominan los hechos o habilidades básicas enseñadas.

- **Nivel 2 (N2): Conexiones e integración para resolver problemas**

En un nivel 2 de complejidad, se dan los siguientes criterios:

- a) Los problemas en un N2 muy a menudo pueden resolverse correctamente de varias maneras diferentes.
- b) Los alumnos elijen sus propias estrategias y herramientas matemáticas.
- c) Para resolver los problemas frecuentemente es necesario hacer conexiones entre los diferentes tópicos de la matemática. Las conexiones requieren que los alumnos distingan y relacionen definiciones, ejemplos, suposiciones y pruebas.
- d) En la formulación del problema se incluye información redundante para que el alumno tenga que decidir qué datos son relevantes para resolverlo.
- e) Se espera que los alumnos manejen diferentes representaciones de acuerdo a la situación específica y el propósito a mano, por ejemplo: texto, diagrama, fórmulas, tablas, etc.
- f) Los alumnos necesitarán saber la diferencia entre una situación realista y el modelo matemático y ser capaces de traducir de uno al otro. En este nivel no se espera que ellos mismos modelen la situación.

En problemas de nivel N2, se limita la cantidad de información presentada para que el texto o el material visual no guíen al alumno en una dirección particular al resolver el problema. Para lograr este nivel de razonamiento, se espera que los alumnos infieran el conocimiento, las herramientas y/o procedimientos que necesitarán usar para dar una respuesta aceptable a partir del contexto del problema.

Siguiendo el punto f), en este nivel no se espera que los alumnos hagan sus propios modelos matemáticos, pero sí deberán ser capaces de criticarlos. A partir de un modelo matemático dado de una situación, se espera que los alumnos resuelvan el problema dentro de este modelo, regresar a la situación realista y ajustar la respuesta de acuerdo a esta situación.

Un problema que está clasificado como N1 para un determinado grupo de edad, podría ser de N2 para otro grupo, o para el mismo grupo en otro momento del año lectivo. En qué nivel de complejidad es etiquetado un problema no sólo depende del formato y del contenido sino también de si este tipo de problema ya fue practicado en la clase. En otras palabras, depende de lo que se ha enseñado previamente.

- **Nivel 3 (N3): Matematización, pensamiento, razonamiento matemático, generalización.**

En este nivel los estudiantes tendrán que:

- a) Matematizar situaciones, ser capaz de desarrollar nuevas estrategias y crear modelos propios.

- b) Reconocer y extraer la matemática implícita en una situación; y hacer suposiciones respecto a la información que falta.
- c) Elegir herramientas matemáticas para resolver problemas más complicados.
- d) Ser capaces de comparar el contenido matemático del problema dado con el de otros problemas contextuales y de generalizar.
- e) Dar argumentos matemáticos, pruebas y comunicar el proceso de resolución.
- f) Plantear sus propias preguntas en vez de solamente responder a las de otros.

En general se trata de problemas poco familiares para los alumnos, pero en que ellos deben ser capaces de manejar las ideas y herramientas matemáticas necesarias para su resolución.

En un N3, los problemas evalúan la actitud crítica del alumno frente a la respuesta y su capacidad para reflexionar acerca del proceso de resolución. No sólo deberán ser capaces de resolver problemas, si no también plantear preguntas, comunicar procesos y resultados. Este tipo de problema requiere un correcto razonamiento matemático y los alumnos deben ser capaces de criticar un modelo matemático y volver a modelizar si es necesario. Ellos pueden usar un modelo matemático para organizar una situación realista, tratar de resolver el problema, re-modelizar, resolver el problema, hacer una transición hacia la situación realista y decidir si la solución es útil o no dentro de esta situación.

Para muchos problemas de N3 no siempre es fácil identificar el contenido como álgebra, geometría, número, etc. Como se aprecia en la pirámide de De Lange, en el nivel más alto de complejidad la diferencia entre los ejes matemáticos desaparece, algunas veces el mismo problema puede resolverse tanto geométrica como algebraicamente. Una vez más el alumno elegirá su propia estrategia o inventará otras nuevas. Estos problemas por lo general son difíciles de resolver y diseñar.

En el ejercicio de caracterizar estos niveles en términos de competencias, PISA sugiere una nomenclatura que resulta más operativa para clasificarlos:

La intención del proyecto OCDE/PISA no consiste en desarrollar preguntas de prueba que evalúen las competencias arriba mencionadas por separado. Dichas competencias se entremezclan y a menudo es necesario, al ejercitar las matemáticas, recurrir al mismo tiempo a muchas competencias, de manera que el intentar evaluar las competencias por separado resultaría por lo general una tarea artificial y una compartimentación innecesaria del área. Las diferentes competencias que presenten los alumnos variarán considerablemente de una persona a otra.

Para describir y transmitir de manera productiva las capacidades de los estudiantes, así como sus puntos fuertes y sus puntos débiles desde una perspectiva internacional, es necesaria cierta estructura. Un modo de ofrecerla de una manera comprensible y manejable es describir grupos de competencias a partir de los tipos de requisitos cognitivos necesarios para resolver diferentes problemas matemáticos.

El proyecto OCDE/PISA ha elegido describir las acciones cognitivas que estas competencias engloban de acuerdo a tres grupos de competencia: el grupo de reproducción, el grupo de conexión y el grupo de reflexión.

(OCDE, 2003)

La reflexión citada, que sustenta el marco teórico de PISA, ya se encuentra en un proyecto anterior del propio de Lange (1999), y es en dicho proyecto en el que surge la idea de “*Grupos de competencia*”. Rico y Lupiáñez (2008) explican que las competencias matemáticas no son variables de la tarea matemática, sino del sujeto que las ejecuta, y por ello, no es posible establecer *a priori* a cuál de los procesos elegidos corresponde asignar una tarea determinada. Por lo general una tarea puede movilizar diversos procesos, puesto que los sujetos que la resuelven lo pueden hacer por distintas vías. Las respuestas de los sujetos a tareas con distintos niveles de complejidad permiten establecer niveles de competencia entre los estudiantes. En los resultados empíricos de la prueba PISA se confirma la hipótesis de que los estudiantes que resuelven problemas de mayor complejidad también responden a los problemas de complejidad inferior; por tanto, a partir de los resultados de los estudiantes se observa una mayor riqueza de niveles que el planteamiento teórico en tres categorías de complejidad.

Así, los Grupos de Competencia se distinguen por las *demandas cognitivas* implicadas en los procesos requeridos por las tareas que los ejemplifican. En la tabla 3.2 se definen los tres *grupos de competencia* y se tratan las maneras en que se interpretan cada una de las competencias dentro de cada grupo.

Tabla 3.2: Grupos de competencia

Reproducción	Conexión	<i>Reflexión</i>
Las competencias de este grupo implican esencialmente la reproducción del conocimiento estudiado. Incluyen aquellos que se emplean más frecuentemente en las pruebas estandarizadas y en los libros de texto: conocimiento de hechos, representaciones de problemas comunes, la identificación de equivalentes, recopilación de propiedades y objetos matemáticos familiares, ejecución de procedimientos rutinarios, aplicación de destrezas técnicas y de algoritmos habituales, el manejo de expresiones con símbolos y fórmulas establecidas y realización de cálculos.	Las competencias del grupo de conexión se apoyan sobre las del grupo de reproducción, conduciendo a situaciones de solución de problemas que ya no son rutinarias, aunque aún incluyen escenarios familiares o casi familiares.	Las competencias de este grupo incluyen un elemento de reflexión por parte del estudiante sobre los procesos necesarios o empleados para resolver un problema. Relacionan las capacidades de los alumnos para planificar estrategias de resolución y aplicarlas en escenarios de problema que contienen más elementos y pueden ser más “originales” (es decir, menos familiares) que los que se dan en el grupo de <i>conexión</i> .

3.2.4. Competencias organizadoras del currículo

En el marco del proyecto FONIDE DED0706(Lorena Espinoza et al., 2008) se lograron identificar cuatro competencias matemáticas en el currículum de estos niveles,

compuestas cada una por un conjunto de procesos matemáticos: resolución de problemas, representación, razonamiento y argumentación, cálculo y manipulación de expresiones

A continuación, se muestran las *Competencias Organizadoras del Currículo*, para las cuales se identifican los procesos que integran cada competencia y se describe, en términos generales, su significado.

3.2.4.1. Resolución de Problemas

Proceso	Descripción del proceso
Entender el problema	Corresponde a la atribución de significado al enunciado, entender el contexto en el que se sitúa el problema.
Modelizar	Abarca los elementos de la construcción de un modelo: identificar el modelo, construir un modelo, reflexionar sobre el modelo.
Desarrollar y/ o adaptar estrategias para resolver problemas	Corresponde a la identificación y/o construcción de una(s) estrategia(s) para abordar el problema: heurísticas, de razonamientos, casos particulares, etc.
Aplicar la estrategia para resolver el problema	Corresponde a la aplicación de la estrategia adoptada.
Interpretar la respuesta en contexto del problema	Una vez aplicada la estrategia y obtenida una respuesta, interpretar el resultado en términos del contexto del problema y responder la(s) pregunta(s) planteada en su enunciado.
Formular problemas	Corresponde a la formulación de un problema dadas algunas condiciones. (A partir de unos datos, crear una situación problemática, etc.)

Para ilustrar la movilización de cada proceso de la competencia resolución de problemas, analizaremos un problema y su desarrollo para encontrar la solución:

Problema.

“Para una fiesta de cumpleaños se necesita traer un gorro para cada uno de los invitados, sin que sobre ni falte ninguno”.

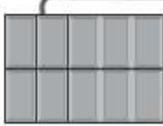
Los niños cuentan con una lámina que muestra la cantidad de invitados a la fiesta, estos se presentan agrupados de 5. Al otro extremo de la sala, se encuentran los gorros, los niños deben traerlos en un solo viaje y con la restricción que no pueden llevar la lámina con los invitados al lugar donde se encuentran los gorros.

- **Entender el problema:** en este caso consiste en que los niños identifiquen que la lámina muestra los invitados a la fiesta, para los cuales deben traer un gorro, en un solo viaje, sin dejar a ningún invitado sin gorro y sin que algún invitado tenga más de un gorro. Por otra parte, los niños deben considerar que no pueden disponer de la lámina y los gorros simultáneamente.
- **Modelizar:** consiste en identificar que el *conteo* es el modelo que permitirá traer un gorro a cada uno de los invitados a la fiesta, sin que sobre ni falte ninguno.

- **Desarrollar y/ o adaptar estrategias para resolver problemas:** consiste en buscar una estrategia que permita realizar el conteo de forma eficaz, en este caso, los niños deben decidir desarrollar y/o adaptar una de al menos tres estrategias, por ejemplo, decidir contar los invitados de 1 en 1, decidir contar los invitados de 5 en 5 basándose en la disposición espacial en que vienen presentados los invitados, o decidir juntar dos grupos de 5 para contar los invitados de 10 en 10.
- **Aplicar la estrategia para resolver el problema:** corresponde al conteo de los invitados a la fiesta utilizando la estrategia seleccionada en el proceso anterior, con el fin de establecer la cantidad de gorros que se necesita traer. Posteriormente, deben seleccionar una cantidad de gorros igual al cardinal encontrado.
- **Interpretar la respuesta en contexto del problema:** consiste en poner los gorros sobre los invitados ilustrados en la lámina y establecer si alcanzaron los gorros, sin que sobrara ninguno, en este caso la tarea se realizó exitosamente. En caso de que sobren o falten gorros, deben establecer que la estrategia escogida no fue la correcta o se equivocaron al desarrollarla.
- **Formular problemas:** por ejemplo, la siguiente situación plantea que los niños formulen la pregunta a una situación aditiva dada.

Problema.

“Considera los precios de los siguientes productos y responde la pregunta”



Chocolate
\$ **120**



Jugo
\$ **150**

Si alguien realizó la operación: $120 + 150 = 270$. ¿Qué quería saber?

3.2.4.2. Representación

Procesos	Caracterización de los procesos
Entender y utilizar las relaciones entre diversas representaciones de la misma entidad	Considera entender y utilizar diferentes representaciones que pueden darse a una misma entidad matemática (o modelo).
Escoger y traducir representaciones en otras	Traducir una representación de una entidad matemática en otra representación de la misma entidad.
Usar representaciones para interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos (construcción de modelo intermedio)	Atribuirle un significado a las representaciones y utilizarlas dentro de un contexto (fenómenos físicos, sociales y matemáticos) para interpretar datos.

Para ilustrar la movilización de cada proceso de la competencia representación, presentaremos una actividad para cada uno de los procesos que la componen:

- **Entender y utilizar las relaciones entre diversas representaciones de la misma entidad:** por ejemplo en la siguiente situación, los niños deben entender que un número se puede escribir como la suma de otros dos.

Escribe tres números que sumen 453.

$$\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = \boxed{453}$$

- **Escoger y traducir representaciones en otras:** por ejemplo, para resolver el siguiente problema: *Tengo 86 dulces y regalo 9, ¿cuántos dulces me quedan?*

Un niño, podría resolverlo como aparece en la siguiente ilustración:



Entonces el sustraendo 9, lo traduce a la representación $6 + 3$, que en este caso, es la más conveniente para realizar el cálculo.

- **Usar representaciones para interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos (construcción de modelo intermedio):** por ejemplo, para la siguiente situación, la utilización de una representación gráfica o esquema, permite relacionar los datos con la incógnita:

Problema:

“En una caja hay 220 libros de matemática, si hay 40 libros más de matemática que de lenguaje, ¿cuántos libros de lenguaje hay?”

220 Matemática

Lenguaje

40

3.2.4.3. Razonamiento y Argumentación

Procesos	Caracterización de los procesos
Formular, investigar conjeturas matemáticas a partir de regularidades.	Formular e investigar conjeturas matemáticas que se construyen a propósito de ciertos datos provenientes de una situación intra o extra matemática.
Sintetizar, sistematizar y generalizar conjeturas matemáticas	Considera la identificación de una expresión o modelo que exprese una conjetura, por ejemplo la generalización de una propiedad matemática. También se refiere a la capacidad de sintetizar los aspectos relevantes de un tema matemático, rescatando las ideas nucleares.
Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y demostración	Justificar y evaluar los procedimientos utilizados recurriendo a propiedades y a la lógica matemática. Frente a un mismo ente matemático utilizar distintos tipos de razonamiento para comprenderlo y/o para demostrarlo.
Desarrollar y evaluar argumentos	Considera desarrollar una estructura argumentativa en el razonamiento, respecto a uno mismo o a los demás. Evalúa los elementos de un proceso de prueba: evidencia, justificaciones, demostraciones.
Comunicar su pensamiento matemático	Explicar tanto de forma oral como escrita un razonamiento usado.

Para ilustrar la movilización de cada proceso de la competencia razonamiento y argumentación, presentaremos una actividad para cada uno de los procesos que la componen:

- **Formular, investigar conjeturas matemáticas a partir de regularidades:** por ejemplo, un profesor pregunta a sus estudiantes *¿cuántas pelotas hay?* La colección de pelotas se encuentra presentada en una hilera. A continuación, las mismas pelotas las desordena quedando dispuestas en forma aleatoria y realiza la misma pregunta, *¿cuántas pelotas hay?*. Luego organiza las pelotas de forma circular, y vuelve a hacer la misma pregunta.

Así, se espera que los niños realicen un conteo para responder la pregunta planteada por el profesor, sin embargo, luego de dos o tres veces que han cuantificado la colección de pelotas, se espera que establezcan una regularidad. Es decir, que señalan con sus propias palabras que para esa colección, no importa la disposición de los objetos, el cardinal se mantiene si no se agregan ni quitan objetos. Luego, continúan probando si dicha regularidad se cumple al realizar la misma actividad con otras colecciones.

- **Sintetizar, sistematizar y generalizar conjeturas matemáticas:** siguiendo con el ejemplo anterior, una vez que los niños han investigado y han probado con distintas colecciones, que el cardinal se mantiene aunque cambie la disposición espacial de sus objetos, generalizan sus conjeturas a través del principio de conservación de la cantidad.
- **Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y demostración:** por ejemplo, un profesor plantea el siguiente problema a sus estudiantes:

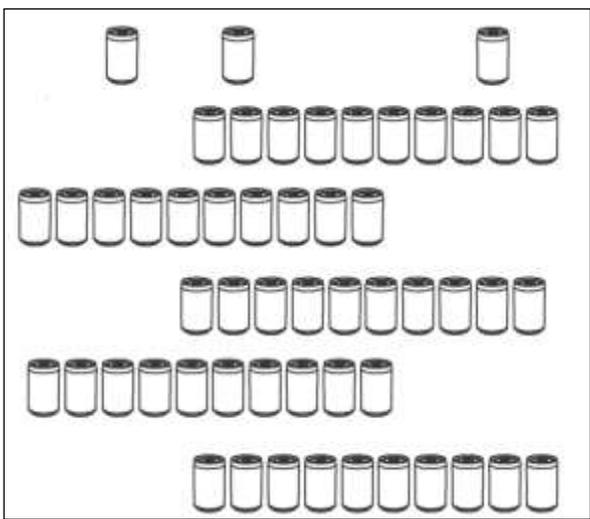
Problema:

“Alfredo tiene 57 lápices de colores, regala 9 lápices a su hermana, ¿cuántos lápices le quedan?”. El profesor pide a los estudiantes que busquen dos formas de resolver el cálculo y que comprueben que el resultado obtenido en ambos casos es correcto.

- **Desarrollar y evaluar argumentos:** por ejemplo, un profesor plantea el siguiente problema a sus estudiantes:

Problema:

Un profesor dibuja en la pizarra la siguiente colección de latas de bebidas:



Luego señala: “para resolver el siguiente problema un niño contó todas las latas de 1 en 1 (ejemplifica la acción desarrollada por el estudiante), y otro niño contó todas las latas de 10 en 10 y luego contó las sueltas (ejemplifica la acción desarrollada por el estudiante), luego pregunta: ¿de qué forma es más conveniente contar?, ¿por qué?”

- **Comunicar su pensamiento matemático:** por ejemplo, en el caso anterior, la verbalización por parte de los niños de la elección del procedimiento más eficaz y su justificación, movilizan la comunicación de su pensamiento matemático.

3.2.4.4. Cálculo y Manipulación de Expresiones

Procesos	Caracterización de los procesos
Descifrar e interpretar expresiones matemáticas	Considera dar sentido a una expresión matemática o geométrica en un contexto determinado.

y/o geométricas	
Usar y/o manipular expresiones matemáticas	Considera la manipulación de las diferentes expresiones matemáticas, siguiendo las leyes de estructura matemática a la que pertenece.
Calcular y/o cuantificar	Referido al cálculo: desarrollo de las operaciones, aplicación de una técnica, etc.
Comunicar la manipulación de expresiones y cálculos	Describir de forma oral o escrita lo que se ha hecho al desarrollar un procedimiento o los cálculos llevados a cabo.

Para ilustrar la movilización de cada proceso de la competencia manipulación de expresiones matemáticas, presentaremos una actividad para cada uno de los procesos que la componen:

- **Descifrar e interpretar expresiones matemáticas y/o geométricas:** por ejemplo, la siguiente situación.

Problema:

“Marca con una X el número mayor”

67

76

- **Usar y/o manipular expresiones matemáticas:** por ejemplo, en la siguiente situación los niños deben manipular expresiones numéricas, a través de la completación de una secuencia.

Problema:

“Completa la secuencia de números. Esta secuencia va de 2 en 2”

291 295 297

- **Calcular y/o cuantificar:** por ejemplo, en el desarrollo del siguiente cálculo:

$$340 + 60 =$$

- **Comunicar la manipulación de expresiones y cálculos:** por ejemplo, en el caso anterior, la explicitación del procedimiento utilizado para resolver el cálculo moviliza dicho proceso.

3.2.5. Competencias en estudio

Para este proyecto se ha profundizado en algunos de los procesos y competencias trabajados anteriormente. En particular, se ha enfatizado la Modelización (como competencia en sí, y no como proceso de la resolución de problemas) y la Argumentación. Además, se ha considerado la comunicación como un enfoque analítico de las prácticas docentes, ya que esto permite observar cómo se gestionan las competencias a nivel general, y la argumentación en particular.

3.2.5.1. Modelización

La modelización en el aula de matemáticas es uno de los tópicos que actualmente destaca en Didáctica de las Matemáticas. Ello se puede evidenciar en la fuerza que ha tomado el grupo de trabajo de modelización matemática del ICMI que en la última década ha publicado varios libros sobre modelización en el aula de matemáticas en todos los niveles educativos. También podemos justificar su importancia en el contexto del currículo escolar chileno. En las bases curriculares puestas a disposición pública por el Ministerio de Educación (Mineduc, 2011) aparece la modelización como una de las cuatro habilidades a promover desde primero básico en el subsector de matemáticas.

Por otra parte, la modelización se vincula cada vez más con la noción de competencia, al nivel de que gran parte de las comunicaciones del estudio ICMI 14 (Blum, Galbraith, Henn, y Niss., 2007) trabajan directamente con la competencia de modelización.

En general, la modelización se trata como una complejización del proceso de resolución de problemas: resolver un problema proveniente de una situación real por medio de un modelo matemático. El esquema de la figura 3.1 (Maaß, 2006) muestra la secuencia en las fases de modelización.

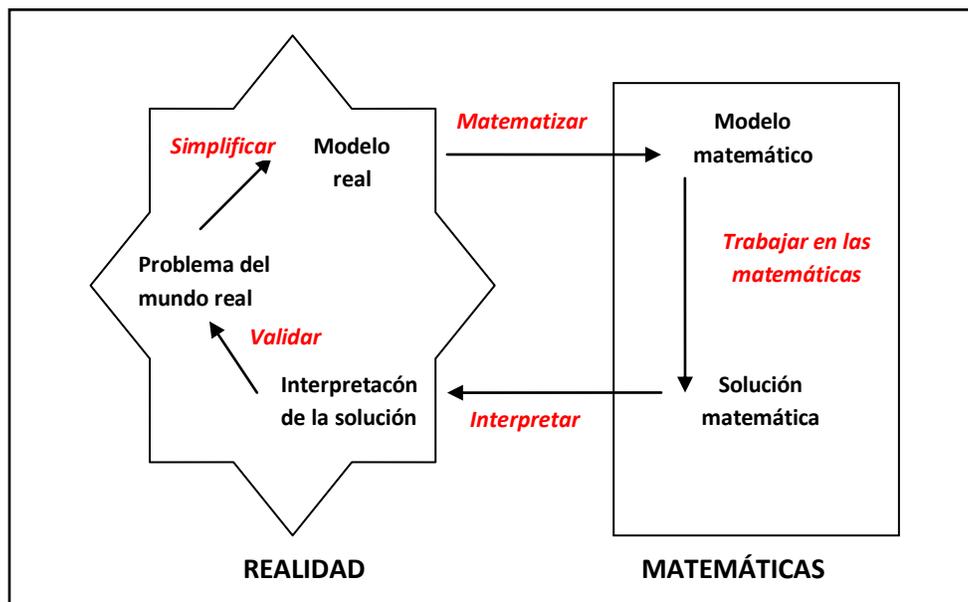


Figura 3.1: fases de modelización (Maaß, 2006)

La relación entre las competencias y la modelización ha sido interpretada principalmente de dos maneras:

- Conjunto de acciones a llevar a cabo en las fases de modelización (Kaiser, 2007). Maaß (2006) amplía la lista de competencias a otras que no son parte de las fases de modelización, tales como competencias del tipo metacognitivo, argumentativo y actitudinal.
- Las competencias entendidas como niveles de complejidad (Greer y Verschaffel, 2007; Henning y Keune, 2007). En el primer nivel se reproducen conocimientos. El segundo nivel se asocia a la traducción del problema real al problema matemático; es decir, a las diferentes fases de modelización. El tercer nivel se asocia a competencias de reflexión, abordando la modelización con un sentido crítico.

En nuestro estudio, la modelización tiene el propósito de ser desarrolladora de competencias, y por tanto, incorpora las dos visiones sobre las competencias antes mencionadas.

Por otra parte, existe una variedad de descripciones sobre el término modelización. La propuesta de Penrose (1978, extraído de Houston, 2007) es una de las pioneras que describe los pasos en el proceso de modelización. Posteriormente han seguido propuestas con la misma base pero que destacan otros aspectos tales como el modelo de la situación real (Maaß, 2006), y la relación entre la teoría y los datos en el proceso de modelización (Blomhøj y Højgaard, 2003). Desde un enfoque evaluativo, Houston (2007) caracteriza criterios para evaluar las fases de la modelización en los estudiantes.

De acuerdo con Maaß (2006), para modelizar un problema real hay que moverse entre la realidad y la matemática. El proceso de modelización comienza en el mundo real; simplificando, estructurando e idealizando este problema se obtiene un modelo real. La matematización del modelo real conduce a un modelo matemático. Trabajando dentro de las matemáticas se obtiene una solución matemática; esta solución tiene que ser primero interpretada y luego validada. Si la solución o el proceso elegido no resulta ser adecuado a la realidad, los pasos o quizás incluso la totalidad del proceso de modelización necesita ser revisado.

En nuestra investigación, entenderemos por fases de modelización las cinco etapas de la propuesta de Maaß (2006).

3.2.5.2. Argumentación

En general, los análisis de argumentación en el aula se sustentan en el modelo argumentativo propuesto por Toulmin (1958), que sigue un proceso lineal desde los datos hasta las conclusiones. Esta secuencia consta de seis elementos (Sardà y Sanmartí, 2000): *Datos* (hechos o informaciones factuales, que se invocan para justificar y validar la afirmación), *Conclusión* (la tesis que se establece), *Justificación* (son razones, reglas, principios, que se proponen para justificar las conexiones entre los datos y la conclusión), *Fundamentos* (es el conocimiento básico que permite asegurar la justificación), *Calificadores modales* (aportan un comentario implícito de la justificación; de hecho, son la fuerza que la justificación confiere a la argumentación), *Refutadores* (también aportan un comentario implícito, pero señalan las circunstancias en que las justificaciones no son ciertas). La figura 3.2 muestra la relación entre estos elementos:



Figura 3.2: Modelo argumentativo de Toulmin (1958)

Para estudiar la argumentación en el aula de matemáticas, Krummheuer (1995) propone una secuencia de argumentación basada en el modelo argumentativo de Toulmin. Sin embargo, reduce el sistema original a cuatro elementos: datos, justificación, fundamentos y conclusión.

En Solar (2009) se propone que los procesos que conforman la estructura argumentativa, depende de las estructuras matemáticas en juego. En efecto, en el uso de gráficas, la interpretación es un proceso significativo en la secuencia argumentativa dado que sirve de sostenimiento a los datos y apoya la justificación.

3.2.5.3. Comunicación

El proceso de comunicación ayuda a dar significado y permanencia a las ideas, y a hacerlas públicas. Cuando se estimula a los estudiantes a pensar y razonar acerca de las matemáticas y a comunicar a otros los resultados de su pensamiento, oralmente o por escrito, aprenden a ser claros y convincentes. Los alumnos que tienen oportunidades, incentivo y apoyo para hablar, escribir, leer y escuchar en las clases de matemáticas, se benefician doblemente: comunican para aprender matemáticas, y aprenden a comunicar matemáticamente. Matemáticamente, un estudiante sería capaz de comunicar sus ideas y procesos de pensamiento y evaluar lo que otros proponen como resultado de cálculos a problemas, si este estudiante es comunicativamente competente.

Es tal la complejidad de este proceso que desde los años sesentas toda esta actividad discursiva ha sido objeto de investigación desde la psicología del aprendizaje de las matemáticas. Green (1983) encuentra coincidencias en todos esos trabajos, aun cuando parten de enfoques diferentes. Este autor señala algunos principios e ideas clave:

- La interacción que tiene lugar en el aula es un proceso gobernado por reglas,
- Las actividades que despliegan profesores y alumnos en el aula, y las interacciones que establecen durante su transcurso son, en buena medida, resultado de un proceso de construcción entre los participantes,
- El significado depende del contexto específico en el que se manifiesta,
- La comprensión y construcción de significados sobre los contenidos escolares comporta la puesta en marcha de diferentes procesos cognitivos.
- Las aulas son entornos comunicativos con unas características propias.
- La enseñanza es un proceso comunicativo asimétrico.

En 1980, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), en Estados Unidos, publicó un documento que contenía recomendaciones generales para la matemática escolar (NCTM, 1980). Después de la primera versión de sus principios y estándares (NCTM, 1989) y los estándares de evaluación (NCTM, 1995), en el año 2000 aparecieron los principios y estándares para la educación matemática (NCTM, 2000). Las reflexiones de este documento afectan a las expectativas sobre el aprendizaje matemático de los escolares durante un amplio periodo, que incluyen toda la educación obligatoria.

Los estándares describen el conocimiento matemático que los escolares de todos los niveles deben adquirir, desarrollar y usar adecuadamente una vez que hayan finalizado su formación. Además, tratan de dar respuesta a la pregunta ¿qué contenidos y procesos matemáticos deberían conocer y ser capaces de usar los estudiantes a medida que progresan en su escolarización?

Este documento se estructura en estándares de contenido y de proceso. Los cinco estándares de contenidos se organizan en base a áreas de contenido matemático, y son: Números y Operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de Datos y Probabilidad. Los otros cinco estándares son de procesos y mediante ellos se presentan modos destacados de adquirir y usar el conocimiento: Resolución de Problemas, Razonamiento y Demostración, Comunicación, Conexiones y Representación (NCTM, 2000). Estos últimos, siempre se enuncian en mutua interconexión con los de contenido, ya que los primeros dan marco a la comprensión de los segundos. Los estándares de proceso expresan, en definitiva, el tipo de actuaciones a desarrollar por los escolares con los conocimientos expresados en los estándares de contenido.

Como vemos, la comunicación se enmarca dentro de los estándares de proceso y se relaciona con que los estudiantes sean capaces de (procedimentalmente) organizar y consolidar su pensamiento matemático mediante la comunicación; comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas; analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los demás, y usar el lenguaje matemático con precisión para expresar ideas matemáticas (NCTM, 2000). Cada una de estas situaciones comunicativas constituyen los procesos que componen y operacionalizan la competencia comunicativa.

Que los estudiantes tengan que *organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación* tiene que ver con que ellos ganen perspicacia en su pensamiento cuando presentan sus métodos para resolver problemas, cuando justifican su razonamiento a un compañero o al profesor o cuando hacen preguntas sobre algo que es extraño para ellos. La reflexión y la comunicación son procesos entrelazados en el aprendizaje de las matemáticas. Con la atención explícita y la planificación de los profesores, la comunicación con propósitos de reflexión puede llegar a ser una parte natural de dicho aprendizaje.

Por otro lado, cuando los estudiantes deben *comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas*, se requieren oportunidades para poner a prueba sus ideas, sobre la base de un conocimiento compartido con la comunidad matemática de la clase, para ver si pueden ser entendidas y si ellos son suficientemente convincentes. Cuando estas ideas se exponen públicamente, los alumnos pueden beneficiarse de participar en la discusión y el profesor puede controlar su aprendizaje (Lampert, 1990). Para apoyar con eficacia el discurso en el aula, los profesores tienen que propiciar un ambiente en el que los alumnos se sientan libres

para expresar sus ideas. De hecho, en cada etapa educativa² se espera algo diferente de los estudiantes, dado su desarrollo cognitivo, social y afectivo.

Si se centra la atención en los primeros niveles (en los cuales el presente proyecto está interesado), los alumnos necesitan en gran medida la ayuda de los profesores para compartir sus ideas matemáticas con los demás, de manera que sean suficientemente claras para ser comprendidas, ya que sus capacidades lingüísticas y de argumentación recién comienzan a desarrollarse. En estos niveles, aprender a ver las cosas desde los puntos de vista de otros constituye un desafío para los niños. Respecto de la comunicación escrita, esta debería desarrollarse de modo semejante. En los primeros niveles se puede contar con otros medios de representación, como dibujos o esquemas para comunicar ideas matemáticas. El proceso para aprender a escribir matemáticamente es similar al de aprendizaje de la escritura de cualquier tipo pues es importante la práctica con orientación. También lo es la atención a lo específico de los argumentos matemáticos, incluyendo el uso y los significados especiales del lenguaje matemático y las representaciones y normas de la explicación y la demostración.

Cuando los alumnos practican la comunicación deberían expresarse con más claridad y coherencia y, también, adquirir y reconocer los distintos estilos matemáticos de diálogo y argumentación. A través de las etapas escolares, sus argumentos deberían llegar a ser cada vez más completos, y extraerse directamente de los conocimientos compartidos en la clase. En los primeros niveles, puede ser suficiente una prueba empírica o unos pocos ejemplos. Más tarde, deberían esperarse cadenas cortas de razonamiento basado en hechos previamente aceptados. En los niveles medios y en secundaria, las explicaciones deberían llegar a ser cada vez más rigurosas matemáticamente y, de forma creciente, los alumnos deberían establecer las propiedades utilizadas para apoyar sus argumentos.

Cuando se habla de *analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los demás*, se hace referencia a que el proceso de resolver problemas con otros estudiantes o compañeros es beneficioso en términos de aprendizaje. Con frecuencia, un alumno que tiene una manera de ver un problema puede sacar provecho de los puntos de vista de otro, que puede revelar un aspecto diferente del problema. Un buen contexto en el que pueden compartir y analizar las estrategias propias y ajenas es el de la resolución de problemas aritméticos, donde las estrategias ideadas pueden llegar a ser objeto de discusión y crítica, pues escuchando atentamente las afirmaciones hechas por otros y pensando acerca de ellas, los estudiantes aprenden a ser pensadores críticos sobre las matemáticas.

Por último, usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas con precisión tiene que ver con que cuando los niños empiezan a estructurar su comprensión matemática, utilizan su lenguaje diario. Esto les proporciona una base para construir una conexión con el lenguaje matemático. Los profesores pueden ayudarles a ver que algunas palabras que se emplean en el lenguaje ordinario, tales como semejante, factor, área o función, tienen un significado diferente o más preciso en matemáticas. Es importante que los alumnos tengan experiencias que les ayuden a apreciar el poder y la precisión del lenguaje matemático. Es importante evitar una prisa prematura por imponer el lenguaje matemático formal a nivel sintáctico; los alumnos necesitan desarrollar un aprecio de la necesidad de las definiciones precisas y de la potencia comunicativa de los términos matemáticos convencionales a partir de la comunicación en sus propias palabras. Permitir

² Los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000), divide la escolaridad en 2 etapas pre escolares (PK y K) y 12 cursos regulares. Usaremos esta misma nomenclatura para referirnos a los distintos estadios de escolaridad.

que los estudiantes se enfrenten con sus ideas y desarrollen sus propios medios informales de expresarlas, puede ser un camino efectivo para fomentar la participación y el dominio matemático.

En general, el profesorado, en la etapa PK-2, al gestionar la actividad matemática del aula de manera tal de promover en sus estudiantes la competencia comunicativa, debería:

- Plantear problemas que retén matemáticamente a los estudiantes.
- Expresar las creencias en que los estudiantes son capaces de resolver estas situaciones.
- Pretender que los estudiantes sean capaces de explicar su pensamiento.
- Darles oportunidades para hablar con sus compañeros y escucharlos.
- Modelizar un vocabulario matemático convencional.
- Apoyar el aprendizaje de las matemáticas a través de los lenguajes que los niños traen a la escuela.
- Ayudarles a adquirir un vocabulario materno estándar y los términos matemáticos que les capaciten para comunicarse mejor.
- Ser consciente de que las normas de comunicación entre estudiantes y adultos en la escuela, no tiene necesariamente que corresponder a las que rigen la comunicación de los estudiantes en sus hogares.
- Ser conscientes de los patrones culturales de las comunidades de sus estudiantes para poder proporcionarles oportunidades justas para comunicar el pensamiento matemático. Si los profesores aceptan múltiples formas de comunicación de sus alumnos, también deberían comunicarse con ellos de diversas maneras para asegurar el mayor éxito para todos.
- Ver cuáles son los momentos apropiados para hacer las conexiones entre los símbolos inventados por los estudiantes para representar una situación matemática y la notación matemática estándar.
- Ayudar a los estudiantes a relacionar su lenguaje ordinario con el lenguaje y los símbolos matemáticos, de manera significativa

Comunicación promovida en el aula de matemáticas

El lenguaje, que es parte activa de los proceso de interacción y construcción de conocimiento, no es sólo un medio representacional de las ideas internas de la mente, sino algo que construye la realidad sobre la cual se está interactuando (Ibáñez, 2006, p. 45). En este sentido es que los conocimientos se generan a partir del lenguaje-en-uso (Couso y Pintó, 2009). Por lo tanto, lo que diga el profesor influye de manera considerable en las prácticas discursivas del aula de matemática y en las formas y niveles en que los alumnos puedan participar de ellas. Además, las contribuciones de profesor y alumnos no tienen sentido por sí mismas, sino que lo adquieren por el contexto local donde están enunciadas (Bakhtin, 1982). Esto refuerza la idea anterior, ya que las contribuciones del profesor al diálogo interactúan con las de los estudiantes y se determinan mutuamente.

De acuerdo a Rojas (2011), la idea de que el conocimiento se construye en el proceso discursivo cuyas componentes adquieren sentido en su propio contexto conversacional, llevan a considerar, entre otros aspectos, a la comunicación que se promueve por parte

del profesor cuando habla y dialoga en el aula, es decir, cómo el profesor inserto en ciertos patrones de interacción genera o promueve un cierto estilo discursivo en el aula. En este sentido, la categorización que establecen Brendefur y Frykholm (2000) es útil para caracterizar la comunicación promovida en el aula, considerando cuatro tipos de comunicación: unidireccional, contributiva, reflexiva e instructiva.

En situaciones en las que se promueve una comunicación unidireccional, los profesores tienden a dominar las discusiones a través de clases magistrales, realizando preguntas cerradas, otorgando pocas oportunidades a los alumnos para comunicar sus estrategias e ideas. Por medio de este tipo de comunicación, en el aula se promueven las matemáticas como un cuerpo estático de conocimiento que primero es interpretado y comunicado por el profesor, y luego es recibido pasivamente por los alumnos. En la comunicación contributiva se consideran las interacciones entre los alumnos y entre éstos y el profesor en las cuales la conversación se limita a la asistencia mutua, a menudo con poca profundidad de reflexión. Los profesores cuando desarrollan este tipo de comunicación, pueden dar oportunidades a los estudiantes para discutir tareas matemáticas con otros alumnos, presentar soluciones o estrategias, o ayudarse mutuamente, pero siempre con un carácter correctivo en la naturaleza de estas interacciones. La comunicación reflexiva se basa para estos autores en una concepción más compleja de comunicación en la misma línea del 'discurso reflexivo' de Cobb et al. (1997). Si bien la comunicación reflexiva considera los aspectos de la comunicación contributiva (compartir estrategias, soluciones, etc.), va un paso más allá en el sentido de que los profesores y alumnos utilizan las interacciones matemáticas con los otros como detonantes de exploraciones e investigaciones en la que los intercambios que ocurren entre profesor y alumno llegan a ser un objetivo de la interacción. La comunicación se vuelve reflexiva cuando los estudiantes objetivizan su actividad como participantes en el discurso colectivo. Sin embargo, esta reflexión no ocurre en el vacío ni de forma espontánea, sino que es soportada y permitida por la participación de los alumnos en el discurso (Cobb, Boufi, McClain, y Whitenack, 1997, p. 264). Finalmente, la comunicación instructiva implica más que las interacciones entre alumnos y profesor. Basándose en Steffe y D'Ambrosio (1995), Brendefur y Frykholm sostienen que en este tipo de comunicación, lo central es la pretensión de modificar la comprensión matemática de los alumnos, además de comenzar a formar la instrucción siguiente. Las conversaciones entre alumno y profesor que se enmarcan en este tipo de comunicación son las que realmente modifican las secuencias de instrucción y las que la hacen muy potente (Brendefur y Frykholm, 2000, p. 128), ya que a través del tiempo permiten al profesor apoyar y sostener la actividad matemática de los alumnos (Steffe y D'Ambrosio, 1995, p. 158).

Las definiciones que presentan Brendefur y Frykholm para estudiar las formas de comunicación en el aula están hechas sobre un principio de inclusión sucesiva, es decir, que cada nivel de comunicación asume necesariamente las características de su predecesor (p. 128). Por ejemplo, si un grupo de estudiantes se está comunicando reflexivamente, se puede dar por supuesto que al mismo tiempo se están produciendo instancias de comunicación unidireccional y contributiva. De hecho, y luego de sus estudios, los autores han podido confirmar esta hipótesis, además de permitirles pensar más profundamente sobre las relaciones y solapamientos entre dos o más de estos niveles de comunicación. Los autores han podido observar que los profesores que se mueven más allá de la comunicación unidireccional están animando a sus estudiantes a compartir sus estrategias y comprensiones, con lo cual éstos estarían contribuyendo al discurso del aula aunque sin modificarlo de forma importante. La transición de una comunicación unidireccional a una contributiva es crítica en el proceso de comunicación ya que es la primera vez en que los alumnos comparten sus ideas y estrategias

intentando profundizar en sus comprensiones matemáticas. Al pasar de la comunicación contributiva a la reflexiva, “el profesor otorga oportunidades a los alumnos para reflexionar sobre las relaciones de los tópicos matemáticos, centrándose en las ideas y estrategias expuestas tanto por los alumnos como por él mismo” (p. 148). Finalmente, en la comunicación instructiva el curso de la experiencia de aula es alterado como resultado de las mismas conversaciones del aula.

Específicamente, en este nivel tanto las decisiones como la práctica instructiva del profesor se entrelazan con las proposiciones e ideas matemáticas de los alumnos. Al final del proceso, si es que estas contribuciones logran modificar las secuencias didácticas e instruccionales del profesor; si esta interacción entre las contribuciones y éstas en sí mismas cambian y constituyen una nueva secuencia; y si el profesor incorpora las argumentaciones de los alumnos en sus secuencias de enseñanza, entonces, se ha llegado a establecer un tipo de comunicación instructiva.

El análisis que sugieren estos autores “posibilita relacionar lo social (las interacciones) con lo cognitivo (contenido de la interacción) en función de las decisiones del profesor (su gestión)” (Carrillo et al., 2008, p. 69, paréntesis en original). Esta perspectiva nos confirma el potencial que puede tener esta categorización en la forma de caracterizar la comunicación que se promueve en el aula.

En la tabla siguiente, se muestra un breve resumen de cada uno de estos tipos de comunicación.

Tipos de Comunicación Promovida (Brendefur y Frykholm, 2000)

Comunicación Unidireccional (CU)	Explicación frontal, formulación de preguntas cerradas. Se deja pocas oportunidades a los estudiantes para comunicar sus ideas y estrategias.
Comunicación Contributiva (CC)	Las contribuciones se ven limitadas a la ayuda entre unos y otros (profesores y alumnos), a menudo sin profundizar demasiado en aquello que se comparte.
Comunicación Reflexiva (CR)	El profesor otorga oportunidades a los alumnos para reflexionar sobre las relaciones entre los tópicos matemáticos, centrándose en las ideas y estrategias expuestas tanto por los alumnos como por él mismo.
Comunicación Instructiva (CI)	Se pretende modificar la comprensión matemática de los alumnos, además de comenzar a formar la instrucción siguiente por medio de la incorporación de las contribuciones de estos.

3.3. Metodología de Trabajo Docente (MTD)

Numerosos estudios e investigaciones se han realizado en torno a la problemática de determinar formas eficaces y pertinentes de trabajar con docentes en ejercicio, en el marco de la *actualización de conocimientos y desarrollo profesional*. La preocupación es legítima y muy relevante puesto que se ha constatado que, concentrar los esfuerzos de capacitación esencialmente en la “actualización de conocimientos”, no es suficiente para

impactar las prácticas de aula. Los profesores muestran grandes dificultades para transferir y “aplicar” los conocimientos adquiridos en los procesos de capacitación, a sus propias prácticas. Y sobre todo cuando la incorporación de dichos conocimientos, a modo de innovaciones, supone generar cambios paradigmáticos en sus prácticas. Aquí aparecen grandes dificultades, tensiones y resistencias que han sido ampliamente documentadas en la investigación.

Gran parte de los resultados obtenidos más recientemente, a propósito de esta cuestión problemática, señalan que es sustancial implicar a los docentes, durante el proceso de capacitación, en procesos intensos e intensivos de reflexión sobre la práctica, tanto sobre la práctica realizada por otros profesores, como la realizada por ellos mismos. Sin embargo, la *reflexión* ha sido incorporada basándose prácticamente en la necesidad de sacar a los profesores de un estatus técnico, sin problematizar demasiado de donde surge los aspectos teóricos que permiten contrastar la práctica. En este sentido, es que se hace necesario que el concepto de profesor reflexivo venga no solo de las teorías académicas, sino también de la propia riqueza que encierran las prácticas de los buenos profesores. Desde la perspectiva del profesor, esto significa que el proceso de comprender y mejorar la propia práctica profesional ha de partir de la reflexión de la propia experiencia, así como de la de otros (Zeichner, 1993).

Para comprender qué alcance tiene la práctica reflexiva, en particular la del profesorado, se hace necesario explicitar su opuesto, que en términos de Dewey sería la práctica rutinaria. Según Dewey, la acción rutinaria está dirigida por el impulso, la tradición y la autoridad. En cualquier sistema escolar, existen parámetros establecidos y aceptados para el accionar cotidiano, y en la medida que éstos ocurran sin altercados, la realidad se percibe como no problemática. Para Zeichner (1993), los profesores son reflexivos son aquellos que aceptan automáticamente la visión del problema que se adopta por regla general en una situación dada, sin problematizar cada aspecto de su práctica.

Por el contrario, para Dewey la reflexión no consiste en un conjunto de pasos o procedimientos específicos que han de seguir los profesores, sino más bien a una forma de afrontar y responder a los problemas, a una forma de ser como docente. En este sentido, Dewey define tres actitudes necesarias para la acción reflexiva. En primer lugar, la *apertura intelectual*, que consiste en el deseo activo de atender a más de un aspecto de la práctica, a atender a las posibles alternativas de acción y a reconocer la posibilidad de errores en el ejercicio de la práctica. Según Zeichner, los docentes intelectualmente abiertos, examinan de manera constante los fundamentos que subyacen a lo que se considera natural y correcto, preocupándose por cuestionarlo permanentemente.

En segundo lugar, está la actitud de *responsabilidad*, que supone una consideración cuidadosa de las consecuencias a las que conduce la acción. Los docentes responsables se preguntan por qué hacen lo que hacen, yendo más allá de justificaciones utilitarias, observando de qué manera funciona y para quién. La actitud de responsabilidad lleva consigo la reflexión de los resultados inesperados de la actividad docente, ya que en los procesos de enseñanza, por muy cuidadosa que sea su planificación, aparte de lo esperado se producen muchos hechos inesperados, relacionados habitualmente con el aprendizaje de los estudiantes. Por último, Dewey sostiene que una actitud de *sinceridad* es realmente necesaria para la reflexión profesional del docente. Esta actitud alude al hecho de que la *apertura intelectual* y la *responsabilidad* no solo deben constituir elementos de la vida profesional del docente reflexivo, sino que este debe hacerse cargo de sus propios procesos de aprendizaje, y operacionalizarlos en tanto su labor profesional.

No se puede cambiar la práctica sin entender primero por qué debe ser cambiada: dónde están sus dificultades y limitaciones, y en relación a qué parámetros. Y luego, los docentes deberán comprender y apropiarse de un modo distinto de realizar la práctica, entendiendo profundamente en qué aspectos es mejor y cómo puede ser desarrollada en “sus aulas”.

Tanto la reflexión como las actitudes necesarias para que ella se vea en la práctica, no son opuestas a una acción rutinaria. Zeichner (1993) destaca que ni Dewey ni otros autores pretenden que toda la práctica del docente esté basada en la reflexión, pues se hace necesario un equilibrio entre ambas. Las prácticas rutinarias están inmersas en cualquier tipo de acción, pero es el cuestionamiento de ellas lo que construye al docente reflexivo. Como profesional reflexivo entonces, el profesor ha de dirigir sus acciones, previniéndolas y planeándolas de acuerdo con los fines que tenga en perspectiva, rutinizando lo rutinizable y cuestionando lo cuestionable, en los momentos y espacios propicios para ello. Por ello, se esperaría de un profesional reflexivo que sea capaz de exhibir múltiples operaciones sobre un tópico; por ejemplo, sea capaz de definirlo, explicarlo, compararlo con otros elementos, sacar inferencias y conclusiones, resolver problemas de la vida cotidiana en que aplica ese conocimiento e, incluso, inventar y crear a partir de ese dominio (Beas, Santa Cruz, Thomsen, y Utreras, 2000). Esto es, según Dewey, lo que hace que los profesores puedan tomar consciencia de ellos mismos en su propia acción docente.

Para lograr esta consciencia, Schön (1998) sostiene que es necesaria tanto la *reflexión sobre la acción* (aquel proceso reflexivo que se desarrolla antes y después de la acción) como la *reflexión en la acción* (aquel dialogo reflexivo del profesional con su entorno de acción, en el cual encuadra y resuelve los problemas sobre la marcha). Estas clases de reflexión se contraponen a la racionalidad técnica que ha dominado la visión de la profesionalización docente, puesto que van en contra de la idea que la teoría existe solo en la academia y la práctica en la escuela. Ambas cosas, teoría y práctica, están imbricadas en un mismo proceso, lo que Schön denomina el *conocimiento en la acción*.

Los docentes muchas veces no son conscientes del conocimiento que producen al ejercer su práctica, y una vía para ello es hacer presente y ostensible este conocimiento tácito por medio de la enseñanza reflexiva. Sacar fuera de nuestras concepciones estos conocimientos permite criticarlos, examinarlos y perfeccionarlos, del mismo modo que podemos comunicarlos a otros miembros noveles de la comunidad docente, evidenciando así los aspectos más sutiles y complejos de las prácticas pedagógicas. Este proceso es el que permitiría evidenciar las teorías implícitas de los docentes sobre la enseñanza que, según Zeichner, son tan teorías como las académicas, y aunque ambas han de juzgarse por su calidad, los dos tipos de teoría son comprensiones explicativas del cumplimiento de objetivos educativos. Al someter las “teorías prácticas” de los docentes al examen propio y de los compañeros, éstos tienen más oportunidades de tomar consciencia de las debilidades y contradicciones de las mismas, a la vez que los demás tienen la oportunidad de aprender sobre los hechos explicados por esas teorizaciones. En definitiva, una enseñanza reflexiva demanda a los profesores que elaboren y critiquen sus propias teorías prácticas en los momentos de reflexión conjunta e individual, en y sobre la acción, acerca de su acción docente, y de las configuraciones socioculturales que las determinan.

Sin embargo, interpretaciones sesgadas y limitadas de la práctica reflexiva, han conducido a centrar los procesos de formación docente en cuestiones más bien de carácter pedagógicas que didácticas. Se considera que es posible reflexionar sobre la práctica, esto es sobre las formas en que se gestiona la transferencia de conocimientos, sin necesidad de incorporar una reflexión profunda sobre el conocimiento mismo que es

transferido en el aula. Este modo de proceder ignora que no sólo lo transmitido depende de la herramienta con la que se pretende conseguir su transmisión, sino al revés, que las organizaciones “transmisoras”, es decir didácticas, se configuran de manera estrechamente vinculada a la estructura dada a lo que hay que transmitir. Así, no parece ser fecundo promover la reflexión sobre cuestiones generales de la enseñanza, separadas de la problemática específica de la enseñanza y el aprendizaje de los objetos de conocimiento particulares (Espinoza et al, 2009).

Esta visión polarizada del proceso de capacitación docente, esto es centrado en el conocimiento disciplinar ó centrado en cuestiones generales sobre la enseñanza, desvirtúa la esencia misma del aprendizaje matemático, y con ello de su enseñanza, que solo puede ocurrir, y ocurre, por medio de un modo particular de gestionar la transmisión de un contenido matemático específico, en unas condiciones institucionales determinadas. Y esto nos conduce a una antigua problemática, ya superada desde hace años por la investigación en este ámbito: la didáctica de las matemáticas no es el resultado de yuxtaponer contenidos matemáticos escolares con formas generales de enseñanza. Se trata de un ámbito de conocimiento específico que tiene su propio objeto de estudio y sus propias metodologías de desarrollo (Chevallard, 2004). De este modo, en los procesos de capacitación docente se debe profundizar en conocimientos didácticos de los contenidos matemáticos concretos que son objeto de enseñanza y aprendizaje. Por supuesto que se deberá reflexionar, también, sobre cuestiones pedagógicas generales que constituyen condiciones y restricciones que facilitan, a la vez que dificultan, el aprendizaje.

Por ello, la postura adoptada ya desde hace años por el equipo de investigadores de este proyecto, consiste en profundizar fuertemente en los conocimientos matemáticos escolares, pero vistos desde un punto de vista didáctico. Así por ejemplo, no se trata solamente de profundizar en la capacitación con los docentes sobre las fracciones y los decimales, aunque sean revisitados ahora desde un punto de vista matemático superior. Además, deben ser estudiados desde la perspectiva de cómo pueden ser aprendidos por estudiantes de determinadas edades, y dentro del sistema escolar: con qué propósitos; bajo qué condiciones; con qué actividades; por medio de qué dispositivos y gestiones, etc. Y esto supone profundizar en obstáculos epistemológicos y también didácticos que se enfrentan en su aprendizaje, en restricciones de carácter ecológicas que surgen de manera natural al interior de la escuela, etc.

La *Metodología de Trabajo Docente* que proponemos en esta investigación es el resultado de numerosos trabajos de investigación y transferencia que venimos realizando desde hace años. Dicha metodología se construye sobre la base de dos grandes pilares. Por un lado, aparece un modelo epistemológico de referencia, de carácter didáctico, que postula un modo particular de comprender y modelizar el conocimiento matemático escolar, así como unos principios didácticos específicos que guían y promueven el aprendizaje y la enseñanza de los mismos en la escuela. Este modelo se empezó a construir hace años, y encontró una formulación más reciente en un proyecto de investigación Fonide anterior, cuyo propósito era dar cuenta y analizar los conocimientos matemáticos escolares y las competencias que su estudio promovían, desde una perspectiva *curricular* (Espinoza et al, 2008). Este modelo recibió el nombre de “Modelo de Competencia Matemática, MCM”. Una de las mayores contribuciones de este modelo fue la de articular el desarrollo de *competencias matemáticas* con contenidos matemáticos específicos. Dicho de otro modo, se concretizó la idea de que las personas no desarrollan las competencias matemáticas en abstracto, disociadas de algún contenido en específico; sino que su desarrollo depende decisivamente, tanto en diversidad como en complejidad, del tipo de actividad

matemática concreta que se propone realizar a los estudiantes. Las competencias matemáticas solo pueden ser desarrolladas bajo el estudio concreto de temáticas matemáticas específicas (Espinoza *et al*, 2008). En el presente proyecto Fonide completamos dicho modelo, ahora con el interés de responder además a la pregunta sobre cómo puede ser integrado y gestionado en la escuela. Para ello le hemos incorporado una forma particular de comprender el proceso de aprendizaje matemático y su enseñanza, y unos principios didácticos que promueven aprendizajes de calidad; elementos que considerados en su conjunto constituyen lo que en Teoría Antropológica de lo Didáctico se conoce como una **organización didáctica**. Para ser más exactos con los hechos, más que incorporar nuevos elementos al modelo construido en la etapa de investigación anterior, es decir al MCM, lo que hemos hecho ahora es explicitar este conjunto de elementos y principios didácticos, que estuvieron en todo momento latentes en la construcción del modelo anterior.

A esta forma de entender el conocimiento matemático escolar y de cómo difundirlo en la escuela, se le asocia, por otro lado, una metodología de trabajo que postula un ciclo para la capacitación de los docentes. Este otro pilar de la metodología de trabajo docente propone una secuencia de fases o etapas, que se desarrollan en un orden determinado. Pero, más que avanzar linealmente por las fases, esta metodología propone un *trabajo en espiral* con los docentes, en que la ejecución de cada fase supone remirar y profundizar en las fases anteriores. Las fases son las siguientes: (1) El estudio de una temática matemático—didáctica específica, que incluye la puesta en práctica en aula de algunas propuestas de enseñanza elaboradas por el equipo de investigadores y que hemos denominado como *casos clínicos*, y el posterior análisis y reflexión en términos de la experiencia vivida por algunos profesores al implementarlas; (2) la elaboración propia de una secuencia de enseñanza en torno a un contenido matemático afín a los casos clínicos estudiados, utilizando y aprovechando las herramientas que se han estudiado en las fases anteriores, y que sea coherente con los principios didácticos que propone esta metodología; (3) la implementación de dicha secuencia de enseñanza con apoyo y seguimiento en el aula, y con retroalimentación inmediata por parte del equipo investigador que acompaña al docente en sus clases; (4) Análisis y reflexión colectiva sobre las distintas experiencias vividas, buscando determinar y comprender sus fortalezas y dificultades y, en función de ello, idear maneras de ajustar y mejorar tanto la secuencia de enseñanza como su propia gestión en el aula.

En síntesis, la metodología de trabajo docente propone una *forma particular de realizar el estudio* con los docentes, sobre un *modelo didáctico específico*, y sobre cómo dicho modelo didáctico puede ser incorporado en las prácticas de aula habituales. Todo ello con el propósito de aportar a las y los docentes herramientas didácticas y formas de utilizarlas que contribuyan a propiciar y asegurar aprendizajes matemáticos de calidad en sus estudiantes, así como el desarrollo de competencias.

4. Metodología

El desarrollo del presente proyecto está enmarcado en el trabajo de una línea de investigación en competencias matemáticas (Solar, Rojas, y Ortiz, 2011), en la cual estamos involucrados y cuya relevancia ya ha sido argumentada. Esta línea de trabajo consta de tres grandes instancias. La primera de éstas, que corresponde a los estudios curriculares necesarios para sustentar el desarrollo de competencias, se materializó en el proyecto FONIDE N°DED0760 en el cual se elaboró el Modelo de Competencia Matemática (MCM), parte fundamental del presente proyecto, y su aplicación para estudiar el marco curricular chileno en el subsector de matemáticas de primer y segundo año básico (NB1). Una segunda etapa, constituida por el desarrollo del presente proyecto de investigación, pone su foco en la manera de transferir el MCM a los profesores de enseñanza básica y con ello mejorar su práctica. Una tercera etapa sería aquella que se centraría en estudiar cómo esta metodología impacta en el aprendizaje matemático de los estudiantes y en el desarrollo de sus competencias matemáticas, evidenciando sus niveles de logro de aprendizaje.

En este contexto, esta investigación tiene como objetivo general diseñar, implementar y evaluar una *metodología de trabajo docente* que permita a profesores y profesoras impactar en sus prácticas de aula³ al estar apropiados de un modelo didáctico, en este caso, el Modelo de Competencia Matemática (MCM) desarrollado en el proyecto FONIDE DED0760 (Espinoza et al., 2008).

Para el cumplimiento de este objetivo, la investigación ha sido diseñada siguiendo las tres grandes instancias declaradas: diseño, implementación y evaluación, para las cuales se explicitarán los productos a conseguir y los criterios utilizados en cada una de ellas.

Enfoque Metodológico

En cuanto al enfoque metodológico de este trabajo, éste se enmarca en uno de carácter eminentemente cualitativo, considerando algunos aspectos de corte cuantitativo. Este enfoque metodológico permite lograr perspectivas más profundas del fenómeno en estudio; ayudar a clarificar y a formular el planteamiento del problema, así como las formas más apropiadas para estudiar y teorizar los problemas de investigación. Además ayuda a producir datos más ricos y variados gracias a la multiplicidad de observaciones, ya que se consideran diversas fuentes y tipos de datos, contextos o ambientes y análisis; potenciando la creatividad teórica con suficientes procedimientos críticos de valoración.

Los aspectos cualitativos de esta investigación estarán basados en enfoques interpretativos, ya que nos permiten describir, interpretar y entender el significado de los fenómenos sociales, intentando darles sentido desde el significado que las propias personas les atribuyen a dichos fenómenos (Bryman, 2004; Merriam, 1998). Esto nos permitirá entender, desde el discurso y la práctica de las docentes, el proceso de significación del MCM que ellos están viviendo.

En cuanto a los aspectos cuantitativos, estos pretenden contrastar los estados iniciales y finales de las concepciones que los profesores construyen sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática entre el inicio y el final de la investigación. Dentro de otros

³ Se entenderán las prácticas de aula a lo que el profesor hace en su sala de clases, a la gestión del aprendizaje, y no al impacto medible estadísticamente en los estudiantes.

aspectos, para ello se buscará mostrar el grado en que cambia la reflexión docente y cómo esto impacta en sus prácticas.

A continuación mostraremos el proceso de selección de la muestra, las variables que definen este estudio, el diseño metodológico con las fases de la investigación asociados a cada objetivo específico, los instrumentos de recogida de datos y las estrategias analíticas pertinentes para cada tipo de estudio.

4.1. Muestra

Para el desarrollo de esta investigación, se contó con la participación de docentes de NB1 (primer y segundo año básico) pertenecientes a establecimientos educacionales de la ciudad de Concepción y alrededores. Se definió trabajar con un grupo reducido de docentes, ya que la evaluación de la metodología de trabajo docente, asociada a los objetivos 3 y 4 del proyecto, requiere de un estudio exhaustivo y profundo de los objetos de saber que la implican: reflexión y desempeño. Para ello se requiere una estrategia de análisis que ahonde en las distintas instancias previstas en el diseño metodológico: seminarios, grupos focales, implementación de clases, etc. Dicha estrategia se asocia a un trabajo de interpretación de las intervenciones y acciones de las profesoras en las diferentes instancias de recogida de datos, lo que es coherente con el enfoque principalmente cualitativo de la investigación. De esta manera, se estableció trabajar con 11 docentes, ya que ello lograría además un nivel de interacción capaz de generar suficiente discusión sobre el MCM para evidenciar sus procesos reflexivos y por ende su nivel de apropiación desde la perspectiva reflexiva. Además, al ser un grupo pequeño, también posibilita un trabajo focalizado en cada uno de ellos en caso que así se requiriera.

Bajo esta perspectiva se diseñó y estableció una serie de criterios para la elección de los profesores participantes, siendo fundamentalmente tres.

- *El desempeño del docente.*
- *El grado de experiencia en NB1.*
- *El grado de experiencia en la estrategia LEM.* En este caso, se contemplan dos grupos de profesores:
 - 8 profesores con alguna experiencia en LEM, quienes serán seleccionados de las escuelas que han trabajado con dicha estrategia.
 - 4 profesores sin experiencia en la estrategia LEM. Para ampliar la muestra de profesores. Se seleccionará un profesor con un buen conocimiento matemático para primer ciclo, un profesor con conocimientos del modelo didáctico LEM pero que no haya experimentado en el aula, un profesor con conocimiento del enfoque de competencias matemáticas y un profesor que trabaje en contexto de vulnerabilidad. Seguir esta lógica de muestreo nos puede permitir obtener resultados en función del perfil del profesor.

Si bien en enero de 2011 se realizó una entrevista de selección de profesores en función de estos criterios, en marzo, a tres semanas de comenzar, aún no teníamos los 11 profesores esperados. De aquellos que sí quedaron seleccionados, prácticamente

ninguno tenía una amplia experiencia LEM, sólo un conocimiento referencial, por lo que tuvimos que modificar los criterios manteniendo la intencionalidad de cada uno de ellos, y velando por la heterogeneidad de la muestra. Finalmente, era necesario que los docentes participantes tuvieran una amplia experiencia en primer ciclo y un desempeño docente relativamente bueno.

De este modo, se consideraron tres criterios para la selección de profesores:

- haber realizado un postítulo de primer ciclo de la UDEC,
- profesores que si bien no tenían experiencia LEM fueron recomendados por consultores LEM, y
- tener distintos grados de experiencia docente.

Así, al iniciar el seminario, posterior a la etapa de convocatoria a la participación en el proyecto, se pudo contar finalmente con la participación de 11 docentes, cuyo perfil se pudo extraer en base a una Ficha de Datos (Anexo 1a)⁴. Dicho perfil arrojó las siguientes características de grupo:

- Todos los participantes son Profesoras.
- El rango etario se encuentra entre los 26 y 59 años, con un promedio de 41 años.
- La mayoría de ellas estudió en universidades tradicionales de la VII Región.
- La mayoría no ha realizado estudios de postgrado (magister). Algunas de ellas han realizado postítulos enfocados en enseñanza de la matemática para primer ciclo.
- La experiencia laboral de este grupo fluctúa entre un año hasta los 26, con un promedio de 12 años de experiencia.
- Con respecto a las escuelas donde actualmente se desempeñan las profesoras, éstas han trabajado en ellas desde un año hasta 26, con un promedio de 7 años.
- Siete de ellas han participado en el proceso de Evaluación Docente, entre los años 2005 y 2010, obteniendo como resultado Competente, y Básico en menor cantidad.
- La mayoría ha realizado alguna vez clases en segundo ciclo básico, desde quinto a octavo año, especialmente en Lenguaje y Comunicación, y en algunos casos en Educación Matemática.
- En general, se sienten más seguras realizando clases en Lenguaje y Comunicación.

4.2. Variables

De acuerdo a los objetivos de este estudio, con las siguientes variables se pretende explicar cómo la *metodología de trabajo docente* centrada en el MCM impacta en los niveles de reflexión de los docentes y en su práctica de aula, lo que permitiría finalmente evaluar el impacto de dicha metodología en tanto apropiación del MCM. De este modo, hemos definido las siguientes variables:

⁴En el anexo 1b se encuentran la sistematización de los datos.

- Variables de respuesta:
 - Niveles de reflexión de los docentes.
 - Niveles de desempeño docente.

- Variables explicativas:
 - Grado de participación en la propuesta metodológica de trabajo docente.

La articulación de estas variables, permitiría estudiar cómo la metodología de trabajo docente, que se materializa en diversas acciones (explicadas más adelante) afecta el nivel desempeño docente (variable de respuesta) y el nivel de reflexión del profesor (variable de respuesta), en relación a las matemáticas en campo aditivo en NB1.

Puesto que los objetivos específicos cumplen con operacionalizar el proceso que implica este estudio, el desarrollo y la implementación de la propuesta de trabajo docente se cumplen con los objetivos 1 y 2. En cuanto a la evaluación de esta metodología, ella hace referencia a determinar el grado de apropiación del MCM, lo cual se lleva a cabo por medio de la metodología de trabajo docente, y permite de este modo ver cómo se impacta en las prácticas de aula. El objetivo 3 permite establecer dicho grado de comprensión por medio del estudio de la reflexión de los docentes participantes, mientras que el objetivo 4 lo hace por medio del estudio de sus prácticas.

En definitiva, dependiendo de la participación e implicación en el proyecto y en particular en el trabajo desarrollado en los seminarios talleres, las reflexiones y las prácticas de los profesores se verán afectadas de una u otra manera. Es por esto que se proponen como variables respuesta el Nivel de reflexión del docente y el Nivel de desempeño del docente, ya que éstas permitirían mostrar su grado de apropiación del MCM, y por tanto evaluar la propuesta metodológica, dando información relevante para su aplicación en otros contextos de formación continua para profesionales de la educación.

4.3. Diseño metodológico

Dado que esta investigación pretende diseñar, implementar y evaluar una metodología de trabajo docente, lo cual está directamente relacionado a sus objetivos específicos, se presentan a continuación los diseños y/o estudios que permitirían cumplir con cada uno de ellos.

4.3.1. En relación al Diseño e Implementación de una metodología de trabajo docente

El diseño e implementación de una metodología de trabajo docente, los dos primeros elementos del objetivo general de este trabajo, se llevaron a cabo mediante el diseño de un proceso de estudio basado en el MCM (objetivo específico 1) y el desarrollo e implementación de un seminario de trabajo docente (objetivo específico 2).

En relación al primer objetivo específico, el proceso de estudio y comprensión del MCM constó de dos grandes periodos. Por una parte, está el estudio en sí mismo del modelo de

competencias matemáticas, evidenciado en el seminario de trabajo docente. En éste, se vive tanto la reflexión teórica-empírica del MCM, como la reflexión del diseño de una secuencia didáctica que retoma y se fundamenta en la reflexión y aprendizajes producidos. Por otra parte, y en segunda instancia, están los procesos de implementación de la secuencia didáctica basada en el MCM y su reflexión, tanto antes como después, de dicha implementación.

En esta segunda etapa, se seleccionaron cuatro casos de estudio, es decir, cuatro docentes para seguirlos en la implementación de las secuencias didácticas que diseñaron en la parte final del seminario (talleres 5º a 8º). Con ello se buscó analizar la práctica y averiguar cómo impactó en ella el trabajo en la metodología de trabajo docente en tanto el MCM como modelo didáctico.

Para seleccionar a las cuatro profesoras se consideraron cinco criterios

1. Desempeño en el cuestionario de concepciones: puntuaciones en el cuestionario.
2. Desempeño en el cuestionario diagnóstico de saber matemático: categoría de respuesta (Anexo 4a)
3. Desempeño en el seminario, que involucra aspectos de reflexión y participación: desempeño observado en función de tres descriptores: participación, reflexión y el tipo de profesor (novel, iniciado, medio, experimentado)
4. Desempeño observado en sus clases: a través de las grabaciones de sus clases.

De este modo, este diseño permitió que las docentes participantes no sólo discutieran a nivel teórico el MCM, sus componentes y las relaciones entre éstos, sino que lo evidenciaran en la práctica y reflexionaran en sus dimensiones de diseño de secuencias didácticas y de análisis de la práctica. De este modo, el trabajo con las docentes se diseñó de manera tal de producir un espacio de reflexión permanente en torno al MCM, para cuestionar así las prácticas habituales de aula y llegar a impactarlas.

Para ello fue fundamental la elaboración de *casos clínicos*⁵, los cuales mostraron situaciones de enseñanza aprendizaje diseñadas expresamente para su análisis, con el objetivo de conseguir determinadas conclusiones por parte de los participantes de la investigación. La elaboración de estos casos clínicos incluyó la grabación en video de situaciones de aula diseñadas previamente, y dialogadas con los profesores que las llevarían a cabo. Para esta elaboración, participaron establecimientos educacionales que hubiesen estado involucrados con la estrategia LEM en Santiago, como otros que no hayan tenido experiencia en dicha estrategia.

Así, y en relación al segundo objetivo específico, se diseñó un seminario de 8 sesiones en las cuales se reflexionó, en un primer momento, sobre cada una de los componentes del modelo, y en un segundo momento, donde se diseñó la secuencia de enseñanza que posteriormente se implementó en aula. Además, y de manera posterior a los seminarios, se crearon dos instancias de reflexión grupal (grupos focales) antes y después de la implementación de la secuencia didáctica diseñada por las docentes. Hay que destacar que todo el proceso de diseño e implementación de la secuencia didáctica por parte de

⁵Los Casos Clínicos no son lo mismo que los casos de estudio. Los primeros son situaciones de aula expresamente diseñadas y grabadas para que las docentes participantes reflexionen sobre ellos. Los segundos son las propias docentes participantes, a las cuales se les hace un seguimiento exhaustivo a través del proyecto, y en particular en la fase de implementación de la secuencia didáctica diseñada por ellas mismas.

las docentes fue acompañado por los distintos investigadores del proyecto, lo que permitió una constante retroalimentación de los procesos vividos. Esto no sólo permitió a las docentes mejorar sus producciones, sino que encontrar interesantes resultados de investigación, que serán explicados más adelante.

En las primeras 4 sesiones se estudió el modelo de competencia matemática siguiendo los componentes del modelo. Desde la primera a la cuarta sesión se estudiarían consecutivamente los componentes relativos a las competencias matemáticas fundamentales a desarrollar, las organizaciones matemáticas que articulan el campo aditivo en NB1, los niveles de complejidad, sus relaciones y cómo estos se operacionalizan en la labor docente, y finalmente la articulación en el MCM, considerando los aspectos de las anteriores fases y sus interrelaciones.

Cada una de estas cuatro sesiones estarían subdivididas en tres momentos (A, B y C):

- A. Estudio del Modelo de Competencia Matemática.
- B. Análisis de los casos clínicos.
- C. Taller y discusión.

Entre cada una de estas sesiones (distanciadas en alrededor de 15 días), 3 docentes implementaron en sus aulas una de las situaciones de enseñanza estudiadas previamente en el seminario, asociada al tema de la sesión anterior. De este modo, al cabo de las 4 primeras sesiones del seminario, todas las docentes tuvieron la experiencia concreta de implementar alguna situación de enseñanza no afectó su planificación ya que el currículo de NB1 permite flexibilidad en el tipo de actividades que se gestionan en el aula.

Estas implementaciones fueron grabadas para utilizarse en la segunda parte del seminario, como situaciones de aula sobre las cuales los docentes desarrollaron procesos reflexivos. A partir de la segunda sesión, en el momento B de cada seminario (casos clínicos), existió un espacio de discusión en que los profesores describieron su experiencia al haber implementado las situaciones de enseñanza mostradas en la sesión anterior. Este espacio tuvo una función principal, que correspondió a que la descripción de experiencias contribuyó a los otros profesores de NB1 a preparar la implementación de su propia secuencia didáctica.

A partir de la quinta sesión, cambió la dinámica de los seminarios ya que las profesoras comenzaron a elaborar situaciones de aprendizaje basadas en el Modelo de Competencia Matemática. Cada sesión se dividió en dos momentos (D y E):

- D. La primera parte se centró en las implementaciones que los profesores fueron realizando y en la discusión de videos que previamente se registraron de sus clases. Es decir, es un proceso de discusión y análisis en vez de un proceso de estudio.
- E. La segunda parte se abordó como un taller, en el cual diseñaron las situaciones de aprendizaje por medio de una planificación que permitió organizar la enseñanza.

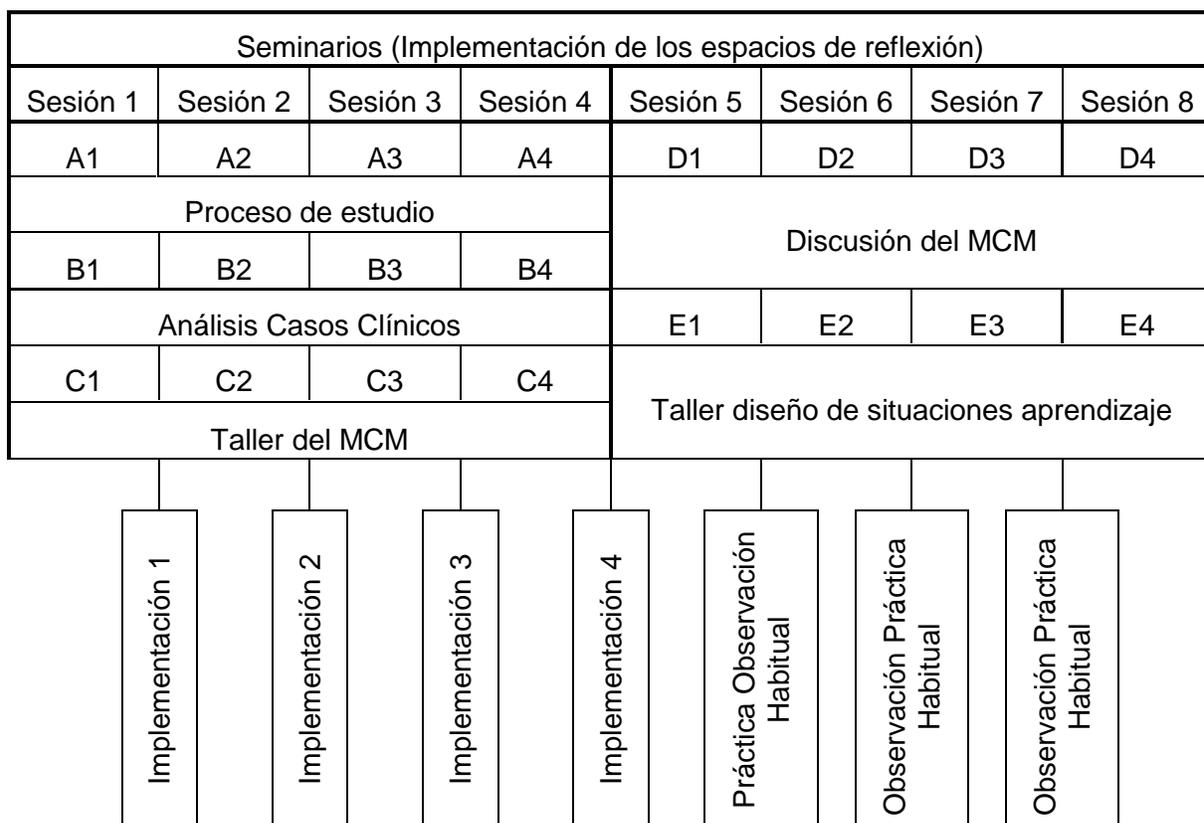
Cada una de estas sesiones donde se diseñó la secuencia didáctica, estuvo orientada a profundizar un elemento de la planificación y preparación de la enseñanza, siguiendo los modelos desarrollados por el Centro Felix Klein de la Usach. De este modo, de la quinta a la octava sesión se trabajó consecutivamente en lo relativo al esquema didáctico y su funcionalidad; sobre el plan de clases considerando tareas matemáticas y competencias;

criterios de gestión de aula; y finalmente los aspectos de evaluación para recoger evidencias de aprendizaje.

En este espacio los investigadores del proyecto cumplieron un rol fundamental de apoyo a las docentes para que vincularan situaciones construidas por expertos y por ellos mismos para poner en práctica en su aula. Este diseño se realizó de forma grupal, para provocar y promover la discusión entre las docentes participantes.

Por otra parte, entre cada una de estas sesiones, se observaron las prácticas habituales de los profesores sin implementar situaciones intencionadas, pero en las cuales se prevé que sus prácticas estén influenciadas por el estudio del Modelo de Competencia Matemática.

El siguiente cuadro ilustra la estructura del seminario (8 sesiones):



En todas las discusiones generadas en las sesiones del seminario se pretendió ahondar en las herramientas, conocimientos y experiencias que necesita el profesor para diseñar y gestionar las situaciones en base al modelo de competencia propuesto, y en las cuales los estudiantes lleguen a niveles de reflexión (complejidad cognitiva) en el desarrollo de las competencias matemáticas. Esto implicó que los gestores del seminario estuvieran atentos al tipo de discurso que desarrollaron las profesoras.

Investigaciones basadas en un seminario de reflexión sustentado en el uso de video, muestran que los profesores participantes a priori discuten sobre temas pedagógicos (tales como gestión de la clase o como el profesor participante habría desarrollado el

problema tratado) pero difícilmente tratan sobre cuestiones relacionadas al pensamiento del estudiante, o concepciones del profesor de matemáticas (Borko y Jacobs, 2007; Sherin y Han, 2004; Van Es y Sherin, 2007). Por tanto, fue deseable que los gestores del seminario (académicos de la Universidad Católica de la Santísima de Concepción, de la Universidad de Concepción y del Centro Felix Klein de la USACH) guiaran las conversaciones hacia temas que permitieran desarrollar la reflexión de las profesoras sobre las actividades y situaciones didácticas analizadas y las gestiones desarrolladas en cada uno de los casos clínicos observados. Específicamente, si al analizar los videos del aula, el discurso de las profesoras giró en torno a cuestiones pedagógicas, el rol de los gestores fue realizar una serie de preguntas dirigidas a cuestionar las prácticas del profesor y a proponer situaciones didácticas que permitieran desarrollar competencias matemáticas en los estudiantes.

4.3.2. En relación a la Evaluación de la metodología de trabajo docente

Tal como hemos mencionado, los objetivos específicos 3 y 4 correspondientes a la evaluación de la propuesta metodológica docente, se operacionalizan por las variables del estudio que se han definido como focales de esta investigación (Reflexión y Desempeño docente). Esta premisa permite que los procesos metodológicos sean conducentes al estudio del cambio de las mismas, considerando el antes, durante y después de la participación de las docentes en el estudio. A continuación se especificarán los aspectos metodológicos y analíticos, en cuanto criterios, para cada una de las variables y sus mediciones.

4.3.2.1. Reflexión docente

Estudiar el nivel de reflexión de las profesoras nos permite caracterizar la apropiación del MCM, ya que aporta información sobre cómo los docentes conciben los procesos de enseñanza y aprendizaje bajo los elementos característicos de dicho modelo.

Para el estudio de esta variable, y con el objetivo de identificar los elementos reflexivos que permiten describir y caracterizar el grado de comprensión del MCM en las profesoras participantes, es que se diseñó dentro de las actividades de recolección de datos la realización de grupos focales que permitieran describir este nivel de comprensión, tanto en su contenido como en su profundidad, interpretando y significando tales descripciones. Como instrumento de investigación de datos cualitativos, el focus group se dirigió a captar las opiniones o representaciones de las participantes, con foco en la identificación de la racionalidad o lógicas de acción de los participantes (Canales, 2006) respecto sus prácticas docentes, en particular, la planificación y la gestión didáctica del aula.

Dada la amplitud de estas acciones, es que se realizaron dos instancias de focus group focalizados en estas prácticas (Mena y Méndez, 2009). La primera de ellas, centrada en la planificación, realizada inmediatamente después de finalizadas las sesiones de seminario. La segunda de ellas, realizada una vez terminadas las experiencias de implementación de las planificaciones diseñadas en el contexto del seminario. En ambos casos, la técnica se basó en el estudio y análisis de insumos contextualizados asociados a las prácticas en estudio (a saber, una planificación y un episodio de gestión de clases), con el objeto de que las participantes fundamentaran sus opiniones y las contrastaran con sus propias prácticas. Se esperó que estos recursos constituyeran un soporte para la reflexión de las docentes, apoyando las manifestaciones las dimensiones en evaluación.

Dado el carácter de esta técnica de recolección de datos, a continuación se detallará la metodología de implementación considerada en la preparación y desarrollo de estas experiencias. En caso que sea necesario, se distinguirán las características específicas de la primera actividad de focus group (FG1) o bien de la segunda sesión (FG2).

Insumos y ambientación

Para cada una de las sesiones se deberá contar con:

- 1 video grabador
- Trípode
- Plumones
- Cuadernos de notas de campo
- Galletas y jugo o café
- Episodio de clases (FG2)

Para cada participante:

- Cuadro de competencias involucradas y descripción de procesos.
- Propuesta de plan de clases a analizar (FG1).
- Documento con procedimientos de cálculo realizado por alumnos (FG2).

La sala se deberá disponer en forma semicircular, en donde se incluyen los investigadores. El equipo de grabación deberá disponerse en un lugar fijo y que posibilite la filmación de todos los integrantes del focus group sin necesidad de realizar interrupciones durante el transcurso de la actividad.

Equipo de investigación

El focus group deberá contar con la participación de dos responsables principales, uno de los cuales moderará y conducirá el trabajo del grupo y el otro llevará un registro escrito de las notas de campo, con las ideas principales, situaciones no registradas en la grabación y el clima de la discusión.

Los responsables de la conducción deberán poseer el listado de temáticas a desarrollar y los tiempos de discusión de manera tal que se satisfagan los requerimientos de la investigación.

Se proponen los siguientes responsables principales:

Conductor: Rodrigo Ulloa S.

Notas de campo: Andrés Ortiz (FG1) y Horacio Solar (FG2).

No obstante lo anterior, todo el equipo investigador dispondrá de cuadernos de notas de campo, y podrán eventualmente intervenir en el contexto de las temáticas planificadas que estén siendo gestionadas por el moderador y en caso estrictamente necesario.

Para indagar en la apropiación del MCM, se establecieron tres dimensiones de análisis: las concepciones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático, los componentes del MCM, sus relaciones e implicancias en el aula de matemáticas, y el estudio sobre las prácticas pedagógicas en el aula.

Concepciones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático.

Para estudiar las concepciones de las profesoras se utilizó un cuestionario con preguntas orientadas a concepciones en función de cuatro indicadores: Concepciones de la Matemática y su enseñanza; Planificación de la Enseñanza; Gestión de aula, y Evaluación. Dicho cuestionario se aplicó antes de su participación en el seminario y después de la reflexión grupal posterior a la implementación de su secuencia didáctica, con tal de contrastar los estados iniciales y finales de las docentes en cuanto sus concepciones.

A parte del cuestionario, antes de su participación en el seminario se aplicó una entrevista semi-estructurada que apuntaba a los mismos cuatro indicadores con tal de detectar en profundidad sus concepciones de ingreso a la metodología de trabajo docente.

Componentes del MCM, sus relaciones e implicancias en el aula de matemáticas.

En el seminario con las profesoras se estudiaron los diferentes componentes del MCM: competencias y sus procesos, la organización matemática del campo aditivo – tareas, técnicas, variables didácticas y condiciones de realización-; y los niveles de complejidad de las actividades. La comprensión del MCM para una reflexión del docente sobre cada uno de los componentes del modelo, además de las relaciones entre éstos y sus implicaciones en el aula de matemáticas. Por ello, el estudio de esta dimensión se realizará por medio de los siguientes indicadores.

- *Grado de comprensión de las competencias.* Una de las principales reflexiones que interesa caracterizar del docente es sobre las competencias. Las dos competencias en las cuales se ha puesto énfasis en este proyecto son la Modelización y la Argumentación, y por lo mismo interesa estudiar la reflexión de las docentes en torno a las mismas. Para ello se utilizará como cuerpo principal de datos el conjunto de videos que registran la participación de las docentes en las sesiones del seminario y por consiguiente su reflexión. Además, se considera observar los resultados del cuestionario de concepciones de las docentes relativos a estas competencias, así como las profundizaciones que pudieran surgir en la entrevista inicial.
- *Grado de comprensión de la organización matemática del campo aditivo.* Si bien la comprensión matemática de las docentes no es un fin de este proyecto, la comprensión didáctica de los temas involucrados es necesaria para evidenciar la comprensión del MCM. En este sentido se ha diseñado un cuestionario de conocimiento disciplinar (específicamente del campo aditivo) en relación con: el tipo de problemas, las técnicas y las variables didácticas que hacen evolucionar los problemas relativos a estas temáticas matemáticas. Para diagnosticar si la metodología de trabajo docente impacta de alguna manera en la comprensión didáctica, este cuestionario se aplica en dos instancias, una al inicio del seminario, y

una después de que los profesores finalicen la implementación de la secuencia didáctica.

- *Grado de comprensión de las relaciones entre los componentes.* Una comprensión profunda del MCM pasa porque el docente articule sus diferentes componentes. Para observar esta articulación se analizan las discusiones realizadas en las sesiones del seminario, principalmente, para ver cómo evolucionan sus discusiones. Por otra parte, se analizan los grupos focales que se realizan antes y después de la implementación de la secuencia didáctica diseñada por las docentes.
- *Reflexión sobre las implicancias del MCM.* El último aspecto que interesa estudiar en esta dimensión es sobre la reflexión del docente de las implicancias del MCM en el aula de matemáticas. Ello se estudiará a través de los dos grupos focales realizados antes y después de la implementación de sus secuencias didácticas.

Reflexión sobre las prácticas.

Además del estudio de las concepciones y de la comprensión teórica del MCM, la reflexión de las prácticas se levanta como relevante para estudiar cómo proyectan el MCM en sus acciones docentes cotidianas. Dicha reflexión se realizó tanto sobre las prácticas de otros docentes como sobre la propia práctica, teniendo cada uno de estos estudios una estrategia propia.

- *Reflexión del docente sobre las prácticas de otros.* Para analizar este tipo de reflexión de la práctica se utilizó como primer cuerpo de datos el espacio del seminario en que se analizaron los casos clínicos y episodios de videos de sus compañeras. Un segundo cuerpo de datos es el segundo grupo focal en que se analizaron episodios de las implementaciones de las secuencias didácticas.
- *Reflexión del docente sobre su propia práctica.* El análisis de la reflexión sobre su propia práctica se llevó a cabo en un *Estudio de Casos*, para el cual se consideraron 4 de las docentes participantes en el proyecto. A cada una de estas profesoras se le aplicó dos entrevistas en la que tuvieron que analizar episodios de su propia práctica. La primera entrevista se aplicó antes de comenzar las implementaciones de la secuencia didáctica, y la segunda entrevista una vez finalizadas las mismas.

En lo que refiere a reflexión, se utilizaron las categorías propuestas por Van Es y Sherin (2007) para estudiar los cambios en ella respecto de los análisis que hacen las docentes de las prácticas tanto propias como de otros. En particular, el análisis se enfocó a observar el actor involucrado en el análisis, el tema de análisis, y el tipo de análisis realizado. En la tabla siguiente se expresan los distintos indicadores utilizados.

Categorías de análisis usadas para la Reflexión docente (Van Es y Sherin, 2007, p. 161).

Actor involucrado en el análisis	Tema de análisis	Tipo de análisis
Estudiante	Gestión de la clase	Descriptivo
Docente	Clima de la clase	Evaluativo

Curriculum El mismo Otros	Pensamiento matemático Aspectos didácticos Otros	Interpretativo
---------------------------------	--	----------------

La primera de estas categorías busca examinar sobre quién se hacen los comentarios cuando el docente realiza un análisis de la práctica. Estos posibles actores no sólo incluyen al profesor y a los alumnos que aparecen en el video que se analiza sino también agentes externos como por ejemplo desarrolladores curriculares. Además, se contempla un indicador que de cuenta de los momentos que el docente habla de sí mismo en tanto su propia práctica. La segunda categoría aborda aquellos sobre lo que hablan los profesores, que incluye el pensamiento matemático, aspectos pedagógicos, clima de clase, la gestión, u otros aspectos. El pensamiento matemático se refiere a las ideas matemáticas y a la comprensión expresada en la clase (por ejemplo, “Él estaba usando sus dedos para contar los grupos de diez”); los aspectos didácticos se refieren a las técnicas y estrategias para la enseñanza (por ejemplo, “¿Qué método se utiliza para enseñar a dos dígitos?”); el clima de la clase se refiere al entorno social de la misma (por ejemplo, “Esa fue una lección divertida”); y la gestión se refiere a las declaraciones sobre la mecánica de la clase (por ejemplo, “El profesor maneja muy bien las interrupciones”). La tercera categoría se centra en cómo los profesores analizan la práctica: a nivel descriptivo, interpretativo o evaluativo. El nivel descriptivo se refiere a las declaraciones que relatan los hechos ocurridos (por ejemplo, “Los estudiantes tenían las manos en alto. El maestro llamó a una alumna para ir a la pizarra”); el nivel evaluativo se refiere a las declaraciones en las que los profesores comentan sobre lo que consideran bueno o malo, o sobre aquello que debería haber sido hecho de manera diferente (por ejemplo, “Me gusta mucho cómo fue hecha la clase”. “Eso fue genial”); y el nivel interpretativo se refiere a las declaraciones en las que los profesores hacen inferencias sobre lo que observan. Es decir, usan sus observaciones de lo que sucede en el video para hacer hipótesis acerca de por qué estos acontecimientos ocurren.

4.3.2.2. Desempeño docente

El desempeño en las prácticas pedagógicas de las profesoras en el aula viene determinado por dos dimensiones: preparación y gestión de la enseñanza. Éstos son criterios fundamentales para medir esta variable y su impacto en el grado de apropiación del MCM. Para cada una de estas dimensiones, se consideran las siguientes estrategias, con las especificaciones que sean pertinentes incorporar a lo largo del análisis.

Preparación de la enseñanza.

En esta dimensión se analizaron las producciones de las docentes en cuanto a sus planificaciones antes y después de la implementación de la propuesta metodológica de trabajo docente. Las planificaciones otorgan información de cómo organizan la enseñanza y cuáles son los criterios que utilizan para ello. En este proceso se observaría la presencia y ausencia de elementos relacionados a la organización matemática (OM) en estudio y las relaciones entre estos. El análisis de dichos datos se realizó por medio del estudio de los elementos praxiológicos de una OM y los criterios de análisis de competencias en una planificación propuestos por Solar (2009), caracterizando los niveles

de complejidad de las actividades matemáticas propuestas y las competencias predominantes de las mismas.

Gestión de la enseñanza.

En esta dimensión fueron analizadas las prácticas de aula de las profesoras, durante y después de la implementación de la propuesta metodológica de trabajo docente. Dichas prácticas están registradas en video, cuyo análisis se realizó por medio de pautas de observación, de tipo Likert. Esto permitió evidenciar la diferencia entre distintos momentos temporales para cada sujeto, lo cual se interpretó como el cambio que los individuos evidencian en sus prácticas pedagógicas.

En dichas pautas, los indicadores hacen referencia a criterios que permitan dar información en cuanto a la apropiación del MCM. Principalmente, estos criterios obedecen a:

- *Momentos didácticos del proceso de estudio.* Apoyados en los momentos didácticos enmarcados en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999), este grupo de indicadores permite evidenciar si las profesoras están intencionando o no, o bien en qué grado, cada uno de los momentos de una clase, y por ende el objetivo de las actividades diseñadas.
- *Procesos constituyentes de competencias.* Apoyados en los procesos competenciales definidos en el proyecto FONIDE DED0760 (Lorena Espinoza et al., 2008) y los propuestos en las perspectivas teóricas que sustentan este estudio, estos indicadores permiten detectar si la profesoras intencionan los procesos que permitirían desarrollar competencias en los estudiantes, específicamente las intencionadas en este estudio: modelización y comunicación y argumentación.
- *Gestión del error.* Se analiza la gestión de error por parte de las profesoras en términos de si la profesora gestiona los errores o dificultades de los alumnos haciendo preguntas que permitan problematizarlos.
- *Fidelidad y adaptación de la secuencia didáctica.* En la implementación de la propuesta didáctica diseñada por las profesoras en los seminarios 5º a 8º, se estudiará la fidelidad con que la gestionan los docentes, y las adaptaciones de la misma que surgen a partir de su gestión.

4.4. Validación de instrumentos iniciales

Durante el proceso de investigación, se llevó a cabo una validación de los instrumentos de recogida de datos que hasta la fecha se tenían diseñados. En particular se validó un cuestionario de tipo priorización (y una entrevista asociada) y el cuestionario de conocimiento disciplinar.

Las valoraciones de los jueces, todos del ámbito nacional, permitió consolidar los cambios en dichos instrumentos, los cuales fueron producto de las reflexiones realizadas por el equipo investigador a partir de las sugerencias recibidas luego del informe de avance.

En el Anexo 5, se puede encontrar el dossier de validación y los instrumentos aplicados previamente al inicio de los seminarios y aquellos aplicados al final del trabajo con las docentes.

5. Análisis y Resultados

Tal como hemos ya mencionado, este proyecto buscaba diseñar, implementar y evaluar una metodología de trabajo docente que permitiera la apropiación del MCM como modelo didáctico. Desde este punto de vista, los resultados de la investigación se organizaron en dos apartados: por una parte aquellos relativos a los productos del diseño y de la implementación, y por otra parte, los relativo a aquello que permite evaluar el impacto de la metodología de trabajo docente, lo cual está íntimamente relacionado a las variables del estudio presentada con anterioridad.

5.1. Diseño e implementación de una Metodología de Trabajo Docente

Como producto del diseño y del proceso de implementación de la metodología de trabajo docente, se estableció un taller para cada sesión del seminario y un conjunto de casos clínicos que eran los insumos para la reflexión docente en cada sesión del mismo. A su vez, los grupos focales fueron un producto de la investigación y apoyan el trabajo y análisis del impacto de la metodología señalada.

A continuación, describiremos en qué consistió cada sesión del seminario, pudiendo encontrarse los talleres en el Anexo 6. Del mismo modo, describiremos los casos clínicos que se generaron, pudiendo encontrarse sus videos en el Anexo 12.

5.1.1. Descripción de los seminarios.

Tal como se ha señalado, se realizaron 8 sesiones de Seminario. A continuación se detalla cada una de ellas.

- **Sesión 1 (30 de abril).** Investigadores participantes: Lorena Espinoza, Enrique González, Rodrigo Ulloa, Horacio Solar.

Esta sesión tuvo como propósito estudiar las competencias matemáticas como primer componente de MCM, a través del análisis del primer caso clínico. Este análisis se realizó en varias etapas. En primer lugar, se permitió que las profesoras analizaran a través de unas preguntas el video de una profesora que gestiona dos problemas de campo aditivo. Como resultado de este análisis, las participantes plantearon una opinión generalizadamente negativa de la clase. Luego se les presentó otro video de una segunda profesora que gestiona los mismos problemas aditivos a través del uso de esquemas. Se analiza su gestión de acuerdo a las mismas preguntas anteriores, y las participantes plantearon una opinión generalizadamente positiva de la clase Finalmente se discutió qué aspectos de la gestión de la segunda profesora, podría rescatar la primera profesora para lograr efectivamente sus expectativas de aprendizaje. Las participantes destacaron el trato del razonamiento que hace la segunda profesora de los niños a través del uso de esquemas, también destacaron que la profesora hace comparar distintos procedimientos de los estudiantes, y como tercer aspecto las argumentaciones de los alumnos del segundo caso están más fundamentados que del primer video En la discusión final de la actividad se discutió sobre la importancia del método en la resolución del problema. En el cierre de la sesión a las participantes se les presentó un documento con las competencias matemáticas.

- **Sesión 2 (16 de abril).** Investigadores participantes: Andrés Ortiz; Rodrigo Ulloa, Horacio Solar

Esta sesión tuvo como propósito estudiar el segundo componente del MCM: elementos de la Organización Matemática (OM) de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) en el contexto del campo de problemas aditivos, a través del análisis del segundo caso clínico.

Este análisis se realizó en dos etapas. En primer lugar, se permitió que las profesoras analizaran libremente el video. Como resultado de este análisis, las participantes plantearon una opinión generalizadamente positiva de la clase, destacando un buen uso del material concreto, buena socialización y configuración de la sala de clases. Se realizaron algunas sugerencias, tales como considerar las respuestas individuales de los alumnos, y no sólo las grupales. Finalizada esta actividad, se les pidió que analizaran el mismo episodio, esta vez identificando el propósito de la clase y evaluando si este fue logrado. La conclusión de las participantes fue que la gestión de la clase no había logrado su propósito, y que por tanto no se podía afirmar que era una buena clase como se señaló en la primera actividad. Esta vez, las sugerencias fueron más específicas y más técnicas (opiniones respecto de la relación entre los números y la disponibilidad de las colecciones), lo que permitió introducir la noción de variable didáctica, y su rol en el análisis de clases.

Posteriormente, se sistematizaron los conceptos de OM, Tarea Matemática, Técnica, Variable Didáctica y Condición Didáctica. Las participantes valoraron la utilidad de dichos conceptos, pero reconocieron que les era difícil ponerlos en práctica. Se señaló que tales conceptos se continuarán trabajando a lo largo de las sesiones. Se observó además alguna resistencia a vincular estos nuevos conceptos con las propias prácticas de los participantes.

- **Sesión 3 (30 de abril).** Investigadores participantes: Francisco Rojas, Andrés Ortiz, Rodrigo Ulloa, Horacio Solar.

Esta sesión tuvo como propósito estudiar el nivel de complejidad de las actividades como el tercer componente del MCM, a través del tercer caso clínico.

En primer lugar las participantes analizaron un video de una profesora que gestionó la misma situación de aprendizaje del caso clínico, pero con condiciones de realización diferentes (la caja de las fichas era oscura y la primera colección de fichas no estaba disponible). Se analizó el video en función de la diferencia entre dificultad y complejidad de la actividad.

La segunda actividad consistió en establecer una secuencia que ordene las condiciones de realización de una tarea matemática, según el grado o nivel de complejidad. En general hubo consenso en el seguir como criterios el ámbito numérico, la disponibilidad de la colección y luego la relación entre los números.

La tercera actividad consistió en organizar una secuencia didáctica de un conjunto de tareas matemáticas en tres clases. En este caso se identificaron dos criterios de las profesoras para organizar la secuencia: Por tarea matemática (cada clase una tarea genérica) y dentro de la clase por complejidad en función de la condición de realización. Un segundo criterio es que en cada clase se presentarán las tres tareas

genéricas (cálculo, enunciar procedimientos, y resolución de problemas), y se secuencian cada clase según el ámbito numérico.

A continuación se les entregó un documento en que se presentan tres niveles de complejidad de una situación (reproducción, conexión y reflexión). La cuarta actividad consistió en proponer dos actividades con diferente nivel de complejidad de una misma tarea matemática. El criterio que hasta ahora las profesoras manejaban para modificar la complejidad era principalmente por el cambio en la condición de realización, pero de ellos mismos emergió otro criterio de mantener la condición de realización pero cambiar el proceso (por ejemplo: identificar procedimientos, explicar el procedimiento utilizado). Estos criterios que aparecieron de la discusión con las profesoras es un resultado favorable del seminario como espacio de investigación.

En el cierre de la sesión se acuerda que la complejidad de una actividad depende tanto de las condiciones de realización como de los procesos que se ponen en juego.

- **Sesión 4 (14 de mayo).** Investigadores participantes: Andrés Ortiz, Rodrigo Ulloa y Horacio Solar.

Esta sesión tuvo como propósito discutir todos los elementos del MCM por medio de la competencia de modelización. Se analizó el caso clínico 3 en que se utilizan esquemas para comprender el problema e identificar la operación.

La primera actividad consistió en presentar un problema de comparación a las profesoras, se les preguntó qué dificultades pueden tener los estudiantes al resolver los problemas y luego qué condiciones didácticas se deben tener presentes en la gestión de la clase para hacerse cargo de estas dificultades. Las profesoras presentaron diferentes razonamientos ligados a las técnicas y a la disponibilidad de las colecciones, sin hacer alusión al uso de los modelos.

La segunda actividad se les presentó el caso clínico 3. Las preguntas tuvieron el propósito de estudiar el uso de los esquemas para modelar los problemas, preguntando cómo afectó el esquema en uno de los episodios observados, finalmente se discutió cuáles fueron las competencias predominantes en el episodio observado. La discusión de la segunda actividad implicó utilizar gran parte del seminario dado que las profesoras realizaron un análisis extenso del episodio, por lo que otras actividades diseñadas se pospusieron.

- **Sesión 5 (28 de mayo).** Investigadores participantes: Francisco Rojas, Enrique González, Andrés Ortiz, Rodrigo Ulloa, Hernán Morales y Horacio Solar.

Esta sesión del seminario corresponde a la primera sesión de cuatro en que se estudia una planificación en función del MCM. En particular el esquema de una secuencia didáctica

La primera actividad consistió en desarrollar un esquema de una clase que consideró algunos elementos del modelo de competencia matemática (tarea matemática, técnicas, niveles de complejidad y competencias predominantes). Para ello se les presentó un caso de una profesora que tiene como propósito contrastar procedimientos de suma y promover las competencias de razonamiento y argumentación, y manipulación de expresiones y cálculo. Esto a través de un problema de composición. En función del caso la actividad abordó la identificación de cada uno de los elementos del modelo en el caso.

La segunda actividad consistió en analizar un episodio de clase en que una de las profesoras del seminario, Graciela, propone al curso la resolución del problema planteado de composición. El análisis se centró en contrastar lo que habían señalado anteriormente con lo ocurrido en el episodio.

La segunda parte del seminario las profesoras se reunieron en tres grupos para comenzar a elaborar el esquema de su secuencia didáctica, los grupos se conformaron de acuerdo a temas de interés que habían planteado anteriormente.

- **Sesión 6 (7 de junio).** Investigadores participantes: Rodrigo Ulloa, Hernán Morales y Horacio Solar

La primera actividad consistió en desarrollar un plan de clase a partir de un esquema dado. En la segunda actividad se les presentó un episodio de una de las profesoras del seminario, Sonia. Las preguntas tuvieron el propósito de estudiar el uso de los esquemas para modelar los problemas, preguntando cómo afectó el esquema en uno de los episodios observados. Finalmente las profesoras continúan diseñando su secuencia didáctica elaborado el plan de cada clase

- **Sesión 7 (14 de mayo).** Investigadores participantes: Lorena Espinoza Francisco Rojas, Horacio Solar

En esta sesión las profesoras continúan elaborando el plan de clases, En particular se discutirán criterios para la gestión de las situaciones de aprendizaje que contempla un plan de clases. En la primera actividad se les presenta un plan de clases y se discute de qué manera el plan de clases promueve la competencia declarada. En la segunda actividad se les presentó dos episodios de Ángela para discutir cómo gestiona el error y dificultades que se presentan. Finalmente continúan diseñando su plan de clases

- **Sesión 8 ().** Investigadores participantes: Rodrigo Ulloa y Horacio Solar

En esta sesión se trabajaron los criterios de evaluación de competencias matemáticas a considerar en el diseño y gestión de la secuencia didáctica. En la primera actividad se presentaron las producciones de dos niños para contar una colección de autos dispuesto en dos hileras que se cruzaban al centro, es decir como forma de cruz. Las profesoras discutieron criterios para evaluar a los niños que consideren los procedimientos como las justificaciones de dichos procedimientos, luego se realizó la misma actividad con otra situación. En la segunda parte del seminario se continuó con sus plan de clases.

5.1.2. Casos clínicos

Los casos clínicos se centran en los contenidos relativos al campo aditivo presentes en primer y segundo año básico. Cada uno de los casos clínicos abordó el estudio de nociones teóricas que se estudiaron los cuatro primeros seminarios y que son fundamentales para la apropiación del MCM por parte de las profesoras participantes de la investigación. Interesó que los casos clínicos fueran gestiones de aula apropiadas y virtuosas para identificar y estudiar, ya sea por presencia o ausencia cada una de las

nociones teóricas a aprender. Hasta la fecha del informe se desarrollaron tres seminarios cuyos casos clínicos son los que se describen a continuación.

- Caso Clínico 1.

Conocimiento a estudiar	Competencias matemáticas
Situación aditiva	Resolución de problemas mediante un enunciado escrito
Curso	2° básico
Tareas matemáticas	Resuelven un problema aditivo de composición directo y un problema de comparación inverso que involucran sumas de dos números de dos cifras.
Técnicas	Para identificar la operación, apoyo en esquemas. Para los cálculos, técnicas basadas en descomposiciones canónicas y aditivas de los números.
Competencia predominante	Modelización
Descripción de episodio	La profesora presenta un problema directo en que los niños no tienen dificultades para decidir la operación, sin embargo la profesora gestiona la utilización de esquemas para comprender la relación cuantitativa entre y datos e incógnitas. Tres niños presentan distintas estrategias para abordar los cálculos. Luego, la profesora presenta el problema de comparación en que ahora los niños tienen dificultades para decidir la operación. Nuevamente se gestiona la utilización de esquemas para que los niños logren identificar la operación que resuelve el problema.

- Caso Clínico 2

Conocimiento a estudiar	Organización Matemática
Situación aditiva	Resolución de problemas mediante una situación con objetos concretos.
Curso	1° básico
Tareas matemáticas	Resuelven problemas aditivos de cambio directos asociados a la acción de agregar que involucran sumas de un número de hasta dos cifras con un número de una cifra menor o igual a 5.
Técnicas	Para identificar la operación, apoyo en la situación aditiva concreta. Para los cálculos, sobreconteo y uso de la cinta numerada.
Competencia	Resolución de problemas

predominante	
Descripción de episodio	La profesora echa una cierta cantidad de fichas en una caja contándolos de uno en uno conjuntamente con los niños. Luego echa otra cantidad preguntando a los niños que indiquen la cantidad de fichas que quedan en la caja. Se observa claramente cómo las condiciones en que se presenta cada problema condiciona las distintas técnicas ocupadas por los niños: si la segunda cantidad de objetos se echa de uno en uno seguida de la cantidad anterior, los niños cuentan y no sobrecuentan; si los niños tiene disponibles las fichas, el problema es de composición y los niños cuentan en vez de sumar; etc.

- Caso Clínico 3

Conocimiento a estudiar	Nivel de complejidad
Situación aditiva	Resolución de problemas mediante una situación con objetos concretos.
Curso	1° básico
Tareas matemáticas	Resuelven problemas aditivos de cambio directos asociados a la acción de agregar que involucran sumas de un número de hasta dos cifras con un número de una cifra menor o igual a 5.
Técnicas	Para identificar la operación, apoyo en la situación aditiva concreta. Para los cálculos, sobreconteo y uso de la cinta numerada.
Competencia predominante	Resolución de problemas
Descripción de episodio	La profesora echa una cierta cantidad de fichas en una caja contándolos de uno en uno conjuntamente con los niños. Luego echa otra cantidad preguntando a los niños que indiquen la cantidad de fichas que quedan en la caja. Se observa claramente cómo las condiciones en que se presenta cada problema condiciona las distintas técnicas ocupadas por los niños: si la primera cantidad de objetos no está disponible los niños sobrecuentan.

5.2. Evaluación MTD: apropiación MCM : Reflexión

En este apartado mostraremos los resultados y análisis realizados correspondientes a los objetivos que operacionalizan la evaluación de la metodología docente, en tanto el grado de apropiación del MCM.

5.2.1 Concepciones del profesor

Tener claridad sobre las concepciones de las profesoras es un elemento fundamental para ver cómo impacta en este sentido el trabajo docente y sus propios procedimientos en quienes participan del proyecto. Por ello, para determinar las concepciones de las docentes se utilizó un cuestionario de tipo priorización con un total de 20 preguntas con tres alternativas cada una de ellas (Anexos3a y 3b). Para responderlo, las participantes debían elegir dos de las tres alternativas según criterios de adecuación, pertinencia, corrección, etc., dada la situación planteada en cada ítem. Puesto que cada ítem del cuestionario tiene 3 opciones que deben ser priorizadas, existen 6 posibilidades de ordenamiento. Cada una de ellas fue categorizada, asignándole un puntaje (0 a 5) siendo 5 la priorización correcta según el diseño del instrumento. Esto produjo que se consideraran tres bloques de priorización: Ideal, Intermedio, y No Ideal. En el primero se consideran las preguntas con 5 o 4 puntos, en el segundo con 2 o 3, y en el tercero con 1 o 0 puntos. El criterio para definir estos bloques corresponde a la intención que quien responde no descarte el indicador más adecuado y que se mueva dentro del bloque ideal de priorización. En la siguiente tabla se muestran las caracterizaciones de los puntajes, mediante un ejemplo de respuesta:

Criterios de Asignación de puntajes

Puntaje Asignado	Tipo de respuesta	Ejemplo			Criterio
		a	b	c	
5	Prioriza correctamente el bloque "ideal"	1	2	3	Que no se descarte la más adecuada y que se mueva dentro del bloque ideal
4	Prioriza el bloque "ideal", intercambiando las opciones.	2	1	3	
3	Prioriza la más adecuada, pero descarta la medianamente adecuada	1	3	2	
2	Prioriza la menos adecuada, y descarta la medianamente adecuada	2	3	1	
1	Prioriza la medianamente adecuada, y descarta la más adecuada	3	1	2	
0	Prioriza la menos adecuada, y descarta la más adecuada	3	2	1	

En el ejemplo anterior, si se supone que la opción **a** es la más adecuada, seguida de la opción **b** y luego la **c**, entonces se obtienen 5 puntos al priorizarlas en ese mismo orden. En la tabla se aprecian las restantes combinaciones que generan los distintos puntajes y bloques de priorización.

Tanto en la aplicación del cuestionario previo a los seminarios (pre test) como en la sesión final con las docentes realizadas en el segundo Focus Group (post test), esta asignación de puntaje nos permitió ver cómo se movilizaban las docentes en sus concepciones, tanto a nivel general como por cada una de las dimensiones en las cuales se basaba el cuestionario.

Dada la asistencia de las docentes al seminario y restantes instancias de reflexión, sólo se pudo recoger información de seis profesoras, las cuales estuvieron para la toma de

datos de ambos cuestionarios. En la tabla, se muestran los resultados de las docentes para cada una de las dimensiones con que se ideó el cuestionario.

Resultados Individuales PRE Test

Profesor(a)	Concepciones de la Matemática y su enseñanza								Planificación de la Enseñanza						Gestión de Aula				Evaluación		Total (suma puntajes)
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	
Mónica	5	5	5	5	5	4	5	5	3	4	4	4	1	5	5	5	3	0	5	4	82
Carmen	5	5	4	5	5	5	5	5	5	5	1	1	4	5	3	1	3	5	4	1	77
Valentina	5	5	5	5	5	3	5	5	5	5	4	5	4	5	3	5	3	1	4	4	86
Sonia	4	5	5	3	5	4	5	5	3	5	5	2	4	4	4	5	3	5	4	4	84
Ángela	4	5	4	4	5	5	4	3	3	4	4	1	4	4	4	5	3	1	3	4	74
Marta	3	5	5	5	5	4	1	3	3	5	1	2	1	5	3	5	3	2	3	5	69

Resultados Individuales POST Test

Profesor(a)	Concepciones de la Matemática y su enseñanza								Planificación de la Enseñanza						Gestión de Aula				Evaluación		Total (suma puntajes)
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	
Mónica	4	5	5	5	5	4	5	5	3	5	3	0	0	5	5	4	3	3	0	4	73
Carmen	5	5	5	5	5	3	5	5	5	5	4	4	5	4	3	2	5	5	4	1	85
Valentina	4	0	3	5	5	3	3	5	5	4	5	2	5	5	3	4	5	2	1	1	70
Sonia	5	5	5	5	5	3	5	5	5	5	5	0	4	4	5	1	5	5	4	5	86
Ángela	4	5	4	4	5	4	5	3	3	5	4	1	4	4	3	0	5	4	4	5	76
Marta	4	5	5	5	3	3	3	5	4	4	5	1	1	3	5	4	4	0	1	4	69

AVANCE

Profesor(a)	Concepciones de la Matemática y su enseñanza								Planificación de la Enseñanza						Gestión de Aula				Evaluación		Suma diferencias
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	
Mónica	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-4	-1	0	0	-1	0	3	-5	0	-9
Carmen	0	0	1	0	0	-2	0	0	0	0	3	3	1	-1	0	1	2	0	0	0	8
Valentina	-1	-5	-2	0	0	0	-2	0	0	-1	1	-3	1	0	0	-1	2	1	-3	-3	-16
Sonia	1	0	0	2	0	-1	0	0	2	0	0	-2	0	0	1	-4	2	0	0	1	2
Ángela	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	0	0	0	0	-1	-5	2	3	1	1	2
Marta	1	0	0	0	-2	-1	2	2	1	-1	4	-1	0	-2	2	-1	1	-2	-2	-1	0
	0	-5	-1	2	-2	-5	1	2	3	0	7	-7	1	-3	2	-11	9	5	-9	-2	

Tabla: Resultados y diferencias de puntajes asignados a las respuestas de las docentes en el cuestionario de concepciones.

Se puede observar que algunas de las preguntas fueron las más afectadas por el cambio de priorización de las docentes. En particular, la pregunta 16 cambia considerablemente, ya que aborda temas comunicativos y argumentativos, lo cual fue trabajado intensamente en los seminarios. Por otra parte, se observa que las preguntas 11 y 12 cambian de priorización, la primera con tendencia a priorizar el bloque teórico o ideal y la segunda lo contrario. Además, se puede ver que Valentina es la docente que más diferencias presenta en cuanto a sus priorizaciones entre ambas instancias.

A partir de esta información, lo que interesa rescatar es cómo cambian las profesoras las formas de priorizar en cada una de estas dimensiones. Para ello es necesario ver cómo se han movido entre los distintos bloques de priorización. En primer lugar, de forma global, las docentes priorizan adecuadamente la mayoría de los ítems, en cuanto a optar por las situaciones ideales presentadas en cada uno de ellos, tanto en el pre test como en el post test. Las siguientes tablas muestran la cantidad de respuestas de las docentes que entran en cada bloque.

PRE	TOTAL			POST	TOTAL		
	Bloque no ideal	Bloque intermedio	Bloque ideal		Bloque no ideal	Bloque intermedio	Bloque ideal
Profesor(a)	0 - 1	2 - 3	4 - 5	Profesor(a)	0 - 1	2 - 3	4 - 5
Mónica	2	2	16	Mónica	3	4	13
Carmen	4	2	14	Carmen	1	3	16
Valentina	1	3	16	Valentina	3	6	11
Sonia	0	4	16	Sonia	2	1	17
Ángela	2	4	14	Ángela	2	3	15
Marta	3	8	9	Marta	4	4	12

Diferencia	TOTAL		
	Bloque no ideal	Bloque intermedio	Bloque ideal
Profesor(a)	0 - 1	2 - 3	4 - 5
Mónica	1	2	3
Carmen	-3	1	2
Valentina	2	3	-5
Sonia	2	-3	1
Ángela	0	-1	1
Marta	1	-4	3
SUMA	3	-2	-1

Al observar las diferencias, se puede apreciar que el conjunto de las profesoras, disminuyen levemente las preguntas contestadas del bloque ideal o teórico de priorización. Por ello es necesario ver en qué aspecto han bajado las docentes para posteriormente poder contrastar esto con las reflexiones que realizan en distintas instancias.

En las tablas siguientes se presentan, por dimensión, la diferencia en la cantidad de preguntas que las docentes han cambiado de bloque de priorización (entre paréntesis se señalan los ítems correspondientes a la dimensión). En éstas se puede observar que las profesoras tienen un cambio similar y homogéneo, excepto en lo que refiere a la planificación de la enseñanza, donde prácticamente no se observa cambio. En cuanto a las concepciones sobre matemática y su enseñanza, las docentes, como grupo, mantienen sus creencias, excepto dos de ellas que priorizan de forma distinta cuatro preguntas, con tendencia a sacarlas del bloque ideal de priorización. En cuanto a la gestión de aula, una de las docentes cambia su priorización con una tendencia a subir su bloque de priorización, con lo cual se acerca a la respuesta teórica esperada. Finalmente, en cuanto a la evaluación, se alejan del bloque ideal, siendo una de ellas la que más influencia el resultado general.

Con estos resultados, se puede afirmar que de algún modo a ciertas profesoras les ha afectado la metodología de trabajo docente en tanto cuestionan lo que piensan, independientemente si se presenta tendencia hacia priorizar las preguntas de forma adecuada teóricamente. La situación de conflicto cognitivo que provoca la reflexión de la práctica y el estudio de componentes teóricos que modelizan la enseñanza, puede provocar un desequilibrio en las concepciones que suele manifestarse por no priorizar adecuadamente ciertos ítems, lo que no implica necesariamente que no lleguen a comprender finalmente cuáles son las situaciones ideales para cada una de las preguntas formuladas en el cuestionario.

Concepciones de la Matemática y su Enseñanza (1-8)

Profesor(a)	Bloque no ideal	Bloque intermedio	Bloque ideal
	0 - 1	2 - 3	4 - 5
Mónica	0	0	0
Carmen	0	1	-1
Valentina	1	2	-3
Sonia	0	0	0
Ángela	0	0	0
Marta	-1	1	0
SUMA	0	4	-4

Gestión de Aula (15-18)

Profesor(a)	Bloque no ideal	Bloque intermedio	Bloque ideal
	0 - 1	2 - 3	4 - 5
Mónica	-1	1	0
Carmen	-1	0	1
Valentina	-1	0	1
Sonia	1	-1	0
Ángela	0	0	0
Marta	1	-3	2
SUMA	-1	-3	4

Planificación de la Enseñanza (9-14)

Profesor(a)	Bloque no ideal	Bloque intermedio	Bloque ideal
	0 - 1	2 - 3	4 - 5
Mónica	1	1	-2
Carmen	-2	0	2
Valentina	0	1	-1
Sonia	1	-2	1
Ángela	0	0	0
Marta	0	-1	1
SUMA	0	-1	1

Evaluación (19-20)

Profesor(a)	Bloque no ideal	Bloque intermedio	Bloque ideal
	0 - 1	2 - 3	4 - 5
Mónica	1	0	-1
Carmen	0	0	0
Valentina	2	0	-2
Sonia	0	0	0
Ángela	0	-1	1
Marta	1	-1	0
SUMA	4	-2	-2

5.2.2. Componentes MCM

5.2.2.1. Grado de comprensión de las competencias

Tal como hemos mencionado en la metodología, en esta dimensión interesa ahondar en las comprensiones de las docentes de las competencias, en particular de las de Modelización y de Argumentación y Comunicación.

Este análisis se ha llevado a cabo por medio de la información obtenida en los cuestionarios y en las sesiones del seminario. En el caso del cuestionario, se ha analizado cómo las profesoras priorizan las alternativas de las preguntas relativas a las competencias destacadas anteriormente. Respecto de las sesiones de seminario en las cuales se han desarrollado temáticas relativas a las competencias de interés, se ha seguido la siguiente estrategia de reducción de datos:

- Se han seleccionado sesiones cuyo propósito fuera estudiar estas competencias. Para el caso de la modelización es la cuarta y sexta sesión, y para la argumentación la cuarta y quinta sesión.
- En cada sesión nos focalizamos en las preguntas clave planificadas para discutir sobre las competencias. Cada una de estas preguntas se introducen después de que las profesoras han visto un video de clases. Se seleccionan episodios para cada competencia, y no se repite ninguno para ambas. Los episodios seleccionados corresponden a la discusión de una pregunta planteada en el taller.
- Se transcribieron los episodios seleccionados y se analizaron las respuestas de las profesoras. El análisis se complementó con las notas de campo de las sesiones. En este proceso de análisis, se consideraron los siguientes aspectos para estudiar la comprensión de las competencias por parte de las docentes:
 - Descripción de distintas concepciones sobre cada una de las competencias destacadas.

- Valoración que se atribuye a cada una de las competencias destacadas (modelización y argumentación).
- Caracterización del tipo de respuesta de las docentes sobre las competencias destacadas (aplicación de las categorías de Van Es y Sherin, 2010).

Modelización

Una de las preguntas del cuestionario de concepciones tenía como propósito caracterizar las concepciones de las profesoras sobre la modelización. Si bien este cuestionario es de priorización de preguntas y en otro apartado se analiza las respuestas en función del bloque ideal de priorización, en este apartado el análisis se realizará caracterizando las respuestas de las docentes sin importar si la respuesta está en un bloque ideal.

Cuadro: Pregunta cuestionario sobre modelización

18.- El diseño de una actividad tiene como propósito:	
18.1 Que la actividad permita el aprendizaje de una técnica para resolver problemas	
18.2 Que el desarrollo de la actividad implique un paso del mundo real al mundo matemático	
18.3 Que la actividad permita que emerjan modelos matemáticos para resolver problemas.	

De las seis profesoras que contestaron este ítem en el pre y post test, en el cuadro de respuesta se puede observar los siguientes resultados:

Profesora	18			18		
	18.1	18.2	18.3	18.1	18.2	18.3
Mónica	1	2	3	2	3	1
Carmen	3	2	1	3	2	1
Valentina	2	1	3	1	3	2
Sonia	3	2	1	3	2	1
Ángela	2	1	3	3	1	2
Marta	1	3	2	1	2	3
Pauta	3	2	1	3	2	1
1º prioridad	2	2	2	2	1	3
2º prioridad	2	3	1	1	3	2
3º prioridad	2	1	3	3	2	1

La información se puede simplificar en un cuadro que destaca los datos más relevantes:

	MÁS ADECUADA 18.3		MENOS ADECUADA 18.1	
	Pre	Post	Pre	Post
Nº Respuestas 1º prioridad	2	3	2	2
Nº Respuestas 3º prioridad	3	1	2	3

- En el pre test dos profesoras contestaron como primera prioridad la afirmación más adecuada (18.3), mientras que en el post test tres profesoras colocaron la primera prioridad en la afirmación más adecuada.
- Tanto en el pre test como en el post test, dos profesoras dejan como tercera prioridad la afirmación menos adecuada (18.1).
- En el pre test tres profesoras contestaron como primera prioridad la afirmación menos adecuada, en cambio en el post test sólo una profesora.
- En el pre test dos profesoras dejan como última opción la afirmación menos adecuada y en el post test tres profesoras.

De estos resultados, se puede observar que hay un avance en las concepciones de las profesoras respecto a la modelización, en particular la reducción de priorizar la afirmación menos adecuada significa que dejan de considerar que el diseño de una actividad permita el aprendizaje de una técnica para resolver problemas, y dan más importancia a que el diseño de una actividad permita que emerjan modelos matemáticos para resolver problemas.

Ahora bien, en el transcurso de los seminarios, la modelización como competencia de estudio fue promovida en distintos momentos, en particular en la cuarta y sexta sesión. Para analizar de qué manera se estudio esta competencia se ha seleccionado episodios de estas dos sesiones.

- **Cuarta sesión**

Esta sesión tuvo como propósito discutir todos los elementos del MCM por medio de la competencia de modelización. Se analizó el caso clínico 3 en que se utilizan esquemas para comprender el problema e identificar la operación. En particular, una de las preguntas tuvo el propósito de estudiar el uso de los esquemas para modelar los problemas, preguntando como afectó el esquema en uno de los episodios observados.

Guía: Bien colegas comentemos entonces el resultado de las discusiones de cada grupo. Qué significan estos entonces. Analizamos primero el enunciado del problema, ustedes identificaron entonces ciertas dificultades y qué condiciones permitirían hacerse cargo de estas dificultades. Acabamos de ver entonces en el video la gestión

de una clase, de la parte de una clase, no de una clase completa, donde la profesora abordaba justamente este problema y la profesora lo que hace es leer el enunciado del problema con los alumnos, identificar los datos y a continuación comienza a trabajar con los esquemas. Entonces la pregunta tres de esta actividad tiene que ver con, con ellos justamente ¿cómo afectó el uso del esquema a la gestión de la clase?

Javiera: Yo acá encuentro que afecta positivamente a la clase porque los niños comprenden el problema porque presentan los datos a través de esquemas asociaban el tamaño, asociaban la cantidad los 25, los 25 y los 15 y grafican el concepto más que

Guía : Teresa

Teresa: Ya nosotros tenemos que clarifican la situación problemática, ordenan los datos a través de la representación y el tamaño y el color de la cartulina ayudan a representar las cantidades.

Guía: Ya ok, es decir, por una parte Javiera plantea que es positivo porque ayuda a la comprensión del problema, permitiría representar los datos y las relaciones entre ellos y Teresa va un poco en la misma línea que los distintos colores favorecen representar los datos si es que entendí bien, ok Andrea

Ángela: A ver nosotros en términos generales hablamos de qué cómo le afecta, afecta positivamente para visualizar gráficamente la problemática planteada

Marta: Graficar el problema, claro decodificarlo

Guía: ¿ Qué significa decodificarlo?

Ángela: O sea decodificarlo para niños, que él logre un poco como que las palabras que planteamos arriba, que él las logre como decodificar

Guía: Entonces por una parte ustedes habían valorado el esquema porque permitía representar las cantidades, es decir, permitía visualizar el problema, ok, y lo de la decodificación lo podrían explicar

Mónica; Decodificar, que los niños piensen

Marta: El niño lo internaliza, o sea que el niño sea capaz de comprender, que el niño... comprenda, claro más que nada que comprenda qué significa el más para él, más que

Guía: ¿Pero no había quedado claro cuando leyeron el enunciado? Porque la profesora termino subrayando el 15 + que y preguntó está claro y todos los niños dijeron que sí. Entonces según eso, ya estaba claro ya de antes

Marta: Pero entonces, si uno se representó ahí con la cantidad ahí quedó más claro

Guía: En qué se notó que hay quedado más claro

Marta: En el sentido del tamaño por último, porque esto representa a tal niño y esto representa a tal niño y con la cantidad el niño se da cuenta del tamaño, lo digo para los niños que tienen más problemas, el niño se va a dar cuenta quién tiene más y lo va a poder identificar y después va a pensar, porque como la misma niña que salió primera dijo " ah, pero yo sé que tenía, como que quedó (no se entiende lo que dice) porque no tenía 15 porqué tiene más, entonces la niña pensó cuando estaba... ¿se acuerda? Ya, entonces ahí la niña estaba razonando, razonó realmente quién tenía más, el más que significaba más que

Guía: Ok, en algún momento de la discusión plantearon que el uso del esquema permitía meterse en la cabeza de los niños, lo plantearon en esos términos, es decir lo que ellos están diciendo con esto va más allá de la idea de sólo visualizar y comprender el problema, sino que además una herramienta para meterse en la cabeza de los niños, aunque uno no se pueda meter en la cabeza de los niños si no es a través de lo que los niños dicen, como representan y la forma en que ellos representaron y la discusión que tuvieron a partir de lo que representaron nos entregó mucha más información por parte de cuánto ellos habían comprendido. Entonces el uso de este esquema permitió transparentar un poco en qué estaba pensando cada uno de ellos.

En relación a la valoración de la modelización, las profesoras encontraron positivo el uso de los esquemas, por medio de tres características: principalmente a visualizar el problema lo que permite una mejor comprensión del problema, también a representar los datos, y la relación entre éstos.

En cuanto a las concepciones sobre modelización las profesoras asociaron el esquema con decodificar los datos, que para ellas vendría siendo que los estudiantes además de visualizar los datos, puedan internalizar los mismos. El guía del seminario resume lo planteado por las profesoras en términos de que el esquema permite explicitar el razonamiento de los niños al enfrentar el problema.

Siguiendo la clasificación de Van Es y Sherin (2007), el actor principal en su análisis es el alumno dado que apuntan a cómo entendería los esquemas. El tópico es la matemática al describir la manera de operar los esquemas y el tipo de análisis es interpretativo al focalizarse en cómo los niños aprenden con los esquemas.

En una actividad posterior del mismo seminario, Sonia retoma la segunda pregunta sobre el objetivo de utilizar esquemas.

Sonia: ... yo volví un poquito a la pregunta 4 cuando decía describa cuál es el objetivo a utilizar y esquemas por parte de la profesora. Nosotros teníamos que era representar los datos para lograr una mejor comprensión de ellos y lograr los objetivos...

Se observa que se mantiene la concepción de asociar el esquema con representar datos y comprender el problema. Esta opinión es compartida por la mayoría de las profesoras. En particular Valentina responde que el objetivo es que los estudiantes expliquen y argumenten, análisis que realizaremos en el siguiente apartado focalizado en la competencia de argumentación.

- **Sexta sesión**

En la segunda etapa del seminario, se estructuraron cuatro sesiones para estudiar la planificación en un MCM. En la sexta sesión se introdujo una planificación de la clase en función de los componentes del MCM.

Esta sesión fue un espacio que estuvo diseñado para problematizar en torno a la modelización. Se introdujo el seminario con la socialización del propósito de una

profesora para su clase de utilizar esquemas para modelizar problemas de composición. Para ello, la profesora propuso el siguiente problema: "Tengo 25 cajas con jureles y sierras. Si tengo 19 cajas de sierras, ¿cuántas cajas de jureles hay?" A continuación en el seminario se presentó el esquema de la clase, caracterizado con los componentes del MCM, tareas, técnicas, niveles de complejidad y las competencias predominantes, en este caso la competencia de modelización y de razonamiento y argumentación.

La primera actividad del seminario consistió en elaborar un plan detallado de la clase a partir del esquema de la clase dado. Una vez que las profesoras propusieron un plan de clases, se planteó la segunda actividad que consistió en ver un episodio en que una de las profesoras participantes del seminario, implementa el problema planteado en el aula. Para discutir sobre el episodio, la primera pregunta es asociada a la modelización: ¿Qué rol cumplen los alumnos en la construcción del esquema?, la discusión que se generó en torno a la pregunta se considera para analizar la modelización.

En el episodio se observó cómo la profesora promueve el uso de esquemas, lo ideal es que los alumnos utilicen el esquema para reconocer que es un problema de comparación y plantear la operación. Por el contrario, en el video se evidenciaron grandes dificultades en los estudiantes para usar el esquema y reconocer la operación, ello se manifestó en el considerable tiempo invertido en la resolución de este problema.

Las profesoras del seminario discutieron sobre la pertinencia de los problemas. La profesora del episodio comenzó el análisis argumentando la dificultad en el desarrollo del problema porque había un alumno integrado. Las profesoras destacaron que los niños no se dieron cuenta que el problema era de resta y no de suma. A continuación Ángela planteó una reflexión sobre el uso del esquema y de la modelización:

Ángela: Yo siento que a priori es muy complejo porque tu le estas trasladando los pescados que están al lado de la pantalla a una huincha [referido al esquema] que dice 19.... Pero yo siento que el objetivo de lograr la modelización del esquema, ese mismo yo le hubiera resuelto mostrándole el 19 que son tantos pescados, y que estos tantos son los jureles y tenemos que sacar la diferencia que son otros tipos de pescado y después cuando él ya tiene en la cabeza este cuento, ahí utilizamos la huincha porque el ya va a saber que este pedazo rojo es el total de todos los pescados.

Sonia: Yo tengo que asumir los siguiente, lo que pasa es que yo tiré mis chiquillos a los leones al tiro, y yo insisto que no fue muy fluido para ellos, y mi segundo problema yo lo tuve que haber hecho primero porque el esquema era de conchitas y lo le puse digamos 19, en la cinta le puse los 19 conchitas, y en la otra le puse 11 por ejemplo y había que sacar cuantas más tenía la amiga y ahí contaron solamente y la sacaron altiro,

Guía: Era comparación de conchita

Ángela: Pero eran las mismas conchitas,

María Antonia: eso mismo quería decir yo, en el método Singapur utilizan muchos esquemas, pero antes de llegar a la balanza los niños utilizan el material concreto, o gráficos con los monitos.

Sonia: Yo me hice un autoanálisis y llegué a la conclusión que no tuve que haber puesto este problema

Graciela: Yo creo que a lo mejor le faltó a Sonia quizás es rescatar la acción [aprobación otra profesora], porque aquí habían peces, pero habían dos tipos de peces y que tu necesitabas separar del cual había de cada tipo. Qué ellos supieran identificar para poder separar como condición para poder restar y en base a eso presentar el esquema.

En este diálogo se describen distintas razones en las dificultades que tuvo Sonia en la gestión del problema con el esquema. Ángela planteó que faltó dedicarle más tiempo a la comprensión de los datos del problema para luego usar el esquema para representar los datos. Sonia, la profesora protagonista, aludió que los niños aun no estaban preparados para usar esquemas para este problema y que tuvo que comenzar con el segundo problema que presentó esa clase en que las colecciones eran de la misma naturaleza (conchitas) y los niños identificaron la operación sin dificultad. Por otro lado Graciela argumentó que faltó destacar la acción involucrada de separar para reconocer la resta antes de presentar el esquema.

Las profesoras en el seminario pusieron de manifiesto que son capaces de analizar con criterios didácticos las dificultades presentes en la gestión de una actividad. Según la clasificación de Van Es y Sherin (2007), en la experiencia que tienen con el análisis de videos con profesores, en las primeras sesiones las profesoras atribuyeron las dificultades al clima de la clase, o a las características del profesor y mientras iban teniendo más sesiones de discusión las docentes cambiaron sus análisis a aspectos matemáticos, y didácticos que representan un mejor nivel de reflexión. Por lo tanto, las profesoras del seminario, al centrar su análisis en las condiciones de realización de las actividades que implica un análisis didáctico, elevaron sus niveles de reflexión sobre sus prácticas.

Argumentación

A continuación se describe el análisis del ítem 15 que reporta datos sobre la argumentación. Para el análisis de las respuestas se utiliza la misma estrategia de análisis seguido en modelización.

Cuadro: Pregunta cuestionario sobre argumentación

15.- Un docente debería, al hablar con los estudiantes en clases:	
15.1 Dirigir a los estudiantes para obtener las respuestas correctas a las actividades matemáticas.	
15.2 Dar la palabra a varios estudiantes hasta obtener la respuesta correcta a la actividad.	
15.3 Promover que los estudiantes expliquen a sus compañeros las estrategias que han seguido al resolver las actividades.	

De las seis profesoras que contestaron este ítem en el pre y post test, en el cuadro de respuesta se puede observar los siguientes resultados:

Profesora	15			15		
	15,1	15,2	15,3	15,1	15,2	15,3
Mónica	3	2	1	3	2	1
Carmen	2	3	1	2	3	1
Valentina	2	3	1	2	3	1
Sonia	3	1	2	3	2	1
Ángela	3	1	2	2	3	1
Marta	2	3	1	3	2	1
Pauta	3	2	1	3	2	1
1º prioridad	0	2	4	0	0	6
2º prioridad	3	1	2	3	3	0
3º prioridad	3	3	0	3	3	0

La información se puede simplificar en un cuadro que destaca los datos más relevantes:

	MÁS ADECUADA 18.3		MENOS ADECUADA 18.1	
	Pre	Post	Pre	Post
Nº Respuestas 1º prioridad	4	6	0	0
Nº Respuestas 3º prioridad	0	0	3	3

- En el pre test cuatro profesoras contestaron como primera prioridad la afirmación considerada más adecuada (15.3), mientras que en el post test todas las profesoras colocaron la primera prioridad en la afirmación más adecuada.
- Tanto en el pre test como en el post test, tres profesoras dejan como tercera prioridad la afirmación menos adecuada (15.1).
- Tanto en el pre test como en el post test se mantuvo que ninguna profesora contestó como primera prioridad la afirmación menos adecuada.
- Tanto el pre test como en el post test se mantuvo que ninguna profesora dejó la afirmación más adecuada como tercera prioridad.

De este análisis, destacamos los siguientes resultados:

Respecto a la comparación de las respuestas, si bien se mantiene constante el tipo de respuestas en las afirmaciones menos adecuadas, y también en no dejar como tercera prioridad a la más adecuada, se destaca que todas las profesoras seleccionan la respuesta más adecuada como primera prioridad, logrando un aumento en comparación al pre test. Con ello podemos concluir que el grupo del seminario percibe que un docente debería promover que los estudiantes expliquen a sus compañeros las estrategias que

han seguido al resolver las actividades, por sobre dar la palabra a varios estudiantes hasta obtener la respuesta correcta a la actividad y descartando la visión de dirigir a los estudiantes para obtener las respuestas correctas a las actividades matemáticas. La visión que han seleccionado de promover que los compañeros compartan sus procedimientos es parte de uno de los cuatro indicadores del estándar de comunicación propuestos por el NCTM(2000).

Por otra parte, la argumentación fue una de las competencias que más se discutió en el seminario. En los análisis de los casos clínicos se hacía alusión a esta competencia cuando las profesoras mencionaban el trato de las explicaciones, justificaciones y razonamiento de los alumnos al abordar un problema o cálculo. Por otra parte también se hicieron menciones al analizar videos de clases en cómo una profesora gestionaba la argumentación. Para el análisis de la argumentación, se han seleccionado tres episodios de la cuarta y quinta sesión en que se discute en torno a la argumentación.

- **Cuarta sesión**

El episodio de esta sesión corresponde a la problematización de la segunda pregunta de la actividad sobre el esquema que estudiamos en el apartado anterior de modelización. El guía del seminario introduce la pregunta de cuál es el objetivo de utilizar esquemas.

Guía: Veamos la pregunta 4 entonces, pensando en los tipos que vimos en esta clase y cómo trabajó la profesora este problema ¿cuál creen que fue el objetivo de utilizar esquemas por parte de la profesora, cuál era el propósito que ella tenía en esta clase?

Valentina: Nosotros teníamos como diferentes objetivos, pero llegamos al acuerdo que el objetivo sería argumentar el problema, que lo comprendan y lo expliquen

Guía: O sea no era razonar, era argumentarlo y explicarlo

Valentina: No, si, porque que argumente el problema, que lo comprenda, identificar cantidades y lo razonen

Guía: Ya, pero ustedes me dijeron que tenían varios objetivos, pero en el fondo se quedaron con la argumentación y la explicación del problema

Valentina: No, también, sino está, incluimos todo, pero ahí pensamos primero en resolver el problema, pero después fuimos viendo que también era importante que ellos argumentaran, que lo entendieran, explicaran con sus propias palabras cómo lo entendían, cómo lo resolvían y... identificaran las cantidades

Guía: Con eso entiendo que ustedes van más allá de sólo resolver el problema

Valentina: Sí, vamos por una comprensión también

Guía: Una comprensión

Valentina: Y que ellos argumenten, que expliquen

Si bien la clase que se muestra en el video trata de la resolución de un problema mediante el uso de esquemas, Valentina razonó que el propósito de utilizar esquemas

es promover la argumentación para que comprendan el problema. Luego, Valentina describió, con más detalle, que el propósito es comprender el problema mediante esquemas y que argumenten. En consecuencia, se aprecia que Valentina identificó dos competencias, modelización y argumentación.

En el siguiente episodio se sigue discutiendo en torno al propósito de la clase.

Guía: y qué es lo que tienen que aprender

Graciela: Eso es lo que pusimos nosotros, o sea que gracias, cierto, a, al objetivo de ella que era que a través del esquema, le pusimos nosotros, facilitaba la comprensión, identificaba los datos relacionando que la niñita o el niño ahí, ella le ponía una cartulina, ellos no sacaban cualquier cartulina, sino que tenía que ser una cartulina que representara los números que estaban ahí, de acuerdo a su tamaño. También argumentar, el por qué era súper importante para ella igual, el realizar los cálculos (...) ahí está lo que decía ella, identificar las cantidades asociándola a la cantidad, o sea el tamaño de la cantidad del número y también llega a la resolución, pero después de todos los pasos anteriores, porque muchas veces se tiene que un problema el niño se va por la operación y está listo, pero todos los otros procesos muchas veces no se consideran.

Guía: Es decir si bien es cierto que es una clase en donde hay que resolver problemas no es sólo una clase en donde hay que resolver problemas, porque en las clases de resolución de problemas lo que nos interesa es el procedimiento, del cómo lo hacen y el resultado, pero aquí en palabras de Graciela hay muchos otros procesos involucrados

Guía 2: Ahí lo puse [mientras se desarrolla el diálogo, uno de los guías sistematiza las respuestas de las profesora], hay varias ideas que están ahí, los niños tiene que aprender otras cosas que les faciliten la solución, por ejemplo la utilización de los esquemas la argumentación, los cálculos y que las cantidad asociadas al tamaño de un número, quise leerlo porque en realidad hay hartas ideas que están en juego y todas distintas

Guía: Ahora reconocen alguna de esas afirmaciones respecto de lo que hemos venido trabajando en las otras sesiones anteriores, en el fondo qué ideas están dado vuelta respecto a lo que hemos ido abordando en otras sesiones en estos propósitos que ustedes han identificado por parte de la profesora

Graciela: La argumentación siempre ha salido, siempre se ha comentado que es importante de que los niños argumenten

Guía: Y qué es la argumentación

Graciela: Era que ellos explicaran en el fondo los procesos que ellos hacían ya sea para narrar... las estrategias que ellos utilizaban

En relación a la valoración de la argumentación, en este caso es Graciela quien reconoció otros propósitos de una clase además de resolver problemas, ella se focalizó en la importancia de la argumentación destacando dos aspectos: en primer lugar en la frase de Graciela “*porque muchas veces se tiene que un problema el niño se va por la operación y está listo, pero todos los otros procesos muchas veces no se consideran*” en la mención a los procesos apunta a una de las razones de promover

competencias en el aula, que te permite ampliar la mirada más allá de promover la resolución de problemas y la estrategias de cálculo; en este caso, ella apuntó a destacar los procesos argumentativos en juego. En segundo lugar en el final de este episodio ella planteó que la argumentación no es una competencia puntual a desarrollar en una clase, sino que es transversal ya que “*siempre se ha comentado que es importante que los niños argumenten*”.

Para analizar las concepciones sobre la argumentación, en una actividad posterior se introdujouna pregunta respecto a cuáles son las competencias predominantes en la clase del video. El episodio que se presentó consistió en un diálogo entre un profesor invitado para esta sesión del seminario con Ángela sobre el desempeño de los niños en cuanto a la argumentación.

Profesor invitado: Me quería remontar un poco a la actividad 2 que se basaba en cómo afecta el uso del esquema a la gestión de la clase y uno de los momentos que, que se convalidó ante todo era de que el uso del esquema se veía para identificar si el niño comprendía o no comprendía, una de las ideas fuertes también fue que permitía extraer cuáles eran los procesos que los niños estaban llevando a cabo en la resolución de este problema cierto, en base a esa intención que tuvo de aplicar el esquema o tratar de promover el esquema para que ellos resolvieran el problema la que más calza con lo que conversábamos aquí es el tema de lo que ella promovió como lo más importante era el tema del razonamiento y la argumentación incluso como un medio, como un puente en función de que los niños pudieran ubicar su pensamiento y desarrollar y evaluar todo lo que han... por qué, porque hay al principio una niña que pasa y da un cierto argumento de comparación y pone una cuestión arriba y otra abajo, luego otra alumna hace el mismo razonamiento respecto de lo que hizo la compañera, respecto de uno mismo o lo que hacen otros y pasó a dar otro razonamiento en base a eso y a lo que se dijo al principio de que permiten ver los razonamientos que el niño hacía yo en casos me planteo la que es el razonamiento y organización... Si bien hay otros que están presentes y hay varios que están presentes me parece que como que fue más un uso, un puente donde la profesora se acuerda de eso como para promover que los alumnos pudieran explicar, pudieran comunicar, pudieran también justificar cuáles eran los razonamientos que estaban produciéndose.

Ángela: Es que no es algo general, por ejemplo yo estaría harto a favor de ese planteamiento si hubiera formado así como un debate entre los niños si cada uno hubiera dicho yo lo resolví así o yo siento que esto, pero yo siento que fue como que se acabó digamos de dos niños que pudieron razonar. Por eso te digo si hubiera podido hacer como una especie de plenario ¿cómo lo hiciste tú? ¿cómo llegas tú? ¿por qué tú dices que ella se comió más que el primer niño? No sé po, que lo hubiéramos argumentado más, ahí sí, hubiera sido como el fuerte la argumentación, pero no me queda claro que lo haya utilizado como una estrategia, como puente para, porque ella tampoco le da énfasis al tema de la argumentación de los niños, porque ella lo usa gráficamente para que a lo mejor al resto le quede claro que ese comió más que. Pero a lo mejor su énfasis, el objetivo era que lo, que entendieran, que estaban poniendo más que, claro a lo mejor que estaba comparando dos piezas, pero no lo veo como un argumentar.

El profesor invitado destacó que el esquema permite comprender el problema por parte de los estudiantes, además que por medio del esquema se evidencian los

procesos de resolución de problemas, y finalmente vinculó el esquema con promover el razonamiento y argumentación, dando a entender que esta última es la competencia principal de la clase observada. Ángela no coincidió con este profesor en que efectivamente se promueve la argumentación, para ella argumentar no es sólo que los niños expliquen y justifiquen sus procedimientos, también lo asocia a espacios de comunicación en que los niños discutan entre ellos sus procedimientos.

En términos de las categorías de Van Es y Sherin (2010), en este episodio los actores principales son los estudiantes cuando se focalizan en cómo argumentarían en base al esquema, pero también están la profesora que aparece en el video. Para describir el tipo de análisis en el seminario, nos enfocamos en el diálogo entre el profesor invitado y Ángela. Respecto al profesor invitado el realizó una interpretación de la clase cuando dice que promueve la argumentación. Si bien Ángela en su intervención también realizó una interpretación, fue más profunda al reflexionar sobre qué debería ser la argumentación.

- **Quinta sesión**

Esta sesión del seminario corresponde a la primera sesión de cuatro en que se estudia una planificación en función del MCM. Una de las actividades fue analizar un episodio de clase en que la profesora Graciela propone al curso la resolución del siguiente problema de composición: "Enrique tiene 26 gusanos de seda y Lorena tiene 38. ¿Cuántos gusanos de seda tienen en total los dos?". Los niños resuelven utilizando diferentes técnicas, luego Graciela hace pasar a dos niños a mostrar sus cálculos, el primero mediante el algoritmo tradicional, y el segundo por trasvasije. Graciela propone que se contrasten las dos técnicas y en particular que el niño que utilizó trasvasije explique al curso cómo es el procedimiento.

Guía: cual son las competencias predominantes en el video o en la gestión de esta actividad

Valentina: Puede ser el razonamiento y la argumentación... no se vio todo el video pero en lo poco que se vio, ella le pregunta a los niños como lo hicieron y llama a otro niño para modelar adelante y lo hizo de otra forma diferente al algoritmo tradicional y le fue consultando que él le diga como lo hizo, como lo fue haciendo, que explique a los demás como lo hizo.

Mónica: El cálculo y manipulación de expresiones también

Guía: ¿Por qué Mónica?

Mónica: Porque realizo procedimiento de cálculo

Guía: porque realizo procedimientos de cálculo

Mónica: los niños realizan los procedimientos...

Guía: están de acuerdo con Mónica de agregar Cálculo y manipulación de expresiones? Hay alguna de esas dos que es más predominante. María Antonia que piensas tu

María Antonia: trabaja las dos en realidad porque se contrasta las dos técnicas

Guía: ¿Laura que piensas tu?

Laura: si porque (...), las dos técnicas quedan claras en este caso, queden bien identificadas el trasvasije y el algoritmo.

Guía: ¿Carmen?

Carmen: opino lo mismo que ella, porque en realidad los niños explicaron bien, fueron (a la pizarra), decían como lo hacían

Guía: Tu estás de acuerdo Graciela con tus colegas.

Graciela: Siento que tuve la intención de que argumentarán pero yo no quedé conforme con su argumentación.

Guía: en qué caso no quedaste conforme

Graciela: Porque siento como que la parte del algoritmo tradicional fue muy mecánico, porque ni explico

Guía: ¿y quién lo explico?

Graciela: lo explique yo [en el seminario hay una exclamación de sorpresa] y la parte de la técnica del trasvasije, sabes que quedó un poco más clara pero igual su explicación fue un poco más mecánica que razonada y argumentada.

En este episodio se destacaron dos ideas frente a la valoración de la argumentación. Por un lado las profesoras no sólo reconocieron que la argumentación estaba presente cuando el estudiante explica la técnica del trasvasije sino que también destacaron las acciones de la profesora para promover la argumentación. A partir de la intervención de Mónica de que también esta presenta el cálculo y la manipulación de expresiones, se observó que las profesoras se inclinaron más por dar énfasis a la utilización de las técnicas que a la argumentación.

Una segunda idea es la reflexión que hace la propia Graciela sobre su gestión. Declaró que el énfasis en esa parte de la clase es en la argumentación, y no precisamente en el cálculo, y en base a ello dijo no estar del todo satisfecha con la argumentación de los niños dado que fue más mecánico que razonado.

En el análisis de esta discusión se pudo obtener como resultado la importancia de tener claridad sobre la competencia que se promueve. Pese a que Valentina fue la primera que sugirió argumentación, el resto de profesoras se declinaron por enfatizar en la competencia de cálculo y manipulación de expresiones. Los niños realizan bien los cálculos por lo que seguramente si Graciela hubiera tenido la intención de promover esta competencia probablemente hubiera estado satisfecha. Ella un poco antes de la discusión descrita, explicó que los estudiantes desde antes a este problema dominaban el algoritmo tradicional y el trasvasije. Por lo que no era propósito de esta clase seguir reforzando la técnica de cálculo.

5.2.2.2. Grado de comprensión de la OM (campo aditivo)

El análisis de este indicador se realizó mediante el cuestionario de conocimiento disciplinar (específicamente del campo aditivo) en relación con (a) el tipo de problemas, (b) las técnicas y (c) las variables didácticas. Este cuestionario se aplicó en dos instancias. Una se realizó antes del comienzo del seminario y en una segunda instancia después en que los profesores finalizaron la implementación de la secuencia didáctica. La validez de este cuestionario de conocimientos se hizo por el propio equipo de

investigación. Su diseño provino de las pruebas que se realizaron a los consultores de la estrategia LEM desarrollados por investigadores del Centro Felix Klein y los profesionales participante de la Universidad de Concepción.

A continuación se describen los resultados de los cuestionarios aplicados a las profesoras antes del seminario de capacitación (pre test) y posterior a éste (post test), cuya finalidad era evaluar su conocimiento sobre el campo de problemas aditivos. En el proceso de análisis, en primer lugar se analizó cada cuestionario y luego se compararon los resultados (Anexo 4c). Se han obtenido tres conclusiones sobre la caracterización del conocimiento de campo aditivo.

Sobre el uso de esquemas y la modelización en la resolución de problemas.

Las profesoras han profundizado en la concepción y uso de los esquemas como parte del proceso de modelización de una situación. En general, abandonaron la concepción de esquema como representación de un método de resolución o de los datos, y centran su atención en la relación entre los datos del problema. En ese sentido, los resultados de la aplicación de la metodología de resolución de problemas se ven resumidos por un esquema que permite identificar la operación aritmética involucrada.

Además, las profesoras profundizaron su comprensión de los esquemas como modelos de representación de relaciones aditivas entre cantidades. Los problemas formulados se relacionaban con el esquema propuesto en el ítem, lo cual supone un avance importante respecto de los resultados del pre test. De hecho, abandonaron la idea de proponer solamente un cálculo y avanzaron hacia producir un problema asociado al esquema. Es decir, una situación que involucra un contexto, cantidades, acciones sobre las colecciones.

Finalmente, las profesoras fueron capaces de proponer problemas de una complejidad mayor que en el pre test, incluyéndose una mayor cantidad de problemas inversos. Además, el conjunto de profesoras homogeneizó dos aspectos de los problemas formulados: los problemas fueron en su mayoría de cambio, lo cual es relevante en términos que el esquema es un modelo en el que se juntan dos regiones; por otra parte, los tipos de cantidades empleados fueron cardinales, lo cual también es relevante por cuanto el esquema junta magnitudes.

Sobre el uso de técnicas y estrategias de cálculo.

Las profesoras diversificaron las técnicas de cálculo de adiciones y sustracciones. En el ítem 1, en donde se presentó un cálculo "con reserva", se observa que aun usan el algoritmo tradicional, pero la apoyan por otros procedimientos que simplifican la aplicación de tal algoritmo tales como el traslado de la diferencia, o bien lo fundamentan mediante descomposiciones aditivas. Con ello el grupo obtuvo una eficiencia ligeramente mayor que en el pre test, aunque no se puede afirmar que esta diferencia sea significativa.

En el ítem 4, las profesoras avanzaron desde utilizar descomposiciones canónicas y algoritmo tradicional en el pre test, hacia la aplicación de propiedades tales como traslado de la diferencia y descomposición en el post test. El avance es importante, por cuanto el ítem declaraba explícitamente que no se debía usar el Algoritmo Tradicional. No obstante, para el desarrollo del ítem solamente fueron capaces de aplicar correctamente una sola técnica, no pudiendo aplicar en forma completa y/o correcta otras técnicas alternativas de cálculo.

Sobre la clasificación de problemas aditivos

Las profesoras profundizaron en la comprensión e identificación de distintos tipos de problemas aditivos. Si bien no todas lograron apropiarse de la terminología propuesta en el marco referencial tales como problemas de cambio y de composición, sí lograron identificar las acciones o modificaciones de las colecciones involucradas. En ese sentido, las docentes profundizaron en la comprensión de la existencia de tales tipos de problemas, por cuanto no manifestaron una mera asociación entre acción/tipo de problema (ej: si dice “agrega”, entonces es de cambio), sino que analizan las relaciones que se dan entre las colecciones y cómo las acciones las afectan la cantidad, reconociendo si un dato es una parte del todo, o bien, si la acción modifica la cantidad inicial.

La clasificación en problemas directos e inversos manifestó una mejoría respecto del pre test, en términos de la cantidad de problemas bien clasificados. El tipo de pregunta planteado no permite identificar la calidad de los argumentos que sustentan la clasificación; sin embargo, y considerando los tipos de problemas propuestos, es posible sostener que estos resultados pueden ser indicadores de una mejor comprensión de estos tipos de problemas.

5.2.2.3. Grado de comprensión de las relaciones entre componentes del MCM

Una comprensión global del MCM pasa porque el docente articule sus diferentes componentes. Para dichas relaciones se han utilizado dos cuerpos de datos: los videos de los seminarios, y los dos grupos focales que se realizaron antes y después de la implementación de la secuencia didáctica diseñada por las profesoras. El primero de los grupos focales se realizó al comienzo del segundo semestre (primera semana de agosto) y el segundo al terminar la implementación (segunda semana de septiembre).

Para desarrollar este análisis, se realizó la siguiente reducción de datos y estrategia de análisis:

- a) Se han considerado las sesiones en que se trató cada uno de los componentes del MCM que estén relacionados con las competencias: la sesión 8 para relación entre técnica y procesos, y la sesión 3 para el nivel de complejidad.
- b) En cada sesión se focalizó en las preguntas clave planificadas para discutir sobre las relaciones. Cada una de estas preguntas se introdujeron después de que las profesoras vean uno de los casos clínicos. Los episodios seleccionados correspondieron a la discusión de la pregunta.
- c) Se han transcrito los episodios y se han analizado las respuestas de las profesoras. El análisis se complementó con las notas de campo de las sesiones. En este proceso de analizar las respuestas, se consideraron los siguientes aspectos
 - Elementos del MCM: procesos y competencias, condiciones de realización y técnicas; reflexiones sobre la organización matemática.
 - Articulación entre la organización matemática y las competencias: coherencia entre las tareas matemáticas y las competencias, coherencia entre las condiciones didácticas y las competencias.

- Relevancia de planificar por competencias: descripciones de lo que interesa planificar.

En las sesiones del seminario, se han reflejado que en diferentes sesiones las reflexiones que realizan las profesoras, en los diferentes problemas tratados, articulan los elementos de la OM con las competencias⁶. En particular dado que en el MCM el nivel de complejidad se obtiene articulando las OM con las competencias, se presenta el análisis de los niveles de complejidad.

Nivel de complejidad

En el marco de la metodología de trabajo docente, queremos mostrar un episodio en donde las profesoras, al verse expuestas a la necesidad de organizar una serie de tareas matemáticas siguiendo los niveles de complejidad, lo hacen de distintas formas y con distintos criterios.

Este tema se trató en la tercera sesión del Seminario, la cual tuvo como propósito estudiar el nivel de complejidad de las actividades como el tercer componente del MCM. En primer lugar, las participantes analizaron un video de una docente que gestionó una situación ya estudiada en sesiones anteriores, pero donde cambiaban las condiciones de realización, para posteriormente establecer una secuencia que ordenara las condiciones de una tarea matemática, según el nivel de complejidad.

Finalmente, debían organizar en tres clases, a modo de secuencia didáctica, un conjunto de tareas matemáticas. Éstas se señalan a continuación:

- A. Resolver problemas de cambio y composición directos con números del 0 al 100, usando combinaciones aditivas básicas.
- B. Resolver problemas de cambio y composición inversos con números del 0 al 100, usando combinaciones aditivas básicas.
- C. Resolver problemas de cambio y composición inversos con números del 0 al 100, con números de dos cifras más un dígito cualquiera.
- D. Calcular mentalmente adiciones y sustracciones del 0 al 100, extendiendo las combinaciones aditivas básicas.
- E. Calcular mentalmente adiciones y sustracciones del 0 al 100, en sumas de un múltiplo de 10 más un dígito cualquiera.
- F. Calcular mentalmente adiciones y sustracciones del 0 al 100, en sumas de números de dos cifras.
- G. Enuncian procedimientos para sumar y restar en un ámbito del 0 al 100, basadas en descomposición canónica.
- H. Enuncian procedimientos para sumar y restar en un ámbito del 0 al 100, entre múltiplos de 10.
- I. Enuncian procedimientos para sumar y restar en un ámbito del 0 al 100, en cálculos de número de dos cifras con un número menor que 5.

Tareas matemáticas para ser organizadas en una secuencia didáctica

⁶ Evidencias serán presentadas en el informe final.

Dada la naturaleza de las tareas propuestas (resolver problemas, calcular, enunciar procedimientos), y en cuya redacción estaban estipuladas las condiciones de realización que obedecían a ciertas variables didácticas (ámbito numérico, tipo de problema, técnica de cálculo, relación entre los números), las docentes generaron distintas organizaciones de las tareas. A medida que compartieron el trabajo realizado, sistematizamos las distintas secuencias propuestas en la pizarra. Cuatro docentes propusieron los siguientes ordenamientos.

	Clase 1	Clase 2	Clase 3
Ana	D – E – H – G	A – B – C	F – G – H – I
Tamara	I – E – H	A – D – G	B – C – F
Carmen	I – G – D – A	H – E – C	B – F – ...
María	E – H – D – F	G – A – B – C	...

Ordenamientos de las tareas matemáticas propuestos por las docentes⁷

Se discutió con las profesoras cuáles eran los criterios que fundamentaban cada secuencia propuesta. A continuación mostramos un extracto de lo que nos dicen dos de ellas, que corresponden a dos de las organizaciones de tareas que más nos llaman la atención.

Ángela	Carmen
<p><i>Bueno, primero vamos a trabajar desde la parte mental (...) Vamos jugando con las combinaciones básicas como más pequeñas (...) Pensemos, bueno, que vamos a trabajar en esta parte adición y sustracción... la verdad es que me quedé también un poco pensando en si viene o no secuenciado un sobreconteo, nos vamos a meter ahora de lleno en la adición y sustracción, entonces como para irlo combinando (...) les voy entregando el cómo voy haciendo la cosa, pensando además que lo vamos a ir haciendo resolviendo problemas (...) La segunda clase vamos a resolver problemas, cómo vamos a resolver problemas, vamos a ir haciendo la combinación directa y vamos a resolver entre los directos y lo inversos. Utilizando además, bueno, la adición,</i></p>	<p><i>Bueno primero fue de procedimiento, cómo los niños lo iban haciendo, después fue de cálculo y después ellos lo final que hacían, lo último fue la resolución de problemas. Eso fue lo que nosotros quisimos hacer (...) Procedimiento de cálculo, procedimiento cómo lo hacían ellos, después el cálculo cómo ellos lo iban, cómo lo aplicaban y después fue la resolución de problemas (...) Y esa es la idea que teníamos para las futuras, después la de descomposición canónica, que aplicara también eso mismo con la resolución de problemas. Eso, como habían tres resoluciones de problemas, una resolución en cada clase (...) Eso es lo que pretendíamos nosotros, primero ver cómo lo hace el niño, después practicar algún tipo de cálculo mental y después aplicarlo en la resolución de</i></p>

⁷ Estos nombres han sido cambiados para resguardar la confidencialidad de las profesoras participantes.

<i>suma y resta, en forma conjunta.</i>

<i>problemas, esa era nuestra idea.</i>

Transcripción de lo que sostienen las docentes sobre sus organizaciones de tareas matemáticas.

El caso de Ana fue llamativo, pues realizó una articulación de las tareas matemáticas según el nivel de complejidad, basándose en las condiciones de realización de cada una de ellas, pero agrupándolas de manera general por género de tarea en cada clase. De la misma manera, llama la atención la organización propuesta por Carmen, quien distribuye en cada clase un tipo de tarea y éstas se complejizan clase a clase.

Las organizaciones aquí presentadas muestran las formas organizativas implícitas que tienen estas docentes, quienes como Ángela sistematizan de lo más simple a lo más complejo, o quienes como Carmen organizan la enseñanza potenciando distintos tipos de actividad matemática en cada clase y articulando su complejidad en el tiempo.

El episodio antes descrito nos permite abstraer la existencia de esquemas implícitos en la organización de las actividades de enseñanza. Para el caso de Ángela, ella organiza las clases de manera de trabajar un sólo tipo de tareas en cada una de ellas. Sin embargo, contempla los niveles de complejidad al graduar las tareas específicas según las condiciones de realización de las mismas. En el caso de Carmen, la distribución de tareas no es secuencial, sino que obedece a una estructura que podríamos llamar matricial. Verticalmente (cada clase), Carmen selecciona los tres tipos de tareas, que apuntan a distintas competencias y procesos, con lo cual los estudiantes tienen la posibilidad de desarrollar una actividad matemática más rica desde el punto de vista del desarrollo de competencias. Horizontalmente (a través de las clases) cada uno de estos procesos se va complejizando, de forma de que el estudiante viva un proceso de estudio que lo desafía a lo largo del tiempo, y que además es inclusivo en su construcción, evidenciando de esta forma la lógica de los niveles de complejidad. La figura 5.1 muestra estos recorridos.

Desde el punto de vista de la calidad de la organización, el esquema de Ángela se ve atomizado por la tarea, aunque evoluciona dentro de la clase. Esto hace pensar que en los criterios de organización no se contemplan los procesos como elemento que define el nivel de complejidad, sino que sólo las condiciones de realización de las tareas. En cambio, el esquema de Carmen presenta de manera cíclica las tareas, considerando tanto la evolución de los procesos como de las condiciones de realización para definir el avance en complejidad del tema tratado.

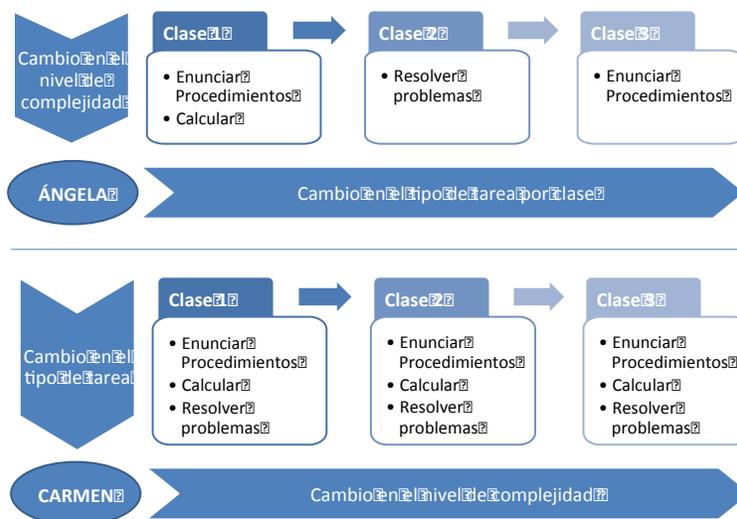


Figura 5.1 Esquemas de organización de tareas de Ángela y Carmen

Por último, el hecho que estas estructuras surgieran de las propias docentes, nos señala que la metodología de trabajo docente, al menos en este nivel y momento del proceso de reflexión, está produciendo algunas comprensiones sobre las potencialidades del MCM para organizar la enseñanza. Tanto la riqueza teórica de la diferencia entre estas estructuras, como el aporte a la labor docente de las profesoras, son resultados que apoyan las metodologías de trabajo para la comprensión del MCM que proponemos.

Discusión en los grupos focales

Otro de los elementos que ayuda a visualizar cómo las docentes comprenden las relaciones entre los componentes del MCM son los grupos focales realizados antes y después de la implementación de la secuencia de enseñanza realizada por ellas. En el caso del primer grupo focal, el énfasis está en analizar una planificación para preparar la enseñanza. En el segundo, el foco está en analizar lo ya realizado a partir de un video de la misma implementación.

Para analizar la información empíricamente recogida en los grupos focales, se planificó la construcción de categorías basadas en el marco teórico que sustenta esta investigación, pero que al mismo tiempo se adapten a la evidencia recogida. De este modo dichas categorías resultan sustanciales en términos teóricos (recogen los aspectos esenciales del marco teórico), y también sustanciales en términos empíricos (recogen la complejidad de la realidad observada).

Inicialmente, las categorías levantadas focalizaron su atención en dos dimensiones del MCM y su articulación interna. De acuerdo con ello, se levantaron cuatro categorías.:

- Elementos de la organización matemática subyacente.
- Competencias y en sus procesos.
- Relaciones entre tareas matemáticas y competencias.

- Relaciones entre condiciones didácticas de las tareas matemáticas y actividades, y las competencias.

Dado que producto del diseño del grupo focal, las categorías anteriores se centran en el análisis de las prácticas de otros, se agregó una quinta categoría de reflexión docente, que permite codificar las relación de los elementos del MCM con la práctica propia.

- Relevancia de la planificación de actividades para el desarrollo competencias matemáticas, como una práctica profesional docente.

Finalmente, y como producto de una actividad de validación interna y de comparación constante de las categorías recién señaladas respecto de la información empírica obtenida, se detectó la presencia de tipos de respuestas que permitieron postular la presencia de una nueva categoría, asociadas a ver la resolución de problemas no como una competencia, sino como una tarea escolar que requiere de un procedimiento general de ejecución, corporeizada en una metodología de pasos específicos. Con ello, el cuerpo de categorías empleado para el análisis de los datos es el siguiente:

- A. Respuestas basadas en la resolución de problemas como tarea escolar: intencionalidad del proceso de enseñanza, o bien, a los propósitos específicos de determinadas actividades o tareas matemáticas
- B. Respuestas basadas en los elementos de la organización matemática subyacente.
- C. Respuestas basadas en competencias y en sus procesos.
- D. Respuestas basadas en el establecimiento de relaciones entre tareas matemáticas y competencias.
- E. Respuestas basadas en el establecimiento de relaciones entre condiciones didácticas de las tareas matemáticas y actividades, y las competencias.
- F. Respuestas basadas en la relevancia de la planificación de actividades para el desarrollo competencias matemáticas, como una práctica profesional docente.

Se propuso el trabajo de análisis de los datos en tres etapas. La primera etapa, de codificación, identificó la presencia de una o varias categorías de respuesta, etiquetando las producciones de las profesoras de acuerdo con ellas. La segunda etapa, de caracterización de las respuestas de las profesoras a cada una de las preguntas de los focus group. La codificación permitió determinar los focos de cada respuesta, constituyéndose como una herramienta de análisis interpretativa en función de las racionalidades asociadas a las respuestas. Finalmente, la tercera etapa analizó los resultados de la actividad por categoría, identificando y describiendo los modos, formas y condiciones bajo las cuales las distintas categorías emergen. Este análisis permitió caracterizar el grado de reflexión dela docente en términos del nivel de profundidad de sus intervenciones validadas por las categorías propuestas.

- Análisis Grupo Focal 1 (FG1).

El trabajo asociado al primer grupo focal (FG1)se centró principalmente en la discusión de distintas temáticas a partir del análisis de una propuesta de plan de clases de 2do año básico, basado en criterios propuestos por las profesoras y/o por el moderador, incentivando la argumentación de sus ideas y la búsqueda de una postura colectiva a cada una de las temáticas. Para ello se tomó en cuenta una guía de temáticas que contiene la especificación del tema a abordar y un listado de preguntas orientadoras, las cuales pudieron ser adaptadas por el moderador, en función del

contexto y la dinámica del grupo. La dinámica se realizó con base en dos direccionamientos: a través de preguntas orientadoras y de profundización que focalizan la discusión, y a través de la estimulación de la participación ordenada de los participantes, con el objeto de revisar los discursos de los participantes respecto de la temática en estudio.

De manera global, el trabajo en cada una de las temáticas comenzó con una pequeña motivación y descripción de la información que se deseó recopilar, luego el moderador entregó a los participantes una instrucción relacionada con la temática desarrollada, incentivando la discusión de los participantes a partir de las preguntas planteadas por el responsable.

Se diseñaron preguntas orientadoras, de acuerdo a la siguiente organización:

- Apertura, presentación y descripción de la actividad: que describe las reglas de operación de la técnica y su propósito.
- Preguntas de contextualización: que inician el análisis de la planificación desde un nivel más concreto, con el objeto de generar condiciones para la reflexión sobre las dimensiones en evaluación.
- Preguntas de desarrollo: que permiten evaluar el grado de reflexión docente de los participantes.
- Cierre de la actividad: en donde se negocian las ideas principales, así como se ofrece la palabra para conclusiones u opiniones finales.

Guión para el Grupo Focal 1 (FG1).

1) Apertura (Duración aproximada 10 minutos)

- Ubicación y Bienvenida.
- Introducción al tema de investigación y motivación.
 - Se debe señalar el propósito del focus group: Recabar información sobre el grado de comprensión sobre la relación entre los elementos del MCM, y del grado de reflexión respecto de las implicancias del uso de dicho modelo.
- Explicación del funcionamiento del focus group y su moderación.
 - Condiciones de realización: el moderador es quien otorga la palabra. Cada participante es libre de solicitar la palabra. Se trabajará en torno a preguntas orientadoras. El moderador puede pedir profundizar respecto de un punto en particular. Es importante que los participantes señalen y argumenten sus respuestas, o bien, su grado de acuerdo o desacuerdo con las afirmaciones de otros participantes.

2) Desarrollo (Duración aproximada 75 minutos)

- Se presenta e introduce un extracto de planificación de 2do año básico. Se pide que estos la lean detenidamente, anotando comentarios en la misma hoja si así lo desean. Es importante que esta parte de la actividad sea

individual (4 a 5 minutos).

- **Dimensión:** grado de comprensión de relación entre elementos del MCM.

Preguntas:

- 1) ¿Qué se espera en esta clase? (5 a 8 minutos)

Comentario a la pregunta: obtener información que permita identificar si los profesores responden como una tarea, un propósito o una competencia, evitando preguntar ello directamente durante la recolección inicial de las respuestas.

- 2) ¿En qué medida considera usted que los elementos del MCM se han implementado en la planificación? (5 a 10 minutos)

Comentario: Cuando sea necesario, pida a los profesores que argumenten, preguntándoles “¿En qué elementos de la planificación se observa lo planteado por usted?”. Verificar si los profesores identifican los elementos de la OM o del modelo de competencias.

NOTA: Los supuestos de investigación establecen que los profesores debieran establecer relaciones entre los elementos del MCM (señalando por ejemplo, que “la competencia modelización se apoya en las tareas matemáticas, consignas o variables didácticas”). Si el colectivo no logró identificar de forma satisfactoria los elementos del MCM, se deberán plantear algunas preguntas que promuevan su identificación antes de continuar con las preguntas planteadas (ítems 3 a 5). Por ejemplo: ¿en qué medida observa usted los elementos de la OM, como por ejemplo, las variables didácticas? O bien: ¿en qué medida observa usted los procesos de las competencias declaradas en la planificación?

- 3) ¿Qué opina usted respecto de cómo se ha planificado la competencia predominante? ¿En qué basa su opinión?

Comentario: indagar si los participantes están de acuerdo con que la competencia principal sea modelización. Indagar si los participantes argumentan en función de los procesos por sobre en el uso de esquemas en la clase. Indagar además si algún participante identifica que la relación entre los números promueve la competencia de cálculo.

Si los participantes no han logrado identificar fallas en la planificación, preguntar algo “¿Mejoraría usted la planificación? ¿Cómo?”.

- 4) Respecto de la competencia “Razonamiento y argumentación”, si se desea incorporar el proceso “formulación de conjeturas”, ¿qué modificaciones haría usted en la planificación? ¿Por qué?

Comentario: identificar los criterios empleados para la formulación de las modificación, indagando si la argumentación de los participantes centra su atención en la relación entre los elementos (propone tareas que involucran procesos y VD, por ejemplo).

- 5) ¿Qué consecuencias tiene para la planificación, la modificación propuesta por usted? ¿Se reestructura o no se reestructura la planificación, es decir, es la misma clase o hay que pensar en una clase distinta clase?

Comentario: Indagar si conciben la incorporación de un proceso en una planificación como una actividad que se debe articular con el resto de las TM de la clase.

3) Cierre (Duración aproximada 10 minutos)

- Síntesis: Negociación del panorama general del trabajo realizado.
 - Para cada pregunta, se destaca la o las posturas colectivas observadas en el grupo. Los participantes pueden realizar precisiones respecto de las conclusiones finales.
- Comentarios: se ofrece la palabra libremente a quien quiera señalar algún comentario respecto de la actividad.

Análisis por pregunta para FG1

1. ¿Qué se espera de esta clase?

En general, las profesoras describieron el propósito de la clase haciendo uso de los elementos de la organización matemática subyacente a la planificación. Inicialmente pocas profesoras centraron la atención en las variables didácticas de la TM. Quienes lo hicieron, identificaron que el ámbito numérico sugería el trabajo con la técnica del trasvasije. Esta condición didáctica fue identificada posteriormente por todo el grupo. Sin embargo, algunas profesoras señalaron que producto de tales condiciones, la técnica del trasvasije constituía también parte del propósito de la clase, mientras que el resto consideró a esta técnica como parte del repertorio de aprendizajes previos de los alumnos.

Mónica: “Buena, lo que dice ahí (señala la planificación): “resolver el problema aditivo de descomposición directa”, ¿cierto? (...). También que utilice la técnica del trasvasije, por lo que estoy viendo aquí y... sí, la técnica del trasvasije”.

Sólo algunas profesoras complementaron su respuesta con elementos competenciales, en particular, haciendo referencia a la representación, la modelización y resolución de problemas, y la argumentación.

Valentina: “Que ellos resuelvan el problema pero que argumente como... a ver... que ellos resuelvan el problema y ellos comprendan, entiendan cómo lo resolvieron y lo puedan argumentar, lo puedan explicar”.

Varias profesoras expresaron su opinión respecto de cómo ellas habrían organizado la clase, en función de las focalizaciones que les llevaron a identificar los propósitos en forma personal, manifestándose de este modo las representaciones que ellos tiene sobre lo que significa la acción de planificar la enseñanza de las matemáticas.

“Es que yo lo habría hecho al revés, primero yo habría puesto primero unos problemas desde la ejercitación del trasvasije y después les habría planteado el problema (...) para facilitarle la solución del problema, porque yo estoy pensando en un niño.... (a) un niño no le basta con entender los datos, ellos quieren entender la respuesta, quieren llegar a la respuesta como sea. Entonces para no frustrarlos les doy unos dos ejercicios de trasvasije y después otro”.

Es interesante que Sonia haya cuestionado las condiciones didácticas de la planificación en función de la tarea matemática y de la competencia declarada, con lo que manifiesta una conceptualización orientadora de estos dos elementos del modelo. Su intervención problematizó a sus colegas.

Mónica: “También está eso del trasvasije que también, pero hay algo que me... que a mí me suena extraño, que si la tarea matemática (es) “resuelve el problema de composición directo”, hay solamente un problema, y después hay cálculos, entonces ahí estaría... Y hay más cálculos que problemas, hay 1... 2... 3... y 4 (cálculos) para graficar la técnica. Entonces ahí me encuentro como extraña de que si quiere resolver problemas, argumentar, a lo mejor fue que la competencia principal era modelización... no sé... pero si hay que resolver problemas, ¿por qué hay sólo el planteamiento de un problema y los otros son realizar sobre cálculos?”

Hay pocas referencias a la relevancia de la planificación en las respuestas de las profesoras. Por una parte, se destacó la importancia de incorporar en forma más explícita en la planificación los procesos de evaluación, retroalimentación y gestión del error como elementos de planeamiento de la gestión de las actividades para el desarrollo de las competencias declaradas que requieren de una consistencia interna, pues en opinión de Ángela, de otro modo sería “como un tema más conductista, o sea... en ninguna parte hay una retroalimentación de que un niño se pare adelante, diga “yo lo resolví de alguna forma”, que los pares digan “también te entiendo” o llegamos en consenso a esa respuesta”. Por otra parte, Mónica destacó la importancia de secuenciar de forma adecuada, proponiendo y argumentando una secuencia alternativa a la descrita en la planificación, con el objetivo de facilitar el proceso a los niños.

Al finalizar la discusión y en acuerdo con el grupo de profesoras, los propósitos propuestos evolucionaron hacia dos tareas: resolver problemas aditivos y afianzar la técnica de trasvasije. Valentina fue la única que incorporó explícitamente la argumentación y la reflexión sobre los modelos como parte del propósito. Por su parte, Sonia identificó la inconsistencia entre variables didácticas de las tareas y competencias declaradas en la planificación.

Es interesante destacar que las profesoras que identificaron competencias en el propósito de la clase, fueron las únicas que cuestionaron las tareas matemáticas de la clase, por cuanto la conciencia de los elementos competenciales les proporcionó un contexto para evaluar las tareas matemáticas planificadas y su secuencia.

En síntesis, las profesoras centraron su atención en describir el propósito de la clase en términos de los elementos de la OM, en particular, con foco en la tarea matemática declarada en la planificación: resolver problemas aditivos. Algunas profesoras identificaron las condiciones didácticas como un contexto explícito del propósito que debía mencionarse, interpretando la función de tales condiciones de formas distintas. Tal respuesta fue complementada con elementos competenciales, mencionando tanto a la argumentación como a la modelización.

2. ¿En qué medida se han incorporado los elementos del MCM en la planificación?

Las profesoras tuvieron dificultades en comprender la pregunta. La observación del registro en video del focus group permite proponer como posible fuente de este hecho, la no comprensión de los elementos del modelo o del alcance de éste.

La incorporación de un documento con las competencias organizadoras del currículo (Fonide, 2010) condicionó las respuestas de las profesoras, y en general éstas se refirieron a identificar y describir las competencias, en las actividades de la planificación. De hecho, salvo un par de menciones muy puntuales a elementos de la OM, todas las respuestas se focalizaron en competencias matemáticas. Sólo en ocasiones, se hacía referencia detallada a los procesos, lo que permitía respuestas más completas, pero referidas siempre a las acciones de identificar y describir.

Sonia: “Según lo que aparece aquí tiene 3 competencias a desarrollar: está la de resolución de problemas, la de argumentación y cálculo y manipulación de proposiciones, esos son los tres que tenía la profesora, eso veo aquí, se ve más allá que le pide representar, después usar modelos del trasvasije y los cálculos usando el modelo, cuando el razonamiento y argumentación, cuando le pide a los niños “promover que los niños discutan qué es un problema dónde se ven las partes” que hay que calcular el todo, luego “permite que los niños compartan sus respuestas y procedimientos” en la medida que compartan estas respuestas y procedimientos estaría entrando la argumentación”.

En términos generales, las profesoras manifestaron una opinión más bien favorable de la forma en la que estas competencias habían sido consideradas. Respecto de la competencia modelización, algunas profesoras consideraron al esquema como un modelo, y una profesora consideró al cálculo como un modelo.

Las respuestas de una de las profesoras permiten señalar que este caso no logró apropiarse del lenguaje técnico de competencias, sino que profundizó el discurso de la resolución de problemas como tarea escolar. Este hecho quedó de manifiesto en su intervención y en las respuestas a la interpelación que una colega le realizó.

Esta discusión permite apreciar la diferencia entre una profesora (Marta) que sostuvo un discurso tradicional de la resolución de problemas, es decir, como una tarea escolar que tiene una metodología determinada (uso de esquemas y representaciones para apoyar el paso “comprender el problema”), versus una profesora (Valentina) que empleó un discurso competencial, identificando en la planificación procesos de la competencia Argumentación y Razonamiento (“promover que los niños discutan”).

Marta: (...) En lo que sí encuentro un poco pobre el hecho de que se enfatizó poco en que el niño de alguna forma representara y explicara la situación del problema en el sentido de que por ejemplo lo representara con un dibujo, con algo, para que lo pudieran explicar y ellos lo pudieran comprender, fuera más allá porque tenemos que pensar en todos los niños, eso siempre lo hemos conversado con la colega, tenemos que conversar con esos niños que tienen problemas de dificultad, los niños que les cuesta más y generalmente a través del dibujo ¿cierto?, ellos comprenden más, ¿cierto?, pueden llegar a esto, no podemos dejar... entonces para mí (es) fundamental que ellos siempre representen de alguna forma porque a mí me ha facilitado eso, ¿cierto?, me ha facilitado y que los niños sobre todo los niños con más problemas y problemas específicos del aprendizaje, ellos de alguna forma, ellos tienen que razonar y de alguna forma representarse en dibujitos y ahí lo pueden comprender, esa parte es lo pobre.

Moderador: Tú identificas que hay algo ahí pobre y lo que harías para mejorarlo, ¿qué elementos del modelo estarías mejorando? ¿Qué cosas estarías promoviendo al mejorar eso?

Marta: *Que los niños, por ejemplo como explicaba anteriormente, de representar de alguna forma, un esquema en algo, ¿cierto?, que de alguna forma se le dé énfasis en que los niños expliquen de por qué utilizaron ese esquema y de alguna forma ellos... porque ellos de alguna forma van a tener que pensar por qué ese dibujo para ellos representa el problema.*

Valentina: *(interviene) Pero ahí yo, perdón, yo no entiendo ahí, tú te refieres a que no está como...*

Marta: *O sea, no se le dio mucho énfasis a eso en la actividad, la actividad propiamente tal dentro de la clase.*

Valentina: *Sí... porque acá dice que se les pide que ellos dibujen el esquema*

Marta: *Ya, pero nada más.*

Valentina: *Después se les dice “promover que los niños discutan”, que es un problema donde, si bien... bueno a lo mejor ahí... a lo mejor tú encuentras que es muy poco un problema (solamente), pero ahí viene explícito que se está promoviendo.*

Moderador: *Esperemos un segundo para ver que Marta ordene sus ideas y responda.*

Marta: *Está bien específico, pero me refiero en el sentido de que aquí cuando esquematicen el problema, que los niños de alguna forma... por qué utilizaron ese problema y por qué lo hicieron así, porque después pide promover a los niños que discutan que es un problema en dónde se dan las partes para... bueno, ahí más que nada, cuando nos vamos al problema propiamente tal.*

Sólo una vez que el moderador explicitó que los elementos de la OM eran también parte del modelo, las profesoras se refirieron a dichos elementos, pero sin establecer una relación con las competencias. Las profesoras consideraron que los elementos de la OM estaban considerados y bien articulados en la planificación, ya sea respecto de la tarea de resolver problemas, como de la tarea de resolver cálculos empleando trasvasije. De hecho, una profesora complementó esta idea a través de la identificación de preguntas de la clase que promueven la argumentación, atribuyéndole el propósito de reforzar una técnica.

Ángela: *“Sí también la parte de la tarea está claramente articulada, que las variables y condiciones, dice el tipo de problema... claro haciendo la salvedad arriba que la tarea teníamos que ampliarla cierto, como habíamos que dado hace un rato atrás que teníamos que ampliar el tema de el cálculo con técnicas de trasvasije, las variables bien porque bueno trabajó con esquemas como tú también lo planteabas hay un ámbito numérico claramente planteado”.*

En síntesis, las profesoras no fueron capaces de identificar todos los elementos del modelo al momento de evaluar la planificación. Al proporcionarles un documento con la descripción de las competencias y sus procesos, dieron una opinión favorable de la clase, con argumentaciones centradas exclusivamente en competencias. Al pedirles que se refirieran a los elementos de la organización matemática subyacente, y a diferencia de lo que algunas profesoras lograron en la pregunta 1, no establecieron relaciones entre estos elementos y las competencias, dando de todos modos una opinión favorable.

3. *¿Qué opinión tiene sobre el cómo se planificaron las actividades respecto de la competencia principal?*

Esta pregunta generó una reflexión más profunda por parte de las profesoras que en las preguntas anteriores, manifestada en que las profesoras evaluaron las actividades desde distintas perspectivas, lo que promovió una manifestación de evidencias de la existencia de relaciones entre los procesos de las competencias matemáticas, y los elementos de la organización matemática, en particular, las tareas matemáticas y las condiciones didácticas de realización de dichas tareas. Estas manifestaciones centraron la atención en evaluar las actividades desde la perspectiva de la coherencia entre competencia predominante declarada en la planificación, y las tareas y condiciones propuestas en las actividades y su secuencia.

Es importante que algunas profesoras manifiestan espontánea y explícitamente que se está en presencia de un mayor grado de reflexión.

Marta: “Entre más vamos profundizando, vamos analizando otro... porque ahora ella dice “esos números sueltos que tiene ahí...”. Claro, si estamos hablando de analizar el problema, lo demás tendría que haber sido analizar problemas, no haber dado los números sueltos, o sea, esa parte yo te encuentro razón, en cambio le encuentro razón a ella en el sentido de que si es modelización y también a ella por que el niño simplemente...”

Algunas respuestas consideraron que se propusieron muchos cálculos, lo cual no permitiría trabajar en profundidad algunas ideas o procesos.

Marta: “Bueno, el orden en realidad encuentro que está bien, como quizás... los planteamientos (cálculos) que trabajaron los niños, hicieron tantos... también encuentro que son muchos, me habría gustado que se hubiera trabajado... y que después... y si hubiera el siguiente de alguna forma, se hubieran verificado todos los procesos del problema en forma conjunta con el curso, no haber dado tantos problemas (cálculos), para ir verificando si los niños de alguna forma comprendieron bien, porque no solamente acá en el cierre me plantearon las preguntas, pero quizás van a responder los niños que solamente comprendieron, la idea es que se hubiera hecho no tanto problema (cálculo) sino que uno o dos más y si hubieran trabajado en conjunto, y después se supone que los niños iban a empezar a salir a la pizarra van a resolver”

Otras respuestas consideraron que se habían estimado en forma adecuada las competencias, haciendo referencia a elementos de gestión planificados en forma explícita en el documento.

Mónica: “Yo creo que está bien, porque primero que nada la profesora le pide a los niños que sume y reste los datos más importantes, luego les pide que representen a través del esquema... eso... o sea, al subrayar los frascos el niño tiene que decir “la cantidad va a crecer”, “va a achicar”, si son dos cosas distintas, si es una sola cosa. Ahí ellos están aplicando razonar. Luego los va representar a través del esquema (...). Pero principalmente ella vuelve hacer énfasis en el esfuerzo, en el asunto, le pregunta y vuelve a reafirmar lo que le plantea en el problema cuando dice qué se debe hacer, cuando se resuelve un problema, cuales son las palabras claves para que ellos que todavía no han entendido, cómo se resolvieron los cálculos en el caso de identifica (...), después le consulta para qué sirvieron los esquemas, para que observara no solo mental sino que también vieran que el esquema les va a servir para vieran que la cantidad creció no que achico, así que yo creo que está bien”

Otras respuestas plantearon que dado que la competencia principal era modelización, se debió dar más énfasis a la tarea matemática de resolución de problemas, por sobre la de realización de cálculos. Con ello, estas respuestas evalúan la planificación de las actividades para promover las competencias, en función de la tarea matemática seleccionada para la clase, estableciendo con ello una relación explícita entre organización matemática y competencias matemáticas. Se destacó la respuesta de una profesora que si bien plantea esta idea, considera además el caso que se esté proponiendo a la técnica como un modelo.

Sonia: “La competencia predominante es la modelización. Se trata de que en este caso... si yo la veo como la modelización como una técnica, pienso que está bien al plantearla como un problema. Y después seguimos pensando que para planificar la técnica de la modelización como... viéndola como técnica, se les da cálculos para seguir afianzando esa técnica. Si ahora, yo insisto lo que le dije delante [sic], si la tarea matemática es resolver problemas aditivos con composición directo, pero la competencia es la modelización la principal, entonces si yo voy a la competencia principal estaría bien porque termina la clase o del desarrollo es lo último que se hace es seguir practicando la técnica, aunque yo delante [sic] dije insisto el orden a lo mejor no lo encuentro correcto”.

Otras respuestas centraron la atención en que el ámbito numérico de los sumandos promovía el uso de un procedimiento en particular, lo cual no era consistente con la competencia declarada. Con ello, estas respuestas evaluaron si es que las condiciones didácticas de la clase permiten promover la competencia declarada, o bien, si éstas promueven otra competencia distinta de la planificada, estableciendo con ello una relación entre organización matemática y competencias, que es de naturaleza diferente de la relación anterior.

Ángela: “Sabes que yo mientras más la leo más le doy vuelta al tema que yo creo que aquí estamos abarcando mucho y apretando poco, porque dice “resolver problemas”, ¿ya?, vamos al tema de la modelización y le voy a dar el énfasis a que el niño modele, trabaje el esquema cierre la clase para que nos sirven los esquemas, entonces yo siento que en esta... por eso te digo que mientras más lo leo yo siento que el tema del cálculo debería haber sido hasta... no debería haber utilizado ponte tu el tema de los cálculos de la técnica porque yo estoy trabajando el tema de modelos y estoy también haciendo énfasis al tema de trasvasije, entonces a lo mejor debería haber utilizado cifras en las que no hubiera tenido que intervenir en el tema del trasvasije, si no que hubieran sido solo cifras y hay haberle dado el énfasis al niño de que modelara y a lo mejor ahí hubiera trabajado otro problema más abajo para que hubiéramos seguido modelando...”.

El análisis de las respuestas muestra que vuelven a aparecer las dos visiones que surgieron en las respuestas a la pregunta 1, en términos de ver a la técnica de trasvasije como parte del propósito de la clase, en donde en algunos casos se describe haciendo referencia implícita a procesos de la competencia “Manipulación de expresiones y técnicas de cálculo”, o bien, en términos de ver al trasvasije como una técnica ya estudiada que se refuerza en esta clase. En el contexto de la competencia y la tarea matemática declarada en la planificación, algunas respuestas proponen disminuir la cantidad de cálculos, o bien, eliminarlos.

En síntesis, las profesoras evaluaron desde distintas dimensiones las actividades y su secuencia. Estos elementos coinciden con las categorías de análisis empleadas en el focus group, lo que proporciona a la tarea de evaluación de planificaciones una fuente de reflexión para docentes. Las categorías que surgieron son: a) resolución de

problemas como tarea escolar, b) elementos de la organización matemática (tarea matemática), c) elementos de competencias y sus procesos, d) relación entre tarea matemática y competencia principal, y e) relación entre condiciones didácticas y competencia principal. Las respuestas mostraron distintos niveles de profundidad en la reflexión, desde los más concretos (respuestas categoría a) hasta los más profundos (respuestas categorías d y e).

4. *Si se quiere incorporar el proceso “formulación de conjeturas a la planificación”, ¿qué modificaciones habría que hacer?*

Respecto de esta pregunta, se observaron principalmente tres tipos de respuesta. El primer tipo de respuesta propone no realizar modificaciones, por cuanto se considera que la planificación aborda este proceso, estableciendo una equivalencia entre las acciones conjeturar y explicar. Este tipo de respuesta fue contra argumentado por profesoras, de modo tal que quien propuso esta respuesta finalmente reconoció no saber si se debían realizar modificaciones.

Marta: *Bueno lo que opino... ¿Qué modificaciones se harían? Yo no haría modificaciones, ¿no? Porque resulta que se dice “conjeturar”... Bueno, lo que yo sentí que (lo) primero que tienen que hacer los niños, tienen que pensar qué tienen que hacer para resolver el problema, qué tienen que hacer, qué operación tienen que utilizar o de qué forma tienen que representar o qué forma tienen que hacer para poder representar para completar el problema para poder resolver ese problema ¿ya? Entonces, no sé, depende del punto de vista en que se vea. Entonces... viendo el problema yo lo dejaría así ¿ya? Porque yo ahí vi que van a tener que explicar, por qué y por qué si hizo ese tipo de proceso, si sumó, restó, por qué sumó, por qué restó, por qué lo hizo acá, por qué lo hizo allá ¿cierto? Y por qué usó ese tipo, si el niño... por último después el niño al... (pausa) al configurar por qué usaste ese modelo ¿cierto? o ese dibujo para explicar el problema... por qué.*

Ángela: *Entonces sería explicar no más. Estaría explicando, no estaría investigando.*

Marta (respondiendo a Ángela): *Pero el niño igual va a tener que pensar, claro, pero el niño igual va a tener que de alguna forma él razonar y pensar qué tiene que hacer y va a tener que investigarlo para poder resolverlo... o sea no lo investiga, pero igual va a tener que pensar el cómo hacerlo. ¿O no? (...) pero en general... no sé, eso es lo que opino. (Pausa) Ya... (se encoge de hombros). Es que es como... signo de interrogación, para mí... Ya, bueno, ¿ok? (da por cerrada su intervención).*

El segundo tipo de respuestas propone explícitamente modificar la tarea matemática de la clase, por cuanto la planificación no incorpora procesos de formulación de conjeturas; por ejemplo, se propone cambiar la tarea matemática de resolver problemas aditivos directos, por la formular problemas aditivos, o bien, el reconocimiento de regularidades aritméticas en cálculos aditivos.

Mónica: *“Habría que cambiar el problema como dice Ángela porque claro está todo dado, no hay nada que investigar, le da la cantidad de fichas que tiene uno, le da la cantidad de fichas que tiene el otro frasco entonces ¿qué va a investigar? A lo mejor podría ser que yo diera la cantidad de fichas y que el niño inventara la pregunta podría ser, entonces no le daría la pregunta si quiero hacer esto, o podría*

darle las cantidades cierto y que el inventara, si se perdieron, si agregamos, si ambos tienen o qué cambió la ficha de aquí cambió tantas fichas acá cuántas quedaron acá, eso podría ser para que hubiera conjetura”.

El tercer tipo de respuesta se asocia a modificar las condiciones didácticas de realización de las actividades, con el objeto que los alumnos deban descubrir algo que no está explícito.

Ángela: Si planteáramos por ejemplo “el total de dos frascos es tanto”, cierto, por ejemplo si empiezan dos frascos encima de la mesa y tienen un total de mil fichas, uno de ellos tiene tantos, cuántos tiene el otro ¿podría ser planteado así?

Valentina: Es que ahí dice “problemas aditivos de composición directos”.

Ángela: No, pero cuando yo plantié el tema, yo decía que como cambiar este problema para plantear la conjetura. Porque yo siento que al tener los dos... el planteamiento con los dos frascos, con las dos cantidades no hay nada que conjeturar respecto de las preguntas que están planteadas. Entonces yo indicaba cambiar el problema para que los niños pudieran indagar respecto de algo que falta.

En síntesis, el grupo reconoció que la incorporación de un proceso asociado a una competencia a una planificación exigía la intervención de las tareas matemáticas, o bien, de las condiciones de realización de dichas tareas, con lo que se establece nuevamente una relación entre los elementos de la organización matemática y las competencias matemáticas y sus procesos.

5. Si se incorpora el proceso “formulación de conjeturas”, ¿se debe modificar la competencia predominante, o se puede mantener la que está?

Esta pregunta problematizó a las profesoras, por cuanto la incorporación de un proceso a la planificación supone, en el fondo, una modificación del propósito de la clase. En particular, la pregunta problematizó a aquellas profesoras que consideraron al inicio de la sesión que el propósito de la clase estaba dado sólo por la tarea matemática. De hecho, inicialmente, ellas consideraron que la competencia no sufriría modificación.

Valentina: “Es que sería la misma (competencia) porque lo que cambiaría sería el tipo de problema más que nada. O sea, ya no sería un problema con descomposición directa, sería cambiando eso”.

Las profesoras que consideraron elementos competenciales en sus respuestas tuvieron más elementos para apoyar sus respuestas. Una de ellas logró establecer cierto nivel de articulación entre la competencia predominante y la tarea matemática.

Ángela: “A lo mejor en algunos puntos podría cambiar la tarea, nosotros si cambiamos la competencia pudiera cambiar la tarea, pero aquí en este caso, podemos utilizarla porque si van a utilizar conjeturas y vamos a seguir modelando a lo mejor no vamos a necesitar cambiar la tarea”.

Otra respuesta consideró mantener la tarea matemática, e identificó en las variables didácticas una posibilidad de abordar el proceso. Ella propone modificar la gestión de las actividades más hacer modificaciones más fundamentales.

Valentina: “O a lo mejor plantearla con una pregunta que ellos, los haga pensar qué pasa con estos números que están ahí, estas cifras numéricas, que cuando

uno tiene por ejemplo una ficha cercana, o algo con 9, termina con 9, qué pasa con esos números, qué me conviene a mí hacer, si yo tengo $547+9$ (...) Que ellos traten de llegar... que expliquen qué podrían hacer cuando van ese tipo de ejercicio”.

Aproximadamente en la misma línea anterior, otra profesora considera el análisis de la eficiencia de las técnicas y la contrastación de procedimientos como una forma de establecer conjeturas verificables. La diferencia acá es el nivel al que se realiza la formulación de conjeturas.

Sonia: “(...) Yo puse una (pregunta) relacionada con la técnica, más que con el problema o con la técnica, porque como la competencia principal es la modelización, yo dije (que) tendrá que enfocarse para allá. Hago la pregunta que a lo mejor un niño de segundo no la va a entender, pero si no la entiende se la aclararé, es: “¿qué ventaja tiene la técnica que usaste?”. Y eso se lo podría hacer cuando el niño está... aquí, cuando dice “luego permita que los niños compartan sus respuestas”, de evaluación de procedimiento, ahí o bien al cierre de la clase cuando dice “por qué se vieron los esquemas” y ahí preguntarles en relación a la técnica”.

Sólo una profesora cuestionó la acción de incorporar un proceso de la forma propuesta, atendiendo a la intencionalidad de la planificación.

Ángela: “Pero si eso respondiera algo porque, claro, porque si tuviera un real objetivo al cambiarlo, si tu dijeras por ejemplo lo que pasa es que vamos a trabajar junto a las conjeturas junto a la planificación, la vamos a utilizar para conjeturar, y eso respondiera un objetivo claro, específico... o sea así cambiarlo por cambiarlo no me suena, pero si hubiera un objetivo detrás intentaría moldearlo”.

Frente a esta afirmación, se consultó a las profesoras respecto de los criterios que permiten sustentar la incorporación o modificación de un proceso, y las respuestas estuvieron centradas en la relación entre tarea matemática y propósito de la clase, con algunos elementos competenciales.

Síntesis y conclusiones de las participantes.

Al finalizar la actividad, al consultar a las profesoras si han incorporado los elementos del modelo en estudio a su práctica actual, la respuesta principal señaló que no lo han hecho de forma explícita, argumentando en las condiciones institucionales de cada docente. Según las profesoras, la labor administrativa de planificación, realizada según formatos emanados desde las autoridades de las instituciones, no promueve la incorporación de estos elementos.

Mónica: Yo me acuerdo de la jefe técnico, que me dice el primero de hoy día tiene que estar la planificación si o sí. Al menos yo personalmente.

Moderador: ¿Por esa presión no te acuerdas de este trabajo? ¿Porque te exigen un formato?

Mónica: Claro, de hecho, por lo menos el formato es comunal. Pero si nosotros si bien es cierto ella planifica solamente matemáticas, ambas discutimos, nos ponemos de acuerdo lo que vamos hacer, cómo lo vamos hacer, y hemos incorporado el asunto de la modelización que nosotros no lo hacíamos.

A pesar de lo anterior, las profesoras reconocen que han incorporado algunos elementos del modelo en el diseño y gestión de actividades. En particular, las profesoras perciben que han fortalecido los momentos de inicio y cierre de las clases, así como a los procesos involucrados.

Marta: Por ejemplo en el inicio, tanto hincapié que eran 5 minutos y yo encuentro que ahora de acuerdo a lo que nosotros hemos planteado, el inicio es súper importante. O sea, tenemos que darnos el tiempo para... porque a partir del inicio, vamos a poder trabajar cada uno dentro del desarrollo, pero que el niño pueda trabajar eso no ha cambiado, o sea, el inicio se plantea... se recuerda generalmente... se recuerda la clase anterior, pero la actividad se hace completa, se explica y después ellos tienen que trabajar de acuerdo, así lo estamos haciendo ahora porque antes el inicio era un cosita así nomas. Entonces después en el desarrollo tienen que aplicar, cierto, lo que han aprendido.

Verónica: Y en los cierres también. Por ejemplo, en el caso mío hacíamos nosotros antes... por ejemplo, el año pasado yo planificaba de otra forma porque en la escuela se hacía con actividades genéricas todo bien general, entonces es primera vez que estamos planificando clase a clase, se nos exigió este año con inicio, desarrollo y cierre, y a mí me costó un poquito porque estar todos los días... planificar todas las unidades, antes era más general, entonces ahora todavía no he hecho las planificaciones del segundo semestre así como sólo la de la primera semana, y en el cierre tratando de que el cierre sea más reflexivo, porque antes era un cierre bien general, pero ahora pensando en hacerlos pensar más en cuál fue el objetivo de la clase, que ellos intervengan más, de forma más reflexiva, rescatando lo más positivo en realidad.

Análisis por categoría para FG1

A. Respuestas basadas en la resolución de problemas como tarea escolar.

Las respuestas centradas en la resolución de problemas fueron emitidas por una sola profesora: Marta. Esta profesora utiliza este tipo de respuesta para referirse en particular a la intencionalidad del proceso de enseñanza, o bien, a los propósitos específicos de determinadas actividades o tareas matemáticas. En este tipo de respuesta se observan términos asociados a la organización matemática y a competencias matemáticas, pero con un enfoque más bien instrumental; es decir, los elementos del MCM son empleados para enriquecer el lenguaje y profundizar la argumentación asociada a algunos de los pasos de la metodología tradicional de resolución de problemas. Esta interpretación se obtiene de la evidencia de los datos, pues Marta señala frecuentemente, y frente a distintas preguntas, que lo más importante es que “*los niños sepan comprender el problema*”. Más aun, dado que frente a la tarea de evaluar la planificación de la competencia principal, Marta señala:

Marta: “Ahí dice en la tarea resolver: problemas aditivos de composición directo. Han visto eso nomas, no tendrían por qué habernos hecho tanto problema por la técnica, porque aquí lo estamos suponiendo. Eso va depender de mí si lo utiliza o no, eso lo va a decidir. Pero aquí si nos vamos directamente a la tarea matemática no tenemos para qué... entonces nos conformamos con la técnica que me da la niña, la técnica que utilizó y si pudo resolver el problema”.

Además, la manifestación de esta categoría siempre es muy concreta y contextualizada, con fuertes referencias a ejemplos de experiencias personales de desempeño profesional docente.

Marta: *“En lo que sí encuentro un poco pobre el hecho de que se enfatizó poco en que el niño de alguna forma representara y explicara la situación del problema en el sentido de que por ejemplo lo representara con un dibujo, con algo, para que lo pudieran explicar y ellos lo pudieran comprender, fuera más allá porque tenemos que pensar en todos los niños, eso siempre lo hemos conversado con la colega, tenemos que conversar con esos niños que tienen problemas de dificultad, los niños que les cuesta más y generalmente a través del dibujo ¿cierto?, ellos comprenden más, ¿cierto?, pueden llegar a esto, no podemos dejar... entonces para mí (es) fundamental que ellos siempre representen de alguna forma porque a mí me ha facilitado eso, ¿cierto?, me ha facilitado y que los niños sobre todo los niños con más problemas y problemas específicos del aprendizaje, ellos de alguna forma, ellos tienen que razonar y de alguna forma representarse en dibujitos y ahí lo pueden comprender, esa parte es lo pobre”.*

B. Respuestas basadas en los elementos de la organización matemática subyacente.

En general, las profesoras se apropiaron de los elementos más básicos de la organización matemática, que fueron aquellos sobre los cuales se focalizó el estudio de los seminarios: las tareas matemáticas y las técnicas. Las profesoras basan sus respuestas en estos elementos con bastante propiedad, y son capaces de evaluar una planificación en función de dichos elementos, así como de proponer modificaciones a ésta. Las profesoras proponían modificación de las actividades o del propósito de la clase en términos de tales elementos. Con menor frecuencia se observaron respuestas basadas en las condiciones didácticas de las actividades, en particular, las asociadas a las variables didácticas “ámbito numérico” y “relación entre los números”. No obstante lo anterior, las profesoras tuvieron problemas en individualizar estos conceptos como elementos del MCM en estudio. Sin embargo, este tipo de respuesta surgió principalmente cuando las profesoras se referían al propósito de la clase y a las actividades.

C. Respuestas basadas en competencias y en sus procesos.

En general, las profesoras basan sus respuestas en las competencias más que en los procesos propiamente tal. Argumentaban en función de competencias principalmente cuando debían referirse a los efectos en sus alumnos de la acción de enseñanza de las matemáticas. Cada participante se refería a competencias en formas bien específicas, estableciendo relaciones ocasionales entre competencias, señalando por ejemplo que algunos procesos propios de la modelización o de la manipulación de expresiones, promueven o involucran procesos asociados a la argumentación.

Marta: *“Lo había enfocado más que nada en la parte, en la modelización, ya porque pensaba que generalmente lo que a los niños más les facilita el hecho de representar de alguna forma el problema y de ahí lo pueden comprender, lo pueden razonar, cómo resolverlo (...)”.*

Valentina: *“(...) Yo acá estoy preguntando... estoy haciendo el cierre de manera reflexiva, les estoy preguntando cómo resolvieron, para qué sirvieron los esquemas, cómo resolvieron el problema, entonces ellos me van a explicar cómo*

lo resolvieron, cómo realizaron el cálculo si tiene ahí tantas fichas, 500, 657, y el otro tiene 99 cómo realizaron ese cálculo, entonces se supone que ahí me van a explicar que técnica utilizaron ellos”.

Inicialmente, las profesoras centran la atención en forma espontánea en las competencias de modelización y de argumentación. Este foco se verá reforzado a partir de la introducción del cuadro resumen de competencias organizadoras del currículum, y de preguntas asociadas a competencias específicas.

D. Respuestas basadas en el establecimiento de relaciones entre tareas matemáticas y competencias.

Las profesoras apoyaron o cuestionaron el uso de ciertas tareas matemáticas, en relación con las competencias que se planificaron promover. Identificaron además que la promoción de ciertas competencias requiere de ciertas tareas matemáticas. En particular, las participantes establecieron que la tarea matemática “cálculo de expresiones” permite promover algunas competencias asociadas a técnicas de cálculo, pero en forma limitada.

Sonia: “También está eso del trasvasije que también, pero hay algo que me... que a mí me suena extraño, que si la tarea matemática (es) “resuelve el problema de composición directo”, hay solamente un problema y después hay cálculos, entonces ahí estaría... y hay más cálculos que problemas, hay: (cuenta) 1, 2, 3, 4 para graficar la técnica. Entonces ahí me encuentro como extraña de que si quiere resolver problemas, argumentar, a lo mejor fue que la competencia principal era modelización... no sé... pero si hay que resolver problemas, ¿por qué hay sólo el planteamiento de un problema y los otros son realizar sobre cálculos? (...) Yo pondría menos (cálculos), porque lo importante es el razonamiento que se vaya haciendo paso a paso, todo esto, ¿cierto? Porque si a los niños... quizás... si le aproblemamos más [sic], si le planteas tanto problema, él se va a confundir, porque quizás al niño le interesa resolverlo más que poder comprenderlo”.

En cambio, la tarea matemática “resolución de problemas aditivos directos de cambio” ofrece una mayor flexibilidad para abordar distintas competencias. Sólo algunas respuestas reconocen en la ejecución de cálculos la posibilidad de promover competencias de argumentación o modelización.

Sonia: “La competencia predominante es la modelización. Se trata de que en este caso... si yo la veo como la modelización como una técnica, pienso que está bien al plantearla como un problema. Y después seguimos pensando que para planificar la técnica de la modelización como... viéndola como técnica, se les da cálculos para seguir afianzando esa técnica”.

Valentina: “(...) Pero yo suponiendo de que ellos ya manejan esta técnica, porque se supone, yo acá estoy preguntando, estoy haciendo el cierre de manera reflexiva, les estoy preguntando cómo resolvieron, para qué sirvieron los esquemas, cómo resolvieron el problema, entonces ellos me van a explicar cómo lo resolvieron, cómo realizaron el cálculo si tiene ahí tantas fichas 500, 657 y el otro tiene 99 cómo realizaron ese cálculo, entonces se supone que ahí me van a explicar que técnica utilizaron ellos. Entonces yo no les habría hecho estos cálculos, les habría hecho un problema más”.

Sólo una de las profesoras estableció una relación explícita entre el cálculo visto como tarea matemática, y el cálculo visto como competencia a desarrollar.

Sonia: *“Es que al principio lo vimos esto, pegada en eso, que si la tarea matemática es resolver problemas, ¿qué hacen unos cálculos sueltos ahí? En ninguna parte hablan de la competencia esta del cálculo”.*

Cuando a las profesoras se les pidió evaluar la planificación en la pregunta 3, las respuestas que relacionaron los elementos del modelo focalizaron predominantemente la relación de coherencia entre tarea matemática y competencia matemática. Además, en la pregunta 4 asociada a la incorporación de un proceso, mayoritariamente las respuestas que establecieron relaciones entre los elementos del modelo centraron la atención en proponer modificaciones o variaciones de las tareas matemáticas. Sólo una profesora profundizó en otro tipo de relaciones.

Finalmente, tres profesoras basaron sus respuestas en esta categoría a lo largo de las distintas preguntas de la actividad: Ángela, Sonia y Valentina. Esto sería una evidencia de un nivel de reflexión más profundo que las otras dos profesoras, respecto de las categorías de análisis, en función de los reactivos diseñados para el focus group. Mónica y Marta usaron este tipo de respuesta en forma esporádica, manifestadas en afirmaciones dentro de algunas de sus intervenciones.

E. Respuestas basadas en el establecimiento de relaciones entre condiciones didácticas de las tareas matemáticas y actividades, y las competencias.

Inicialmente, se observó una sola respuesta referida a las condiciones didácticas de realización de las actividades, surgieron para complementar las ideas referidas a las tareas matemáticas de la clase y de las técnicas de realización de éstas, identificando a la técnica del trasvasije como el procedimiento intencionado en la planificación.

Sonia: *“Y también veo aquello como que todo va para que trasvasijen con la unidad. 99, 199, 899, y de repente 698... Ahí va a haber un... por los niños creo yo que va a ser un conflicto, tú sabes que tienen que ver con un dos, pero ya del principio una unidad, fue 1,1,1 y lo volvía enredoso”.*

Recién en la pregunta 3, se identifica a las condiciones didácticas como condiciones que controlan la promoción de desarrollo de competencias específicas. Esta relación se manifiesta principalmente asociada a la identificación de las variables didácticas cuyos valores promueven o dificultan el logro de las expectativas de desarrollo de las competencias planificadas.

Ángela: *“(...) Entonces a lo mejor debería haber utilizado cifras en las que no hubiera tenido que intervenir en el tema del trasvasije, si no que hubieran sido solo cifras, y ahí haberle dado el énfasis al niño de que modelara, y a lo mejor ahí hubiera trabajado otro problema más abajo, para que hubiéramos seguido modelando. Entonces a lo mejor ahí hubiéramos seguido reflexionado el mismo tema y otro problema con la misma no técnica [sic], sino que ya agrupar o ir juntando, pero ir trabajando sobre lo mismo, que vayamos modelando, que los niños se vayan acostumbrado al esquema, que vayamos viendo gráficamente lo que significa, y la connotación numérica decía como no tan importante y la utilización de la técnica finalmente esté de más, la habré utilizado finalmente en otra clase. Esto debería haber sido dos clases o dos situaciones, no la misma”.*

Valentina (sobre la competencia Argumentación): *“O a lo mejor plantearla con una pregunta que ellos, los haga pensar qué pasa con estos números que están ahí, estas cifras numéricas, que cuando uno tiene por ejemplo una ficha cercana, o algo con 9, termina con 9, qué pasa con esos números, qué me conviene a mí”.*

hacer, si yo tengo $547+9$ (...). Que ellos traten de llegar... que expliquen qué podrían hacer cuando van ese tipo de ejercicio”.

Esta categoría se manifiesta en respuestas de las mismas tres profesoras de la categoría anterior: Ángela, Sonia y Valentina, lo cual sería una evidencia consistente de mayores niveles de reflexión en estas profesoras.

F. Respuestas basadas en la relevancia de la planificación de actividades para el desarrollo competencias matemáticas, como una práctica profesional docente.

Estas respuestas no están basadas en un elemento específico del modelo, sino que son manifestaciones de la valoración de la práctica de planificación de actividades y de su gestión para el desarrollo de competencias matemáticas. Dado lo contextualizado del trabajo realizado en el focus group, este tipo de respuesta apareció esporádicamente, pero permitió relevar algunas concepciones de las profesoras respecto del proceso de enseñanza de las matemáticas. Lo importante es que en general, estas reflexiones más generales surgieron de forma espontánea, y no definidas por alguna pregunta en particular.

Por ejemplo, se valora la planificación de la gestión de actividades que promueven el desarrollo de competencias matemáticas (argumentación, comunicación), señalando que de otro modo se cae en formas de enseñanza más bien tradicionales.

Ángela: “Donde si también me hace un poco de ruido es cuando las competencias dice razonamiento y argumentación y en la parte de evaluación habla de un verificar, verificar... eso es como un tema más conductista, o sea... no, en ninguna parte hay una retroalimentación de que un niño se pare adelante, diga yo lo resolví de alguna forma, que los pares digan también te entiendo o llegamos en consenso a esa respuesta”.

Marta, por su parte, reconoce en la consideración de la competencia matemática como un objeto a planificar, la disposición de herramientas para sus alumnos, por cuanto lo importante es que los alumnos sean capaces de comprender y resolver un problema, en un sentido muy amplio. Si bien no se observaron en esta profesora respuestas que manifestaran niveles de reflexión más profundos, asociados a establecer relaciones entre los elementos del modelo, si se observó un lenguaje enriquecido al momento de fundamentar su discurso, aun cuando el uso de los elementos del modelo no es el esperado.

Marta: “Lo había enfocado más que nada en la parte, en la modelización, ya porque pensaba que generalmente lo que a los niños más les facilita el hecho de representar de alguna forma el problema y de ahí lo pueden comprender, lo pueden razonar, cómo resolverlo, pero escuchándolas a ellas también les va a facilitar el problema porque se van a evitar los otros pasos, es fundamental también, pero para mí es importante la modelización en este aspecto”.

Mónica, por su parte, manifiesta también concepciones asociadas a un enfoque tradicional de enseñanza, valora el reconocimiento de tareas matemáticas y de competencias, por cuanto ello le permitirá secuenciar las actividades en forma más eficiente, respecto a sus creencias sobre los fines del subsector educación matemática.

Mónica: *Es que yo lo habría hecho al revés, primero yo habría puesto primero unos problemas desde la ejercitación del trasvasije y después les habría planteado el problema.*

Moderador: *¿Porque para ti el objetivo de la clase entonces es el trasvasije?*

Mónica: *No. Porque para facilitarle la solución del problema, porque yo estoy pensando en un niño. (A) un niño no le basta con entender los datos, ellos quieren entender la respuesta, quieren llegar a la respuesta como sea. Entonces para no frustrarlos les doy unos dos ejercicios de trasvasije y después otro”.*

En general, las profesoras reflexionan en forma favorable respecto del impacto del modelo en su práctica personal, principalmente en la gestión de clases, en la disposición de recursos de enseñanza (esquemas, técnicas) y en la modificación del rol de los momentos de la clase, en particular en la identificación de un momento de cierre más reflexivo. Sin embargo, desconocen el impacto que tendría este modelo desde una perspectiva institucional.

Sonia: *“A mí me asalta una duda respecto a eso, porque cuando yo veo esta planificación, la encuentro bien interesante en la medida en la que se van aclarando cosas, la tareas matemáticas, las competencias. Me pregunto yo si lo hiciera, qué opinarían en mi escuela. No sé, me he planteado... Por ahora mi planificación sigue igual como siempre, la del regreso de vacaciones, la primera unidad del segundo semestre, igual que siempre (...).”*

Finalmente, reflexionando sobre el impacto del proceso vivido en sus prácticas, las profesoras valoraron el hecho de que el trabajo con un modelo de competencia matemática se realizara con un alto nivel de vinculación con sus prácticas docentes. Además, valoraron también que el trabajo se focalizara en una sola temática, puesto que permitió el estudio del modelo en profundidad, además de promover una mejor apropiación curricular de los contenidos seleccionados.

Sonia: *“Sí me agradó en el sentido que los niños puedan razonar más, cuesta harto sí, pero, cuesta bastante, pero sí... en niños que pensé no lo van a poder hacer y el niño, lo han logrado, bueno también hay otros que no también pero en sí pensé que no lo iban a poder hacer porque significa, pensé chuta, voy a empezar la clase y quizá cuándo la voy a terminar. Hemos aprendido si hartas cosas que podemos aplicar”.*

Ángela: *“Y lo que nos gustó también del ramo es que los niños fueran más pequeños porque siempre que hacen un tipo de taller todo el ciclo lo consideran y hay una variedad entre cada nivel y es cierto el NB1 el NB2 y así son muy diferentes los niños, entonces se abarca mucho y no nos sirve para ir digamos al nivel que uno está, aquí se enfocó más a la realidad de uno, eso que no se había hecho antes, porque siempre buscaban una cantidad cierto y, 8º - 4º y claro lo más chicos”.*

- Análisis Grupo Focal 2 (FG2).

El trabajo asociado a este grupo focal está centrado en la discusión de la gestión de una clase de problemas aditivos de 2º año básico, basada en los elementos del MCM, buscando interpelar la práctica profesional de las docentes, incentivando la argumentación de sus ideas y la búsqueda de una postura colectiva frente a cada una de las temáticas. Para ello se debió tomar en cuenta una guía de temáticas que

contiene la especificación del tema a abordar y un listado de preguntas orientadoras, las cuales pudieron ser adaptadas por el moderador, en función del contexto y la dinámica del grupo. La dinámica se realizó con base en dos direccionamientos: a través de preguntas orientadoras y de profundización que focalizaron la discusión, y a través de la estimulación de la participación ordenada de los participantes, con el objeto de revisar los discursos de los participantes respecto de la temática en estudio.

De manera global, el trabajo en cada una de las temáticas comenzó con una pequeña motivación y descripción de la información que se desea recopilar, luego el moderador entregó a las participantes una instrucción relacionada con la temática desarrollada, incentivando la discusión de los participantes a partir de las preguntas planteadas por el responsable.

Se diseñaron preguntas orientadoras, de acuerdo a la siguiente organización:

- Apertura, presentación y descripción de la actividad: que describe las reglas de operación de la técnica y su propósito.
- Preguntas de contextualización: que inician el análisis del episodio desde un nivel más concreto, con el objeto de generar condiciones para la reflexión sobre las dimensiones en evaluación.
- Preguntas de desarrollo: que permiten evaluar el grado de reflexión docente de los participantes.
- Cierre de la actividad: en donde se negocian las ideas principales, así como se ofrece la palabra para conclusiones u opiniones finales.

Guión para el focus group 2.

1) Apertura (Duración aproximada 10 minutos)

- Ubicación y Bienvenida.
- Introducción al tema de investigación y motivación.
 - Se debe señalar el propósito del focus group: Recabar información sobre el grado de reflexión de la práctica en base a los elementos del MCM, y del impacto del modelo en sus propias prácticas pedagógicas.
- Explicación del funcionamiento del focus group y su moderación.
 - Condiciones de realización: el moderador es quien otorga la palabra. Cada participante es libre de solicitar la palabra. Se trabajará en torno a preguntas orientadoras. El moderador puede pedir profundizar respecto de un punto en particular. Es importante que los participantes señalen y argumenten sus respuestas, o bien, su grado de acuerdo o desacuerdo con las afirmaciones de otros participantes.

2) Desarrollo (Duración aproximada 75 minutos)

- Se introduce y presenta el video resumiendo su contenido brevemente. Se

pide a las docentes que tomen nota de los procesos que consideran presentes de las competencias predominantes. Además, se les pide que registren las condiciones de realización de los cálculos y las técnicas que aparecen. Es importante que esta parte de la actividad sea individual.

- **Dimensión:** grado de comprensión del MCM.

Preguntas:

El propósito de la discusión es que se argumente sobre la gestión de la clase presentada en términos de las condiciones de realización y procesos competenciales que están en juego. Si bien no es deseable preguntar de forma directa cuáles son los que las docentes identifican, sí se pretende que estos procesos sean utilizados como medio para reflexionar sobre la práctica observada en el video y que luego se pueda reflexionar sobre su propia práctica. Para ello se sugieren unos “tipo de preguntas” que son flexibles de acuerdo a cómo se dé la discusión.

- 1) De acuerdo a los procesos y condiciones identificadas en el episodio, ¿cómo describiría la gestión de la profesora?

Comentario: Para la discusión, se puede comentar el hecho que la profesora contraste tres procedimientos distintos, además del error del primer estudiante que muestra este procedimiento.

- 2) ¿Cómo y cuáles de los aspectos discutidos consideran en las clases que han implementado?

Comentario: se espera que las profesoras asocien los aspectos discutidos con los procesos y condiciones que ellas consideran en su práctica: por ejemplo, que procesos enfatizan o si los cálculos propuestos permiten diversidad de técnicas... Si no lo hacen, el moderador debe intencionar la explicitación de los procesos y condiciones.

- 3) ¿Cuales elementos de esta clase le gustaría incorporar en su práctica habitual?

Comentario: En este momento el moderador debería decir que estos elementos son parte del MCM. La idea es que les pregunte si éstos han impactado su práctica, cómo consideran que modifican los procesos de aprendizaje (si los consideran adecuados o no), etc.

3) Cierre (Duración aproximada 10 minutos)

- Síntesis: Negociación del panorama general del trabajo realizado.
 - Para cada pregunta, se destaca la o las posturas colectivas observadas en el grupo. Los participantes pueden realizar precisiones respecto de las conclusiones finales.
- Comentarios: se ofrece la palabra libremente a quien quiera señalar algún comentario respecto de la actividad.

1. De acuerdo a los procesos y condiciones identificadas en el episodio, ¿cómo describiría la gestión de la profesora?

En términos generales, las profesoras manifestaron una muy buena opinión de la gestión de la profesora. Principalmente, focalizan la atención en los elementos del modelo para argumentar sus respuestas. Por una parte, destacan el tratamiento y trabajo con las técnicas de cálculo observado durante la clase.

Carmen: “(...) y al final de la clase después de todas las técnicas como un trabajo, después de todas las técnicas qué es lo que quiere, ella no dijo qué técnica tenían que utilizar, sino que ella hizo el ejercicio y el niño eligió la técnica que le favorecía a él, que le acomodaba más a él y él explicó su técnica, pero para mí yo creo que todos los niños son iguales, no hay diferencia en niños”.

Por otro lado, valoraron positivamente el trabajo con la competencia de Razonamiento y Argumentación; más aun, algunas profesoras consideraron que el trabajo con las técnicas fue secundario al desarrollo de dicha competencia.

Valentina: “(Lo que más destaco de la clase es) que ella tiene claras las competencias que quiere desarrollar con los niños y que sabe a dónde va y lo desarrolla, desarrolla la competencia ella cree, el objetivo que ella tiene”.

La dimensión que mayor valoración tuvo el episodio de clases fue la gestión del error observado. Las respuestas que se refirieron a la gestión del error destacaban a la argumentación como un medio para la verificación o autorregulación de las producciones de los alumnos.

Carmen: “A mí me llamó la atención que la profesora... como Matías se equivocó, lo volvió a retroalimentar después que todos sus compañeros lo hicieron, yo creo que eso fue bueno porque el niño de sus errores aprende y realmente entendió como se realizaba, se manejaba, pero resulta que igual se equivocó, pero después se sentó se quedó ya tranquilito y fue. Resulta que como dice Sonia también me llamó la atención, porque a veces cometen el error que los niños hacen el ejercicio, pero no lo explican a nosotros cómo lo hacen, sino que llegan al final no más”.

La intervención anterior es importante, por cuanto Carmen continúa su argumentación señalando al conocimiento matemático que fundamenta las técnicas de cálculo como la evidencia y motor de la argumentación de los niños. Con ello, se destaca la presencia de la tecnología de la OM como un elemento relevante de la clase de matemática.

Carmen: “(...) Claro ellos manejaban hartito y manejaban hartito el valor posicional que tenían cada uno de los números, porque la última niña que fue María José, ella primero sumó las unidades y como a la niña le dio 14, sabía que el 1 correspondía a las decenas, entonces... o sea, ellos manejaban hartito todas las técnicas, me gustó bastante, lo que más me gustó fue que ellos argumentaron bien”.

Otras intervenciones también establecieron relaciones entre los elementos de la OM y las competencias en desarrollo. En general, ellas se refirieron a la oportunidad que ofrecen las distintas técnicas de cálculos para la promoción de la argumentación, gracias a la acción de seleccionar el procedimiento más eficiente. En particular, Sonia se refirió a esta relación, refiriéndose en forma explícita a la competencia como elemento del MCM tal como se estudió durante el seguimiento.

Sonia: *“Bueno ahí se ve que no importa el camino, sino... o sea, llegar sin que una técnica que la profesora diga esta es la correcta, sino que se ve que a los niños les enseñaron distintas técnicas y los alumnos tendrían que ser capaces de ver cuál es la más adecuada para ellos, la que les facilita o la que les es más cómoda, ¿ya?, se ve claramente el uso de 3 técnicas y me da la impresión que aparte de resolver problemas la profesora quería desarrollar la competencia de “Razonamiento y argumentación”, porque cada vez que los alumnos o las alumnas hicieron su planteamiento de la técnica que iban a usar o usaron se les preguntó mucho cómo lo hicieron, que explicaran lo que habían hecho, entonces pienso yo que la competencia desarrollada era razonamiento y argumentación”.*

Estas manifestaciones de las categorías propuestas se manifestaron durante la primera mitad de discusión de esta primera pregunta. En la segunda mitad estas manifestaciones fueron más esporádicas. El evento que delimita este segundo episodio se refiere a la solicitud de profundización de algunas ideas planteadas por Laura, quien valorando la clase, señaló que el motivo por el cual la clase había funcionado bien se debía al origen socio económico de los alumnos.

Laura: *“(...) Además que yo siento que ellos no tienen vacíos anteriores tampoco, o sea como pasa con nuestros niños que tienen muchos vacíos... entonces acá no. Seguramente el tipo de niño es distinto al nuestro, me da la impresión. La profesora, que lo que quisiera es que el niño se dé cuenta de su error, y que preguntara también quién desea pasar al pizarrón, y darse cuenta que no era sólo uno sino que eran muchos los que querían pasar al pizarrón. O sea, yo encuentro que el curso es muy bueno y la profesora también es... uy, ha hecho muy bien su trabajo respecto a estos niños”.*

Laura: *“Sí, yo pienso que esos niños tienen más competencias que los nuestros, si no digo que ellos tengan menos, sino que me refiero a que ellos tienen más competencias que los nuestros. Partimos de la base que yo tengo un grupo, por ejemplo, y trabajo con ellos, no sé si trabajaré bien o mejor o peor, no sé, pero nuestros niños tienen más dificultades y tiene que ver con todo esto social y tiene que ver con que en el lugar en el que están insertos no desarrollan estas habilidades (...) a lo mejor en tu caso tú tienes razón, en el mío no, porque resulta que el niño integrado en mi sala no hace un cálculo mental, no hace un razonamiento y tampoco puede explicar eso, y no me refiero en tipificar un poco al niño, sino que el niño, ellos traen menos herramientas”.*

Algunas profesoras reaccionaron ante esta idea, pero sin hacer mayores referencias al MCM, sino más bien a plantear sus concepciones respecto de en qué medida sus alumnos son factores del proceso de enseñanza/aprendizaje. Una profesora plantea que todos los niños son iguales independientemente de la dependencia administrativa del establecimiento, mientras que otra profesora planteó que no todos los niños son iguales, pero la realidad en los establecimientos es la misma. Frente al hecho de que los alumnos no traen las herramientas desde el hogar, Carmen planteó que prácticas que son ejercidas pensando en el profesor y no en el alumno no resuelven la problemática.

Carmen: *“Claro lo que pasa es que por ejemplo la realidad de nosotros, yo trabajo en una escuelita rural, sabiendo que sus condiciones tampoco son, pero nosotros trabajamos con poquitos niños, yo tengo 9 niños, entonces al final hay una enseñanza que es más individualizada entonces uno está rondando y está viendo, entonces uno sabe el niño que es integrado y el niño hace sobreconteo y tiene un retardo mental, entonces por qué, porque hay una dedicación y uno se refiere a*

ese, en ese sentido porque por ejemplo yo no puedo hacer una comparación con 35 niños donde de repente es más complicado, entonces son diferentes realidad, por ejemplo la realidad de nosotros es diferente, te fijas, entonces a eso me refiero, que la profesora tenía una vocación y que es labor de nosotros aprender diferentes estrategias para los niños, también ahí nosotros de repente fallamos porque a veces nos quedamos a veces con lo más cómodo, con el algoritmo tradicional, porque a veces pasa así, pero es como la función de nosotros, porque sí yo quiero aprender, porque estamos aquí para aprender cierto, estamos aprendiendo para enseñarles más cosas a los niños y cosas que a uno no se las han enseñado entonces por eso a mí me gustó esto y he aprendido bastante en esto”.

Finalmente, y en la misma línea, Marta argumentó respecto del comentario de Laura, realizando una profunda autocrítica:

Marta: “Sí, totalmente de acuerdo porque a lo mejor nosotros los comparamos con nuestros niños porque nosotros no hemos tenido un proceso en donde los niños manejen esas técnicas, que el niño la pueda utilizar, en cambio estos niños sí, entonces están más preparados para ellos y anteriormente nosotros no trabajábamos con este tipo de técnicas en la cual el niño podía razonar y ver cuál le podía servir, cierto, porque probablemente nosotros mucho antes el niño hubiese hecho simplemente un algoritmo no más, pero no habría explicado por qué, a lo mejor lo habría hecho de forma mecánica simplemente, pero lo importante es que aquí hay un proceso en el que va comprendiendo, va analizando, va razonando el por qué llegó ahí y cómo lo hizo”.

Las manifestaciones de concepciones y creencias de las profesoras en esta segunda mitad desviaron la discusión de modo tal que sólo se observaron algunas referencias a las técnicas observadas, o bien, al desarrollo de la argumentación. El moderador permitió que esta discusión se prolongase para observar la eventual manifestación de elementos del MCM en las argumentaciones de apoyo o discrepancia respecto de las ideas planteadas por Laura, pero estas reflexiones se hicieron desde un terreno pedagógico más común.

En síntesis, las profesoras evaluaron positivamente la gestión de la clase, identificando algunos elementos de la OM presentes en la clase, e identificando correctamente la competencia predominante. No hubo mayores referencias a los procesos de modelización observados en la clase. Además, las profesoras establecieron relaciones entre las técnicas y los procesos competenciales, y una profesora argumentó tal relación con afirmaciones de mayor profundidad, asociadas a la tecnología de la OM.

2. ¿Qué aspectos del MCM han incorporado ustedes en sus clases?

Para responder esta pregunta, las profesoras se refirieron principalmente a procesos de la competencia de argumentación y razonamiento. Señalaron, tal como se logró observar en el primer grupo focal, que ellas sentían que habían incorporado o mejorado elementos de gestión de clases que promueven la argumentación, mejorando con ello el trabajo con las actividades del momento de inicio, haciendo mejores cierres, y principalmente mejorando la gestión de las producciones de los alumnos.

Sonia: *“Me di cuenta también en el seminario que yo personalmente si un niño me daba una respuesta correcta me quedaba, ya está bien, pero las respuestas correctas también tiene que cuestionarse (...). No, no debería haber dado al tiro el “sí”, debí haber preguntado más, pero esas han sido la cosas que he ido incorporando, no dar por hecho que el resultado es bueno de inmediato, sino que poner un poquito en duda lo que el niño hace para que expliquen y ya no me digan... a ver, como... si yo decía “¿estás seguro?”, y cambiaban repentinamente el resultado, trato de que no me digan... que no me cambien de inmediato sino que traten de defender su posición”.*

Marta: *“Bueno generalmente cuando planteamos problemas en la sala nunca a los niños les daba la oportunidad de explicar por qué llegaban a ese resultado y cómo lo hicieron simplemente “tal, ok” y continuábamos con el siguiente ejercicio (...). Pero ahora lo bueno es que los niños se dan cuenta y pueden explicarlo y inclusive a prender a veces más de los errores porque el hecho que se equivoquen y empiecen a opinar los demás, ellos mismos se van dando cuenta y después se vuelve al niño que tenía el problema y contesta de forma correcta pero porque se dio cuenta”.*

Una profesora señaló haber incorporado el trabajo con técnicas que previamente no conocía. Otra profesora destacó la instalación de prácticas de promoción de procesos de modelización.

Mónica: *“Sí, porque al modelizar yo estoy obligando al niño, con eso me está demostrando datos, entonces lo estoy obligando a ver el problema completo. Ellos inmediatamente veían 5 y 2 y decían ah $5+2$ son 7, inmediatamente sumaban o sea ni siquiera se molestaban en leer, ahora como me tienen que modelizar tiene que leer, están obligados, me tienen que decir que hay 5 manzanas y se perdieron 2 manzanas, me muestran las 5 qué pasó con las manzanas, se perdieron, ya tiene que mostrar otra, qué pasó hay más manzanas o hay menos manzanas. Entonces ya inmediatamente identifican al modelizar y el leer cuál es la operación matemática que tienen que hacer, van a sumar o van a restar y eso a mí me ha servido bastante, se fueron por un tubo con la modelización porque antes yo no lo hacía, pero ahora sí lo estoy haciendo”.*

Algunas respuestas manifestaron la relación postulada en este estudio, respecto de los elementos de la OM y los procesos competenciales. Esta relación se refirió principalmente a la señalada en la pregunta anterior, es decir, el desarrollo de la competencia argumentación a través de la selección de las técnicas de cálculo. Dos respuestas manifestaron el rol de las variables didácticas en la promoción de las actividades. Marta plantea que la gestión de las variables didácticas permite el acceso a todos los estudiantes al desarrollo de las competencias en promoción, en particular, el ámbito numérico y el tipo de problema aditivo.

Marta: *“(...) Ahora con los niños que tiene más problemas de aprendizaje, algunas veces se les hace con el ámbito más pequeño y la técnica que realmente pudieran aprender”.*

Marta: *“Sobre todo en “cuánto más”, que ese es más complicado, “cuánto más tiene, cuánto menos”, eso que generalmente ellos simplemente sumaban cuando escuchaban el cuanto más, ahora no porque el hecho de ver el dibujo explicarse quién tiene más quién tiene menos”.*

Se observaron dos reflexiones sobre las implicancias del trabajo con el modelo en las prácticas docentes. En particular, estas reflexiones destacan la modificación de

concepciones y creencias respecto del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, producto de su participación en el seminario.

Sonia: *“Después de todas las opiniones yo pienso que sí, a mí hay algo que me quedó grabado en este seminario, fue cuando yo me di vuelta carnero en una respuesta cuando nos pusieron dos ejemplos de niño que había, creo que tenían que dar una respuesta y argumentar abajo, dar la respuesta y después argumentar. Bueno el tema que yo a primera vista y con mi mentalidad antigua veo que el segundo niño está correcto y el primero está correcto y ese fue mi primer registro ahí y después cambié de opinión, pero una cuando dije no, la respuesta del primer niño es mejor, tiene mejor argumento que la del segundo niño y ahí me di cuenta que la competencia que debería prevalecerá lo mejor en esa evaluación era la de argumentación de el por qué más que el cuánto”.*

Ángela: *“Afianzar y el tema de cuestionarme las clases yo, por ejemplo cuando uno planifica, porque a veces uno planifica en el papel y es un tema como súper frío, entonces de repente cuestionar si resultó o no resultó, por qué no resultó, por qué pudo haber sido mejor, o qué pasó en esa clase”.*

En síntesis, las profesoras han incorporado en su gestión elementos asociados principalmente a la argumentación y razonamiento, estableciendo una relación con la selección y justificación del uso de técnicas de cálculo conocidas a priori.

3. *¿Qué aspectos del MCM han querido incorporar en sus clases pero no lo han hecho aun, o no han podido hacerlo?*

Esta pregunta buscaba evaluar la profundidad del conocimiento de los elementos del MCM y sus relaciones, pidiendo a las profesoras que reflexionaran sobre aquellos elementos que no han incorporado, lo que supone una tarea de mayor complejidad que las asociadas a las preguntas anteriores. Dos profesoras manifestaron haber incorporado todos los elementos del modelo. Laura señaló el desafío de incorporar más técnicas en su implementación curricular. Otras respuestas se refirieron a la necesidad de perfeccionar a través de la práctica y el apoyo de otros la incorporación de los elementos del MCM. Señalaron el uso de esquemas y el desarrollo del cálculo mental.

Laura: *“(...) Los esquemas también estoy pasando esquemas igual, algo nuevo, yo no he hecho esquemas así tan, como lo hemos visto acá lo he visto como el contenido pasó chao saca el libro y listo como algo, pero no haciendo énfasis en eso. Yo creo que de a poco lo que aprendí aquí si yo siento que es necesario hacerlo y es un proceso que seguramente nos va, que a mí me va tomar tiempo también porque es como cambiar la rutina de trabajo de uno, entonces uno tiene que ir acostumbrándose también para después apropiarse hacerlo parte ya de nuestro ejercicio”.*

Ángela plantea su necesidad de incorporar de mejor forma la relación entre elementos de la OM y las competencias, haciendo además referencia superficial a los niveles de complejidad de los procesos, determinados por variables didácticas.

Ángela: *“A ver por ejemplo en el tema de la técnicas, respecto a las restas o al tema de la sustracción, yo creo que eso en el tema como técnica de lograr competencias en los niños, como más complejo instalar, por ejemplo, el “más que”, el “menos que”, que hay que comparar, que el niño... porque a veces ellos reflexionan, logran levantar su mano y decir “oye yo creo que es esto”, pero a*

veces como que se... aún cuando uno los dirija, pero que ellos logren hacer esa conexión también es difícil”.

Carmen valora la introducción de esquemas, y señala que tal tarea se facilita cuando los alumnos ya conocen esta forma de representación. Además, declara la posibilidad de trabajar esquemas con estudiantes que nunca han trabajado con este recurso, lo cual se puede lograr a través de la gestión de variables didácticas que controlen la dificultad y, eventualmente, la complejidad de tal tarea.

Carmen: *“Sigo, con un grado menos de dificultad no más, el ámbito a lo mejor hacerlo más simple, trabajando aunque sea con las decenas y después incorporar las centenas ciertas cosas porque yo siento que va a depender del ámbito, de las variables”.*

Síntesis y conclusiones de las participantes.

Al finalizar la actividad, las profesoras manifestaron satisfacción con su participación en el proyecto. Valoraron principalmente la observación de clases como un recurso de reflexión docente, el trabajo colaborativo con otros que permite conocer otras realidades y experiencias, la metodología que promovió el cuestionar las propias prácticas, y el apoyo y seguimiento sistemático ejercido sobre ellas.

Análisis por categorías para FG2

A. Respuestas basadas en la resolución de problemas como tarea escolar.

Es interesante que Marta, quien empleó profusamente respuestas asociadas a esta categoría en el primer grupo focal, abandona este tipo de respuesta posterior a la implementación de la planificación para referirse principalmente a los procesos de competencias, y su relación con las variables didácticas para el control de la complejidad de éstos. De hecho, las respuestas centradas en la resolución de problemas fueron escasas, y se manifestaron en respuestas de Laura principalmente.

Laura: *“Yo trabajé la solución de problemas en mi planificación y bueno lo que yo hice fue que el niño entendiera por pasos los problemas, entonces tenía que realizar una serie de estructura por pasos y lo que más hice yo hincapié fue que ellos describieran de forma oral o escrita el proceso que ellos iban a realizar cuando realizaran el cálculo”.*

B. Respuestas basadas en los elementos de la organización matemática subyacente.

Dadas las características del episodio observado, las respuestas asociadas a esta categoría centraron la atención en la gestión de las técnicas de cálculo por sobre en la tarea matemática, que es el contexto en el cual las técnicas tienen sentido. Las respuestas centran la atención en la variedad de técnicas disponibles en el episodio observado.

Ángela: *“A ver, me parece que los niños ya vienen con una base, no se está poniendo nada nuevo al tapete respecto de esta clase, porque ellos manejan varias cosas, manejan técnicas, hay cálculo aditivo, composiciones aditivas que están hechas, o sea que ellos las manejan. Hay un tema de descomposición que*

ellos también las manejan, incluso ya están avanzados con el tema de los algoritmos, entonces ya hay hartas cosas que ya trabajan”.

Mónica: “Bueno, yo veo que la profesora ha trabajado como decían ellas distintas técnicas, me llamó la atención sobre todo en el segundo niño que domina muy bien las descomposiciones aditivas básicas, cuando él fue capaz de descomponer el 6 y el 8 ahí hay un dominio absoluto de las combinaciones aditivas, él lo hizo mental ni siquiera dijo 6... ¿no?, lo hizo mental”.

Carmen destaca que la diferencia entre dos grupos de niños se puede describir a partir del repertorio de técnicas disponible por cada grupo, empleando con ello esta categoría como un elemento caracterizador del conocimiento matemático de un estudiante curso.

Carmen: “Yo creo que todos (los niños) son iguales, o sea yo pienso que aquí las técnicas ya las manejaron, nosotros manejamos técnicas, entonces hay distintos tipos de técnicas, podríamos haber hecho la misma clase (...) y al final de la clase después de todas las técnicas como un trabajo, después de todas las técnicas qué es lo que quiere, ella no dijo qué técnica tenían que utilizar, sino que ella hizo el ejercicio y el niño eligió la técnica que le favorecía a él, que le acomodaba más a él y él explicó su técnica, pero para mí yo creo que todos los niños son iguales, no hay diferencia en niños”.

Finalmente, varias respuestas destacan el hecho de que el conjunto de técnicas constituye un cuerpo de conocimiento que se construye en base a una secuencia que construya dicho conocimiento.

Carmen: “Claro que debería haber sido tal vez desde 1º, entonces después hay debilidades como uno dice que hay vacíos en ellos, como dice ella que ha incorporado hartos en 1º yo creo que eso es bueno, que uno de 1º empiece con las técnicas, para que el niño vaya avanzando también desde lo más simple a lo más complejo”.

Tal como se señaló, una respuesta logró hacer referencia a la tecnología asociada a una técnica en particular.

C. Respuestas basadas en competencias y en sus procesos.

Esta categoría se manifestó principalmente a través de la descripción de la competencia de argumentación en función de las características del episodio observado. Esta categoría se manifiesta en función de la gestión del error observada.

Ángela: “Me parece como clase súper grato que lo hayan ido trabajando los niños, o sea que la producción de respuestas hayan sido de ellos, frente a 3... porque los 3 que pasaron tenían a su haber digamos, 3 técnicas distintas, 3 formas de llevar ese problema a resultado y que frente a la equivocación del primer, o error no haya podido también solo descubrir cuál era el resultado, a mí me pareció súper pertinente”.

Algunas profesoras se refirieron a la argumentación como un proceso cognitivo interno que requiere de gestión de sus producciones para que éste se evidencie, en particular de los errores.

Marta: “(...) Me llamó la atención que todo lo hizo mental porque aquí se vieron cierto 3 técnicas que los niños utilizaron, el niño lo hizo mental, lo hizo todo mental

porque generalmente los niños lo hacen en el cuaderno escriben todo el proceso, lo hizo todo mental. (...) El razonamiento digamos mayor en relación a los demás niños y también la oportunidad que se les da a los niños que todos ellos puedan opinar y que ellos mismos se den cuenta de los errores, y ellos puedan, se apropiaran de los aprendizajes porque ellos mismos descubren los errores cierto, y al darse cuenta de esto resuelven ellos mismos sus propias inquietudes, que eso es más valioso para ellos porque el aprendizaje es más significativo para ellos”.

Sonia: “No, no debería haber dado al tiro el “sí”, debí haber preguntado más, pero esas han sido la cosas que he ido incorporando, no dar por hecho que el resultado es bueno de inmediato, sino que poner un poquito en duda lo que el niño hace para que expliquen y ya no me digan... a ver, como... si yo decía “¿estás seguro?”, y cambiaban repentinamente el resultado, trato de que no me digan... que no me cambien de inmediato sino que traten de defender su posición”.

Además, las profesoras plantean el propósito de la clase en términos de competencias.

Valentina: “Que ella tiene claras las competencias que quiere desarrollar con los niños y que sabe a dónde va y lo desarrolla, desarrolla la competencia ella cree, el objetivo que ella tiene”.

D. Respuestas basadas en el establecimiento de relaciones entre tareas matemáticas y competencias.

Las profesoras identificaron que la presencia de tareas matemáticas de cálculo, y la disponibilidad de las técnicas respectivas, permiten la promoción de la competencia de razonamiento y argumentación.

Valentina: “Bueno como ya todos mis colegas han mencionado yo ya había pensado que el objetivo de esta clase, o sea por el trozo que vimos, creo que la profesora estaba promoviendo la argumentación. Ellos manejan técnicas, está claro que ellos manejan diferentes técnicas, pero ella, lo que pienso yo que (para) ella el objetivo es promover el razonamiento y la argumentación como competencia, porque los niños llegan a lo que a ella le interesa, si bien dice si está bien o mal el resultado, pero lo que a ella le interesa es que ellos puedan argumentar qué técnica utilizaron y entre todos darse cuenta cuál es la técnica más eficaz para desarrollar ese tipo de ejercicios, porque ya en la parte final que vimos les recuerda que hay muchas técnicas a utilizar, pero hay que elegir la que sea más eficaz para resolver el problema, entonces pienso que ese era como el objetivo de ella”.

Más aun, Carmen y Marta señalan que el hecho de que los alumnos dispongan de un único procedimiento, limita el desarrollo de la competencia.

Marta: “(...) Porque probablemente nosotros mucho antes el niño hubiese hecho simplemente un algoritmo no más, pero no habría explicado por qué, a lo mejor lo habría hecho de forma mecánica simplemente, pero lo importante es que aquí hay un proceso en el que va comprendiendo, va analizando, va razonando el por qué llegó ahí y cómo lo hizo”.

Carmen: “(...) Es labor de nosotros aprender diferentes estrategias para los niños, también ahí nosotros de repente fallamos porque a veces nos quedamos a veces con lo más cómodo, con el algoritmo tradicional, porque a veces pasa así”.

En síntesis, las profesoras manifestaron la relación que existe entre el trabajo con técnicas de cálculo y la competencia argumentación y razonamiento.

E. Respuestas basadas en el establecimiento de relaciones entre condiciones didácticas de las tareas matemáticas y actividades, y las competencias.

Se observaron tres respuestas asociadas a esta categoría. En ambas, se planteó la gestión de las variables didácticas como un medio de control de la complejidad de una tarea, con el objeto de hacer accesible una técnica y competencia a los alumnos.

Marta: *“(…) Ahora con los niños que tiene más problemas de aprendizaje, algunas veces se les hace con el ámbito más pequeño y la técnica que realmente pudieran aprender”.*

Carmen: *“Sigo, con un grado menos de dificultad no más, el ámbito a lo mejor hacerlo más simple, trabajando aunque sea con las decenas y después incorporar las centenas ciertas cosas porque yo siento que va a depender del ámbito, de las variables”.*

F. Respuestas basadas en la relevancia de la planificación de actividades para el desarrollo competencias matemáticas, como una práctica profesional docente.

Estas respuestas no están basadas en un elemento específico del modelo, sino que son manifestaciones de la valoración de la práctica de planificación de actividades y de su gestión para el desarrollo de competencias matemáticas. Dado lo contextualizado del trabajo realizado en el focus group, este tipo de respuesta apareció esporádicamente, pero permitió relevar algunas concepciones de las profesoras respecto del proceso de enseñanza de las matemáticas. Estas reflexiones más generales surgieron como respuesta a la segunda pregunta, la cual buscaba evaluar justamente las implicancias de la implementación del modelo en las prácticas docentes.

Ambas intervenciones centraron la atención en la reflexión sobre las propias prácticas. En particular, una de ellas distingue entre una mentalidad antigua, previa al proyecto, y una mentalidad nueva, en la cual la consideración de los procesos de argumentación y su articulación con otros elementos disponibles previamente enriquece la visión sobre los procesos asociados a la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, tal como la evaluación. Además, el modelo entrega herramientas técnicas de evaluación y autoevaluación de prácticas docentes tales como la planificación y la gestión didáctica.

Sonia: *“Después de todas las opiniones yo pienso que sí, a mí hay algo que me quedó grabado en este seminario, fue cuando yo me di vuelta carnero en una respuesta cuando nos pusieron dos ejemplos de niño que había, creo que tenían que dar una respuesta y argumentar abajo, dar la respuesta y después argumentar. Bueno el tema que yo a primera vista y con mi mentalidad antigua veo que el segundo niño está correcto y el primero está correcto y ese fue mi primer registro ahí y después cambié de opinión, pero una cuando dije no, la respuesta del primer niño es mejor, tiene mejor argumento que la del segundo niño y ahí me di cuenta que la competencia que debería prevalecerá lo mejor en esa evaluación era la de argumentación de el por qué más que el cuánto”.*

Ángela: *“Afianzar y el tema de cuestionarme las clases yo, por ejemplo cuando uno planifica, porque a veces uno planifica en el papel y es un tema como súper frío, entonces de repente cuestionar si resultó o no resultó, por qué no resultó, por qué pudo haber sido mejor, o qué pasó en esa clase”.*

Síntesis y conclusiones en la discusión de los grupos focales

De la discusión de los grupos focales, se propusieron 5 categorías de análisis de las respuestas propuestas por las participantes, definidas a partir del foco en los elementos o elaciones entre elementos del modelo de competencia matemática abordado en esta investigación. Los datos mostraron la presencia de un tipo de respuesta que escapaba a tales categorías, por cuanto estaba basada en concepciones previas a la participación en el estudio. Finalmente, las categorías propuestas fueron las siguientes:

- A. Respuestas basadas en la resolución de problemas como tarea escolar.
- B. Respuestas basadas en los elementos de la organización matemática subyacente.
- C. Respuestas basadas en competencias y en sus procesos.
- D. Respuestas basadas en el establecimiento de relaciones entre tareas matemáticas y competencias.
- E. Respuestas basadas en el establecimiento de relaciones entre condiciones didácticas de las tareas matemáticas y actividades, y las competencias.
- F. Respuestas basadas en la relevancia de la planificación de actividades para el desarrollo competencias matemáticas, como una práctica profesional docente.

El análisis de las manifestaciones de estos tipos de respuestas permite identificar en el discurso de las participantes, distintos niveles de profundidad de reflexión. Se postulan los siguientes tres niveles de reflexión sobre las prácticas de planificación y secuenciación de actividades para la promoción de competencias matemáticas.

1. Nivel 1: Concreto y contextual (categoría A).
2. Nivel 2: Asociación y conexión de la práctica con elementos del modelo (categorías B y C).
3. Nivel 3: Evaluación de planificación a partir de la relación entre los elementos del modelo (categorías D y E).

Es importante considerar que las respuestas de nivel 3 de reflexión surgen en el contexto del desarrollo de ciertas tareas didáctico-matemáticas propias del ejercicio profesional docente de quien enseña matemática en el primer ciclo básico, bajo condiciones didácticas seleccionadas para promover dichos procesos de reflexión docente. En el contexto de la actividad del focus group, las condiciones que permitieron que las profesoras alcanzaran un nivel de reflexión más profundo fueron los siguientes:

- Contextual: disponibilidad de planificación, contexto curricular afín.
- Colaborativo: las respuestas dadas por las profesoras se daban en reacción a preguntas formuladas por el moderador o por una colega, o en reacción a afirmaciones de otros.

- En profundidad: selección de contenidos curriculares acotados.

5.2.3. Reflexión sobre las prácticas

La reflexión en esta dimensión es tanto sobre las prácticas de otros docentes como sobre la propia práctica. Cada uno de estos casos tiene una estrategia propia. Para el primer caso -reflexión del docente sobre las prácticas de otros- se utiliza como primer cuerpo de datos el espacio del seminario en que se analizaron los casos clínicos y episodios de videos de sus compañeras.⁸

Un segundo cuerpo de datos es el segundo grupo focal en que se analizarán episodios de las implementaciones de las secuencias didácticas. Utilizaremos las categorías propuestas por Van ES y Sherin (2010) –mencionadas en la formulación inicial del proyecto– para estudiar los cambios en la reflexión de las prácticas: aspectos pedagógicos (acciones y decisiones del profesor, y las estrategias de enseñanza que fueron usadas), aspectos matemáticos (cuestiones y comentarios sobre los elementos matemáticos de la lección) y aspectos relacionados con las concepciones del estudiante que afectan a su comprensión de las ideas matemáticas.

La reflexión sobre de su propia práctica se hizo a través de los cuatro estudios de caso. A cada una de estas profesoras se les aplicó dos entrevistas en que tuvieron que analizar episodios de su propia práctica. La primera entrevista se aplicó antes de comenzar las implementaciones de la secuencia didáctica, y la segunda entrevista una vez finalizada las implementaciones. Las categorías de análisis son las mismas mencionadas anteriormente (Van Es y Sherin, 2010).

El análisis de las propias prácticas se realizó por medio de los estudios de caso, y a cada una de las profesoras se le realizaron dos entrevistas utilizando como medio episodios de sus clases. La primera entrevista se realizó durante el seminario a los tres casos seleccionados. La segunda entrevista se realizó una vez finalizada la implementación de la secuencia didáctica, y dos meses después de haber realizado el segundo grupo focal, así transcurrió un tiempo prolongado de término del seminario.

Primera entrevista

La estrategia en la realización de la primera entrevista para cada caso es ver episodios de una sesión de clases antes que comenzara el seminario y se le realizan preguntas en relación a lo sucedido en el episodio. Luego, se ve un episodio que corresponde a una sesión en que implementa una de las actividades vistas en los casos clínicos presentados en el seminario. La última pregunta tiene la intención de que la profesora compare si percibe cambios en sus prácticas al contrastar las dos clases.

Para analizar las respuestas de los casos, se utilizan dos cuerpo de categorías. En las preguntas orientadas a comunicación, se clasifica la respuesta de los casos en función de los cuatro procesos de la competencia de comunicación. Para caracterizar la reflexión que hacen de su práctica, se utilizan las categorías de Van Es y Sherin (2010).

⁸ Los resultados de este análisis serán presentados en el informe final

A continuación se realiza un análisis de cada una de los tres casos. En primer lugar se analiza a Valentina, luego a Mónica y finalmente a Sonia.

Caso Valentina.

Los primeros tres episodios corresponden a la sesión de clases antes que comenzara el seminario, y el cuarto episodio corresponde a la sesión de implementación del caso clínico. A continuación, se presentan las preguntas para cada episodio.

Preguntas para el caso de Valentina.

1) Episodio 1

Describe como es la comunicación en el episodio.

¿Cuál es el propósito de la comunicación?

¿Qué acciones realizas para promover la argumentación?

2) Episodio 2

¿Cuál es el propósito de la comunicación?

¿Piensas que el estudiante está desarrollando la comunicación tal como esperabas?

3) Episodio 3

¿Qué dificultades presentó la niña? ¿Qué acciones realizaste para hacerte cargo de las dificultades?

4) Episodio 4

¿Qué dificultades tuviste como profesora en la gestión de la actividad?

¿Que competencias están presentes?

¿Qué acciones realizas para promover la argumentación?

5) Cuestión final

En comparación a los episodios de la clase anterior, ¿observas cambios en tu actuar como docente? Dime algunos ejemplos.

La entrevista comienza con la presentación del primer episodio, correspondiente a una clase de Valentina a comienzos de año en que introduce la noción de orden, en particular la comparación de colecciones. Valentina estudia esta tarea por medio de grupos que se forman en la misma clase, y comparando cual grupo tiene más y menos colecciones. Los alumnos responden en voz alta.

Este episodio de clase se seleccionó para que lo analice Valentina porque ella promueve una comunicación unidireccional, dado que realiza preguntas puntuales “dónde hay más”

y los alumnos responden el número, sin que exista una mayor explicitación de razonamiento. A continuación se describen las respuestas de Valentina respecto a las tres preguntas sobre este episodio.

Entrevistador: La primera pregunta que me gustaría hacer es que describieras la comunicación en este episodio, cómo ves tú la comunicación que hay.

Valentina: no la veo tan mal, pero a lo mejor debiera haber más interacción con ellos, haber más interacción de los niños, de en general porque son algunos los que interactúan, a lo mejor debiera haber más interacción de ellos, más intervención de ellos

Entrevistador: En qué vez tú la comunicación en qué sentido se manifiesta aquí

Valentina: ...Cuando uno les hace alguna consulta ellos responden o participan, en la participación que hacen ellos

...

Valentina si bien reconoce que pudo haber más interacción, cuando se le pregunta en cómo se manifiesta la comunicación, ella lo asocia a la participación, sin especificar cómo puede ser esa participación.

En la segunda pregunta se aborda la comunicación, en términos de puntualizar sobre el propósito de participación.

Entrevistador: ¿Y cuál sería el propósito de esa participación, de esa comunicación?

Valentina: Para saber si, por ejemplo el objetivo de la clase era comparación de números mayor menos, entonces para ver si ellos tienen adquirido el conocimiento

Entrevistador: Si ellos han adquirido conocimiento

Valentina: Si ellos adquirieron en contenido, el objetivo de la clase, si ellos lo, a ver cómo lo puedo decir, si ellos lo manejan, lo tienen ya internalizado el concepto de mayor, menor porque como es 1º ((básico))

Entrevistador: Necesitaban tú valerte de esa interacción, de esa comunicación para saber

Valentina: Para saber si ellos en realidad tenían claro el concepto de mayor, menor, lo manejaban o no.

Valentina asocia que el propósito de la participación y comunicación es indagar el dominio de los niños en la comparación de colecciones. En términos de los procesos de comunicación corresponde a organizar el pensamiento matemático de los niños.

Por otra parte, para estudiar el tipo de análisis de realiza Valentina, utilizando las categorías de Van Es y Sherin (2010), el actor es el estudiante y el foco de atención es su pensamiento matemático. Además cuando se le pregunta que describa la comunicación lo hace en términos valorativos más que analíticos.

En la tercera pregunta se aborda particularmente la argumentación.

Entrevistador: Ahora en cuanto a la argumentación, en qué acciones tú concretas realizas para promover la argumentación en los niños

Valentina: Les pido que me expliquen, que me den una razón por qué ellos están opinando así, o por qué están opinando no, porque tienen la tendencia los chiquititos de decir sí, pero por qué sí, o sea que me expliquen ellos en realidad por qué están opinando eso

Entrevistador: Y lo hacen?

Valentina: Algunos sí, algunos no se quedan ahí en el sí, algunos sí argumentan

Entrevistador: y tú qué haces frente a ese sí o que no

Valentina: Les pido que me expliquen, pero por qué, a ver, por qué opinas que sí. Hay unos muy tímidos entonces no les digo que no, hay una explicación que no se adecúa mucho a lo que se está consultando, a la argumentación que da, pero tampoco les digo no, no corresponde, sino que ya bien, sigo con otro

Valentina asocia la argumentación con la explicación que realizan los estudiantes. Si bien alude a que en esta explicación debería haber una opinión más que una mera respuesta, cuando se le pregunta por cómo lo hacen los alumnos, ella reconoce que sólo algunos argumentan, en particular, preocupándose porque justifiquen sus respuestas. Esta aseveración la hace en términos generales, y no centrándose en el episodio, es decir, no aborda cómo es la argumentación en el episodio en sí mismo si no en general en sus clases.

En las respuestas de Valentina en las tres preguntas y en particular en esta última, el tipo de análisis de ella se puede asociar a una valoración general que realiza de su práctica, más que una descripción o interpretación específica.

El segundo episodio corresponde a un fragmento de la misma clase anterior, en que Valentina le pregunta a dos niños quién tiene más lápices.

A continuación se presenta la respuesta de Valentina a las preguntas sobre el segundo episodio.

Entrevistador: Describe... alcanzas a percibir qué pasó ahí

Valentina: sí, lo que pasa es que traté, traté de trabajar en parejas, de dos para ver si ellos tenían adquirido el concepto de mayor, menor, entonces que fueran ellos con los lápices, con lo que tenían a mano en el minuto, teníamos el estuche. Entonces que ellos compararan, uno pusiera más lápices el otro menos y preguntara que cuál tenía más cuál tenía menos, el objetivo era ese. Yo lo traté de visualizar de esa forma, para sabe quién lo tenía claro, quién no lo tenía claro el concepto de más o de menos, de mayor o menor

Entrevistador: Ahora cuando ves este episodio cuál sería el propósito de la interacción de los niños y tú, cierto, cuál es el propósito de esa interacción

Valentina: El que ellos se den cuenta de que cuál es mayor, cuál es menor y que yo también perciba si es que ellos saben o no

Entrevistador: Y tú piensas que se cumplió ese objetivo, ese propósito?

Valentina: Con esa actividad yo creo que sí

Entrevistador: Entonces por tanto tú, bajo como ellos hablan, piensas que la niña está desarrollando la comunicación que tú esperabas ahí?

Valentina: En ese episodio que vimos yo diría que sí, porque ella tiene claro que ella tiene menos y el niño tiene claro que él tiene más y si lo comparo con la compañera tiene más que ella, que tiene más lápices

Valentina asocia nuevamente el propósito de la comunicación con el proceso de que los alumnos organicen su pensamiento matemático. Bajo esta acepción, ella afirma que se logra una comunicación efectiva.

Respecto al tipo de análisis de realiza Valentina, el actor sigue siendo el estudiante y el foco de atención es su pensamiento matemático. Además, sus respuestas son más analíticas que valorativas.

El último episodio que ella ve corresponde a una clase en que implementa la misma actividad del caso clínico dos que consiste en resolver situaciones de conteo en que una colección está disponible y la otra oculta en una caja, el cálculo que solicita en el episodio es $8 + 5$. Valentina, luego de solicitar que socialicen sus respuestas correctas e incorrectas, hace pasar a la pizarra a tres alumnos y por medio de un cinta numerada ellos explican el procedimiento. Los dos primeros niños se equivocan dado que comienzan de cero y cuentan hasta 5, Valentina le solicita al tercer niño que explique su procedimiento, quien sitúa el 8 en la cinta numerada y cuenta cinco uno en uno hasta llegar a 13. Valentina pregunta en el grupo curso que explique qué pasó con los dos primeros niños, y un estudiante diferente a los tres anteriores, describe en qué se equivocaron los dos primeros.

Este episodio se seleccionó porque la gestión del espacio comunicativo es reflexivo por parte de Valentina dado que otorga oportunidades a los estudiantes para que reflexionen sobre el error, además promueve un proceso de comunicación que escasamente aparece en el aula: analizar y evaluar estrategias y el pensamiento matemático de los demás.

La pregunta de la entrevista apunta a que Valentina pueda reconocer la diferencia entre su gestión en los episodios anteriores y este último presentado. A continuación se presenta parte de la respuesta de Valentina a esta pregunta en que reconoce los aspectos que la modificó desde el inicio del seminario hasta ahora.

Entrevistador: Tu sientes que respecto a los episodios anteriores de la primera clase, a esta clase con este episodio concreto, ¿tu notas cambios?

Valentina: Yo creo que sí, a lo mejor sí, yo veo que sí, y en general en mí, porque yo recuerdo muy bien una clase en que vimos un video anterior y llegamos en realidad a la conclusión de que uno de repente comete el error de darle muchos andamiajes al niño, entonces no deja de que ellos encuentren las respuestas entonces (...) yo en base a eso he ido modificando bastantes cosas como yo hacía las clases, e modificado hartas cosas pero no porque se me hayan ocurrido a mí, he ido observando y con esto de los seminarios me han servido bastante.

Entrevistador: ahora dices que has modificado muchas cosas una que escuche clarísima es de dar menos andamiajes tú sientes que en el primer episodio diste mucho andamiaje.

Valentina: yo creo que sí.

Entrevistador: Crees que sí, y aquí en este episodio crees que das andamiajes (pausa), o no tantos.

Valentina: no tantos porque de repente uno cae también, que después se da cuenta, pero creo que no tanto como en el primero.

Entrevistador: no tanto como en el primero, eso es un cambio. ¿Podrías reflexionar o acordarte de otro cambio que tú ves?

Valentina: tratar de tener más interacción con ellos, con todos y a los que tienen como más dificultades tratar de darle cosas más fáciles y ámbitos más, por ejemplo, en las adiciones les pregunto cosas más fáciles por ejemplo con el cálculo oral porque de repente les estoy preguntando por ejemplo ya $10 + 5$ y al que le cuesta le pregunto $10 + 1$, cosas más fáciles para que puedan soltarse un poquito más y puedan participar.

Entrevistador: y con respecto al tema de las competencias, tu en tus clases actualmente tu promueves interacción ahora, tú sientes que en esta clase o en las actuales ahora estas promoviendo algunas de las competencias o habilidades que antes no lo hacías.

Valentina: si en la argumentación, le estoy dando bastante énfasis a eso que me expliquen por qué ellos piensan porque ellos opinan tal cosa, por qué dan la respuesta que dan.

Entrevistador: Valentina en el primer episodio tu lo hiciste, no el primer episodio que vimos tu preguntabas cuando recordaba las ideas previas tu les preguntabas por qué, con respecto a ese episodio del principio, con respecto a como lo hiciste hay y como lo harías ahora sería lo mismo, ósea te voy a mostrar de nuevo esas parte de cómo tu estas promoviendo la argumentación entonces quiero que lo veas de nuevo y me dices con todo lo que has visto.

...

Una vez que a Valentina se le muestra nuevamente el primer episodio, ella reconoce que debería haber guiado menos las respuestas y promovido más la argumentación. La comparación entre sus prácticas se puede reflejar en la siguiente parte final de la entrevista:

Valentina: Pienso que tendría que mejorar en la parte de permitir más argumentación por parte de ellos, que ellos lleguen al resultado en vez de. (...) de yo darle como la pauta para que lleguen.

En el análisis que realiza Valentina de su práctica ella no se centra en el análisis del último episodio sino que ella reconoce que ha cambiado a nivel general sus clases. Ella describe sus cambios en términos de andamiaje, “uno de repente comete el error de darle muchos andamiajes al niño, entonces no deja de que ellos encuentren las respuestas” Reconociendo que antes les daba más andamiaje a los niños y que los seminarios le han permitido cambiar esta práctica a dar menos.

Por otra parte, cuando se le pregunta por otro cambio, si bien ella menciona la importancia de la interacción, pone un ejemplo de gestionar las dificultades de los alumnos en términos de cautelar ciertas condiciones de realización de la tarea que sean pertinentes para cada caso.

Ella plantea que actualmente en sus clases da énfasis a la argumentación, en particular centrándose en que los alumnos justifiquen sus procedimientos. Cuando se vuelve a comparar con el primer episodio, Valentina vuelve a reflexionar sobre los cambios que necesita, en vez de hacerlo en términos de andamiaje, especifica que debería darle menos pautas.

Esta reflexión por parte de Valentina indica un cambio de concepciones sobre los espacios de comunicación de reconocer la importancia de espacios de reflexiones en vez de unidireccionales.

En un análisis global de la entrevista, se ha evidenciado que Valentina reconoce principalmente sólo el proceso de comunicación de organizar el pensamiento matemático, y el resto no los menciona, esto es muy notorio en el análisis del último episodio siendo un episodio que ella promueve el proceso de analizar y evaluar estrategias y el pensamiento matemático de los demás, ella no le da tanta importancia a este hecho.

Respecto al foco de análisis, en principio Valentina realiza un análisis de su práctica enfocada en el estudiante y el foco de atención es su pensamiento matemático, con unas respuestas valorativas y analíticas. En cambio en el último episodio el tipo de análisis se centra en ella misma, valorando sus prácticas utilizando criterios asociados a las competencias y gestión del error, lo que implica una valoración más reflexiva que el mero hecho de valorar la propia práctica sin unos criterios establecidos

Caso Mónica.

La entrevista del segundo caso utiliza una pauta similar al primer caso. A Mónica se le presentaron cinco episodios de una clase grabada previamente a la realización del seminario, para luego presentar un episodio de una clase posterior para que compare sus propias prácticas entre las dos clases.

Preguntas para el caso de Mónica

6) Episodio 1

¿Cuál es el propósito de este episodio?

¿Cómo es la comunicación?

7) Episodio 2

¿Qué dificultades presentó la niña? Que acciones realizaste para hacerte cargo de las dificultades

¿Cómo es la comunicación en el grupo para enfrentar la dificultad?

8) Episodio 3

¿Hay un trabajo de modelización en este episodio? ¿En qué se manifiesta?

¿Qué acciones realizas para promover la argumentación?

9) Episodio 4

¿Qué acciones realizaste para hacerte cargo de las dificultades?

10) Episodio 5

¿De qué te haces cargo en el cierre? ¿Qué hacen los estudiantes? Tu sientes que en el cierre de la clase lo haces tu compartido con ello o lo hacen ellos

11) Episodio 6

En comparación a los episodios de la clase anterior, ¿observas cambios en tu actuar como docente? Dime algunos ejemplos.

En la primera clase, correspondiente a los cinco primeros episodios, Mónica estudia el sistema posicional. En el primer episodio ella introduce la posición de las unidades y decenas al grupo curso.

A continuación se presenta una parte de la respuesta de Mónica a la primera pregunta

Entrevistador: Cómo percibes tú que está la interacción que hay entre tú y los niños en este episodio

Mónica: yo siento que los niños sí están participando que me están contestando, hay niños que me contestan bien y hay niños que me contestan mal, pero eso no importa lo que importa es que ellos están participando.

Entrevistador: Qué pasa con los niños que te contestan mal? En este episodio

Mónica: En este episodio me hago la loca, me quedé callada, no dije nada, traté de que llegaran a la respuesta porque después, o sea, me hice la loca entre comillas porque después yo voy a ir a conversar con él para que entienda en qué está equivocado. A mí no me gusta hacer la corrección delante de todos porque el niño se siente ridiculizado y después no quiere participar, entonces sigo preguntando, sigo preguntando hasta que llegan a la respuesta correcta, pero sí quedó en mi memoria que con ese niño yo tengo que ir a trabajar personalmente

En esta respuesta se destacan dos aspectos: Mónica asocia la participación con las respuestas de los alumnos, y en considerar que el error se debe ocultar para no ridiculizar al estudiante y tratarlo en otro momento de forma personal.

El siguiente episodio corresponde a un diálogo entre Mónica y dos estudiantes que tienen dificultades para realizar la actividad. Mónica reconoce que una de las alumnas tiene dificultades, el siguiente fragmento de la entrevista corresponde a su respuesta sobre las acciones que realiza para gestionar las dificultades de ella

Entrevistador: Y qué acciones haces tú en el episodio para hacerte cargo de esa dificultad, podrías reconocer qué haces tú en concreto para enfrentar la dificultad de Luisa

Mónica En ese momento, le pido que se fije, que trate de recordar, pero después me di cuenta que no sabía, realmente no sabía, entonces yo después voy a trabajar con ella para que después vaya reconociendo los números

Entrevistador: En ese momento la dejaste no

Mónica: La dejé, y la deje con la sensación de que sí me había engañado, que sí sabía cuando el niño le dijo, porque ella repitió lo que le dijo Benjamín, entonces yo después trabajo con ella, en esos ratos.

Mónica nuevamente reconoce que prefiere no gestionar el error en el momento que aparece y prefiere dejarlo para otro momento.

La siguiente respuesta de Mónica es sobre la comunicación en el grupo.

Entrevistador: Y cómo es la comunicación en este grupo con Pablo, con Luisa con los que están aquí para enfrentar la dificultad

Mónica: Ellos tratan de ayudarse unos con otros, ellos no, primero que nada, a ninguno le da risa que el otro no sepa, sino que tratan de ayudarse soplándose, ellos piensan que así se ayudan, ahora están entendiendo que esa no es la mejor manera de ayudarlo. Claro yo le digo, mira si tú le dices ahora ella nunca va a saber o él nunca va a saber, entonces mi obligación como profesora es enseñarle, ahora si ella me contesta mal yo voy a saber que no sé y yo qué tengo que hacer? Le tiene que enseñar, ya. Entonces en eso quedamos, si ella no sabe, no sabe no más

....

Entrevistador: Entonces la acción de interacción, comunicación que hay dentro del grupo, tú haces algo respecto a eso o lo dejas, es más bien tú haces algo con respecto a eso o lo dejas ser

Mónica : ¿A quién, al niño?

Entrevistador: Al niño, al grupo

Mónica: No dejo ser al niño, no dejo ser al grupo tampoco. En este episodio traté de que la niña llegara a la respuesta, le pedí incluso a la chica que está al lado que la ayudara, que le dijera qué número había, porque ella había hecho un número similar, qué número hiciste tú le dije a la chica de acá, que era un número un 20 tanto, esta tenía un 24 porque este le dijo, pero esta tenía un 27 por ahí, entonces para que la chica de al lado se diera cuenta que decía 20 porque los dígitos los conoce, lo que no sabía eran las decenas y a lo mejor ahí podría haber llegado a la respuesta, ella, no que le dieran la respuesta

Bajo el punto de vista del proceso de comunicación de analizar y evaluar las estrategias de los demás, Mónica plantea la comunicación como una colaboración entre ellos para tratar la dificultad, más que focalizarse en la importancia de comunicar las estrategias para compartir y negociar los significados.

En términos del tipo de análisis; Mónica se enfoca en analizar el pensamiento matemático del estudiante, no valora su práctica.

En el tercer episodio Mónica se encuentra en la pizarra explicando que 42 es mayor que 24, el procedimiento que realiza para determinar cuál es mayor, es descomponer los números en decenas y unidades, es términos de competencias, podemos decir que ella modeliza los números por su descomposición canónica como un procedimiento para poder determinar cuál es mayor.

A continuación se recoge la respuesta de Mónica al preguntarle por las competencias que se promueve.

Entrevistador: Mónica en este episodio qué competencias tú ves que estás promoviendo o que se están promoviendo en la clase

Mónica: Ya primero que nada ellos tuvieron que argumentar, cuando estuvieron diciendo cuántas veces, tuvieron que comunicar

Entrevistador: En qué cosas ves que tienen que comunicar o argumentar

Mónica: Cuando están contestando las preguntas, cuando están diciendo, cuando el niño está diciendo, me parece mucho que es Tapia, que hay 4, que 4 decenas son 40, que son 4 veces 10, el niño dijo eso... Cuando ellos comunicaron, bien o mal comunicaron lo que ellos entendían lo que ellos decían, estuvieron aplicando también lo que habían aprendido cuando decían sumamos 10 o sumamos 1, también estuvieron reconociendo los números

Entrevistador: Argumentación es una competencia que tú ves claramente y has puesto ejemplo ¿ves alguna otra competencia que destaque?

Mónica: No, no, sí, pero a ver, es que estoy pensando en la clase. El comunicar información lo están comunicando claramente, ahora que ellos recurren a conocimientos previos para comunicar esa información también está, se está dando porque están identificando los dígitos, identificando que se formaron los números

Entrevistador: Cómo ellos argumentan de que 42 es mayor que 24 qué utilizan

Mónica: Dicen que el 4 es más grande que el 2, utilizan decenas, ellos reconocen cuál es mayor y cuál es menor

Entrevistador: Porque 4 es una decena, y qué haces tú luego para...

Mónica: Se los represento

Entrevistador: Y que ganas tú al representarle eso

Mónica: Que los que no tienen claro que 40, que lo vean ahí, 4 veces 10

Entrevistador: Entonces el 40, 42 y 24 lo transformamos en un 40 y 20

Mónica: Claro, en un 40 y 20, o sea trabajar en ese momento con las decenas porque las unidades es fácil, dicen 1-1, pero ya cuando tienen que contar de 10 en 10 para ellos se complica, tengo muchos niños con problemas, ese es el problema. Entonces si yo estoy contando de 10 en 10, entonces ellos dicen 10 y luego dicen 11, no hijo usted tiene decenas y tenemos material concreto que en ese momento no había llegado todavía, pero ahora llegó. Entonces eso lo estoy solucionando con eso, que cuenten 10, 20, 30, 40, pero en ese momento yo no tenía el material para representarlo, se lo representé ahí, que vayan viendo que $10 + 10 + 10 + 10$. Ahí estaba trabajando en beneficio que aquellos que todavía no entendían de 40 decenas

Mónica identifica la argumentación y comunicación, indicando que los niños argumentan que 42 es mayor 24 mediante descomposición canónica. Luego cuando a Mónica se le pregunta por sus acciones, Mónica reconoce que ella promueve la representación de los números por su descomposición canónica, incluso hace mención a material concreto.

En el contexto de mismo episodio, Mónica hace mención a la modelización:

Entrevistador: Mónica y qué competencias están presentes en este episodio, hay alguna que tú identifiques.

Mónica: Cuando estamos hablando de competencias de qué estamos hablando

Entrevistador: De las que hemos visto en los seminarios. Tú en el episodio anterior dijiste que estaba la argumentación y la comunicación

Mónica: Razonamiento también, claro están razonando, están entendiendo que están más grandes quién es más grande, quién es más chico. Lo que yo aquí no he hecho es la modelización y está de más que está clarito

Entrevistador: Qué está clarito qué

Mónica: Que yo no he modelizado, o sea, he modelizado yo, los niños no

Entrevistador: Ya bueno, tú has modelizado y cómo se ve aquí que modelizas

Mónica: Cuando se los represento con los números por ejemplo, le desarmo el número, ahí se lo estoy modelizando

Entrevistador: Cuando estás desarmando un número estás modelizando

Mónica: Claro para que ellos se den cuenta que es eso, porque por ejemplo podría haber puesto monedas de a 10, después con ellas voy a modelizar cuando trabaje con las monedas, con fichas, pero en ese momento le estoy mostrando los números

Entrevistador: Y en el episodio anterior hay algún tipo de modelización, cuando estabas con el 42 y 24

Mónica : Claro les estaba mostrando, incluso bastaba que vieran cuantas veces puse 10, a lo mejor no sabían que era 20 ó 40, pero si acá puse 4 veces 10 y 2 veces 10 , éste va a ser más grande que el otro

Entrevistador: Y ahí se está viendo modelización, en qué forma

Mónica : Cuando estoy modelizando las decenas, eso está modelizando no las unidades, porque las unidades ellos las manejan, con las decenas es que tienen problemas ellos. Y ahora tenemos problemas con las centenas

Mónica no había mencionado la modelización hasta ahora, ella destaca que los alumnos no modelizan si no que es ella quien lo hace, asociando la modelización con la descomposición de números.

Mónica es capaz de valorar la descomposición canónica como un fundamento para las argumentaciones y también identificarla como un modelo para comparar los números, ello presenta evidencias para proponer que la modelización es un apoyo para la argumentación. Pero al decir que si bien los estudiantes argumentan utilizando la descomposición canónica, pero luego dice que ella es quien modeliza mediante el procedimiento utilizado. No es capaz de reconocer que los alumnos también modelizan cuando argumentan.

Mónica promueve la comunicación como el proceso de organizar el pensamiento matemático de los estudiantes, ello se manifiesta en que el propósito de la interacción es que ellos utilicen la descomposición canónica para comparación de números.

Respecto al tipo de análisis, Mónica si bien continúa focalizada en el pensamiento matemático de los alumnos al describir lo que ellos hacen para comparar números, también describe las acciones que realiza para promover el pensamiento de estos. En los episodios si bien no valora su práctica, la analiza en función de las competencias.

Una vez visto el último episodio que corresponde a una clase posterior en que se estudia las suma por descomposición aditiva en un ámbito de 0 a 1000. Se da el siguiente diálogo en relación a la percepción de Mónica sobre sus cambios en la práctica docente.

Entrevistador: ...tú ves que hay algún cambio tuyo y de los niños respecto a esa clase A que vimos y luego esa clase B

Mónica: Sí, veo que hay mayor participación de los niños en la clase B que en la clase A, donde era muy focalizado, en este caso es más grupal, veo que la pizarra la ocupan los niños no solamente yo, también la ocupan ellos, veo que los niños aplican lo que ya han aprendido, veo que los niños ya están haciendo lo que se les está pidiendo, no están esperando que el compañero le dé la respuesta

Entrevistador: Eso respecto de los niños y en tu actuar docente, hay algo que tú has hecho, hay algo intencionado, algún cambio tuyo respecto a antes que empezáramos los seminarios y que se pueda ver en esta clase y a un mes de haber hecho los seminarios crees que hay algún cambio tuyo concreto

Mónica: Sí el hecho de hacer participar más a los niños, claro porque uno tiene que estar reflexionando siempre, de qué está haciendo mal

Entrevistador: Tu antes no lo hacías participar tanto?

Mónica: No porque estaba tan obsesionada en que tenían que aprender en 10 meses lo que tenían que aprender en 20 meses que no lo hacía, pero ahora sí lo estoy haciendo, a lo mejor porque me estoy relajando porque en marzo abril junio julio, 4 meses aprendieron lo de primero y a lo mejor eso me tiene más relajada, porque ya sé que de aquí al 30 de noviembre los niños ya van a tener al menos los contenidos mínimos de segundo

Entrevistador: De los contenidos de primero poder promovérselo, enseñárselo en medio semestre, lo del segundo semestre, los contenidos de segundo básico puedas trabajarlos en segundo semestre

Mónica: Claro porque ellos ya saben leer, ya saben contar, ya saben aplicar, entonces ya puedo, puedo trabajar más, más... ya no tan estresada

Mónica reconoce que los estudiantes han cambiado en una mayor participación, la que se refiere en términos de responden a las demandas de la profesora y que son resolutores activos al utilizar la pizarra. Además reconoce cambios en ella misma al promover la participación en los términos que se ha descrito.

Mónica realiza una reflexión sobre sus concepciones de la enseñanza de la matemática, en relación a los cambios que ella dice haber tenido este tiempo. Cuando ella reconoce que ahora está más tranquila porque percibe que los alumnos aprenden, lo ejemplifica con saber leer, contar y aplicar, es decir en términos de competencias y no en contenidos como ella misma reconoce que antes lo hacía.

Si bien no es Mónica quien hace evidente esta diferencia de actitud suya en términos de contenidos y competencias, y por tanto no se puede asegurar que ella reconoce este cambio de concepciones frente a enseñar contenidos o promover competencias, la manera de cómo ha descrito su cambio se puede analizar en esos términos. Mónica al ser consciente de que promover competencias como argumentación, también está reconociendo que el propósito de una clase es promover competencias, lo que le hace tener una visión de evaluación de los aprendizajes de los estudiantes desde una

perspectiva que trasciende los contenidos. Ello puede explicar porque ahora siente en que no tiene que apresurarse en enseñar temas matemáticos uno tras otro.

Mónica continúa describiendo sus cambios, ahora en el contexto del seminario.

Entrevistador: Y con respecto al seminario que has participado tú sientes en alguna acción concreta que te hayan cambiado tu práctica docente

Mónica: Sí, sí porque ya yo no me voy al uso de una técnica, estoy que los niños utilicen distintas técnicas. Si tu recuerdas yo era la que más decía por qué les friegan tanto la paciencia a los cabros chicos ¿te acuerdas? Y yo alegaba y todo eso, en cambio ahora yo a los niños los estoy haciendo utilizar distintas técnicas

Mónica a mencionar *Sí, sí porque ya yo no me voy al uso de una técnica, estoy que los niños utilicen distintas técnicas*. Está entendiendo la técnica no solo como un procedimiento si no como un proceso al promover el uso de distintas técnicas. Asimismo, de manera implícita está promoviendo la competencia de cálculo.

A continuación se le hace una pregunta para que reflexione sobre sus clases actuales.

Entrevistador: Oye y respecto a este episodio B, si hubiéramos, esta clase B, si hubiéramos ahora una clase C ¿qué cosas habrían en esa clase C que no están ni en la B ni en la A, qué crees tú?

Mónica: Ya en este momento los niños estarían ya modelizando, utilizando los modelos, en la clase C que ya estamos utilizándolos. Habría un, ya no hay un reconocer la incógnita, en este momento, ya cuando estamos desarrollando los problemas estamos desarrollando como te dije paso a paso y que incluso la guía está corta para como están ellos desarrollando su problema (va con la mano haciendo una lista) queda corta, o sea, ellos pusieron esquemas cierto, operación, respuesta. Ahora como ellos están para que todos entiendan ya pongo datos, que no lo tenemos en la guía que hicimos, datos, después pregunta me vuelven a escribir la pregunta y qué estoy haciendo ahí? Matando dos pájaros de un tiro, reconocen signos de interrogación, estoy trabajando lenguaje y matemática, después operatoria, ya porque tiene que analizar los datos para que identifique qué paso, tenía perdió, tenía ganó, ya qué va a pasar, ya muéstrame qué pasó, muéstrame con el esquema, ya entonces cuando ya trabajo con el esquema qué operación tiene, lo que antes no hacía yo, antes los hacía pensar así no mas, ahora ya lo están viendo, ya lo están viendo el esquema, entonces me dice ya sumar, ya suma, ahora hazme el algoritmo o hacerme la operación les digo yo. Ahora respuesta ¿qué dice la pregunta? Y tanto ¿qué palabras tienes que usar para contestarme? Estas, ya empieza a contestar, respuestas completas no me puede decir 60 pesos, me tiene que poner Pedrito perdió 60 pesos, estoy trabajando lenguaje y matemática ¿ya? Y eso estamos haciendo.

En la intervención de Mónica en primer lugar hace alusión a que los alumnos estarían modelando mediante el uso de esquemas, para luego centrarse en el desarrollo de procedimientos, lenguaje y comprensión del problema; es decir, que en una misma clase puede promover varias competencias diferentes.

Por otra parte, en el análisis de un episodio anterior ella reconoce que los estudiantes no modelizan sino es ella quien lo hace, con este diálogo se evidencia que ella promueve la modelización en sus clase, al reconocer que actualmente modelizan utilizando esquemas.

Este tipo reflexión por parte de Mónica estaría en un nivel en que evalúa su gestión en el aula de matemáticas en términos de los elementos del modelo, es decir relacionando la organización matemática y las competencias.

La competencia de comunicación sigue en términos de que se promueve el proceso de organizar su pensamiento matemático

El tipo de análisis, se enfoca tanto en el pensamiento de los alumnos como en su propia práctica. Cuando responde frente al cambio valora sus prácticas en términos de un análisis competencial.

A modo general, Mónica analiza sus prácticas en términos de las competencias que ella misma declara proponer, argumentación y modelización, en particular en sus respuestas se puede evidenciar una conexión entre la argumentación y modelización en que los modelos permite fundamentar la argumentación.

La comunicación está asociada al proceso de organizar el pensamiento matemático. Lo que también se refleja en que asocia la participación con las respuestas de los estudiantes.

Finalmente el tipo de análisis en todo momento se centra en el pensamiento matemático de los alumnos, y en la medida que transcurre la entrevista y en particular cuando compara las clases, valora sus prácticas, describiendo que éstas han mejorado al incluir elementos competenciales.

Caso Sonia

La entrevista del tercer caso utiliza una pauta con algunas diferencias a las pautas anteriores, pero mantiene preguntas sobre las dificultades y comparación de clases. A Sonia se le presentó un episodio del cierre de una clase grabada previamente a la realización del seminario, para luego presentar un episodio extenso (aproximadamente 8 minutos) que recoge varios fragmentos de una clase posterior realizada durante el seminario, para que compare sus propias prácticas entre las dos clases.

Preguntas para el caso de Sonia

1) Episodio 1

¿Cómo es el cierre de la clase?

¿Los niños presentaron dificultades en el cierre de clase?

¿Tuviste dificultades en el cierre? ¿cómo te hiciste cargo de esas dificultades?

Actualmente cambiarías elementos de la gestión del cierre o te pareció adecuado?

2) Episodio 2

¿Cuál es el propósito de la clase?

En comparación a los episodios de la clase anterior, ¿observas cambios en tu actuar como docente? Dime algunos ejemplos.

La primera clase de Sonia tiene como propósito estudiar el sistema posicional de los números , y en particular orden y comparación entre números y colecciones. A continuación se presenta un episodio en que Sandra describe el cierre de la clase.

Entrevistador: Entonces aquí estamos cerrando, estamos haciendo un poco como una sistematización un poco de la clase ¿cómo viste ese cierre? No sé si te recuerdas de esa clase un poco ¿cómo viste ese cierre? El desempeño de los niños

Sonia: Bueno con primer año me he dado cuenta que es muy difícil cerrar una clase porque como que son, son 90 minutos los niños chicos tienen poco tiempo de atención, entonces ya el cierre de la clase como que están agotados no ponen mucha atención, por ejemplo aquí (señalando el video) se nota hartito hay bastante desorden más encima que estamos empezando el año escolar, ahora ya no, se han ordenado un poco y ya no, digamos que tienen más atención o están más acostumbrados al trabajo, ya ahí me costaba mucho el orden, mantener la atención de los chiquillos, llevar la secuencia de todo, ahora están como más parejitos en cuanto a dominio de contenidos

Entrevistador: Se portan mejor entre comillas

Sonia: Sí, pero por ejemplo el mismo chiquitito ahí que hablaba de “ay su guagüita, su guagüita” él va más, él va rezagado, sí, y además que tengo un niño integrado, tengo otro que no va nunca, tengo más de dos meses de inasistencia, no sé si sumo al paro, pero en concreto de 9 alumnos tengo 6 que van como adelante y ya, pero por ejemplo el orden, ahora si ya es posible cerrar una clase, pero todavía cuesta

En la descripción que realiza Sandra del cierre utiliza criterios orientados al clima de clase (atención de los estudiantes, desorden) y de condiciones de gestión escolar (alumno integrado), en cambio no describe el cierre en términos de los objetivos de enseñanza y aprendizaje de la clase, es decir utilizando criterios didácticos.

En la siguiente pregunta sobre las dificultades Sonia utiliza criterios didácticos para referirse a la dificultades de los alumnos.

Entrevistador: ¿Y tú tuviste una dificultad ahí? Ahora mirándote a ti en ese cierre

Sonia: Es que ya ni me acuerdo, pero sí

Entrevistador: pero mirando lo que estaba ahí, crees que se puede detectar así

Sonia: Bueno, pienso yo que si cuesta llevar a lo que yo quiero, me costaba que ellos vieran, yo pretendía ordenar números cierto, y en ese momento era ordenar de menor a mayor, les costó. Primero ahí hay un chico...que todavía tiene problemas de numeración, confunde muchos números... les pedí una huincha larga de cartón que hicieron las mamás que llegara hasta el 100 que ese es el ámbito que tengo que trabajar en este semestre, pero ese día trabajamos hasta el 60 no más y no, no él le cuesta, le cuesta mucho, sí le cuesta bastante. Entonces ahí que estamos recién empezando no, además que el rango que hay del 11 al 15 es como más complicado que cualquier otro, sí porque no tiene similitud con el número con el cual se va formando 12 de dónde lo van a sacar a qué (se toca la cabeza) a la palabra, el 13 puede ser porque viene del 3, pero el 14, 1 por ejemplo, 11. En cambio el 10 y 6, claro porque ahí saben al tiro, yo les digo 17 cuando empezamos 10 y 7 qué número tienen aquí ya, entonces ahí yo elegí precisamente porque estábamos trabajando hasta el 20, se supone que ellos llegan con los conocimientos.

Sonia al referirse a las dificultades de los estudiantes, lo hace mediante un caso concreto y ejemplos de limitaciones en el aprendizaje de los números. Esto refleja que al situar a Sonia en un contexto específico, en este caso de dificultades, utiliza unos criterios didácticos para su descripción.

El segundo episodio corresponde a una clase en que Sonia introduce los esquemas a los estudiantes por medio de un problema de comparación. Este episodio también fue analizado como caso clínico en la cuarta sesión del seminario. A Sandra cuando se le presenta el episodio tiene la percepción de que fue una clase horrible puesto que los alumnos no lograron resolver el problema planteado.

En la siguiente viñeta de la entrevista, se evidencian los criterios que utiliza Sonia para explicar las dificultades presentes en la clase

Sonia: Esa ha sido una de las clases más frustrantes que he tenido en mi vida

Entrevistador: Pero puedes contarme lo que sentiste a ver

Sonia: Primero porque después, analizando el problema no era el adecuado

Entrevistador: Ya y a qué se refiere con que no era el adecuado

Sonia: No era para primer año

Entrevistador: ¿Y esto por qué?

Sonia: Porque no era un problema directo, no sé, no sé, pero el asunto es que ahí ellos tenían que analizar mucho y como problema para segundo año, después yo lo planteé aquí en clase, se lo planteé a un profesor que venía de repente me decía que no, que no era adecuado. Entonces yo sentí, yo me sentí frustrada y sentí que no logré nada con los niños más que aburrirlos, más que desesperarlos a lo mejor tal como estaba yo porque de ahí que no íbamos a ninguna parte y hay harto desorden también, hay harta inquietud, yo creo que se quedaron sentados no más porque estaba la cámara, pero a la hora que es otro momento se ponen a jugar, a correr porque nunca entendieron el problema y yo ni por más que luchaba, al final salió pero salió como así por cansancio más que por comprensión.

...

Entrevistador: pero entonces si fue frustrante qué lograste aprender de esa clase

Sonia: yo, bueno primera cosa que yo tendría que haber visto el problema y si era adecuado para mis alumnos si realmente, yo proyectarme a sus cabecitas y a ver si era pertinente a la edad, al periodo del año que estábamos recién empezando, todo eso

Entrevistador: y qué otro criterio aparte de la edad y del periodo escolar hubieras tenido que fijarte así como una lista de la compra, esto lo tengo listo, esto lo tengo listo qué otra cosa pondrías en esa lista, para fijar tú me dices hay que fijarse en el problema

Sonia: a lo mejor haberlo hecho con material concreto primero, es que a lo mejor mi problema fue responder en el seminario más que ver el aprendizaje en sí para mis alumnos, porque ahí a lo mejor me fui muy a los leones tirándoles a mis chiquillos un problema complejo para su edad

Entrevistador: y no te diste cuenta que el problema era así antes de plantearlo

Sonia: no, cuando yo lo hice, lo digité yo no me cuestioné que podía ser tan complicado para ellos, sólo lo vi cuando ya estaba en la clase

Sonia reconoce que la dificultad de los estudiantes radica en la complejidad. Los problemas de comparación del tipo “más que” en que la operación que resuelve el problema es una resta, no son adecuados para introducir esquemas. En otro momento de la entrevista alude a unos criterios generales, edad, año escolar, para explicar la dificultad, pero luego apunta a condiciones de realización de problema como utilizar un material concreto.

Este análisis es del tipo interpretativo en que Sonia identifica causas para explicar la dificultad que tuvieron los alumnos, asociadas al tipo de problema y condiciones de realización.

Si bien Sonia reconoce el fracaso de la gestión de la actividad, también reconoce aspectos positivos en su gestión.

Entrevistador: Y en estas clases cuando tú vas haciendo estas preguntas, te responden los niños a todas las preguntas?

Sonia: Los chicos tiene una ventaja, que todos quieren participar y se enojan, se nota ahí ve usted, se enoja porque yo no los dejo a todos, responden no siempre acertadamente, pero por ejemplo cuando yo los tengo, a César que es mi niño integrado él levanta la mano al tiro “Yo, yo sé, yo sé!” y dice una cantidad de cosas, pero yo lo escucho hay que tener el tiempo para escucharlo, porque como me explicaba el fonoaudiólogo no es que sea tartamudo, la orden de su cerebro tarda en llegar al lenguaje, hay que darle el tiempo, pero él participa y todos dan respuesta, no siempre las correctas, pero sí intentan hacerlo

Entrevistador: Y tú les preguntas por qué dan esas respuestas

Sonia: No siempre

Entrevistador: Y tú crees que eso sería pertinente en las clases siempre o no es pertinente, tú qué piensas de eso

Sonia: Cuando yo pienso que la respuesta es tan obvia no es necesario, pero me doy cuenta después de lo que me dijo usted que había que preguntar también en los aciertos y analizando esa sugerencia yo pienso que sí, en la clase que vimos recién yo sí les pregunto mucho a los niños cómo, les pregunto cómo lo hiciste, de dónde lo sacaste y el otro chico que si logró el resultado le pregunté y me lo demostró con la cinta numerada

Entrevistador: Si te fijas en esta case que tú has dicho es muy importante ,porque muchas veces les preguntamos, en tu intento por obtener la respuesta, les ibas preguntando cómo hacen, cada una de las cosas que iban logrando tratar de preguntar cómo lo hiciste, expresar lo que había pensado, pero i te recuerdas del cierre de la clase anterior tú, te daban la respuesta correcta y ya estaba

Sonia: Sí, lo noté es que eso es lo que le dije yo de que cuando pienso que es muy obvia, como que yo dije que es muy obvio por eso que le decía yo las respuestas que es como muy obvia nunca me había, nunca había pensado yo en preguntarles cómo, encontraba que era como tan obvio que para qué preguntar

En el diálogo con el entrevistador, Sonia es capaz de reconocer que sus preguntas a los estudiantes promueven la argumentación de los procedimientos correctos e incorrectos, lo

que representa un avance al episodio de la clase anterior en que se enfoca en las respuestas correctas y no en argumentar en los procedimientos que realizaron para obtener dicha respuesta.

Este tipo de análisis al focalizarse en promover la argumentación, apunta al desarrollo de competencias matemáticas. En este sentido, si bien Sonia no gestionó adecuadamente las condiciones de realización del problema, sí gestionó de mejor manera el tipo de preguntas para el desarrollo de la argumentación de los estudiantes.

Por otra lado, el problema puesto a los alumnos puede entenderse como un obstáculo positivo para ellos dado que al tener dificultades para poder identificar la operación, el problema invita a que expresen los procesos de razonamiento para enfrentar el problema.

Entrevistador: Entonces infiero que, el cuestionar se debe a que hay un obstáculo

Sonia: Sí.

Entrevistador: O sea que cuando hay obstáculo es un buen momento para cuestionar, qué se gana preguntando cuando hay obstáculo, qué es lo que se termina ganando

Sonia: Que el niño justifique argumente su respuesta y también darle a entender por ejemplo con Mauricio si, como decía antes, si yo no lo hago explicar él piensa que su respuesta está buena debido a cómo lo hizo, el procedimiento que utilizó y es equivocado, entonces si yo asumo, asumo que la respuesta de él es correcta y no la cuestiono el niño queda con un error, pero a lo mejor puede que con él eso me haya pasado en otras clases las respuestas han sido las correctas y no las he cuestionado

Entrevistador: Claro, eso o lo sabemos, no lo sabemos si pasó o no. Bueno te fijas que aquí hay, para ir cerrando, hay varias cosas que han ido pasando, tú sientes que has ido así de forma general tu forma de hacer tu gestión

Sonia: Sí

Entrevistador: Independiente si está intencionado desde el seminario o de una clase común y corriente

Sonia: Sí de hecho yo ahora después de que supe eso de la argumentación yo procuro, y no solamente en matemáticas, sino que en cualquier cosa, que los niños argumenten y yo siempre digo que yo trabajo en el paraíso en muchos aspectos, primero por como son los niños, niños rurales son muy dulces, muy respetuosos, uno que otro se escapa y la cantidad de alumnos imagínese yo tengo 9 alumnos

Sonia describe que el obstáculo que presenta el problema es un buen incentivo para que justifiquen sus respuestas, reconociendo que a partir del seminario y no en clases anteriores comenzó a promover la argumentación de los alumnos tanto en los resultados correctos como incorrectos.

Desde el punto de vista global, Sonia analiza sus prácticas en términos de la organización matemática y las competencias. La organización matemática se ve reflejada en el análisis del tipo de problema y condiciones de realización; y las competencias en el tipo de preguntas que realiza los estudiantes para promover la argumentación

El tipo de análisis en la mayor parte es descriptivo, en algunos momentos es interpretativo al explicar las causas en la gestión del problema. Asimismo, mayormente se centra en aspectos más didácticos que pedagógicos al analizar los episodios.

Segunda Entrevista

La estrategia en la realización de la segunda entrevista para cada caso es ver episodios de las clases en que implementó la secuencia didáctica y se le realizan preguntas en relación a lo sucedido en el episodio. La última pregunta tiene la intención de que la profesora compare si percibe cambios en sus prácticas al contrastar las dos clases. Para ello queda abierta la posibilidad de mostrar un episodio de la primera clase grabada antes del seminario.

Para analizar las respuestas de los casos, se utilizan dos cuerpos de categorías: ya utilizada anteriormente de Van Es y Sherin (2010) para estudiar el tipo de análisis. Y además se han adaptado los niveles de reflexión del grupo focal en cuanto a la apropiación del MCM, identificando de qué manera utilizan elementos de modelo y su grado de articulación cuando analizan un episodio de su clase.

Esta última entrevista se realiza con el propósito de analizar el cambio en las profesoras, comparando sus intervenciones con otras instancias de reflexión. Este análisis se realiza en el siguiente capítulo dedicado al cambio. A continuación se realiza el análisis solamente del caso Valentina para tener como ejemplo de análisis de entrevista.

Caso Valentina

1) Episodio 1.

¿Los dificultades presentaron dificultades? Que acciones realizaste para hacerte cargo de las dificultades?

2) Episodio 2

¿Por qué crees que se produjo el error $9 + 1 = 91$?

¿Qué acciones realizaste para hacerte cargo del error?

3) Episodio 3.

¿Qué estas promoviendo con la gestión del error en este episodio?

4) Episodio 4

¿Qué aspectos contempló el cierre de la clase?

¿Qué competencias promueves en el cierre?

6) Cuestión final

¿ Al finalizar la secuencia didáctica, puede decir si los niños lograron aprender el trasvasije.?

Si piensas que no, ¿en cuántas clases más se puede aprender? ¿ el trasvasije se puede aprender a corto o largo plazo?

¿En comparación a los episodios de la clase anterior, observas cambios en tu actuar como docente?, Dime algunos ejemplos.

Los episodios 1 y 2 indagan sobre el tipo de análisis que realiza Valentina sobre la gestión de las dificultades y errores. Valentina comenta que gestiona las dificultades en el grupo curso y que en algunas ocasiones le solicita a un estudiante que comente el error de un compañero. El siguiente extracto de la entrevista se observa su apreciación sobre la gestión del error una vez visto el primer episodio.

Entrevistador: tú cómo concibes el error de un niño, qué haces con ese error

Valentina: La idea, como ellos son chiquititos, la idea es que ellos se den cuenta de que ellos lo podrían haber hecho de otra forma y que a lo mejor es más efectivo de como ellos habían pensado, de esa forma me enfoco en lo que está equivocado el niño

Entrevistador: Ya, pero cuando te enfocas en eso le preguntas directamente a él

Valentina: A veces le pregunto a él a veces trato de preguntarle al resto del curso, que ellos nos ayuden para poder determinar cómo, qué pasó con el resultado que no es, por ejemplo hay un número que no corresponde, qué puede haber pasado con él

Entrevistador: Y por qué le preguntas a otro alumno del curso por el error de un alumno

Valentina: Cuando el niño se puede comunicar bien a veces él se da cuenta, después de haber escuchado tantos resultados diferentes, se da cuenta de que parece que me equivoqué, pero cuando hay algunos que les cuesta, que son más tímidos, que no pueden, entonces yo le pido ayuda al resto como para que entre todos encontremos qué le pasó a él, en dónde se equivocó

Entrevistador: Y por qué le pides ayuda al resto, ya me dijiste que cuando él no se da cuenta, cierto, pero esa es la única razón de por qué le pides ayuda al resto

Valentina: Y para que sea más significativo su aprendizaje, que aprenda de su error y que el resto se dé cuenta también de qué puede haber pasado con él

Entrevistador: Y por qué le das importancia que el resto se de cuenta del error del niño

Entrevistador: Para que ello tengan, a ver, para que ellos visualicen que se pueden equivocar y tiene que tratar de buscar la forma mejor de resolverla, la que más se ajuste al minuto que uno le presenta ahí el ejercicio

Ante la pregunta de por qué le pide a otros estudiantes que comenten el error de un compañero, Valentina primero alude a una razón más bien de índole de gestión pedagógica y de clima de clase, al referirse a que hay alumnos más tímidos que les cuesta expresarse y por ello es necesario que intervengan compañeros para ayudarlo. Pero cuando se le pregunta por otra razón, con el comentario "...para que sea más significativo su aprendizaje, que aprenda de su error y que el resto se dé cuenta también de qué puede haber pasado con él", Valentina se refiere a tres ideas importantes: asociar aprendizaje significativo con visualizar el error; que el estudiante sea capaz de aprender de su error; y socializar el error con sus compañeros. Estas ideas utilizan criterios didácticos para explicar las causas de gestionar el error con el grupo curso.

El segundo episodio trata de la gestión de un error en que un estudiante confunde 9 +1 con 91. Valentina hace un espacio en clase para tratar este error escribiendo en la pizarra 9+1, 90+1 y diferenciar entre unidad y decena. El siguiente extracto de la

entrevista tiene relación en qué Valentina reconoce que promueve la competencia de argumentación cuando gestiona ese error.

Entrevistador: Vuelvo a preguntarte una pregunta que dije anteriormente, además de estar gestionando el error, cierto, estás trabajando el contenido de decena, unidades, tú sientes que estás promoviendo algo más

Valentina: Yo creo que sí, la argumentación, promuevo en ellos siempre la argumentación para que se den cuenta y expliquen al resto cómo lo hicieron y lo demuestren, a lo mejor hay alumnos que todavía no saben cómo hacerlo y a través de la explicación del compañero va a poder internalizarlo mejor para después

Entrevistador: Tú sientes que a lo mejor hay unas preguntas claves que tú realizaste aquí

Valentina: Al ejemplificar el 0+1 ya había confusión, entonces por eso le puse el 90+1, porque como había surgido que 90+1 era 91, por eso les puse el 90+1, para que ellos vean la diferencia y descubran si es igual o no es igual, por eso no les puse otro número como era 0+1, entonces les puse 90+1

En esta viñeta se pueden apreciar dos cuestiones sobre la gestión del error. Por un lado, Valentina reconoce que promueve la argumentación cuando los alumnos explican cómo lo hicieron y eso servirá a los que aun tienen dificultades. Además, aprovecha el error de 9+1 igual a 91 para estudiar las diferencias entre unidades y decenas. Con esta explicación Valentina articula el estudio del sistema posicional de los números, con la competencia de argumentación. Más aun Valentina logra articular estas dos ideas para gestionar el error de los niños, lo que representa relaciones sustanciales entre los componentes del MCM. El cuarto episodio corresponde al cierre de la última clase. En la pregunta de qué aspectos contempló el cierre se pretende indagar hasta qué punto Valentina es capaz de reconocer las tareas matemáticas y las competencias que promueve en el cierre.

Entrevistador: Qué aspectos contempló el cierre aquí

Valentina: En ese cierre fue que ellos se dieran cuenta de la técnica que estábamos trabajando, que antes utilizábamos otras técnicas que esta era una nueva técnica y que la idea de esta nueva técnica es que nos facilite el cálculo que estábamos haciendo, porque antes contábamos con cinta, con otros objetos y ahora teníamos la nueva técnica que nos iba a ayudar y que ellos se dieran cuenta que era más eficiente esta técnica para determinados casos, cuando tenemos que terminan en 8 agrego 2, cuando terminan en 9 agrego 1 para formar la decena, eso más que nada se enfocó el cierre

Entrevistador: Y qué competencias crees tú, bueno hay competencias que están promoviendo en este cierre o no

Valentina: Podría ser, yo hice una síntesis de lo que habíamos trabajado en la clase y que argumentaran ellos, a ver no sé si que me explicaran, porque les pregunté si era más efectiva esta técnica que la otra, no me recuerdo si les pregunté por qué en realidad

Entrevistador: Bueno pero si fuera el por qué, si preguntaras el por qué tú estabas asociando que

Valentina: Que estoy promoviendo la argumentación porque me van a explicar por qué

Entrevistador: cuándo tú estás promoviendo la argumentación, qué tipo de preguntas

haces

Valentina: Les consultaría o les consulté, no sé, si acaso era eficaz la técnica que estábamos aprendiendo y por qué. Entonces yo les tendría que haber preguntado, no sé si lo hice, por qué era más eficaz, por qué nos servía más en ese minuto para ese tipo de ejercicio, por eso me parece que les hice que si venía otro número y no tenía más deditos, entonces como ,para que se dieran cuenta de que esta técnica nos ayuda, que no siempre voy a tener los palitos, los lápices, los deditos o la cinta

Entrevistador: Tú recuerdas qué competencias planificaste para el trasvasije

Valentina: Instaurar la técnica, que aprendieran la técnica, promover también que ellos me argumenten también estaba como

Entrevistador: Entonces por un lado tienes que te promuevan la técnica y que te argumenten, ¿esas son competencias, son dos competencias?

Valentina: Sí

Entrevistador: Una dedicada a la argumentación

Valentina: Y otra dedicada a que ellos puedan aplicar, internalizar la técnica y aplicar

Entrevistador: Internalizarla y aplicarla, o sea, ligada a cálculo, podríamos decir que es eso no?

Valentina: Si

En una primera instancia, Valentina dice que el cierre hace referencia a la técnica de trasvasije y contrasta con otras técnicas, aludiendo a aspectos de contenidos. Pero cuando se le pregunta por las competencias, ella, además de reconocer la argumentación como competencia que promueve a lo largo de la unidad, también se refiere a la técnica de trasvasije, reconociendo al cálculo como una competencia. Con ello Valentina al interpretar la técnica de trasvasije no sólo como un procedimiento que es parte de un contenido, sino también como una competencia, es capaz de entender la capacidad de calcular tanto como una tarea matemática que se trabaja mediante técnicas específicas y como una competencia que se trabaja a largo plazo en que las diferentes técnicas representan contextos para el desarrollo del cálculo.

En el contexto de las preguntas finales, ante la pregunta de si los estudiantes aprendieron trasvasije Valentina responde que varios no lo aprendieron al finalizar la unidad, pero como continuó promoviendo la técnica de trasvasije los que faltaban fueron aprendiéndola, pero aun así, los alumnos con dificultad de aprendizaje no lo han aprendido. En la siguiente viñeta de la entrevista, Valentina responde como gestionar las dificultades de aprendizaje con estos estudiantes.

Entrevistador: y estos niños, estos 3, 4 niños cómo crees tú, qué trabajo hay que hacer con ellos para trabajar el cálculo

Valentina: Hay que seguir reforzando lo de la numeración, las decenas porque tiene claro cómo, si yo digo cómo está formado el 45, con el 40 y el 5, pero de repente ellos, yo un día estuve trabajando con 2, como que, lo saben me lo dice pero después al otro rato lo cambio les pregunto otro número como que 4 y 5 a ver 4 y 5, pero mira cuánto me da aquí 4 y 5 es 9, entonces como que después ah, no, como que todavía no lo tienen bien

Entrevistador: Entonces hay un tema también con el ámbito numérico

Valentina: Sí

Entrevistador: Un ámbito numérico pequeño se manejan mejor que

Valentina: Si fuera más grande el ámbito

Valentina explica que en un ámbito pequeño estos alumnos pueden desarrollar las técnicas en cambio en ámbitos más grandes se les dificulta. Este tipo de análisis se centra en la gestión didáctica de las dificultades utilizando como criterio las condiciones de realización de la tarea.

Posteriormente, se le pregunta a Valentina por los cambios que ha tenido en su práctica docente. En la siguiente viñeta de la entrevista Valentina describe algunos de los cambios que ha tenido.

Entrevistador: Tú percibes que tienes un precio sobre tu actuar, ahora en tus ideas sobre lo que es la enseñanza de la matemática, tú podrías diferenciar que tú antes decías que había que enseñar matemáticas y lo que dices ahora

Valentina: Si porque antes estaba siempre con el algoritmo tradicional, entonces lo hacíamos más que nada así, con el algoritmo tradicional no mucha descomposición no, pero ahora de otra forma yo todavía o les enseño el algoritmo tradicional a los niños

Entrevistador: A partir de este video y el que vimos tú sientes que comparando tus clases digamos, comparando las clases de la implementación con las anteriores, de esta con las anteriores, en qué cosas tu observas en tu actuar docente que has modificado, que por ejemplo

Valentina: Yo por ejemplo he modificado con esto de todos los talleres que trabajamos, he modificado yo diría que más de un 60% de lo que hago yo ahora en matemáticas, porque me he atrevido a otras cosas, por ejemplo yo nunca había, había tenido primero, pero nunca me había atrevido a instaurar la técnica del trasvasije, había trabajado con la cinta numerada, pero no con tanto énfasis como lo he hecho ahora, con el sobreconteo, he hecho cosas como un poco diferentes a otros cursos, otros primeros que yo tenía y lo que no promovía antes tampoco mucho, pero sí en otras actividades más que nada, pero en matemáticas que ellos me argumentaran, que ellos pasaran adelante y me argumenten, que yo lo hice así, y está bien como lo hiciste, sería mejor si tú lo haces de la otra forma, entonces eso lo he incorporado ya definitivamente

Entrevistador: y el hecho de que pasen niños a la pizarra, lo resuelvan y luego se sientan, eso lo hacías antes?

Valentina: Sí los pasaba a la pizarra, pero no a lo mejor con, ya resolvía un ejercicio no está ya anda a sentarte, venga otro, no así que para que ellos se den cuenta de dónde está el error, por qué me equivoqué, conté mal a lo mejor me salté un número

Entrevistador: La parte de gestión del error me estás diciendo que antes no le dabas tanto tiempo

Valentina: No le daba tanto tiempo, sí pasaban por ejemplo si ya te equivocaste, por qué te equivocaste, ya me decían, ya no sé, ya pase otro. Entonces yo aquí trato de poner si al niño le costó ya que me cuenten por ejemplo pasan adelante con la cinta numerada, ya cuéntame, a ver de dónde te equivocaste por qué crees que te equivocaste, ah, porque me salté un número, entonces para que él se de cuenta, pero antes trataba de hacerlo todo de forma general ,pero no dedicarle más tiempo al niño que en realidad tenía el problema

Entrevistador: Tú percibes que tienes un precio sobre tu actuar, ahora en tus ideas sobre lo que es la enseñanza de la matemática, tú podrías diferenciar que tú antes decías que había que enseñar matemáticas y lo que dices ahora

Si porque antes estaba siempre con el algoritmo tradicional, entonces lo hacíamos más que nada así, con el algoritmo tradicional no mucha descomposición no, pero ahora de

otra forma yo todavía o les enseño el algoritmo tradicional a los niños

...

Entrevistador: quieres hacer un comentario más sobre algún otro aspecto que sientes que has cambiado en tu práctica

Valentina: No, que ha sido importante para mí sí esto en matemáticas, sí yo considero que sí, porque de repente me pongo a pensar que yo antes, yo tenía el otro 1º y yo había hecho algoritmo tradicional, entonces era como todo bien mecánico, en cambio acá he ido promoviendo más la argumentación y ahí me puedo dar cuenta que yo lo expliqué de otra forma a lo mejor él no me lo percibió de esa forma y tratando de esa forma ir ayudándolo. Pienso que eso me ha ayudado bastante

Entrevistador: Y tú percibes que los niños aprenden

Valentina: Si aprenden, si aprenden mejor y tiene más herramientas como para ellos trabajar

Valentina plantea que ha cambiado muchos aspectos de su práctica que lo podemos caracterizar en tres aspectos: primer lugar el uso de técnicas, tal como el trasvasije e incentivar más la descomposición aditiva en detrimento del algoritmo tradicional. En segundo lugar el mayor tiempo de dedicación a los alumnos para gestionar las dificultades y error. Y en tercer lugar, y tal como se observa en los últimos comentarios, el cambio más significativo para Valentina ha sido es promover más argumentación en los estudiantes. Los cambios que explica Valentina se asocian a varios componentes del Modelo de Competencia Matemática, técnicas, y competencias, y en como ella reflexiona sobre la gestión del error se evidencia como ella es capaz de articular estos componentes.

5.3. Evaluación MTD: apropiación MCM : Desempeño

El desempeño en las prácticas pedagógicas de los profesores en el aula viene determinado por dos dimensiones: preparación y gestión de la enseñanza. Éstas fueron los criterios fundamentales para medir esta variable y su impacto en el grado de apropiación del MCM. Para cada una de estas dimensiones, se consideraron las siguientes estrategias, con las especificaciones que fueron pertinentes incorporar a lo largo del análisis.

5.3.1.Preparación de la enseñanza

En esta dimensión fueron analizadas las formas de planificar clases de las docentes considerando un grupo de indicadores que permitiesen contrastar cómo planificaba antes de la implementación de la secuencia didáctica diseñada por ellas y cómo evolucionaron sus planificaciones después de la misma. El análisis considera los siguientes cuatro aspectos, aunque el análisis se focaliza en los últimos tres. A saber:

- Coherencia entre las actividades de la clase y el propósito de la clase. Se analiza la inclusión de los conocimientos previos pertinentes al propósito declarado y además cómo se diseña su activación en el momento de inicio de la clase. Además se analiza si las actividades planteadas en la planificación para los distintos momentos de la clase contribuyen al propósito de la clase.

- Momentos didácticos del proceso de estudio. Apoyados en los momentos didácticos enmarcados en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999), este grupo de indicadores permitió evidenciar si las docentes estaban intencionando o no, o bien en qué grado, cada uno de los momentos de una clase, y por ende el objetivo de las actividades diseñadas.
- Procesos constituyentes de competencias. Apoyados en los procesos competenciales definidos en el proyecto FONIDE DED0760 y los propuestos en las perspectivas teóricas que sustentan este estudio, estos indicadores permitieron detectar si las docentes intencionan los procesos que permitirían desarrollar competencias en los estudiantes, específicamente las intencionadas en este estudio: modelización y argumentación.
- Gestión del error: Se analizó la gestión de error y de las dificultades por parte de las profesoras en términos de si La profesora gestiona los errores o dificultades de los alumnos haciendo preguntas que permitan problematizar el error o dificultad.

Para lo anterior se dispuso de las planificaciones de clase realizadas por las docentes antes de empezar la implementación (P-PRE), las que fueron solicitadas al momento de quedar seleccionadas para participar en esta investigación. También se dispuso de las planificaciones diseñadas por las docentes para implementar clases bajo los lineamientos de la MCM realizadas después de los Seminarios de trabajo en el marco de esta investigación (P-POST).

La metodología de análisis consideró las siguientes etapas:

1. Construcción de Pauta de Observación tipo Likert, considerando la construcción de un conjunto de indicadores que permitiesen medir la evolución de los docentes en los focos señalados anteriormente.
2. Análisis de las P-PRE con la Pauta de Observación diseñada.
3. Análisis de las P-POST con la Pauta de Observación diseñada.
4. Análisis comparativo de las P-PRE y P-POST

Coherencia entre las actividades de la clase y el propósito de la clase

Caso: SONIA

En las P-PRE no consideró el trabajo con los conocimientos previos, sin embargo en las P-POST incluye el trabajo con los conocimientos previos pertinentes al objetivo de la clase, los cuales son activados mediante una actividad que también contribuye al propósito de la clase. En las P-POST tiene logrado en cada uno de los indicadores asociados a esta categoría. Además la secuencia de actividades presentadas en P-POST son coherentes con el propósito de la clase y contribuye a lograrlo, aspecto que en las P-PRE no se observaba. Por lo tanto podemos observar que esta docente avanzó positivamente en este aspecto.

Caso: VALENTINA

En las P-PRE no consideró el trabajo con los conocimientos previos. Sin embargo en las P-POST sí incluye el trabajo con los conocimientos previos y además sólo aquellos

pertinentes al objetivo de la clase, los cuales son activados mediante una actividad que también contribuye al propósito de la clase. En las planificaciones P-POST tiene logrado en cada uno de los indicadores asociados a esta categoría. Además la secuencia de actividades presentadas en P-POST son coherentes con el propósito de la clase y contribuye a lograrlo, aspecto que en las planificaciones P-PRE no se observaba. Por lo tanto podemos observar que esta docente avanzó positivamente en este aspecto.

Caso: MÓNICA

Tanto en las P-PRE como en las P-POST no se consideró el trabajo con los conocimientos previos ni tampoco una actividad que los activara. y en las P-POST tampoco lo hace. Por lo tanto esta profesora no consideró los conocimientos previos en la planificación de sus clases.

Tanto en las P-PRE como en las P-POST se elaboraron actividades que contribuían al logro del propósito de la clase, es así como las actividades presentadas en P-PRE (3 de 4 clases) contribuían parcialmente al logro del propósito de la clase lo cual mejoró en las planificaciones P-POST, pues 4 de 4 tiene el indicador Pco3 logrado. Por lo tanto podemos observar que esta docente avanzó positivamente en este aspecto.

Podemos concluir que los tres casos, al final de la implementación de la MCM consideraban los conocimientos previos pertinentes en sus planificaciones y diseñan su activación mediante una actividad o situación problemática y no diciendo “qué hicimos la clase pasada” o contando una historia de lo que harán en la clase. Otro aspecto importante que se vio en las P-POST de los docente –y que no estaba presente en las P-PRE- fue que las actividades diseñadas son coherentes con el logro del propósito de la clase.

Momentos didácticos del procesos de estudio

Caso: SONIA

- *Momento de Inicio*

En el momento de inicio de las P-PRE logra parcialmente en 2 de 3 planificaciones, el indicador (Pmc1) referido a incluir una situación problemática que incorpore el nuevo conocimiento matemático que se quiere instalar con los alumnos, para que emanen las primeras estrategias para abordarlo, quizás poco eficientes, pero que después en el desarrollo de la clase irán evolucionando. En las P-POST lo logra en todas sus planificaciones. (+) Por lo tanto si bien antes tenía previstas situaciones problemáticas, podemos observar que esta docente avanzó positivamente en considerar situaciones problemáticas en el diseño del momento de inicio de una clase.

En las P-PRE no incorpora explícitamente dejar un tiempo adecuado para que los estudiantes socialicen sus argumentaciones o producciones matemáticas, es decir, en la redacción de la P-PRE no hay una mención como la siguiente “de un tiempo para que los alumnos comuniquen sus procedimientos entre sus pares antes de revisar la pregunta”. En las P-POST tiene logrado o parcialmente logrado el indicador respectivo (Pmc2) en 2 de 3 planificaciones. Por lo tanto podemos observar un avance positivo, pero en desarrollo, respecto de dejar explícito en las planificaciones que los alumnos

tengan tiempo para socializar sus respuestas y cómo se gestionan esos tiempos de acuerdo a las posibles respuestas de sus alumnos y alumnas.

- **Momento de Desarrollo**

En las P-PRE no contempla explícitamente en el momento de desarrollo una gestión para que los alumnos intervengan significativamente en la actividad matemática, mediante el estudio de situaciones problemáticas y elaboración de preguntas que hicieran que los alumnos y alumnas plantearan sus procedimientos, los justificaran, los relacionaran con otros aportados por sus pares y elaboraran nuevas preguntas. Sin embargo en las P-POST, Sonia incorporó estos aspectos logrando parcialmente el indicador asociado (Pmc3) en 4 de las 4 P-POST. Por lo tanto podemos observar que está docente avanzó positivamente en considerar las situaciones problemáticas en el diseño del momento de inicio de una clase.

En las P-PRE no se observa una preocupación para que las actividades diseñadas para los estudiantes provoquen una evolución en las estrategias o técnicas utilizadas por los alumnos. En las P-POST la profesora planificó considerando este aspecto pues se observa que las actividades permiten esta evolución. De hecho el indicador asociado (Pmc4) fue logrado en 4 de las 4 P-POST. Por lo tanto podemos observar que está docente avanzó positivamente en considerar actividades que provoquen una evolución de las técnicas.

En las P-PRE no se observa la socialización de los procedimientos, estrategias o ideas producidas por los estudiantes cuando realiza las actividades planificadas. En las P-POST la profesora planificó considerando este aspecto pues se observa que las actividades permiten esta socialización. De hecho el indicador asociado (Pmc5) fue logrado en 3 de las 4 P-POST. Por lo tanto podemos observar que esta docente avanzó positivamente en considerar en la planificación la socialización de los procedimientos, estrategias o ideas producidas por los estudiantes cuando realiza las actividades.

Un aspecto deficitario de las planificaciones de Sonia es el que está referido a que en la planificación se promueva que los alumnos reconozcan los alcances y limitaciones de los procedimientos y conocimientos matemáticos usados, por ejemplo falta mayor precisión en la planificación acerca de qué se hará para que los estudiantes puedan lograr establecer las restricciones o condiciones de funcionamiento de la técnica trasvasije ($19+7 = 20+6 = 26$) referidas a que uno de los sumandos esté cerca de la decena (unidad igual a 9 ó 8). En las P-PRE el indicador asociado (Pmc6) no está observado y en las P-POST sólo está parcialmente logrado en 1 de las 4 P-POST, y está no logrado en las otras 3. Por lo tanto podemos observar que está docente no avanzó positivamente en el indicador mencionado, y por tanto al final de la implementación de la MCM sus planificaciones no consideraban actividades para que los alumnos y alumnas reconocieran los alcances y limitaciones de los procedimientos y conocimientos matemáticos.

- **Momento de Cierre**

El indicador (Pmc7) referido a incluir preguntas en la planificación para que surjan en forma colaborativa justificaciones matemáticas de los conceptos y procedimientos utilizados en la clase no está logrado en las P-PRE. En las P-POST está logrado en 2

de 4, parcialmente logrado en 1 y no logrado en otra. Por lo tanto podemos observar que está docente avanzó positivamente en el indicador mencionado.

En las P-PRE Sonia no incluye preguntas que permiten realizar la síntesis y sistematización poniendo énfasis en los nuevos conocimientos abordados en la clase. En cambio, en las P-POST avanzó en este aspecto, pues se incluyeron preguntas para lograr parcialmente en 3 de las 4 P-POST, el indicador Pmc8. Por lo tanto podemos observar que está docente avanzó positivamente en el indicador mencionado.

Caso: VALENTINA

- Momento de Inicio

En el momento de inicio de las P-PRE el indicador (Pmc1) no está observado, es decir, no incluye situaciones problemáticas que incorpore el nuevo conocimiento matemático que se quiere instalar con los alumnos, para que emanen las primeras estrategias para abordarlo, quizás poco eficientes, pero que después en el desarrollo de la clase irán evolucionando. En las P-POST lo logra en todas sus planificaciones. Por lo tanto podemos observar que esta docente avanzó positivamente en considerar las situaciones problemáticas en el diseño del momento de inicio de una clase, aunque ya lo tenía de antes.

En las P-PRE no incorpora explícitamente dejar un tiempo adecuado para que los estudiantes socialicen sus argumentaciones o producciones matemáticas, es decir en la redacción de la P-PRE no hay una mención como la siguiente “de un tiempo para que los alumnos comuniquen sus procedimientos entre sus pares antes de revisar la pregunta”. En las P-POST tiene logrado o parcialmente logrado el indicador respectivo (Pmc2) en 2 de 3 planificaciones. Por lo tanto podemos observar un avance positivo, pero en desarrollo, respecto de dejar explícito en las planificaciones que los alumnos tengan tiempo para socializar sus respuestas y cómo se gestionan esos tiempos de acuerdo a las posibles respuestas de sus alumnos y alumnas.

- Momento de Desarrollo

En las P-PRE no contempla explícitamente en el momento de desarrollo una gestión para que los alumnos intervengan significativamente en la actividad matemática, mediante el estudio de situaciones problemáticas y elaboración de preguntas que hicieran que los alumnos y alumnas plantearan sus procedimientos, los justificaran, los relacionaran con otros aportados por sus pares y elaboraran nuevas preguntas. Sin embargo en las P-POST, Valentina incorporó estos aspectos logrando parcialmente el indicador asociado (Pmc3) en 4 de las 4 P-POST. Por lo tanto podemos observar que está docente avanzó positivamente en considerar las situaciones problemáticas en el diseño del momento de inicio de una clase.

En las P-PRE no se observa una preocupación para que las actividades diseñadas para los estudiantes provoquen una evolución en las estrategias o técnicas utilizadas por los alumnos. En las P-POST la profesora planificó considerando este aspecto pues se observa que las actividades permiten esta evolución. De hecho el indicador asociado (Pmc4) fue logrado en 4 de las 4 P-POST. Por lo tanto podemos observar

que esta docente avanzó positivamente en considerar actividades que provoquen una evolución de las técnicas.

En las P-PRE no se observa la socialización de los procedimientos, estrategias o ideas producidas por los estudiantes cuando realiza las actividades planificadas. En las P-POST la profesora planificó considerando este aspecto pues se observa que las actividades permiten esta socialización. De hecho el indicador asociado (Pmc5) fue logrado en 3 de las 4 P-POST. Por lo tanto podemos observar que esta docente avanzó positivamente en considerar en la planificación la socialización de los procedimientos, estrategias o ideas producidas por los estudiantes cuando realiza las actividades.

Un aspecto deficitario de las planificaciones de Valentina es el que está referido a que en la planificación se promueva que los alumnos reconozcan los alcances y limitaciones de los procedimientos y conocimientos matemáticos usados. En las P-PRE el indicador asociado (Pmc6) no está observado y en las P-POST sólo está parcialmente logrado en 1 de las 4 P-POST, y está no logrado en las otras 3. Por lo tanto podemos observar que esta docente no avanzó positivamente en el indicador mencionado, y por tanto al final de la implementación de la MCM sus planificaciones no consideraban actividades para que los alumnos y alumnas reconozcan los alcances y limitaciones de los procedimientos y conocimientos matemáticos.

- Momento de Cierre

El indicador (Pmc7) referido a incluir preguntas en la planificación para que surjan de forma colaborativa justificaciones matemáticas de los conceptos y procedimientos utilizados en la clase no está logrado en las P-PRE. En las P-POST está logrado en 2 de 4, parcialmente logrado en 1 y no logrado en otra. Por lo tanto podemos observar que esta docente avanzó positivamente en el indicador mencionado.

En las P-PRE Valentina no incluye preguntas que permiten realizar la síntesis y sistematización poniendo énfasis en los nuevos conocimientos abordados en la clase. En cambio, en las P-POST avanzó en este aspecto, pues se incluyeron preguntas para lograr parcialmente en 3 de las 4 P-POST, el indicador Pmc8. Por lo tanto podemos observar que esta docente avanzó positivamente en el indicador mencionado.

Caso: MÓNICA

- Momento de Inicio

En el momento de inicio en las P-PRE el indicador (Pmc1) no está observado, es decir, no incluye situaciones problemáticas que incorporen el nuevo conocimiento matemático que se quiere instalar con los alumnos, para que emanen las primeras estrategias para abordarlo, quizás poco eficientes, pero que después en el desarrollo de la clase irán evolucionando. En las P-POST las actividades del momento de inicio no muestran el problema por ello están parcialmente logrado en 4 de las 4 clases, ya que sólo señala que se trabajará un problema aditivo de composición directo, con un ámbito bajo. No obstante, la situación problemática declarada permite instalar el trabajo con esquemas, pero la forma de abordarlo en el momento de inicio no es coherente al propósito de la clase, pues la gestión de este momento consiste en subrayar datos y mostrar el significado de los datos lo que es incoherente a una

gestión con el trabajo de esquemas. Por lo tanto podemos observar que hubo un avance positivo de la docente después de la implementación de la MCM, en considerar las situaciones problemáticas en el diseño del momento de inicio de una clase, dado que en el P-PRE no estaba observado y el P-POST se logra parcialmente.

En las P-PRE y las P-POST no incorpora explícitamente dejar un tiempo adecuado para que los estudiantes socialicen sus argumentaciones o producciones matemáticas, es decir en la redacción de la P-PRE y P-POST no hay una mención como la siguiente “de un tiempo para que los alumnos comuniquen sus procedimientos entre sus pares antes de revisar la pregunta”. Por lo tanto podemos observar que no hay avance en el aspecto que señala el indicador.

- Momento de Desarrollo

En las P-PRE contempla explícitamente en el momento de desarrollo una gestión para que los alumnos intervengan significativamente en la actividad matemática, mediante el estudio de situaciones problemáticas y elaboración de preguntas que hicieran que los alumnos y alumnas plantearan sus procedimientos, los justificaran, los relacionaran con otros aportados por sus pares, elaboraran nuevas preguntas. En las P-POST, Mónica incorporó estos aspectos, pero en forma parcial, por tanto el indicador asociado (Pmc3) sólo está parcialmente logrado en 4 de las 4 P-POST ya que la gestión del momento de desarrollo no se hace cargo de dejar explícito el cómo hacer que alumnos intervengan significativamente en el problema. La gestión se centra en un trabajo parametrizado dado por:

Se da un problema

Se pide mostrar el esquema:

Se pide la operación y el cálculo:

Se pide la respuestas

Son 4 problemas donde el alumno y alumna debe resolverlos, sin embargo no está explícita la forma en cómo se gestionará, salvo la mención de “usando esquemas” para comprender los datos e identificar la operación. En la planificación no aparecen ni las preguntas claves que debe hacer el profesor como por ejemplo aquellas referidas a cual región rectangular corresponde cada dato y por qué esa y no otra. O preguntas referidas a por qué juntó los esquemas de esa forma. Por lo tanto podemos observar que esta docente mantuvo el mismo nivel de apropiación respecto de redactar una planificación que promueva que el alumno intervenga significativamente en el aula en considerar las situaciones problemáticas en el diseño del momento de inicio de una clase.

En las P-PRE se observa una preocupación para que las actividades diseñadas para los estudiantes provoquen una evolución en las estrategias o técnicas utilizadas por los alumnos, es así como en 4 de las 4 clases está logrado o parcialmente logrado. Sin embargo en las P-POST las actividades no permiten visualizar una evolución de las estrategias de los alumnos pues en la planificación se están colocando un listado de cosas por hacer en relación a los problemas aditivos pero no hay indicios de cómo se harán evolucionar las estrategias de los alumnos. Por ejemplo, en el inicio los alumnos están usando como estrategia para la comprensión del problema, el marcar las preguntas y los datos; posteriormente utilizan esquemas como otra estrategia.

¿cómo evoluciona de una hacia la otra? no está presente en la planificación. Por tanto el indicador Pmc4 no fue logrado en 4 de las 4 P-POST lo que significa un retroceso con respecto a las P-PRE.

En las P-PRE se observa que el indicador Pmc5 referido a la socialización de los procedimientos, estrategias o ideas producidas por los estudiantes está claramente logrado. Sin embargo, en las P-POST la profesora no planificó considerando este aspecto pues no se observa en forma explícita que los alumnos tienen espacios para sociabilizar sus procedimientos o producciones, más aún si están trabajando con esquemas. Por lo tanto podemos observar que esta docente no avanzó positivamente en el indicador mencionado.

Un aspecto deficitario de las planificaciones de Mónica es el que está referido a que se promueva que los alumnos reconozcan los alcances y limitaciones de los procedimientos y conocimientos matemáticos usados. Tanto en las P-PRE como en las P-POST el indicador asociado (Pmc6) no está observado. Por lo tanto podemos observar que esta docente no avanzó positivamente en el indicador mencionado, ya que no hay ningún indicio de este indicador en la planificación, por ejemplo en el uso de trasvasije no hay ninguna mención acerca de las restricciones que tiene esta técnica.

- Momento de Cierre

El indicador (Pmc7) referido a incluir preguntas en la planificación para que surjan en forma colaborativa justificaciones matemáticas de los conceptos y procedimientos utilizados en la clase no está observado en las P-PRE y tampoco en las P-POST. Por lo tanto podemos observar que esta docente no avanzó positivamente en el indicador mencionado.

En las P-PRE y P-POST, Mónica no incluye preguntas que permiten realizar la síntesis y sistematización poniendo énfasis en los nuevos conocimientos abordados en la clase. En las P-POST el cierre es un check list de aspectos a considerar, salvo una parte donde resolverán colectivamente un problema. Es decir el cierre, no incluye ninguna pregunta orientadora o que invite a reflexionar acerca de lo visto en clases. Si bien es cierto hace una pregunta, esta se limita a establecer cuál técnica le gustó más y por qué. Pero no hay preguntas acerca de los procesos involucrados en la modelización. Por lo tanto podemos observar que esta docente no avanzó positivamente en el indicador mencionado.

De los tres casos se puede concluir los siguientes aspectos sobre los momentos

Todos los casos, en las P-POST han incorporado situaciones problemáticas en el momento de inicio que incluyen el nuevo conocimiento matemático que se quiere instalar con los alumnos, para que emanen las primeras estrategias para abordarlo, quizás poco eficientes, pero que después en el desarrollo de la clase irán evolucionando. Es importante señalar que este aspecto no estaba presente en las P-PRE, es decir antes de la implementación de la MCM.

Sonia y Valentina en sus planificaciones P-POST incorporaron de forma explícita dejar los tiempos necesarios para que los alumnos y alumnas comuniquen sus procedimientos entre sus pares antes de revisar la pregunta y además socialicen sus producciones o

argumentaciones con la profesora y con los pares y cómo se gestionan esos tiempos de acuerdo a las posibles respuestas de sus alumnos y alumnas. Es importante señalar que este aspecto no estaba presente en las P-PRE, es decir antes de la implementación de la MCM. El caso Mónica no incorpora este aspecto ni en las P-PRE ni en las P-POST.

Todos los casos estudiados, incorporaron en el momento de desarrollo de sus P-POST una gestión para que los alumnos y alumnas intervengan significativamente en la actividad matemática, mediante el estudio de situaciones problemáticas y elaboración de preguntas que hicieran que los alumnos y alumnas plantearan sus procedimientos, los justificaran, los relacionaran con otros aportados por sus pares, elaboraran nuevas preguntas. Es importante señalar que este aspecto no estaba presente en las P-PRE, es decir antes de la implementación de la MCM.

Los casos Sonia y Valentina, manifestaron en las P-POST una evolución positiva en considerar actividades que provoquen una evolución de las técnicas utilizadas. Además incorporaron una gestión para la socialización de los procedimientos, estrategias o ideas producidas por los estudiantes cuando realiza las actividades planificadas. Ninguno de los dos aspectos mencionados fueron incorporados por las docentes en las planificaciones entregadas antes de la implementación de la MCM. En el caso de Mónica este aspecto no se observó en sus P-PRE y tampoco en las P-POST.

Todos los casos presentaron una debilidad la cual no pudo ser mejorada a partir de la implementación de la MCM y que se refiere a que sus planificaciones no consideraban actividades para que los alumnos y alumnas reconozcan los alcances y limitaciones de los procedimientos y conocimientos matemáticos.

Sonia y Valentina, incorporaron en las P-POST preguntas para que surjan en forma colaborativa justificaciones matemáticas de los conceptos y procedimientos, para realizar la síntesis y sistematización poniendo énfasis en los nuevos conocimientos abordados en la clase, dicho aspecto no estaba en las P-PRE de ambas docentes. Mónica no logra este aspecto después de la implementación de la MCM.

Procesos de competencias

Caso: SONIA

Sonia en ninguna de las P-PRE incluyó procesos de competencias en las actividades propuestas y sus respectivos niveles de complejidad. Tampoco las P-PRE explicitan como se gestionará que los estudiantes justifiquen y comuniquen sus respuestas. Sin embargo, en las P-POST la docente incluyó algunas de las competencias abordadas en el marco de este proyecto y diseñó la planificación considerando los procesos. Esto queda en evidencia pues los indicadores Pdc1-Pdc2 fueron logrados en 4 de las 4 P-POST y también con el indicador Pdc3 pues en las 4 P-POST se dieron orientaciones en la gestión para que los alumnos justifiquen y comuniquen sus ideas. (+) Por lo tanto podemos observar que esta docente avanzó positivamente en incorporar los procesos de competencias mencionados en los indicadores Pdc1, Pdc2 y Pdc3 en la planificación de

sus clases. (-) Donde no hubo ningún avance fue en explicitar en las P-POST los niveles de complejidad para cada una de sus actividades.

Respecto al indicador referido a incluir preguntas acerca de los procesos en el cierre de la clase, en las P-POST sólo lo logró parcialmente en 2 de 4 planificaciones. Por lo tanto podemos observar que esta docente avanzó positivamente en el indicador mencionado aunque sólo en un nivel de parcialmente logrado.

Caso: VALENTINA

Valentina en las P-PRE no incluyó procesos de competencias en las actividades propuestas y sus respectivos niveles de complejidad. Tampoco las P-PRE explicitan como se gestionará que los estudiantes justifiquen y comuniquen sus respuestas. Sin embargo, en las P-POST la docente incluyó algunas de las competencias abordadas en el marco de este proyecto y diseñó la planificación considerando los procesos. Esto queda en evidencia pues los indicadores Pdc1-Pdc2 fueron logrados en 4 de las 4 P-POST y también con el indicador Pdc3 pues en las 4 P-POST se dieron orientaciones en la gestión para que los alumnos justifiquen y comuniquen sus ideas. Por lo tanto podemos observar que esta docente avanzó positivamente en los indicadores Pdc1, Pdc2 y Pdc3, ya que:

- *Incluyó actividades que abordan adecuadamente algún proceso de la competencia predominante declarada.*
- *Desarrolló (el)los proceso(s) pertinentes a la competencia declarada.*
- *Incluyó cómo se gestionará que los estudiantes justifiquen y comuniquen sus respuestas*

(-) Donde no hubo ningún avance fue en explicitar en las P-POST los niveles de complejidad para cada una de sus actividades. Por lo tanto en este aspecto no hubo avances.

Respecto al indicador referido a incluir preguntas acerca de los procesos en el cierre de la clase, en las P-POST sólo lo logró parcialmente en 2 de 4 planificaciones. Por lo tanto podemos observar que está docente avanzó positivamente en el indicador mencionado aunque sólo en un nivel de parcialmente logrado.

Caso: MÓNICA

Mónica en las P-PRE no incluyó procesos de competencias en las actividades propuestas y sus respectivos niveles de complejidad. Sin embargo, en las P-POST la docente incluyó algunas de las competencias abordadas en el marco de este proyecto y diseñó la planificación considerando los procesos. Esto queda en evidencia pues los indicadores Pdc1-Pdc2 fueron parcialmente logrados en 4 de las 4 P-POST. Por lo tanto podemos observar que esta docente avanzó positivamente en los indicadores Pdc1, Pdc2 ya que:

- *Incluyó actividades que abordan adecuadamente algún proceso de la competencia predominante declarada.*
- *Desarrolló (el)los proceso(s) pertinentes a la competencia declarada, aunque son listados en la planificación pero no se describe como se gestionan.*

Tanto en las P-PRE como en las P-POST no se observa que se haga mención explícita a cómo se gestionará que los estudiantes justifiquen y comuniquen sus respuestas (Pdc3). Por lo tanto podemos observar que esta docente no avanzó positivamente en el indicador mencionado.

En las P-PRE no se incorporan competencias y por lo tanto los niveles de complejidad de las actividades no se observan. Sin embargo, en las actividades planteadas en las P-POST son coherentes con el nivel de complejidad declarado y por ello el indicador Pdc4 está logrado en 4 de 4 P-POST. (+) Por lo tanto podemos observar que esta docente avanzó positivamente en el indicador mencionado.

Respecto al indicador referido a incluir preguntas acerca de los procesos en el cierre de la clase, en las P-PRE fue logrado en 2 de las 4 planificaciones. En las P-POST sólo lo logró parcialmente el indicador Pdc5 pero en 4 de 4 planificaciones. Es parcialmente logrado pues sólo menciona aspectos a considerar, que sí se relacionan con los procesos pero que no le dan forma mediante preguntas para que se vea una gestión de la clase en donde se apunte hacia ello. No obstante, en el cierre de la planificación está implícito (está en la parte de evaluación) que los alumnos deberán explicar qué operación permite resolver el problema a través de un problema para el cierre (que no está dicho cuál será) ni tampoco las preguntas que se harán con él, pero está la intención declarada de hacerlo. Por lo tanto podemos observar que esta docente avanzó positivamente en el indicador mencionado aunque sólo en un nivel de parcialmente logrado.

De los tres casos, podemos concluir que:

Todas las docentes en las P-POST, incluyeron las competencias abordadas en el marco de este proyecto considerando además los procesos de ellas, aspecto que en las P-PRE no se observaba. Es así como ellas:

- Incluyeron actividades que abordan adecuadamente algún proceso de la competencia predominante declarada.
- Desarrollaron (el)los proceso(s) pertinentes a la competencia declarada.
- Incluyeron cómo se gestionará para que los que los estudiantes justifiquen y comuniquen sus respuestas.
- Incluyeron preguntas, en el momento de cierre, preguntas para abordar los procesos de las competencias declaradas

Donde hubo poco avance fue en explicitar en las P-POST los niveles de complejidad para cada una de sus actividades. Sólo Mónica logró este aspecto.

Gestión del Error y Dificultades

Caso: SONIA

En las P-PRE no se consideran ninguno de los siguientes indicadores:

- Ped1: Para las preguntas claves planificadas, se mencionan las posibles respuestas de los alumnos.

- Ped2: La planificación deja explícita las posibles respuestas erróneas de los estudiantes en preguntas claves.
- Ped3: La planificación deja explícita las posibles dificultades que podrían tener los estudiantes en alguna actividad.
- Ped4: La planificación deja explícita las estrategias para abordar los errores y dificultades de los estudiantes.
- Ped5: Para las respuestas incorrectas se mencionan elementos de gestión para subsanarlas.

En las P-POST sólo en la clase 1 se aprecia un logrados el indicador Ped1 y parcialmente logrado Ped2, Ped3. En el resto de las clases los indicadores no se observan o no están logrados. Por lo tanto no se pudo apreciar una evolución en lo que respecta a gestión de los errores de los alumnos y de los obstáculos didácticos.

Caso: VALENTINA

En las P-PRE no se consideran ninguno de los siguientes indicadores:

- Ped1: Para las preguntas claves planificadas, se mencionan las posibles respuestas de los alumnos.
- Ped2: La planificación deja explícita las posibles respuestas erróneas de los estudiantes en preguntas claves.
- Ped3: La planificación deja explícita las posibles dificultades que podrían tener los estudiantes en alguna actividad.
- Ped4: La planificación deja explícita las estrategias para abordar los errores y dificultades de los estudiantes.
- Ped5: Para las respuestas incorrectas se mencionan elementos de gestión para subsanarlas.

En las P-POST sólo en la clase 1 se aprecia un logrado el indicador Ped1 y parcialmente logrado Ped2, Ped3. En el resto de las clases los indicadores no se observan o no están logrados. Por lo tanto no se pudo apreciar una evolución en lo que respecta a gestión de los errores de los alumnos y de los obstáculos didácticos.

Caso: MÓNICA

En las P-PRE y en las P-POST no se consideran ninguno de los siguientes indicadores:

- Ped1: Para las preguntas claves planificadas, se mencionan las posibles respuestas de los alumnos.
- Ped2: La planificación deja explícita las posibles respuestas erróneas de los estudiantes en preguntas claves.
- Ped3: La planificación deja explícita las posibles dificultades que podrían tener los estudiantes en alguna actividad.

- Ped4: La planificación deja explícita las estrategias para abordar los errores y dificultades de los estudiantes.
- Ped5: Para las respuestas incorrectas se mencionan elementos de gestión para subsanarlas.

Por lo tanto En Mónica no se pudo apreciar una evolución en lo que respecta a gestión de los errores de los alumnos y de los obstáculos didácticos.

Podemos concluir que tanto en las P-PRE y P-POST, los tres casos no incorporaron posibles respuestas correctas y erróneas para las preguntas claves de la clase y tampoco alguna mención para alguna dificultad en las actividades diseñadas. Otro aspecto que las profesoras no incluyen en sus planificaciones es explicitar alguna estrategia para abordar los errores y dificultades de los estudiantes. Por ejemplo, las profesoras Sonia y Valentina en la primera clase tratarían cálculos de sumas y restas utilizando la técnica trasvasije, para lo cual planificaron muy bien los contenidos previos pertinentes pero nunca planificaron la gestión para la dificultad que podría presentarse cuando los estudiantes no quisieran abandonar la técnica de sobreconteo con los dedos.

5.3.2. Gestión de la enseñanza

En esta dimensión son analizadas las prácticas de aula de los docentes, las cuales están registradas en video, y cuyo análisis se realizó por medio de pautas de observación, de tipo Likert. En dichas pautas, los indicadores hicieron referencia a criterios que permitieron dar información en cuanto a la apropiación del MCM. Principalmente, estos criterios obedecen a:

- *Momentos didácticos del proceso de estudio.* Apoyados en los momentos didácticos enmarcados en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999), este grupo de indicadores permitió evidenciar si las docentes están intencionando o no, o bien en qué grado, cada uno de los momentos de una clase, y por ende el objetivo de las actividades diseñadas.
- *Procesos constituyentes de competencias.* Apoyados en los procesos competenciales definidos en el proyecto FONIDE DED0760 y los propuestos en las perspectivas teóricas que sustentan este estudio, estos indicadores permitieron detectar si los docentes intencionan los procesos que permitirían desarrollar competencias en los estudiantes, específicamente las intencionadas en este estudio: modelización y argumentación.
- *Gestión del error.* Se analizó la gestión de error por parte de las profesoras en términos de si la profesora gestiona los errores o dificultades de los alumnos haciendo preguntas que permitan problematizarlos.⁹

Se presentan los análisis y resultados en relación al contraste entre las prácticas de aula previas a la realización de seminario de estudio y las prácticas de aula después del seminario de estudio en que se implementa la secuencia didáctica.

⁹ Los resultados sobre el cuarto criterio declarado en la metodología, fidelidad y adaptación de la unidad didáctica, serán presentados en el informe final

Los datos que se presentan a continuación provienen de las valoraciones al aplicar la pauta de observación a los casos. El análisis y resultados se presentan para cada uno de los tres indicadores y para cada una de los tres casos: Mónica, Valentina y Sonia.

Momentos didácticos

Para estudiar el cumplimiento de los momentos didácticos la pauta contempló los siguientes indicadores para cada uno de los tres momentos:

Inicio	
Gco1	La profesora activa adecuadamente los conocimientos previos pertinentes al propósito de la clase.
Gmc1	La profesora formula una situación problemática abordable para los estudiantes que incluye el conocimiento matemático nuevo.
Gmc2	La profesora da un tiempo adecuado para que los alumnos y alumnas comuniquen sus producciones iniciales (estrategias, resultados, explicaciones).
Desarrollo	
Gmc3	La profesora gestiona adecuadamente para que la mayoría de los niños intervengan significativamente en la actividad matemática.
Gmc4	La profesora gestiona adecuadamente las actividades diseñadas para provocar una evolución en las estrategias o técnicas utilizadas por los alumnos.
Gmc5	La profesora gestiona adecuadamente la socialización de los procedimientos, estrategias o ideas producidas por los estudiantes.
Cierre	
Gmc6	La profesora gestiona adecuadamente para permitir que los niños y niñas reconozcan los alcances y limitaciones de los procedimientos y conocimientos matemáticos usados.
Gmc7	La profesora gestiona adecuadamente en forma colaborativa con los estudiantes, para que surjan las justificaciones matemáticas de los conceptos y/o procedimientos utilizados en la clase.
Gmc8	La profesora realiza una síntesis y sistematización adecuada acerca del nuevo conocimiento matemático abordado en la clase.

Caso Mónica

Los resultados para Mónica son los siguientes:

Casos	PRE	INTERMEDIA	POST				
Sesiones	S1	S1	S1	S2	S3	S4	S5

Gco1	L	L	L	L	L	L	L	L
Gmc1	L	L	L	L	L	L	L	L
Gmc2	PL	L	L	L	L	L	L	L
Gmc3	PL	L	L	L	L	L	L	L
Gmc4	PL	L	L	L	L	L	L	L
Gmc5	PL							
Gmc6	NL	PL	PL	PL	PL	PL	PL	L
Gmc7	NL	PL						
Gmc8	PL	L	L	L	L	L	L	PL

Los indicadores del momento de inicio tanto en las clases observadas PRE e intermedia, como en las sesiones POST se han valorado como logrados. Los inicios de Mónica parten como preguntas a los estudiantes que involucran conocimientos previos, luego plantea el propósito de la clase y un problema introductorio en que se involucra el conocimiento nuevo.

En las clases observadas de Mónica la secuencia de acciones en el momento de desarrollo de la clase es la misma para todas las clases. A partir de una guía, los estudiantes resuelven las actividades planteadas de forma individual, en que Mónica retroalimenta de forma personal a cada estudiante. A ello se dedica la mayor parte del tiempo, luego dedica un espacio más reducido al anterior a resumir los procedimientos realizados en el desarrollo de la actividad. La valoración de estas acciones ha mejorado desde la clase PRE a la intermedia y POST, dado que Mónica en la clase PRE no se evidencia que los estudiantes evolucionen en sus técnicas, e intervengan significativamente, en cambio en las clases intermedia y POST mejora en estos aspectos. Una práctica habitual es que los estudiantes resuelvan en la pizarra el problema, y Mónica se enfoca en comparar los procedimientos utilizados, sin que los estudiantes expresen sus razonamientos. Por ello el indicador Gmc5 se mantiene como parcialmente logrado.

En el momento de cierre se evidencian cambios entre las clases. En la sesión PRE el cierre es una síntesis de Mónica, y no deja suficiente espacio para sistematizar todos los conocimientos vistos en clase por lo que dos indicadores se valoran como no logrados. En cambio en la clase intermedia y en las sesiones POST Mónica socializa los procedimientos y los diferentes aspectos que se promovieron en clases. Pero solamente se han valorado parcialmente logrado porque es Mónica quien protagoniza el cierre y no promueve el espacio para que los estudiantes expliquen sus razonamientos.

Procesos constituyentes de competencias

Para estudiar el cumplimiento de los procesos de las competencias, la pauta contempló los siguientes indicadores.

Gdc1	La profesora en la gestión de la clase se hace cargo de los procesos que
------	--

	involucran la competencia declarada.
Gdc2	La profesora aborda principalmente los procesos de la competencia declarada y no darle protagonismos a otros procesos secundarios.
Gdc3	La profesora gestiona la clase haciendo que los alumnos y alumnas justifiquen y comuniquen sus ideas.
Gdc5	La profesora gestiona adecuadamente en el cierre de la clase preguntas sobre los procesos que se han promovido en clases.
Ged1	La profesora plantea preguntas clave y los alumnos desarrollan argumentos para responder.

Los resultados para Mónica son los siguientes:

Casos		PRE	INTER	POST				
Clase		S1	S1	S1	S2	S3	S4	S5
Indicadores	Gdc1	NO	NO	PL	PL	PL	PL	PL
	Gdc2	NO	NO	PL	PL	PL	PL	PL
	Gdc3	PL	PL	PL	PL	PL	PL	L
	Gdc5	NL	PL	L	L	L	L	PL
	Ged1	PL	PL	PL	PL	PL	PL	L

En este indicador es que se evidencian los cambios más significativos, Mónica en la clase PRE e intermedia no se observa que promueva procesos de competencia y por ello Gdc1 y Gdc2 tabulan como no observado. A partir de la clase intermedia y en especial en las sesiones del POST, Mónica intenciona el uso de diferentes procedimientos en cada una de las cinco sesiones y también se preocupa de contrastar estos procedimientos, procesos que serían parte de la competencia de Cálculo, varios estudiantes muestran que las diferentes estrategias de cálculo las dominan, tales como la descomposición aditiva, trasvasije, y algoritmo habitual. Incluso Mónica en el cierre de la quinta sesión socializa problematiza que estrategia es más apropiada en función de la relación entre los números. Asimismo Mónica enseña el uso de esquemas como parte de los pasos para resolver un problema, con la intención de promover la competencia de modelización. Pero en su gestión se observa que Mónica aborda los esquemas como una técnica impuesta más que un medio para que los niños modelicen el problema. Por ello los indicadores Gdc1, Gdc2 se han valorado como parcialmente logrados. Cabe destacar que el desarrollo de estas dos competencias estaba planificado en la secuencia didáctica.

El indicador Gdc5 asociado a la gestión del cierre de los procesos sí evidencia un logro. Tanto de la clase intermedia como en las sesiones del POST, en los cierres Mónica dedica espacio a discutir sobre los procedimientos utilizados y el uso de los esquemas. A continuación se muestra un episodio del cierre de la sesión 5 que corresponde a la última clase de la secuencia didáctica planificada.

Mónica: hoy estuvimos recordando el problema verdad

Estudiantes: si

Mónica: En el primer problema que tuvieron que hacer para solucionar el problema

Estudiantes: restar

Mónica: Por qué tuvieron que restar

Estudiantes: ... [Diversas respuestas que no se entienden]

Mónica: me pueden mostrar con sus papeles cómo hicieron el esquema

Estudiantes: [Muestran sus esquemas elaborados con papel lustre]

Mónica: ¿En el segundo problema que tuvieron que hacer? ¿qué operación matemática tuvieron que hacer?

Estudiantes: Resta

Mónica: ¿Cómo se representaba en el esquema me lo pueden mostrar?

Estudiantes: [Para representar la resta, los estudiantes muestran una franja de papel lustre sobrepuesta en un cuadro de papel lustre]

Mónica: ¿Por qué?... ¿por qué yo no lo puse encima y lo puse abajo?

Estudiantes: ... [Diversas respuestas que no se entienden]

Mónica: ¿Quién era este [señala el cuadro de papel lustre más grande]

Estudiantes: Pablo

Mónica: Y este [señala la franja de papel lustre más pequeña]

Estudiantes: Pedro

Mónica: Queríamos saber cuánto más tenía Pablo que Pedro [compara con el dedo los dos pedazos de papel lustre que represente el esquema del problema]

Mónica: Y en el tercer problema que operación matemática se utiliza

Estudiantes: suma

Mónica: ¿Y cómo se representaba en el esquema? ¿me lo pueden mostrar por favor?

Estudiantes: [Representan la suma con el papel lustre]

Mónica: ¿Y por qué se hacía así?

Estudiantes: Porque es una suma.

Mónica: ¿Y qué pasa con la cantidad?

Mónica: ¿Y si le agregamos qué pasa?

Estudiantes: se agrandaba

Mónica: se agrandaba muy bien... se dan cuenta que utilizamos varios tipos de esquemas.

Estudiantes: si...

Mónica: cuando teníamos que quitar, cuando teníamos que agregar, y cuando teníamos que ver las diferencias. ¿Recuerdan eso?

Estudiantes: si...

Mónica: ¿Y qué técnica utilizamos para resolver los problemas?

Estudiantes: ... [Varias respuestas]

Mónica: ¿y tu cual usaste?

Estudiante: la de composición.

Mónica: la de composición. ¿Alguien uso la de sobreconteo o bajoconteo?

Estudiante: [silencio]

Mónica: Nadie. ¿Pedro, cual ocupaste tu?

Pedro: la de bajoconteo

Mónica: ¿Quién ocupo el algoritmo?

Estudiantes [Varios levantan la mano]

Clara: yo ocupe el algoritmo

Mónica: por qué

Clara: porque me salía más fácil

Mónica: Porque te salía más fácil. Muy bien. ¿Cuál de todas las técnicas les agrado más?

Estudiantes: [varios respuestas entre la descomposición y el algoritmo]

Mónica: Hay quienes le sale más fácil la descomposición y Hay quienes le sale más fácil el algoritmo

En el episodio, en una primera instancia Mónica en conjunto con los estudiantes están modelizando los tipos de problemas a través de los esquemas, lo que permite reconocer la operación que resuelve el problema. En una segunda instancia. Mónica pregunta por las diferentes técnicas utilizadas discutiendo su uso. En varias de sus preguntas ella pregunta por qué se hacía de una manera. Con estos elementos hay una intención de Mónica de promover las competencias de modelización, por medio de esquemas, la competencia de cálculo por medio de las diferentes técnicas, y la argumentación con preguntas a los estudiantes de justificación.

En la competencia de argumentación si bien también estaba planificada, no se evidencia un cambio significativo desde la clase PRE, hasta las sesiones del POST. En la clase PRE, si bien Mónica plantea algunas preguntas clave, los estudiantes en sólo una ocasión se evidencia que generan argumentos. En el resto sólo responden generalmente con monosílabos. En las sesiones POST, Mónica en la gestión personal de las actividades, da algunos espacios a los estudiantes para que argumenten con preguntas del tipo, ¿por qué realizaste esa estrategia?, ¿explícame lo que hiciste? Pero en general los niños explicando manera breve su razonamiento no mostrando un proceso argumentativo en que justifiquen y expresen sus razonamientos. Si bien la valoración de los indicadores asociados a argumentación, no ha cambiado, sí se evidencia que Mónica intenciona mucho más procesos de argumentación que en la clase PRE, el problema radica es que esta intención no se refleja en los argumentos de los estudiantes.

En el siguiente episodio, Mónica va al banco de la niña Silvia y le pregunta qué técnica utiliza para resolver el problema planteado en la guía, señalando el espacio que hay para justificar la respuesta

Mónica: ¿Qué técnica utilizaste, el sobreconteo o el algoritmo?

Silvia: [Silencio]

Mónica: ¿Qué hiciste tu, un sobreconteo o sumaste?

Silvia: Sumé

Mónica: ¿Por qué sumaste?

Silvia: heee [muletilla]

Mónica: ¿Por qué hiciste la suma y no el cálculo mental?

Silvia:... [Segundos de silencio] para saber cuando falta

Mónica si... pero por qué, ¿Por qué es más difícil o es más fácil?

Silvia: porque es más fácil

Mónica: eso es lo que tienes que poner allí, ¡qué hiciste!.. que hiciste la suma y me explicas por qué.

Silvia si bien reconoce que la suma es la operación que resuelve el problema, tiene dificultades en responder a las preguntas de Mónica, quien tiene que guiarla con preguntas cada vez más unidireccionadas para que pueda contestar por qué realizó una suma. La intención de Mónica de promover la argumentación no se corrobora con el tipo de respuestas de los niños.

Gestión del error y dificultades:

Para estudiar la gestión del error y dificultades por parte de las profesoras, la pauta contempló un indicador.

Ged2	La profesora gestiona los errores o dificultades de los alumnos haciendo preguntas que permitan problematizar el error o dificultad.
------	--

De las clases analizadas hasta la fecha, se tienen los siguientes resultados.

Casos	PRE	INTERMEDIA	POST				
Sesiones	S1	S1	S1	S2	S3	S4	S5
Ged1	NL	PL	PL	PL	PL	PL	PL

Si bien la gestión del error no presenta un logro adecuado, si presenta una variación significativa, dado que en la clase PRE prácticamente no hay gestión del error, en cambio en las clase intermedia y en las sesiones del POST, Mónica problematiza el error en forma personal, pero no en el grupo curso.

Caso Sonia

Los resultados para Sonia son los siguientes:

Casos	PRE	INTERMEDIA	POST				
Clases	C1	C1	C1	C2	C3	C4	
Indicadores	Gco1	PL	NL	L	L	L	L
	Gmc1	PL	PL	L	PL	L	PL
	Gmc2	NL	PL	L	L	L	L
	Gmc3	NL	NL	PL	PL	PL	L
	Gmc4	NL	NL	L	PL	PL	L
	Gmc5	NL	PL	L	L	L	L
	Gmc6	NL	NL	L	PL	L	L
	Gmc7	NL	NL	L	PL	L	L
	Gmc8	NL	NL	L	PL	L	L

En los indicadores respecto a los momentos didácticos de una clase, se observa una evolución positiva desde las clases PRE hasta las clases POST. Considerando el momento de inicio, se observó que en general se activan los conocimientos previos y las clases si inician con una situación problemática, que no necesariamente son problemas de contexto. No obstante lo anterior, es en los indicadores Gmc3-4-5 del momento de desarrollo y Gmc6-7-8 del momento de cierre donde se manifiesta en forma marcada la positiva evolución.

Es así como antes del inicio del proceso de implementación de la MCM se observó una clase (clase PRE) en que el foco de la gestión realizada por la docente estaba centrado en que cada niño o niña hagan en forma correcta lo que señala la actividad, pero no hace que ellos socialicen sus argumentaciones, tampoco que contrapongan sus respuestas y justifiquen sus procedimientos o se hagan preguntas a partir de la actividad que están trabajando. Por ejemplo, en la clase PRE los estudiantes debían determinar la cantidad mayor, y en ningún momento se observa a la profesora consultando acerca de las estrategias utilizadas por los alumnos para saber si es mayor o menor una cantidad, por lo tanto no hay una gestión de la evolución de las estrategias.

Posteriormente, en medio de la implementación de la MCM, Sonia manifiesta un cambio en la gestión de la clase, pues su foco ya no está solamente en la respuesta correcta al problema sino que muy por el contrario se centra en cómo los alumnos argumentan para decidir acerca de cómo obtuvieron la respuesta. La clase, no es óptima, pues si bien es cierto la gestión hace que los alumnos comuniquen y socialicen sus argumentaciones, también trabaja los esquemas en forma errada pues los utiliza para que los estudiantes encuentren el resultado y no para que asocien los datos, la acción y la operación. No obstante lo anterior, se aprecia una notable mejoría en crear las condiciones para que sea una clase dialogada, aunque todavía bidireccional profesora-alumno(a)

Luego, habiendo ya terminado la etapa de Seminarios en la implementación de la MCM, Sonia mejora notoriamente la gestión de clases del momento de desarrollo en las clases POST ya que se preocupa que los alumnos intervengan significativamente en la actividad matemática, tratando que los alumnos y alumnas evolucionen desde el sobreconteo al trasvasije como técnicas aditivas. El indicador Gmc3 está PL pues faltó gestión para que el indicador se lograra, ya que en algunas clases POST la profesora direccionaba demasiado para que los alumnos y alumnas hicieran bien sus actividades, pero siempre dando muchas opciones para que los estudiantes socializaran sus argumentaciones. Claramente, se observa en clase 5 que las interacciones dejaron de ser bidireccionales para dar paso a una socialización multidireccional alumno-alumno, profesor-alumno, alumno-profesor.

En el momento de cierre se evidencia una evolución positiva entre las clases PRE y POST. Es así como el cierre de la clase PRE es administrativo al igual que en clase INTERMEDIA centrándose en que los alumnos y alumnas respondan un ejercicio o preguntando “...¿qué aprendimos hoy?..” para posteriormente generar una serie de preguntas acerca de contenidos, pero nunca de procesos competenciales y tampoco centrando la atención en alguna habilidad desarrollada en clases, siendo los alumnos y alumnas actores secundarios en el diálogo, y en consecuencia no deja suficiente espacio para sistematizar todos los conocimientos vistos en clase. Por lo anterior es que dos indicadores se valoran como no logrados. Sin embargo, Sonia en las clases POST gestiona adecuadamente sistematizaciones de los temas vistos en clases, pero hechas en forma socializada con los alumnos y busca que sean los propios estudiantes quienes establezcan los alcances de sus técnicas, por ejemplo gestionó para que sean los estudiantes quienes reconozcan que la técnica del trasvasije es válida para algunos casos y en otros no.

Procesos constituyentes de competencias

Para estudiar el cumplimiento de los procesos de las competencias, la pauta contempló los siguientes indicadores.

Gdc1	La profesora en la gestión de la clase se hace cargo de los procesos que involucran la competencia declarada.
Gdc2	La profesora aborda principalmente los procesos de la competencia declarada y no darle protagonismos a otros procesos secundarios.
Gdc3	La profesora gestiona la clase haciendo que los alumnos y alumnas justifiquen y comuniquen sus ideas.
Gdc5	La profesora gestiona adecuadamente en el cierre de la clase preguntas sobre los procesos que se han promovido en clases.
Ged1	La profesora plantea preguntas clave y los alumnos desarrollan argumentos para responder.

Los resultados para Sonia son los siguientes:

Casos		PRE	INTER	POST			
Clases		C1	C1	C1	C2	C3	C4
Indicadores	Gdc1	NO	NO	L	L	L	L
	Gdc2	NO	NO	L	PL	PL	L
	Gdc3	NL	PL	L	L	L	L
	Gdc5	NL	NL	L	L	L	L
	Ged1	NL	NL	L	L	L	L

En el proceso de desarrollar competencias, es que se evidencian los cambios más significativos, Sonia en la clase PRE e INTERMEDIA no se observa que promueva procesos de competencia y por ello Gdc1 y Gdc2 se tabulan como no observado. Por el contrario, en las sesiones de las clases POST la docente intenciona claramente los procesos asociados a la competencia de Cálculo y además permite que tanto los alumnos como las alumnas justifiquen y comuniquen sus ideas. A continuación se muestra un episodio que muestra como la profesora gestiona para el logro del indicador Gdc3

Profesora: ((Indicando el siguiente ejercicio)) ¿Quién, lo hiciste Tomás tú? Ya haber, cómo lo obtuviste.

Tomás: Porque el 19 con el 1 dan 20, y si fuera... y si poniendo (...) sería 21.

Profesora: Ya, pero eso es cierto, pero ¿cómo supiste? ¿Cómo lo encontraste?

Tomás: Eeee, porque estaba pensando el 19 y el 1 da 20.

Profesora: pero lo sacaste mental o usaste dedito ¿Cómo lo hiciste?

Tomás: ((tocándose la cabeza)) Lo pensé..., mental.

Profesora: Y esto que hizo Carlos ¿se parece a lo que hice acá o no?

Alumna: sí

Profesora: puedo decir que esta suma, ésta: $29+6$ es igual que $30+5$. ¿Eso es correcto o no?, ¿Qué crees tú?

Cristóbal: Eeee, sí

Profesora: Tú Tomás ¿crees que es lo mismo?

Tomás: sí

César: Sí.

Profesora: ... eee Rubén ¿Por qué podríamos decir que es lo mismo?

Rubén: porqueee... mire, porque éste era $29+6$ y le dio un compañero, el seis una ficha, y formó el 30 más cinco, porque mire, el seis retrocedió y el 29 avanzó.

Profesora: Ya, y lo que da, el resultado ¿es el mismo o no?

Alumnos: Sí

Alumna: Lo mismo

Profesora: Ya, ¡muy bien!

Es importante este episodio pues los alumnos estaban “pegados” en la técnica del sobreconteo y se necesitó mucha gestión de clases centrada en la argumentación y comunicación para que los alumnos pudiesen comunicar lo que saben

Gestión del error y dificultades:

Para estudiar la gestión del error y dificultades por parte de las profesoras, la pauta contempló un indicador.

Ged2	La profesora gestiona los errores o dificultades de los alumnos haciendo preguntas que permitan problematizar el error o dificultad.
------	--

Los resultados para Sonia son los siguientes

Casos	PRE	INTERMEDIA	POST			
Clases	C1	C1	C1	C2	C3	C4
Ged2	NL	PL	L	PL	L	L

En las clases PRE la profesora no gestiona el error, muy por el contrario está muy preocupada por corregir a los estudiantes para que copien lo correcto. Esto se relaciona mucho con no estar consciente de los procesos competenciales de los alumnos de los alumnos. En las clases POST Sonia tiene una notable valoración en este aspecto de su gestión, pues ahora cuando los estudiantes se equivocan en vez de corregir ella, hace que los alumnos(as) reflexionen respecto a su argumentación incluso integrando al resto de los compañeros a la discusión y eso hace que la clase se observe como un constante debate de argumentos. A continuación se muestra un episodio donde se manifiesta lo descrito

Tomás pasa a la pizarra a desarrollar el segundo ejercicio. Posteriormente la profesora le pide que explique la técnica usada.

Tomás: ((resuelve la adición en la pizarra))

Profesora: Tomás, yo quiero que me explique qué técnica usaste, con los deditos o la técnica nueva.

Refiriéndose a la técnica

Tomás: Con los deditos.

Profesora: Y cuál hubiera sido.

Alumnos: ((comentan que hay un error))

No se logra identificar el error

Profesora: por eso mismo... va a hacer la técnica ahora.

Tomás: ¿La borro?

Profesora: No, no, para que te des cuenta donde está tu error. Ya hazla.

Alumna: Aaah, ya sé.

Profesora: Sí, pero dejémoslo que él lo haga y se dé cuenta solo ((lo deja mientras atiende a otros alumnos))

Alumna: ¡Oh, sí, hay un pequeñito error!

Profesora: ((se acerca a Tomás)) Ya pues, la técnica nueva, vamos. ((Guiando al alumno)) ¿Qué hace el cinco con el diecinueve?

Tomás: ¿Le da uno?

Profesora: Ya, ¿cuánto queda?

Tomás: ((dibuja una línea desde el cinco al diecinueve))

Profesora: Eso no es necesario que lo haga. Ya, escriba el número o se lo deja en la cabeza usted ahí.

Tomás: ((resuelve correctamente el ejercicio con la técnica de trasvasije))

Profesora: ...muy bien, entonces, ((apuntando al ejercicio resuelto en la pizarra)) aquí esta técnica..., parece que no te sirvió mucho la técnica de los deditos porque te equivocaste.

Caso Valentina

Los resultados para Valentina son los siguientes:

Casos		PRE	INTERMEDIA	POST			
Clases		C1	C1	C1	C2	C3	C4
	Gco1	NL	PL	L	L	L	L
	Gmc1	NL	L	L	L	L	L
	Gmc2	NL	PL	L	L	L	L
	Gmc3	NL	PL	L	L	L	L

	Gmc4	NL	PL	L	L	L	L
	Gmc5	NL	L	L	L	L	L
	Gmc6	NL	NL	PL	PL	PL	L
	Gmc7	NL	NL	NL	PL	L	PL
	Gmc8	NL	PL	PL	L	L	L

Se observa una manifiesta evolución respecto del logro de los distintos indicadores asociados a los momentos de clase. Las clases de Valentina se observan con mayor estructura, y los momentos cumplen con roles claros en términos del logro de los propósitos planteados.

Respecto del momento de inicio, éste ha evolucionado, desde una gestión planteada en la clase PRE a partir de preguntas triviales en donde todas las respuestas son válidas (por ejemplo, “¿Qué hemos hecho?” R: “matemática”), hacia clases en las que a través de preguntas asociadas al contenido matemático que activan y problematizan conocimientos previos. Interesante es, por ejemplo, en la segunda clase POST que Valentina inicia preguntando cálculos mentales que los niños resuelven muy fácilmente (del tipo $20+5$) y de pronto formula un cálculo de mayor dificultad, pero aun abordable por los niños ($29+6$). En este caso, Valentina pide a sus alumnos que expliquen sus procedimientos, gestión que estuvo ausente durante la clase PRE. Hacia la última clase, se observa además una articulación de las variables didácticas de las actividades, con el objeto de que los niños vayan avanzando hacia una mejor comprensión de los modos de aplicación, limitaciones y ventajas de la técnica. Esto se nota en el hecho de que la profesora parte preguntando cálculos del tipo $19+1$ (un sumando termina en 9, pero sin aplicar trasvasije), luego pregunta $9+7$ (para aplicación y trasvasije sobre el primer sumando), y finalmente pregunta $19+8$, que es un cálculo que admite dos tipos distintos de trasvasije.

En las clases observadas de Valentina la secuencia de acciones en el momento de desarrollo de la clase sufre también una modificación. En la clase PRE, se trabaja a partir de ejercicios propuestos por la profesora, y los estudiantes resuelven las actividades planteadas de forma individual, en que Valentina retroalimenta de forma personal a cada estudiante. A ello se dedica casi todo el tiempo, luego dedica un espacio más reducido al anterior a resumir los procedimientos realizados en el desarrollo de la actividad, siendo ella la encargada de la elaboración de la síntesis. Formula algunas preguntas, pero se evidencia la presencia del efecto Topaze en la gestión del cierre de la clase. En cambio en las clases POST, Valentina promueve no sólo el desarrollo de ejercicios, sino que además plantea situaciones problemáticas propias de la competencia en desarrollo. Además, promueve una mayor socialización de las respuestas y de los procedimientos involucrados. Los niños han notado el cambio, pues al iniciar la segunda clase POST, Valentina pregunta qué han estado haciendo, y uno de los niños dice “una nueva forma de hacer matemática”. La evidencia disponible no permite asegurar que tal afirmación sea espontánea, pero se destaca que tal frase no se observó en clases anteriores observadas por los investigadores. Además, hacia las últimas clases, en particular en los momentos de desarrollos de las clases 3 y principalmente 4, Valentina logra problematizar los errores y dificultades, al pedir a los niños que contrasten sus respuestas y procedimientos, y decidan cuándo y qué tipo de trasvasije realizar.

Aunque es en el momento de cierre donde Valentina ha mostrado mayores dificultades, de todos modos se evidencian cambios entre las clases. En la sesión PRE el cierre es una síntesis de Valentina, y no deja suficiente espacio para sistematizar todos los conocimientos vistos en clase por lo que dos indicadores se valoran como no logrados. En cambio en la clase intermedia y en las sesiones POST Valentina socializa los procedimientos y los diferentes aspectos que se promovieron en clases. Pero solamente se han valorado como PL porque es Valentina quien protagoniza el cierre y no promueve el espacio para que los estudiantes expliquen sus razonamientos. Los niños no están acostumbrados a argumentar sus respuestas, por lo que Valentina tiene aun dificultades en lograr una buena gestión de este momento. Sólo en la segunda clase POST los niños logran dar una buena justificación matemática para el uso de la técnica, señalando que ésta se basa en completar decenas; sin embargo, no se observa que los niños justifiquen la técnica en sí. Además, los niños no logran reconocer las condiciones bajo las cuales la técnica funciona o deja de funcionar, lo que se evidencia en que algunos niños aun calculan $19+6$ usando sobreconteo. En la tercera clase, Valentina logra que los niños justifiquen la técnica, al señalar ellos que ésta se basa en la completación de la decena cuando un sumando termina en 9. Este avance es importante; sin embargo, preguntas que apunten hacia ese hecho no se observan en el cierre de la clase 4, lo cual se explica porque el foco de Valentina está en destacar los procesos competenciales emprendidos por los alumnos, al preguntar a los niños qué es lo que hicieron, cómo lo hacían antes y cómo lo hicieron durante las últimas clases. Esta gestión también es muy importante, por lo que es probable que tal importancia haya dejado en segundo plano la justificación matemática del procedimiento.

Procesos constituyentes de competencias

Los resultados para Valentina son los siguientes:

Casos		PRE	INTER	POST			
Clases		C1	C1	C1	C2	C3	C4
Indicadores	Gdc1	NO	NO	PL	L	L	L
	Gdc2	NO	NO	L	L	L	L
	Gdc3	NL	PL	L	L	L	L
	Gdc5	NL	NL	NL	PL	PL	L
	Ged1	NL	NL	PL	PL	PL	PL

En este indicador también se evidencian cambios muy significativos. Valentina en la clase PRE e intermedia no se observa que promueva procesos de competencia. Los indicadores Gdc1 y Gdc2 se han tabulado como no observado por cuanto Valentina no planificaba en términos de competencias matemáticas. Además, su gestión no considera la promoción de tales competencias, por cuanto ésta se centra en dar instrucciones procedimentales que los alumnos deben seguir. Además, no tiene control sobre las condiciones didácticas de la clase, por cuanto para trabajar sobre conteo propone una situación asociada al cálculo $0+10$, el cual ofrece grandes dificultades para los niños. A partir de la clase intermedia, y en especial en las sesiones del POST, Valentina gestiona

sus clases promoviendo la socialización de las respuestas y procedimientos, la contrastación de técnicas y producciones, con una mayor consciencia de los procesos involucrados en el desarrollo de competencias. Finalmente, en la clase 4 se observa una gestión muy importante del momento de cierre, en relación con los procesos emprendidos durante las clases anteriores. Los niños fueron capaces de establecer la diferencia respecto de cómo calculaban antes y el cómo calculan al finalizar esta clase, y argumentan respecto de cómo ello ocurrió y las ventajas de este aprendizaje. Esta gestión no sólo se hace cargo de los procesos metacognitivos de los niños, sino que además promueve que se argumente en función de los procesos competenciales.

El indicador Gdc5 muestra dificultades atribuidas al proceso de aprendizaje que viven tanto Valentina como sus alumnos, quienes tal como se señaló no estaban acostumbrados a emprender procesos de argumentación asociados a las tareas matemáticas o procesos competenciales en ejecución. En la primera clase POST se observan por primera vez intentos de Valentina por gestionar buenas preguntas en el cierre, pero tal gestión no es exitosa. Recién en la segunda clase las preguntas de Valentina y las respuestas de sus alumnos dan cuenta parcial de este indicador.

Gestión del error y dificultades:

Los siguientes son los resultados para Valentina

Casos	PRE	INTERMEDIA	POST			
Clases	C1	C1	C1	C2	C3	C4
Ged1	NL	PL	PL	PL	PL	L

La gestión del error por parte de Valentina presenta un logro aun discreto, pero significativo. En las clases PRE e intermedia, el trabajo de Valentina principalmente verifica que los alumnos estén trabajando, omitiendo los errores cometidos por los niños. En cambio, en las clases POST ella contrasta las respuestas, y exige que sean los niños quienes argumenten las distintas respuestas. Además, no es ella quien señala si la respuesta es correcta o no, sino que gestiona para que la respuesta correcta sea aquella que fue correctamente argumentada. Sin embargo, falta aun hacerse cargo del niño que comete el error, permitiendo que éste explique en qué pensó, y por qué su procedimiento no era el adecuado o correcto.

En síntesis, Valentina ha logrado una mejor gestión del error y de las producciones de los niños al contrastar respuestas, pero falta lograr una mejor gestión de los procedimientos y argumentos detrás de tales respuestas. En la clase 4 Valentina logra problematizar los errores y gestiona para su corrección; no obstante, esta clase está planteada como una clase de síntesis, y no en una clase que se hiciera cargo de la evolución de las técnicas de cálculo, por lo que se puede afirmar que este indicador está aun en desarrollo en Valentina.

6. Estudio del cambio en las prácticas de las profesoras.

En el apartado anterior se ha descrito el grado de apropiación del MCM de la muestra en diferentes instancias de reflexión, y el nivel de reflexión y desempeño de los casos. En este apartado se realiza un segundo nivel de análisis centrado en estudiar el cambio que tuvieron los tres casos seleccionados en las dos variables del estudio. Los cambios que tuvieron las profesoras desde el inicio del seminario hasta la implementación de la secuencia didáctica, es evidencia de la evaluación de la metodología de trabajo docente centrada en el MCM.

El término práctica se entenderá en el sentido amplio de la palabra, considerando los aspectos reflexivos y de desempeño. En particular, en el apartado 5.5.1 se estudia el cambio en la reflexión y en el apartado 5.5.2 los cambios asociados al desempeño

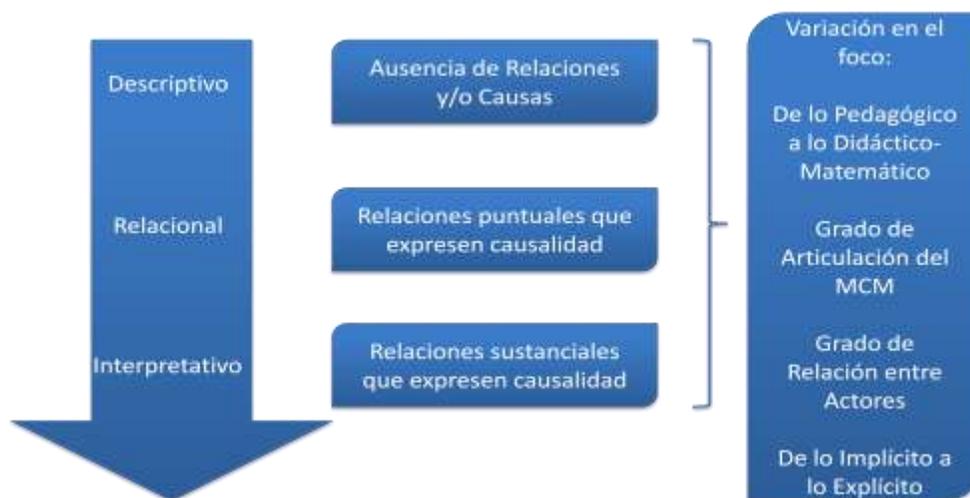
6.1 Cambio en la reflexión

El estudio de la reflexión docente se focaliza en *qué* y *cómo* reflexionan las docentes. El *qué*, se refiere a la consideración de los criterios didácticos que utiliza en el análisis de una tarea didáctica- matemática, y la presencia de un modelo didáctico que fundamente sus intervenciones, en particular la consideración de MCM estudiado en el seminario. El *cómo*, se refiere a la presencia de agentes en el análisis de una tarea tales como los alumnos y el docente, y la explicitación de los argumentos que utiliza en el análisis.

Para estudiar el cambio de la reflexión en las tres profesoras, se ha recogido los niveles de reflexión propuestos en el grupo focal y se han extendido para analizar las diferentes instancias de reflexión propuestos en la investigación. Para la caracterización de estos niveles se ha articulado con los criterios propuestos por Van Es y Sherin (2010) del tipo de análisis, relevancia de los actores y foco de análisis, adaptándolos según los requerimientos de evidenciar cambios en la reflexión.

La figura 6.1. ilustra la configuración de estos niveles que varía en función de la presencia de causalidad en las intervenciones de las profesoras. En el nivel descriptivo hay una ausencia de las relaciones de causalidad, en el nivel relacional relaciones puntuales de causalidad, en cambio en un nivel interpretativo se evidencian relaciones sustanciales de causalidad. Por otra parte el cambio en los niveles de reflexión se evidencia por cambios en el foco de análisis: en un nivel descriptivo existe una tendencia a considerar criterios de carácter pedagógicos, en cambio en los siguientes niveles desaparece para que se consideren criterios de carácter didáctico. Un segundo foco es el grado de articulación de los componentes del MCM, en los niveles altos de reflexión se esperan intervenciones en que para explicar una situación se evidencia una criterios que consideren tanto elementos competencias como de la organización matemática. Un tercer foco son los actores, en un nivel descriptivo puede centrarse en el alumno, profesor u otros actores, en cambio en un nivel interpretativo estos actores aparecen articulados. Finalmente un cuarto foco es grado de explicitación de las explicitaciones en que en un nivel interpretativo se espera que las relaciones de causalidad se expresen de manera explícita.

Figura 6.1: Niveles de reflexión



En la tabla 6.1 se presenta una graduación de cada nivel de reflexión en función de los criterios y focos descrito.

Tabla 6.1: Niveles de reflexión.

Nivel de reflexión	Los focos son:
<p>Descriptivo</p> <ul style="list-style-type: none"> No hay búsqueda de causas y relaciones <p><i>¿Qué?</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> Actor: profesor, estudiante, institución Tópico: Lo didáctico, Lo pedagógico Nivel de explicitación. <ul style="list-style-type: none"> ➤ Caracterizaciones pedagógicas de la situación ➤ Caracterizaciones didácticas de la situación, de forma exhaustiva pero fragmentadas (no articuladas con otras) ➤ Caracterizaciones didácticas de la situación, de forma exhaustiva y completa (articulando distintos elementos)
<p>Relacional</p> <ul style="list-style-type: none"> Causas que responde al para qué y por qué de una cosa en particular (aislada) <p><i>¿Para qué?</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Explicitación de causas de carácter pedagógico (que afecten la tarea matemática) ➤ Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas. ➤ Explicitación de causas de carácter didáctico articuladas de forma parcial, y de forma implícita y no intencionada en su discurso.
<p>Interpretativo</p> <ul style="list-style-type: none"> Relaciones sustanciales en función de la tarea reflexiva que se demanda analizar En este nivel lo pedagógico debiera desaparecer. <p><i>¿Por qué?</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Explicaciones de carácter didáctico, pertinentes a la tarea didáctica, articuladas de forma parcial, y de forma explícita e intencionada en su discurso. ➤ Explicaciones de carácter didáctico, pertinentes a la tarea didáctica, articuladas de de forma completa, y de forma explícita e intencionada en su discurso

En consideración a estos niveles, se caracteriza el nivel de reflexión de cada caso, en cada una de las diferentes instancias de reflexión:

La primera instancia de reflexión considerada ha sido una entrevista inicial aplicada a toda la muestra antes de comenzar el seminario. Para los efectos de este análisis se recogieron solamente las intervenciones de los casos. Otra instancia son los seminarios que representan espacios de reflexión de los profesores. Para describir el cambio se seleccionó el primero y último seminario. Otro espacio son los dos grupos focales, y finalmente las dos entrevistas realizadas a los casos sobre su propia práctica.

6.1.1. El caso de Mónica.

- **Entrevista inicial**

En la entrevista inicial, las respuestas de Mónica a las tareas didáctico matemáticas corresponde a caracterizaciones y explicitación de carácter pedagógico.

Por ejemplo, en la tarea de describir sus acciones ante respuestas equivocada de los niños, Mónica responde con acciones actitudinales que se asocian más bien a criterios pedagógicos.

<i>Mónica: les hago creer que yo me equivoqué</i>	<p>Descriptivo</p> <p>Caracterizaciones pedagógicas de la situación</p>
---	---

Además en una tarea de índole explicativa en que tenían que identificar las dificultades en comunicarse, Mónica responde con criterios ajenos a la actividad matemática asociados a criterios de clima escolar.

<i>Mónica: sienten temor a los adultos...</i>	<p>Relacional</p> <p>Explicitación de causas de carácter pedagógico</p>
---	---

- **Seminario**

En la primera sesión de seminario, algunas intervenciones de Mónica a las tareas didáctico matemáticas corresponde a caracterizaciones y explicitación de carácter didáctico pero de forma fragmentada y aislada.

Por ejemplo, en la tarea de explicar que permite en uso de esquemas en problemas aditivos, Mónica propone que permite comprender el problema, identificar qué operación se utiliza, asociar número con la medida. Explicaciones de carácter didáctico.

<i>Mónica: para que los niños entiendan de qué le están hablando, tiene que identificar el problema, saber qué les están preguntando, qué operaciones, si van a tener más, si van a tener menos</i>	<p>Relacional</p> <p>Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas.</p>
---	---

En el contexto del caso clínico visto, en la tarea de describir lo que la profesora espera que los niños aprendan. Mónica realiza una descripción de carácter didáctico dado que se centra en los aprendizaje matemático específico.

<i>Mónica: también esperaba que los niños entendieran que la adición era la suma de las partes, cuando está utilizando esas tarjetas ella lo... si yo juntaba las partes juntaba un todo, que entendieran bien qué es lo que era la adición</i>	Descriptivo Caracterizaciones didácticas de la situación, de forma exhaustiva pero fragmentadas (no articuladas con otras)
---	---

En el octavo y último seminario, Mónica hace un cambio en su tipo de análisis dado que realiza explicaciones principalmente de carácter didáctico a un nivel relacional. Por ejemplo en la tarea de analizar los procedimientos de dos niños, Mónica en su primera intervención explica el procedimiento aludiendo que es mecánico y que no razona, y en su segunda intervención contrasta los procedimientos. Sus intervenciones corresponden a una explicitación de carácter didáctico pero que se clasifica como fragmentada y no articulada porque no logra articular con otros elementos tal como la argumentación.

<i>Mónica: Entonces el niño está haciendo algo mecánico, no está razonando... Se pinta ya, o sea no se da cuenta que es un (¿?) porque él está contando.</i>	Relacional Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas.
<i>Mónica: yo insisto que el niño tiene dos visiones distintas del problema, el niño de arriba que marcó como una sola operación, todo como una sola operación y el de abajo fueron dos operaciones diferentes. Entonces si era así podría decir que estoy entre los dos, pero... tendría que decir también lo que está pasando. Porque el niño no ve el ...no quiero ver como dos condiciones diferentes.</i>	Relacional Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas

- **Grupos Focales**

Mónica en su discurso manifiesta distintos grados de reflexión. Por ejemplo, frente a la tarea de emitir un juicio respecto de una planificación con base en el MCM (FG1), ella manifiesta una reflexión que en ocasiones alcanza el nivel relacional, pues establece causas respecto del para qué se incorporaron ciertos elementos en dicha planificación en forma aislada, sin una articulación sustancial, lo que se evidencia en que no identifica las incongruencias didácticas presentes en la planificación. En este discurso se pueden observar una descripción y explicación con algunos elementos de carácter didáctico.

<i>Mónica: "Yo creo que está bien, porque primero que nada la profesora le pide a los niños que sume y reste los datos más importantes luego les pide que representen a través del esquema... eso... o sea, al subrayar los frascos el niño tiene que decir la cantidad va a crecer va a achicar si son dos cosas</i>	Descriptivo Caracterizaciones didácticas de la situación, de forma
---	---

<p><i>distintas si es una sola cosa hay ellos están aplicando razonar luego los va representar a través del esquema en el caso yo estoy suponiendo que trabajaron con cartulina y papel lustre que es lo que están utilizando para el esquema después, y eso está haciendo para la modelización claro que acá les piden que conversen que hagan todo lo que tiene indicado aquí pero principalmente ella vuelve hacer énfasis en el esfuerzo en el asunto le pregunta y vuelve a reafirmar lo que le plantea en el problema cuando dice que se debe hacer cuando se resuelve un problema, cuales son las palabras claves para que ellos que todavía no han entendido como se resolvieron los cálculos en el caso de identificar que es lo que tenía que hacer si era agregar una visión si había achicado una sustitución y después le consulta para que sirvieron los esquemas para que observara no solo mental sino que también vieran que el esquema les va a servir para vieran que la cantidad creció no que achico, así que yo creo que está bien”.</i></p>	<p>exhaustiva pero fragmentadas</p> <p>Relacional</p> <p>Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas.</p>
--	---

Posteriormente, frente a la tarea de evaluar la incorporación de un proceso en la planificación, Mónica propone modificaciones más profundas, que van desde modificar las condiciones didácticas del problema, a plantear una gestión que ponga en juego el proceso competencial.

<p><i>Mónica: “Habría que cambiar el problema como dice Ángela, porque claro está todo dado, no hay nada que investigar, le da la cantidad de fichas que tiene uno, le da la cantidad de fichas que tiene el otro frasco entonces ¿qué va a investigar?. A lo mejor podría ser que yo diera la cantidad de fichas y que el niño inventara la pregunta podría ser, entonces no le daría la pregunta si quiero hacer esto, o podría darle las cantidades cierto y que el inventara, si se perdieron, si agregamos, si ambos tienen o qué cambió la ficha de aquí cambió tantas fichas acá cuántas quedaron acá, eso podría ser para que hubiera conjetura”.</i></p>	<p>Interpretativo</p> <p>Explicaciones de carácter didáctico, pertinentes a la tarea didáctica, articuladas de de forma completa, y de forma explícita en su discurso</p>
---	---

Finalmente, al evaluar sus propias prácticas, Mónica describe los efectos de incorporar procesos de modelización en su práctica. Es relacional pues señala la relación de causa-efecto de su gestión, y también descriptivo a un nivel avanzado pues caracteriza la gestión didáctica y el pensamiento matemático de los niños.

<p><i>Mónica: “Sí, porque al modelizar yo estoy obligando al niño, con eso me está demostrando datos, entonces lo estoy obligando a ver el problema completo. Ellos inmediatamente veían 5 y 2 y decían ah 5+2 son 7, inmediatamente sumaban o sea ni siquiera se molestaban en leer, ahora como me tienen que modelizar tiene que leer, están obligados, me tienen que decir que hay 5 manzanas y se perdieron 2 manzanas, me muestran las 5 qué pasó con las manzanas, se perdieron, ya tiene que mostrar otra, qué pasó hay más manzanas o hay menos manzanas. Entonces ya</i></p>	<p>Relacional</p> <p>Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas.</p>
---	---

<p><i>inmediatamente identifican al modelizar y el leer cuál es la operación matemática que tienen que hacer, van a sumar o van a restar y eso a mí me ha servido bastante, se fueron por un tubo con la modelización porque antes yo no lo hacía, pero ahora sí lo estoy haciendo”.</i></p>	<p>Descriptivo</p> <p>Caracterizaciones didácticas de la situación, de forma exhaustiva y completa (articulando distintos elementos)</p>
--	--

Las manifestaciones de reflexiones de nivel interpretativo son más bien esporádicas en Mónica. Sus producciones son principalmente de nivel descriptivo / evaluativo, secuencia que con frecuencia organiza su discurso.

- **Análisis de la práctica**

En la primera entrevista Mónica en general da respuestas a un nivel Relacional, pero con algunas intervenciones en un nivel interpretativo.

Por ejemplo, en la tarea de analizar la argumentación de los niños. En las intervenciones que se ilustran Mónica señala el conocimiento matemático específico que se debería evidenciar por medio de la argumentación, Explicitando relaciones sustanciales entre contenido lo que asocia a un nivel interpretativo, pero aun no articulado.

<p><i>Mónica: Cuando están contestando las preguntas, cuando están diciendo, cuando el niño está diciendo, me parece mucho que es Tapia, que hay 4, que 4 decenas son 40, que son 4 veces 10, el niño dijo eso... Cuando ellos comunicaron, bien o mal comunicaron lo que ellos entendían lo que ellos decían, estuvieron aplicando también lo que habían aprendido cuando decían sumamos 10 o sumamos 1, también estuvieron reconociendo los números.</i></p>	<p>Relacional</p> <p>Explicaciones de carácter didáctico, relacionadas con el contenido, pero fragmentadas y no articuladas.</p>
--	--

En la segunda entrevista Mónica da respuestas de un nivel relacional e interpretativo.

Ante la tarea de gestionar las dificultades de un niño integrado al resolver un problema, Mónica se sitúa en un nivel relacional porque es capaz de explicitar que a través de promover el razonamiento, el niño aprende la técnica de descomposición, pero no profundiza en cómo hacerlo. Por tanto se asocia un explicitación de forma fragmentada a nivel relacional.

<p><i>Mónica: Lo fui encauzando a que fuera recordando y lo fuera viendo, por ejemplo cuando empieza él ya a trabajar con la técnica a descomponer y todo, que fuera recordando, le fui mostrando para que él llegara.., no se sintiera fracasado, sino que llegara a la respuesta igual que el resto. Esa era la intención mía, que llegara aunque nos demoráramos, pero que llegara a la respuesta, y eso fui, encauzándolo, porque en la medida de que él lo logre se va a sentir motivado y lo va a intentar la próxima vez y si le va mal va a saber que va a contar conmigo que le voy a mostrar otra vez y que</i></p>	<p>Relacional,</p> <p>Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas.</p>
---	--

<i>lo voy a apoyar para que siga, quiero que razone, que comprenda lo que está leyendo</i>	
--	--

En la tarea de describir el momento de inicio de una clase, Mónica realiza un análisis relacional en que explicita lo que sucede mediante las técnicas y competencias, articulando de forma parcial.

<p><i>Mónica: Quería ver cuál eran las técnicas que habían utilizado, que ellos me las expresaran, la comunicación también estaba aquí, que me explicaran el uso del esquema si lo habían entendido bien o no lo habían entendido, estaba viendo también lo que era, en el fondo estaba viendo todas las competencias, estaba viendo la combinación, la resolución de problemas que ahí estaba el uso del esquema, estaba la operatoria, también estaba, todo po. En el fondo lo que más me interesaba era que ellos hablaran, que participaran</i></p> <p>...</p> <p><i>Entrevistador: Tenías modelización con el uso del esquema, tenía cálculo por todas las diferentes estrategias que tenías y además tenías argumentación, tenías 3 competencias, tenías hartas competencias en la planificación. De estas competencias tú me puedes decir cuáles fueron las que más se promovieron? En las 5 clases, de estas 3 modelización, cálculo y argumentación</i></p> <p><i>Monica: Se promovieron las 3, las 3 yo creo que en igual medida porque la guía fue hecha con esa intención, lo que pasa es que aquí no se ve en el cierre, pero sí estaba durante el desarrollo de la clase, por el hecho de que como yo, como trabajo con los niños y voy uno por uno molestándolos, uno por uno me tiene que ir explicando, ya ellos me van argumentando, pero por qué hiciste esto, por qué hiciste lo otro. A la vez voy viendo si están desarrollando los problemas, la operación matemática que están utilizando, por lo tanto durante la clase se desarrollaron las 3, al final a lo mejor utilicé lo que era la comunicación para hacerlos hablar en conjunto, pero durante la clase en forma individual lo tuvieron que hacer</i></p>	<p>Relacional</p> <p>Explicitación de causas de carácter didáctico articuladas de forma parcial, y de forma implícita en su discurso.</p>
---	---

En síntesis Mónica en el análisis de las prácticas de la primera entrevista se sitúa tanto en niveles relaciones de causas fragmentadas y no articuladas., y en la segunda entrevista si bien se queda en un nivel relacional se evidencian intervenciones articuladas de forma parcial.

6.1.2. El caso de Sonia.

- **Entrevista inicial**

En la entrevista inicial, las respuestas de Sonia a las tareas didáctico matemáticas corresponden a caracterizaciones y explicitación de carácter pedagógico.

Por ejemplo, en la tarea de describir el rol de alumno, Sonia utiliza criterios amplios de carácter pedagógico.

<p><i>Sonia: Para mí, alumnos y profesores deben tener una participación activa dentro del aula. El alumno, ¿Por qué activa? Porque él tiene que participar más dentro de las actividades que uno pueda desarrollar con ellos. Y no tan solo las que uno lleva dispuestas a la clase. Ya que si bien, uno va con un objetivo de la clase y se guía por una planificación, las actividades pueden cambiar en el momento y si no me resultó una actividad con un niño, a lo mejor, preguntarle a ellos, con qué actividad crees tú que podrías aprender...</i></p>	<p>Descriptivo</p> <p>Caracterizaciones pedagógicas de la situación</p>
--	---

Además, ante la tarea de realizar seguimientos a los estudiantes, Sonia responde afirmativamente asociándolo con la importancia del rol de los padres en esta tarea. Lo que representa una explicitación de causas de carácter pedagógico a la tarea y no una explicitación de relaciones con contenido didáctico matemático claro o explícito.

<p><i>Sonia: Si, Además es importante que los niños se desenvuelvan y que los papás los apoyen. Sin lo papás los profesores no podemos hacer mucho, sin la ayuda de la familia es imposible. Yo hago talleres con las mamás, en el sentido de enseñarles como pueden desarrollar la matemática para los niños, pues ellos vienen con la enseñanza de las matemáticas (...) y de repente: tía, pero yo le voy a enseñar de una forma y usted le está enseñando de otra y se forma (...)</i></p>	<p>Relacional</p> <p>Explicitación de causas de carácter pedagógico</p>
--	---

Ante la tarea de organizar la enseñanza de la adición y sustracción con números hasta 30. Sonia plantea criterios amplios tales como evaluación diagnóstica, los momentos de la clase, los aprendizajes previos. Los que apuntan a criterios de carácter general para cualquier clase y no para la clase de matemáticas ni en particular para la tarea concreta planteada, por se considera que Sonia apuntan más a gestión pedagógica de la clase que a una gestión didáctica.

<p><i>Sonia: Creo que primero debemos hacer una evaluación diagnóstica...La colega toco un tema muy importante que es la coordinación con la colega de NT1 y NT2. Creo que ese es un tema fundamental, la articulación. (Comenta vivencia personal). Bueno, después ella decía los tres momentos que están en el desarrollo de la planificación: I, D, C. Conocer los AP para desarrollar actividades, estrategias acorde a lo que el niño sabe y luego el cierre que te permite auto, co-evaluar y le permite al profesor hacer una retroalimentación a la clase siguiente, de acuerdo a lo que los niños aprendieron, o no, durante la clase anterior. Y tener siempre una cartita bajo la manga, porque como te decía yo, hay niños... todos aprenden a ritmos distintos, entonces tener una cartita bajo la manga; si un niño terminó, entregarle otra actividad... Estructurar los distintos momentos.</i></p>	<p>Descriptivo</p> <p>Caracterizaciones pedagógicas de la situación</p>
---	---

Finalmente ante la tarea de gestionar las dificultades de los estudiantes, Sonia apunta a aspectos de clima de clase tal como apoyarse en los compañeros y criterios de gestión de los momentos de la clase tal como retroalimentación al inicio de la clase, pero sin describir dificultades propias de la clase de matemáticas.

<p><i>Sonia: Mira igual tengo la ventaja de tener poquitos alumnos (...) y exactamente lo mismo que la colega... Uso mucho el apoyo de los compañeros, que se apoyen mutuamente. Siempre digo: explícale tú, o que pase a la pizarra el que no sabe y hacerle preguntas: ¿Cómo lo harías tu?, ¿qué te cuesta? A ver ayudemos al compañero y ahí levantan la manito y (da ejemplos de intervención) e ir haciendo preguntas hasta que el niño logre aprender a su manera. Y también uso mucho la retroalimentación al inicio de la clase, porque en el ámbito en el que trabajamos la familia no te apoya mucho en casa, por lo tanto uno todos los días tiene que estar recordando el contenido: ¿Qué pasamos la clase anterior? Hacer una pequeña retroalimentación. Y la evaluación que es muy importante al final de la clase, porque yo con eso me puedo guiar para el próximo objetivo.</i></p>	<p>Relacional</p> <p>Explicitación de causas de carácter pedagógico</p>
--	---

En síntesis, en las diversas tareas propuestas en la entrevista, Sonia en general apunta a una caracterización pedagógica lo que indica un nivel de descripción básico en su reflexión. Y en algunas ocasiones un nivel relacional con una explicitación de causas, también de carácter pedagógico.

- **Seminarios**

En el primer seminario, ante la tarea de describir cómo la profesora del primer caso clínico gestiona las dificultades de los estudiantes en cálculos. Sandra realiza una descripción destacando varios elementos: promoción de las propias estrategias de los estudiantes, explicación de ellas, análisis de los errores entre compañeros, y desarrollo de la argumentación. Lo que indica un nivel alto de descripción al caracterizar con criterios didácticos de forma exhaustiva.

<p><i>Sonia: primero los deja en libertad de buscar su propia estrategia una vez que la tienen pide que la demuestren y la expliquen y al pasar al pizarrón hace que se las explique a todos los compañeros y sean capaces de analizar, de ver si se equivocaron y argumenta el niño, la niña que está en el pizarrón y también los compañeros</i></p>	<p>Descriptivo.</p> <p>Caracterizaciones didácticas de la situación, de forma exhaustiva y completa (articulando distintos elementos)</p>
--	---

En el octavo y último seminario, Sonia hace un cambio en la naturaleza de sus intervenciones dado que se asocian a nivel relacional e incluso interpretativo. Ante la tarea de evaluar las respuestas de dos estudiantes, en que el primero tiene la respuesta correcta con ausencia del procedimiento y el segundo tiene la respuesta incorrecta con una justificación correcta del procedimiento, Sonia interviene explicitando causas de carácter didáctico de lo que sabe realizar el segundo niño – nivel relacional- y

además tiene intervenciones del más alta escala en el nivel relacional al posicionarse que le asignaría mejor puntaje al segundo niño, apuntando a que éste justifica fundamentándose en la acción de la operación, dado que articula los diferentes componentes del MCM., pero de forma parcial.

<p><i>Sonia: Sabe determinar que la operación o la acción que va a llevar a, a saber ... en la justificación.</i></p>	<p>Relacional.</p> <p>Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas.</p>
<p><i>Sonia: es que si la pregunta fuera en relación solamente a la primera parte a marcar, entonces después hay una justificación, la justificación hace que uno piense diferente de asignar, por ejemplo si tuviéramos que asignar un puntaje, sí podría tener porque tiene clara identificar la acción y la operación. Ahora que la operación que él marcó no era correcta en la medida que no le iba a dar el total, pero sí sabe qué tiene que hacer y justifica correcto, incluso yo pienso que justifica mejor que el niño de arriba... porque él dice que porque se juntan los 6 autos, en cambio el niño dice porque 7+5 son 12, pero en ninguna parte habla de la acción</i></p>	<p>Relacional</p> <p>Explicitación de causas de carácter didáctico articuladas de forma parcial, y de forma implícita en su discurso</p>

- **Grupos focales**

Sonia manifiesta reflexiones de gran profundidad con mucha frecuencia a lo largo de ambos grupos focales. De hecho, se observan pocas intervenciones que manifiesten una reflexión descriptiva. Sus producciones son principalmente de nivel relacional / interpretativo.

Ejemplo de ello es que frente a la tarea de identificar y describir el propósito de la planificación de una clase, ella establece relaciones entre la gestión propuesta con ciertos procesos y sus competencias. Aquí es importante señalar que mientras la mayoría de las otras participantes respondieron identificando y describiendo (en consistencia con la tarea solicitada), Sonia va más allá de lo escrito en la planificación y señala explícitamente su interpretación de las actividades y de la gestión planificada, argumentando en forma consistente.

<p><i>Sonia: “Según lo que aparece aquí tiene 3 competencias a desarrollar: está la de resolución de problemas, la de argumentación y cálculo y manipulación de proposiciones, esos son los tres que tenía la profesora, eso veo aquí, se ve más allá que le pide representar, después usar modelos del trasvasije y los cálculos usando el modelo, cuando el razonamiento y argumentación, cuando le pide a los niños “promover que los niños discutan qué es un problema dónde se ven las partes” que hay que calcular el todo, luego “permite que los niños compartan sus respuestas y procedimientos” en la medida que compartan estas respuestas y procedimientos estaría entrando la argumentación”.</i></p>	<p>Interpretativo</p> <p>Explicaciones de carácter didáctico, pertinentes a la tarea didáctica, articuladas de forma parcial, y de forma explícita en su discurso.</p>
--	--

Además, frente a la pregunta de si había considerado una técnica en particular (trasvasije), ella se refiere a este hecho emitiendo un juicio profundo respecto de la consistencia interna de la planificación, estableciendo relaciones profundas entre las tareas matemáticas de la planificación, las competencias en promoción, y las actividades y su gestión.

<p>Sonia: <i>“También está eso del trasvasije que también, pero hay algo que me... que a mí me suena extraño, que si la tarea matemática (es) “resuelve el problema de composición directo”, hay solamente un problema y después hay cálculos, entonces ahí estaría... y hay más cálculos que problemas, hay: (cuenta) 1, 2, 3, 4 para graficar la técnica. Entonces ahí me encuentro como extraña de que si quiere resolver problemas, argumentar, a lo mejor fue que la competencia principal era modelización... no sé... pero si hay que resolver problemas, ¿por qué hay sólo el planteamiento de un problema y los otros son realizar sobre cálculos? (...) Yo pondría menos (cálculos), porque lo importante es el razonamiento que se vaya haciendo paso a paso, todo esto, ¿cierto? Porque si a los niños... quizás... si le aproblemamos más [sic], si le planteas tanto problema, él se va a confundir, porque quizás al niño le interesa resolverlo más que poder comprenderlo”.</i></p>	<p>Interpretativo, Explicaciones de carácter didáctico, relacionadas con el contenido de forma completa y articulada.</p>
<p>Sonia: <i>“Es que al principio lo vimos esto, pegada en eso, que si la tarea matemática es resolver problemas, ¿qué hacen unos cálculos sueltos ahí? En ninguna parte hablan de la competencia esta del cálculo”.</i></p>	<p>Interpretativo Explicaciones de carácter didáctico, relacionadas con el contenido de forma completa y articulada</p>

Frente a la tarea de analizar un episodio de clases (FG), Sonia explica lo observado estableciendo fuertes relaciones entre los elementos del modelo y su articulación.

<p>Sonia: <i>“Bueno ahí se ve que no importa el camino, sino... o sea, llegar sin que una técnica que la profesora diga esta es la correcta, sino que se ve que a los niños les enseñaron distintas técnicas y los alumnos tendrían que ser capaces de ver cuál es la más adecuada para ellos, la que les facilita o la que les es más cómoda, ¿ya?, se ve claramente el uso de 3 técnicas y me da la impresión que aparte de resolver problemas la profesora quería desarrollar la competencia de “Razonamiento y argumentación”, porque cada vez que los alumnos o las alumnas hicieron su planteamiento de la técnica que iban a usar o usaron se les preguntó mucho cómo lo hicieron, que explicaran lo que habían hecho, entonces pienso yo que la competencia desarrollada era razonamiento y argumentación”.</i></p>	<p>Interpretativo Explicaciones de carácter didáctico, relacionadas con el contenido de forma completa y articulada</p>
---	--

Al reflexionar sobre su propia práctica, Sonia identificó ciertas acciones que realizaba en forma inconsciente pero que producían efectos no deseados. Esto es muy importante,

pues Sonia identifica, interpreta y modifica sus prácticas en función de la reflexión sobre ésta.

<p>Sonia: <i>“Me di cuenta también en el seminario que yo personalmente si un niño me daba una respuesta correcta me quedaba, ya está bien, pero las respuestas correctas también tiene que cuestionarse (...). No, no debería haber dado al tiro el “sí”, debí haber preguntado más, pero esas han sido la cosas que he ido incorporando, no dar por hecho que el resultado es bueno de inmediato, sino que poner un poquito en duda lo que el niño hace para que expliquen y ya no me digan... a ver, como... si yo decía “¿estás seguro?”, y cambiaban repentinamente el resultado, trato de que no me digan... que no me cambien de inmediato sino que traten de defender su posición”.</i></p>	<p>Relacional</p> <p>Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas.</p>
---	---

En síntesis, las intervenciones de Sonia son muy profundas, y siempre intentó ir más allá de lo que se preguntaba o se decía, buscando explicar sus afirmaciones y juicios. Se observó además que esta profundidad se apoyó fuertemente en la articulación de los elementos del modelo, lo que supuso un soporte significativo para la reflexión de este caso. Por tanto, sus intervenciones se sitúan en un nivel interpretativo con explicaciones articuladas de forma completa y explícitas.

- **Análisis de la propia práctica**

En la primera entrevista en la tarea de gestionar las dificultades, Sonia responde mediante descripciones e interpretaciones.

En la primera viñeta Sonia describe con criterios didácticos las dificultades de los estudiantes pero sin una explicación de las causas de dichas dificultades, situándola en un nivel descriptivo

En cambio en la segunda viñeta Sonia identifica causas para explicar la dificultad que tuvieron los niños, asociadas el tipo de problema y condiciones de realización., situándola en un nivel interpretativo

<p>Sonia: <i>Bueno, pienso yo que si cuesta llevar a lo que yo quiero, me costaba que ellos vieran, yo pretendía ordenar números cierto, y en ese momento era ordenar de menor a mayor, les costó. Primero ahí hay un chico...que todavía tiene problemas de numeración, confunde muchos números... les pedí una huincha larga de cartón que hicieron las mamás que llegara hasta el 100 que ese es el ámbito que tengo que trabajar en este semestre, pero ese día trabajamos hasta el 60 no más y no, no él le cuesta, le cuesta mucho, sí le cuesta bastante. Entonces ahí que estamos recién empezando no, además que el rango que hay del 11 al 15 es como más complicado que cualquier otro, sí porque no tiene similitud con el número con el cual se va formando 12 de dónde lo van a sacar a qué (se toca la cabeza) a la palabra, el 13 puede ser porque viene del 3, pero el 14, 1 por ejemplo, 11. En cambio el 10 y 6, claro porque ahí saben al tiro, yo les digo 17 cuando empezamos 10 y 7 qué número tienen aquí ya, entonces ahí yo elegí precisamente</i></p>	<p>Caracterizaciones didácticas de la situación, de forma exhaustiva y completa (articulando distintos elementos)</p>
--	---

<i>porque estábamos trabajando hasta el 20, se supone que ellos llegan con los conocimientos.</i>	
<i>Sonia: Porque no era un problema directo, no sé, no sé, pero el asunto es que ahí ellos tenían que analizar mucho y como problema para segundo año, después yo lo planteé aquí en clase, se lo planteé a un profesor que venía de repente me decía que no, que no era adecuado. Entonces yo sentí, yo me sentí frustrada y sentí que no logré nada con los niños más que aburrirlos, más que desesperarlos a lo mejor tal como estaba yo porque de ahí que no iba por más que luchaba, al final salió pero salió como así por cansancio más que por comprensión.</i>	Interpretativo, Explicaciones de carácter didáctico, pertinentes a la tarea didáctica, articuladas de forma parcial, y de forma explícita en su discurso.

En la segunda entrevista, en la tarea de contrastar procedimientos, Sonia relaciona el aprendizaje de la técnica y su explicación para explicar el procedimiento de un niño. Por tanto Sonia se sitúa en un nivel interpretativo con explicaciones de carácter didáctico, pero sin alcanzar a articular completamente las dos importancia de aprender la técnica y de su explicación.

<p><i>Entrevistador: Y qué diferencias ves entre el tipo de respuesta de Carlos y los demás</i></p> <p><i>Sonia: Los otros tiran como una subasta no más era la respuesta, no se ve que estén manejando una técnica o que estén haciéndolo a conciencia, sino que yo pregunto 9+5 y dicen cualquier cosa, porque creo que hasta un 6 sale por ahí, a lo mejor.. no sé qué estaban pensando, pero no creo que estén aplicando lo que yo, seguramente yo estoy ahí tratando de ver si la técnica fue aprendida y eso fue al inicio de la clase o no?</i></p> <p>...</p> <p><i>Sonia: Pero es como estar evaluando el aprendizaje me da la impresión, que esa es la intención en ese momento y cuando yo noto que hay una respuesta que va hacia donde yo quiero es cuando Carlos dice que es 14 porque está dando realmente una respuesta coherente y luego explica bien la técnica que usó, porque él se dio cuenta que era lo que yo quería</i></p> <p><i>Entrevistador: Y qué dirías que aprendió Carlos cuando responde esto</i></p> <p><i>Sonia: Está aplicando la técnica del trasvasije, porque dice el 9 ya no es 9 es 10 y el 5 ya no es 5, es 4</i></p> <p><i>Entrevistador: Aprendió algo más? O está desarrollando algo más él?</i></p> <p><i>Sonia: La argumentación, está explicando, no sé qué más puede ser</i></p> <p><i>Entrevistador: Porque tú dices que la respuesta es muy buena, qué estás evaluando ahí?</i></p> <p><i>Sonia: La técnica me imagino, la explicación de la técnica</i></p> <p><i>Entrevistador: La técnica o la explicación de la técnica</i></p> <p><i>Sonia: El procedimiento usado, es decir, cómo sacó explica la</i></p>	Interpretativo Explicaciones de carácter didáctico, relacionadas con el contenido, pero fragmentadas y no articuladas
--	--

<i>técnica al tiro</i>	
------------------------	--

Ante la tarea de describir el cierre, Sonia explica criterios didácticos para la gestión del cierre, y es capaz de decir que no se promueven competencias porque los niños no intervienen. El saber identificar los elementos presentes como ausentes se asocia a un nivel interpretativo, en que las explicaciones pueden ser fragmentadas, dado que no se evidencia que sean articuladas.

<p><i>Sonia: En esa clase se trataba que era una ejercitación de las técnicas, pero ellos tenían que ser capaces de elegir la adecuada para ese momento y de eso se trata ahí, yo hago el análisis de que fueron capaces de elegir la técnica adecuada de las 2 que les había dado y hago notar que hay algunos que obvian el paso de dar se convierte, sino que al tiro lo piensan, y en esa clase que era la 4º habían niños que lo hacían ya ah, 79, 80 y el otro 5, 4, 84, yo creo que ahí se logró, la idea era saber elegir la técnica adecuada, aplicarla y eso. No veo que yo esté ahí como sistematizando, les pedimos, no estoy sistematizando la técnica o las técnicas, sino que estoy viendo que sí se puede elegir, que sí son capaces de hacerlo, como que les hago ver de que ellos fueron capaces de cumplir, elegir y aplicar la técnica</i></p> <p><i>Entrevistador: Tú percibes que estas promoviendo competencias en este cierre</i></p> <p><i>Sonia: es que ese cierre lo hago yo no más, eso es mío, los niños no tienen mayor participación, ese es el cierre de la unidad en general y ahí lo hago yo, es propio, yo no veo la competencia en el niño, que argumente por ejemplo, porque el cierre, mire un niño ahí me escucha.</i></p>	<p>Interpretativo</p> <p>Explicaciones de carácter didáctico, pertinentes a la tarea didáctica, articuladas de forma parcial, y de forma explícita en su discurso.</p>
---	--

En síntesis Sonia en el análisis de las prácticas de la primera entrevista que se sitúa tanto en niveles descriptivos como interpretativos, en la segunda entrevista se afianza en un nivel interpretativo.

6.1.3. El caso de Valentina.

- **Entrevista inicial**

En la entrevista inicial, las respuestas de Valentina a las tareas didáctico matemáticas corresponden en general a caracterizaciones y explicitación de carácter pedagógico y en algunas ocasiones descripciones de carácter didáctico.

En la tarea de describir los criterios que utilizan para organizar la enseñanza, señala el objetivo, los momentos y recursos, que responden a una caracterización más bien pedagógica de la enseñanza

<p><i>Valentina: hay que tener claro el objetivo, y desde ahí ver lo que tienen que aprender, el cierre, los recursos que las actividades sean progresivas...</i></p>	<p>Descriptivo</p>
---	--------------------

	Caracterizaciones pedagógicas de la situación
--	---

En la tarea de describir el momento de inicio de una clase, Valentina utiliza criterios amplios que no consideran la actividad matemáticas a enseñar, y de carácter pedagógico.

<i>Valentina: primero, les entrego un problema, lo leemos en conjunto y lo resolvemos así. Ellos me dicen lo que hay que ir haciendo, marcamos los datos, la pregunta... y después aplico la guía de trabajo... resolvemos con algún niño en la pizarra en conjunto... con problemas. Generalmente trabajo el algoritmo primero, después los problemas...</i>	Descriptivo Caracterizaciones pedagógicas de la situación
---	--

Por otra parte, en la tarea de describir sus acciones ante respuestas equivocada de los niños, por única vez en la entrevista Valentina además de dar descripciones de carácter pedagógico, menciona explicaciones de la dificultad que considera el contexto matemático -porque no manejan la numeración- .

<i>Valentina: revisamos, se da la respuesta correcta. Entonces algún compañero que pase a explicar y se comprueba con el apoyo del compañero. Yo apoyo al niño que lo hizo bien... pero él lo explica.</i>	Descriptivo Caracterizaciones pedagógicas de la situación
<i>Valentina: a veces lo hago yo, pero cuando salen ellos los apoyo de atrás. Uno los va ayudando pero ellos lo hacen... se equivocan porque no manejan la numeración... A veces no saben que palabras usar y yo les ayudo con eso... que se sientan apoyados</i>	Relacional Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas.

- **Seminario**

En la primera sesión de seminario, las intervenciones de Valentina a las tareas didáctico matemáticas corresponden a caracterizaciones de carácter pedagógico, y didáctico de forma fragmentada y aislada.

Por ejemplo, en la tarea de estudiar esquemas. Valentina describe el uso de los esquemas como un recurso para la comprensión del problema, sin profundizar en lo que significa comprender un problema. Entender el esquema como solo un recurso se asocia a una caracterización de carácter pedagógico en un nivel descriptivo.

<i>Valentina: para que como utilizarlo como recurso para ayudar al niño a que entienda el problema lo vayan, lo vayan analizando, porque no lo analizan</i>	Descriptivo Caracterizaciones pedagógicas de la situación
---	--

En el contexto del caso clínico visto, en la tarea de describir lo que la profesora espera que los niños aprendan. Valentina realiza una descripción de carácter didáctico dado que vincula las expectativas de aprendizaje con aplicar diferentes estrategias que se han aprendido de antemano.

<p><i>Valentina: ella quería que ellos aplicaran diferentes estrategias que habían aprendido con anterioridad a la resolución de problemas</i></p>	<p>Descriptivo</p> <p>Caracterizaciones didácticas de la situación, de forma exhaustiva pero fragmentadas (no articuladas con otras)</p>
--	--

En la octava sesión de seminario, Valentina tiene un cambio en su tipo de análisis dado que realiza descripciones y explicaciones de carácter didáctico de mejor calidad que en la primera sesiones.

Por ejemplo, en la tarea de describir las producciones de dos estudiantes, Valentina realiza una caracterización de las respuestas de cada niño lo que representa una descripción exhaustiva y completa. Para luego explicar los procedimientos de los niños en un nivel interpretativo.

<p><i>Valentina: En la, en la número uno la respuesta uno identifiqué y lo comentamos de que el niño hace, asigna un, establece una secuencia numérica, asigna un número a cada elemento a cada autito. Pero él sigue un orden que él establece que es hacia abajo, después hacia arriba, mantiene una secuencia. En el caso dos él asigna un número pero no sigue una secuencia, llega hasta 6 y después repite lo mismo del 1 al 6, entonces ahí se encuentra que en el medio se le asignan 2, 2 números a el mismo elemento, entonces el llega hasta 6 pero (¿?) de una secuencia... El, el primer caso el niño como asignó un número a cada elemento, estableció una secuencia, llegó hasta el 12, para él su resultado es el 12, pero en la situación en general ninguna dice 12. Entonces él asocia de que 7+5 son 12, o sea tiene claro lo que es juntar, lo que, tiene claro lo que es la operación, lo que debe hacer.</i></p>	<p>Descriptivo</p> <p>Caracterizaciones didácticas de la situación, de forma exhaustiva y completa (articulando distintos elementos)</p>
<p><i>Valentina: Lo que pasa es que yo aquí marco, yo también tenía una duda de que, pero Nelly me dice, me dice, yo pensé que el niño no tiene claro el concepto de juntar, pero sí porque abajo en la respuesta él lo tiene, dice "porque se juntan los 6 autos + los 7 que van" en su respuesta lo da él, lo que pasa es que secuenció.</i></p>	<p>Interpretativo</p> <p>Explicaciones de carácter didáctico, pertinentes a la tarea didáctica, articuladas de forma parcial, y de forma explícita en su discurso.</p>

- **Grupos focales**

Valentina manifiesta también reflexiones profundas con frecuencia a lo largo de ambos grupos focales. De hecho, se observan pocas intervenciones que manifiesten una reflexión descriptiva.

Frente a la tarea de identificar el propósito de la planificación, ella fue la única que identificó procesos competenciales como parte del objetivo de la clase. Además, y en forma espontánea, propone una modificación de las condiciones didácticas de la clase para dar mayor consistencia interna a la clase. Es decir, y al igual que Sandra, Valentina va más allá tanto de lo pedido como de lo que se observa en la planificación.

<p>Valentina: <i>“Yo bueno como dije anteriormente, yo según mi opinión en cómo está en el desarrollo el problema, a lo mejor ellos ya manejan la técnica del trasvasije, yo lo habría dado en vez del cálculo le habría dado, puesto un problema más para ver si ellos realmente entienden lo que están haciendo, están comprendiendo, están siguiendo los pasos, están aplicando la modelización, que están haciendo el esquema y todo, pero yo suponiendo de que ellos ya manejan esta técnica, porque se supone, yo acá estoy preguntando, estoy haciendo el cierre de manera reflexiva, les estoy preguntando cómo resolvieron, para qué sirvieron los esquemas, cómo resolvieron el problema, entonces ellos me van a explicar cómo lo resolvieron, cómo realizaron el cálculo si tiene ahí tantas fichas 500, 657 y el otro tiene 99 cómo realizaron ese cálculo, entonces se supone que ahí me van a explicar que técnica utilizaron ellos. Entonces yo no les habría hecho estos cálculos, les habría hecho un problema más”.</i></p>	<p>Relacional</p> <p>Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas.</p> <p>Interpretativo</p> <p>Explicaciones de carácter didáctico, pertinentes a la tarea didáctica, articuladas de forma parcial, y de forma explícita en su discurso.</p>
--	--

Un hecho destacable de Valentina son las interpelaciones que realizó, en función de la opinión de otras participantes. En lo siguiente, se pondrá foco en las manifestaciones de Valentina, y el resto del texto se considera como contexto para el análisis.

<p>Marta: (...) <i>En lo que sí encuentro un poco pobre el hecho de que se enfatizó poco en que el niño de alguna forma representara y explicara la situación del problema en el sentido de que por ejemplo lo representara con un dibujo, con algo, para que lo pudieran explicar y ellos lo pudieran comprender, fuera más allá porque tenemos que pensar en todos los niños, eso siempre lo hemos conversado con la colega, tenemos que conversar con esos niños que tienen problemas de dificultad, los niños que les cuesta más y generalmente a través del dibujo ¿cierto?, ellos comprenden más, ¿cierto?, pueden llegar a esto, no podemos dejar... entonces para mi (es) fundamental que ellos siempre representen de alguna forma porque a mí me ha facilitado eso, ¿cierto?, me ha facilitado y que los niños sobre todo los niños con más problemas y problemas específicos del aprendizaje, ellos de alguna forma, ellos tienen que</i></p>	
--	--

<p><i>razonar y de alguna forma representarse en dibujitos y ahí lo pueden comprender, esa parte es lo pobre.</i></p> <p><i>Moderador: Tú identificas que hay algo ahí pobre y lo que harías para mejorarlo, ¿qué elementos del modelo estarías mejorando? ¿Qué cosas estarías promoviendo al mejorar eso?</i></p> <p><i>Marta: Que los niños, por ejemplo como explicaba anteriormente, de representar de alguna forma, un esquema en algo, ¿cierto?, que de alguna forma se le dé énfasis en que los niños expliquen de por qué utilizaron ese esquema y de alguna forma ellos... porque ellos de alguna forma van a tener que pensar por qué ese dibujo para ellos representa el problema.</i></p> <p><i>Valentina: (interviene) Pero ahí yo, perdón, yo no entiendo ahí, tú te refieres a que no está como...</i></p> <p><i>Marta: O sea, no se le dio mucho énfasis a eso en la actividad, la actividad propiamente tal dentro de la clase.</i></p> <p><i>Valentina: Sí... porque acá dice que se les pide que ellos dibujen el esquema</i></p> <p><i>Marta: Ya, pero nada más.</i></p> <p><i>Valentina: Después se les dice “promover que los niños discutan”, que es un problema donde, si bien... bueno a lo mejor ahí... a lo mejor tú encuentras que es muy poco un problema (solamente), pero ahí viene explícito que se está promoviendo.</i></p> <p><i>Marta: (en silencio, lee la planificación).</i></p> <p><i>Moderador: Esperemos un segundo para ver que Marta ordene sus ideas y responda.</i></p> <p><i>Marta: Está bien específico, pero me refiero en el sentido de que aquí cuando esquematicen el problema, que los niños de alguna forma... por qué utilizaron ese problema y por qué lo hicieron así, porque después pide promover a los niños que discutan que es un problema en dónde se dan las partes para... bueno, ahí más que nada, cuando nos vamos al problema propiamente tal.</i></p>	<p>Relacional</p> <p>Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas</p>
--	--

Con su intervención, Valentina problematiza la reflexión de Marta. Es importante destacar que este caso formula preguntas para poder comprender mejor la idea del otro, y luego contrasta tales ideas con evidencia presente en la planificación.

Posteriormente, interpela a Ángela. La discusión entre ambas versa sobre la discrepancia entre decisiones didácticas de gestión y planificación de la clase, así como de la relación que existe entre condiciones didácticas y competencias en promoción. La intervención de Valentina no problematiza a Ángela, pero la obliga a refinar su descripción y argumentación.

<p><i>Ángela: “Sabes que yo mientras más la leo más le doy vuelta al tema que yo creo que aquí estamos abarcando mucho y apretando poco, porque dice resolver problemas, ya vamos al tema de la modelización y le voy a dar el énfasis a que el niño modele (...), no debería haber utilizado ponte tu el tema de los cálculos de la técnica porque yo estoy trabajando el tema de modelos y estoy también haciendo énfasis al tema de trasvasije, entonces a lo mejor debería haber utilizado cifras en las que no hubiera tenido que intervenir en el tema del trasvasije, si no que hubieran sido solo cifras y ahí</i></p>	
--	--

<p><i>haberle dado el énfasis al niño de que modelara y a lo mejor ahí hubiera trabajado otro problema más abajo para que hubiéramos seguido modelando entonces a lo mejor hay hubiéramos seguido reflexionado el mismo tema y otro problema con la misma no técnica sino que ya agrupar o ir juntando pero ir trabajando sobre lo mismo que vayamos modelando que los niños se vayan acostumbrado al esquema que vayamos viendo gráficamente lo que significa y la connotación numérica decía como no tan importante y la utilización de la técnica finalmente esta de mas la habré utilizado finalmente en otra clase esto debería haber sido dos clases o dos situaciones no la misma”.</i></p> <p>(...)</p> <p>Valentina: <i>“Yo un poquito discrepo con ella en la cantidad que decías tú de 657 y 99. Tú decías que... a lo mejor yo lo entendí mal”.</i></p> <p>Andrea: <i>“Que no era significativo respecto de la técnica del trasvasije, otro número que no hubiera tenido que involucrar esa técnica”.</i></p> <p>Valentina: <i>“O aquí en la reserva cierto tú decías eso, pero yo lo pensaba mientras tú lo decías, yo pensaba que como es modelización y tenían que ver con la técnica y a lo mejor ella está intencionado que utilicen la técnica del trasvasije... por algo les dio los cálculos acá bajo a lo mejor”.</i></p> <p>Andrea: <i>“No si de hecho esta intencionados”.</i></p> <p>Valentina: <i>“Están intencionados entonces a lo mejor están bien los números lo que quiere es que utilicen el por eso yo decía a lo mejor en el inicio ella hizo un refuerzo o recordó la técnica del trasvasije, la trabajaron un poquito al inicio y después le presento el problema para que lo apliquen y lo pueda aplicar hay y si fuera eso lo números están bien porque ella quiere que utilicen la técnica”.</i></p> <p>Moderador: <i>“O sea... bajo condiciones de que sea trabajada la técnica previamente, ¿tú estarías de acuerdo con la planificación?”.</i></p> <p>Valentina: <i>“Sí, porque yo siento que la trabajó antes entonces, ella quiere que ahora la apliquen, la apliquen en el problema”.</i></p>	<p>Relacional</p> <p>Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas</p>
---	--

En el FG2, Valentina interpela a Laura, quien en su argumentación planteó que clases como observada en el episodio no resultarían en su contexto, puesto que sus alumnos son diferentes, con lo que tribuye el éxito del proceso a causas ajenas a la enseñanza. Valentina plantea su discrepancia con Laura, explicando que ello depende de causas didácticas, tales como la ausencia de técnicas de cálculo promovidas por el proceso de enseñanza.

<p><i>Laura: “Yo creo que en esta clase por ejemplo la profesora le ha enseñado muchas estrategias a los niños, porque no solamente uno maneja una sola técnica, sino que... o una (sola) estrategia, maneja más de una estrategia; por ejemplo, hay alumnos que aparte de descomponer, o sea de usar por ejemplo la... el sobreconteo, también usa el cálculo mental, o sea, ellos ya tienen, están más diestros en lo que tiene que ver con este tipo de problemas.</i></p>	
---	--

<p><i>Además que yo siento que ellos no tienen vacíos anteriores tampoco, o sea como pasa con nuestros niños que tienen muchos vacíos... entonces acá no. Seguramente el tipo de niño es distinto al nuestro, me da la impresión. La profesora, que lo que quisiera es que el niño se dé cuenta de su error, y que preguntara también quién desea pasar al pizarrón, y darse cuenta que no era sólo uno sino que eran muchos los que querían pasar al pizarrón. O sea, yo encuentro que el curso es muy bueno y la profesora también es... uy, ha hecho muy bien su trabajo respecto a estos niños”.</i></p> <p>(...)</p> <p>Valentina: <i>“Yo igual considero con lo que aportaban las colegas, pero no estoy de acuerdo con la colega de que los niños son diferentes, todos los niños son iguales, pero está en cómo se les han entregado a ellos las herramientas, las técnicas para que ellos puedan resolver la situación problemática que se les presenta, ahora como decía Sonia, sí en todos los cursos hay una diversidad, es difícil, no conozco la realidad de ese curso, pero no creo que sean todos como buenos, a lo mejor tienen las técnicas, tienen las herramientas para resolver los problemas porque han trabajado bastante y por eso ellos, hay diversidad aparecen todas estas técnicas, pero pienso que no es que sean todos buenos, justo un curso con todos buenos”.</i></p>	<p>Interpretativo</p> <p>Explicaciones de carácter didáctico, pertinentes a la tarea didáctica, articuladas de forma parcial, y de forma explícita en su discurso.</p>
--	--

En síntesis, las producciones de Valentina son principalmente de nivel relacional. La principal diferencia con el caso de Sonia, es que Valentina alcanza altos niveles de reflexión al interpelar a otros. Ella es la única que manifiesta su desacuerdo en forma espontánea con otras participantes en la realización de los grupos focales, y lo hace en un sentido constructivo (busca comprender y profundizar la opinión del otro) y de reflexión (explica el motivo de su desacuerdo en un contexto dialógico).

- **Análisis de la propia práctica**

En la primera entrevista Valentina en general da respuestas a un nivel Relacional, pero con algunas intervenciones en un nivel interpretativo.

Por ejemplo, Valentina al reflexionar sobre su práctica identifica que le da otorga muchos andamiaje a los niños. Con ello, establece una relación de causalidad entre la gestión de clase con una práctica particular que es el andamiaje. Al ser de forma amplia se sitúa a un nivel relacional.

<p>Valentina: <i>Yo creo que sí, a lo mejor sí, yo veo que sí, y en general en mí, porque yo recuerdo muy bien una clase en que vimos un video anterior y llegamos en realidad a la conclusión de que uno de repente comete el error de darle muchos andamiajes al niño, entonces no deja de que ellos encuentren las respuestas entonces (...) yo en base a eso he ido modificando bastantes cosas como yo hacia las clases, e modificado hartas cosas pero no porque se me</i></p>	<p>Relacional</p> <p>Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas.</p>
--	---

hayan ocurrido a mí, he ido observando y con esto de los seminarios me han servido bastante

En la segunda entrevista Valentina da respuestas de un nivel descriptivo con caracterizaciones exhaustivas y completas y también intervenciones de un nivel interpretativo articuladas parcialmente.

Por ejemplo, en la tareas de describir el cierre de una clase, Valentina se sitúa en un nivel descriptivo con caracterizaciones exhaustivas y completas, porque es capaz de describir la técnica de trasvasije no solo como un procedimiento que es parte de un contenido, sino también como una competencia, es capaz de entender la capacidad de calcular tanto como una tarea matemática que se trabaja mediante técnicas específicas y como una competencia que se trabaja a largo plazo en que las diferentes técnicas representan contextos para el desarrollo del cálculo.

<p><i>Valentina: En ese cierre fue que ellos se dieran cuenta de la técnica que estábamos trabajando, que antes utilizábamos otras técnicas que esta era una nueva técnica y que la idea de esta nueva técnica es que nos facilite el cálculo que estábamos haciendo, porque antes contábamos con cinta, con otros objetos y ahora teníamos la nueva técnica que nos iba a ayudar y que ellos se dieran cuenta que era más eficiente esta técnica para determinados casos, cuando tenemos que terminan en 8 agrego 2, cuando terminan en 9 agrego 1 para formar la decena, eso más que nada se enfocó el cierre</i></p> <p><i>Entrevistador: Y qué competencias crees tú, bueno hay competencias que están promoviendo en este cierre o no</i></p> <p><i>Valentina: Podría ser, yo hice una síntesis de lo que habíamos trabajado en la clase y que argumentaran ellos, a ver no sé si que me explicaran, porque les pregunté si era más efectiva esta técnica que la otra, no me recuerdo si les pregunté por qué en realidad</i></p> <p><i>Entrevistador: Bueno pero si fuera el por qué, si preguntaras el por qué tú estabas asociando que</i></p> <p><i>Valentina: Que estoy promoviendo la argumentación porque me van a explicar por qué</i></p> <p><i>Entrevistador: cuándo tú estás promoviendo la argumentación, qué tipo de preguntas haces</i></p> <p><i>Valentina: Les consultaría o les consulté, no sé, si acaso era eficaz la técnica que estábamos aprendiendo y por qué. Entonces yo les tendría que haber preguntado, no sé si lo hice, por qué era más eficaz, por qué nos servía más en ese minuto para ese tipo de ejercicio, por eso me parece que les hice que si venía otro número y no tenía más deditos, entonces como ,para que se dieran cuenta de que esta técnica nos ayuda, que no siempre voy a tener los palitos, los lápices, los deditos o la cinta</i></p>	<p>Descriptivo</p> <p>Caracterizaciones didácticas de la situación, de forma exhaustiva y completa (articulando distintos elementos)</p>
---	--

6.1.4. Trayectorias de reflexión

A modo de describir la trayectoria de cada uno de los casos, en la tabla 6.2 se describen los niveles de reflexión que se presentan en las diferentes instancias de reflexión.

Las tres profesoras evidencian cambios en sus trayectorias reflexivas. En los primeros niveles las tres se sitúan en un nivel descriptivo en una caracterización pedagógica, y a modo que avanzan en las diferentes instancias reflexivas las profesoras avanzan en los niveles interpretativos.

Las profesoras tienen diferentes trayectos en sus niveles de reflexión, Mónica muestra intervenciones a un nivel interpretativo en la última instancia reflexiva, y en la escala más baja de este nivel. Sonia desde mucho antes se sitúa en este nivel interpretativo, desde la primera entrevista y sobre todo en el grupo focal. Si bien tiene algunas intervenciones en la escala más alta, en general sus reflexiones están en la primera escala. Valentina si bien en la última instancia se sitúa en un nivel interpretativo, desde las instancias anteriores muestra intervenciones en ese nivel, desde los grupos focales.

Tabla 6.2: Trayectorias niveles de reflexión de los tres casos.

	Entrevista	Seminario (1 y 2)	Seminario (7 y 8)	Análisis práctica 1	Grupos focales	Análisis práctica 2
Mónica	Descriptivo Caracterizaciones pedagógicas de la situación	Descriptivo Caracterizaciones didácticas de la situación, de forma exhaustiva pero fragmentadas	Relacional Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas.	Relacional Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas.	Relacional Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas.	Relacional Explicitación de causas de carácter didáctico articuladas de forma parcial, y de forma implícita en su discurso.
Sonia	Descriptivo Caracterizaciones pedagógicas de la situación	Descriptivo. Caracterizaciones didácticas de la situación, de forma exhaustiva y completa (articulando distintos elementos) Relacional.	Relacional Explicitación de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas.	Interpretativo Explicaciones de carácter didáctico, pertinentes a la tarea didáctica, articuladas de forma parcial, y de forma explícita en su discurso.	Interpretativo Explicaciones de carácter didáctico, pertinentes a la tarea didáctica, articuladas de forma parcial, y de forma explícita en su discurso.	Interpretativo Explicaciones de carácter didáctico, pertinentes a la tarea didáctica, articuladas de forma parcial, y de forma explícita en su discurso.
Valentina	Descriptivo	Descriptivo Caracterización	Relacional Explicitación	Relacional Explicitación	Interpretativo	Interpretativo Explicaciones

	Caracterizaciones pedagógicas de la situación	es didácticas de la situación, de forma exhaustiva pero fragmentadas (no articuladas con otras)	de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas.	de causas de carácter didáctico, pero fragmentadas y no articuladas	Explicaciones de carácter didáctico, pertinentes a la tarea didáctica, articuladas de forma parcial, y de forma explícita en su discurso.	s de carácter didáctico, pertinentes a la tarea didáctica, articuladas de forma parcial, y de forma explícita en su discurso.
--	---	---	--	---	---	---

6.2. Cambio en el desempeño

Para estudiar el cambio en el desempeño en las tres profesoras, se ha discutido cuáles serían los temas paradigmáticos en que deberían situarse los cambios de las profesoras. Para definirlos se han reorganizado los indicadores de la pauta de observación de planificaciones y gestión de la enseñanza en focos que permitieran caracterizar este cambio, de este análisis se derivó a cinco focos que permiten explicar los cambios en las profesoras.

El primer foco es problematización, asociado con tareas en que se promueve una problematización de la actividad matemática escolar mediante la activación de los conocimientos previos, formulación de situaciones que provoquen un conocimiento matemático nuevo y una evolución de las técnicas. Indicadores asociados a los momentos de inicio de la clase y desarrollo de la clase.

El segundo foco es articulación, caracterizado por medio de indicadores del momento de inicio y cierre centrados en promover la articulación entre los conocimientos previos con el conocimiento matemático nuevo.

El tercer indicador es finalidad, entendido como intención y sentido de la actividad matemática, los indicadores presentes se asocian principalmente a entender la problematización de la actividad matemática, los procesos competenciales y gestión del error.

El cuarto foco es la argumentación, asociada a que los estudiantes comuniquen, justifiquen y contrasten sus procedimientos e ideas matemáticas.

Finalmente, el quinto foco es la socialización, que promueve la argumentación colectiva de los procedimientos e ideas matemáticas.

La tabla 6.3. describe los focos en función de los indicadores que se han seleccionado para caracterizar tales focos- tanto de la pauta de análisis planificación como de la pauta de observación de clases. Si bien los indicadores de las respectivas pautas se han unido y adaptado, se ha optado por mantener la codificación original para facilitar el contraste con los resultados.

El desempeño de un profesor en el aula de matemáticas se puede caracterizar por el dominio en estos focos., que a su vez se evalúa por su dominio en cada uno de los indicadores, mientras más indicadores logrados mejor dominio en el foco.

6.3. Dimensiones de cambio según indicadores de desempeño

Focos	Indicadores sustanciales de cambio
Problematización	<p>La profesora activa adecuadamente los conocimientos previos pertinentes al propósito de la clase (Pco1 y Gco1)</p> <p>La profesora formula una situación problemática abordable para los estudiantes que incluye el conocimiento matemático nuevo (Pmc1 y Cmc1)</p> <p>La profesora gestiona adecuadamente las actividades diseñadas para provocar una evolución en las estrategias o técnicas utilizadas por los alumnos (Pmc4 y Gmc4)</p>
Articulación	<p>La profesora activa adecuadamente los conocimientos previos pertinentes al propósito de la clase (Pco1 y Gco1)</p> <p>La profesora realiza una síntesis y sistematización adecuada acerca del nuevo conocimiento matemático abordado en la clase, articulándolos con los conocimientos previos. (Pmc8 y Gmc8)</p>
Finalidad (Intención y sentido)	<p>La profesora gestiona adecuadamente para que la mayoría de los niños comprendan la problematización de la actividad matemática y con ello actúen. (Pmc3 y Gmc3)</p> <p>La profesora gestiona adecuadamente las actividades matemáticas que activan los procesos que involucran la competencia declarada (Pdc1 y Gdc1)</p> <p>La profesora gestiona adecuadamente en el cierre de la clase preguntas sobre aspectos de la actividad matemática que permiten reconocer en los alumnos los procesos en juego Pdc5 y Gdc5)</p> <p>La profesora gestiona los errores o dificultades de los alumnos haciendo preguntas que permitan problematizar el error o dificultad. (Ped2 y Ged2)</p>
Argumentación	<p>La profesora da un tiempo adecuado para que los alumnos comuniquen sus producciones iniciales (estrategias, resultados, explicaciones). (Pmc2 y Gmc2)</p> <p>La profesora estimula la contrastación entre procedimientos usados alumnos de modo que reconozcan los alcances y limitaciones de los procedimientos y conocimientos matemáticos usados en la clase. (Pmc6 y Gmc6)</p> <p>La profesora gestiona la clase planteando preguntas clave de tal modo que los alumnos comuniquen sus ideas y las argumenten (Pdc3 y Gdc3)</p>
Socialización	<p>La profesora promueve que todos los estudiantes comuniquen con coherencia y claridad sus procedimientos e ideas matemáticas (Pmc5 y Gmc5)</p> <p>La profesora promueve que los alumnos analicen y evalúen las estrategias y el pensamiento matemático de los demás, para que impacten en los procedimientos e ideas matemáticas. (Pmc7 y</p>

	Gmc7) La profesora gestiona que, en forma colaborativa con los estudiantes, surjan las justificaciones de la actividad matemática realizada en la clase. (Gmc3 y Gmc6)
--	---

En los siguientes apartados se analiza el cambio en el desempeño en los focos. En primer lugar se realiza el análisis en función de los indicadores de planificación para cada uno de los casos, para luego un análisis en función de los indicadores de observación de clases.

6.2.1. Cambios en la preparación de la enseñanza

6.2.1.1. Caso Mónica

Focos	Indicadores	PRE				POST			
		P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4
Argumentación	Pmc2	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
	Pmc6	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
	Pdc3	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
Articulación	Pco1	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
	Pmc8	NO	NO	NO	NO	NO	NL	NO	NO
Socialización	Pmc6	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
	Pmc5	L	L	L	L	NO	NO	NO	NO
	Pmc7	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
Finalidad	Pmc3	PL	PL	PL	PL	PL	PL	PL	PL
	Pdc1	NO	NO	NO	NO	PL	PL	PL	PL
	Pdc5	NL	NL	L	L	PL	PL	PL	PL
	Ped2	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
Problematización	Pco1	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
	Pmc1	NL	NO	NO	NO	PL	PL	PL	PL
	Pmc4	NL	L	PL	L	NO	NO	NO	NO

Respecto al cambio en cuanto al nivel de logro de los distintos focos, se puede apreciar que:

- En el foco Argumentación, Mónica no logra evidenciar un desempeño adecuado ya que ni en sus planificaciones PRE ni tampoco en las POST explicita dar los espacios para que los estudiantes comuniquen sus producciones iniciales, tampoco que contrasten los procedimientos utilizados y no se intencionan preguntas claves para que los alumnos y alumnas comuniquen sus ideas.
- En el foco Socialización, Mónica no lo logra evidenciar un desempeño adecuado, pues sus planificaciones POST no contemplan:

- Que los alumnos tengan un tiempo adecuado para que comuniquen sus producciones iniciales (estrategias, resultados, explicaciones). Es singular, que en las planificaciones PRE sí lo tiene logrado.
- La contrastación entre procedimientos usados por los alumnos de modo que reconozcan los alcances y limitaciones de los procedimientos y conocimientos matemáticos usados en la clase.
- Preguntas claves de tal modo que los alumnos comuniquen sus ideas y las argumenten.
- En el foco Finalidad, Mónica presenta un desempeño heterogéneo en los distintos indicadores, pero claramente lo observado permite establecer que su desempeño no es adecuado y no se evidencia un cambio positivo en este foco. Es así como:
 - Respecto a planificar que en el momento de desarrollo los alumnos comprendan la problematización de la actividad matemática y con ello actúen, Mónica no evidenció cambio desde sus planificaciones PRE hacia las POST, aunque siempre lo logró parcialmente.
 - Respecto a proponer actividades donde se abordan adecuadamente algún proceso de la competencia predominante declarada, Mónica evidenció progresos pero no al punto de lograrlo pues en las planificaciones PRE fue no observado y en cambio en las POST fue PL.
 - Respecto a la planificación del cierre donde incluye preguntas sobre aspectos de la actividad matemática que permiten reconocer en los alumnos los procesos en juego de la clase, Mónica en sus PRE no lo logra en las dos primeras pero sí en las dos últimas. No obstante, en las planificaciones POST se evidencia un retroceso ya que en sus cuatro clases aparece como PL este aspecto .
 - Respecto a planificar dejando explícito las posibles preguntas que permitan problematizar el error o la dificultad, ella no lo deja en forma explícita en ninguna de las planificaciones. De hecho no se observa ni en las planificaciones PRE ni POST.
- En el foco Problematización, Mónica desde las planificaciones clase PRE hasta las clases POST muestra un desempeño que no evidencia cambios en sentido positivo, más aún claramente los cambios son en sentido negativo. Por ejemplo, esta profesora ni en PRE ni en POST incluye la activación de los conocimientos previos pertinentes al propósito de la clase. Respecto a incluir preguntas o actividades que permitan provocar una evolución en las estrategias o técnicas utilizadas por los alumnos, existe un retroceso pues en las PRE estaba PL en cambio en las POST no aparece observado. En donde sí se evidencia un cambio positivo desde PRE a POST es en la inclusión de situaciones problemáticas al inicio de la clase que incluyan el conocimiento matemático nuevo.

6.2.1.2. Caso Sonia

	Indicadores	PRE				POST			
Focos	PLANIF	P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4

Argumentación	Pmc2	NO	NO	NO		NL	NL	PL	L
	Pmc6	NO	NO	NO		PL	NL	NL	NL
	Pdc3	NO	NO	NO		L	L	L	L
Articulación	Pco1	NO	NO	NO		L	L	L	L
	Pmc8	NO	NO	NO		PL	NL	PL	PL
Socialización	Pmc6	NO	NO	NO		PL	PL	PL	PL
	Pmc5	NO	NO	NO		L	NL	L	L
	Pmc7	NO	NO	NO		PL	NL	L	L
Finalidad	Pmc3	NO	NO	NO		PL	PL	PL	PL
	Pdc1	NO	NO	NO		L	L	L	L
	Pdc5	NO	NO	NO		PL	NL	NL	PL
	Ped2	NO	NO	NO		PL	NO	NO	NO
Problematización	Pco1	NO	NO	NO		L	L	L	L
	Pmc1	NO	PL	PL		L	L	L	L
	Pmc4	NO	NO	NO		L	L	L	L

Respecto al cambio en cuanto al nivel de logro de los distintos focos, se puede apreciar que:

- En el foco Argumentación, Sonia sólo en uno (de tres) de los indicadores logra evidenciar un cambio positivo por lo tanto no podemos afirmar que en el foco Argumentación tenga un cambio asociado. Es decir en las planificaciones PRE no se observa en forma explícita dar los espacios para que los estudiantes comuniquen sus producciones iniciales, tampoco que contrasten los procedimientos utilizados, pero en las POST estos aspectos varían entre NL, PL y L en algunas clases. Donde sí se evidencia un cambio desde PRE a POST es incluir preguntas claves para que los alumnos y alumnas comuniquen sus ideas.
- En el foco Socialización, Sonia logra evidenciar un cambio que apunta hacia lo positivo desde PRE (todos los indicadores No Observados) hasta sus planificaciones POST, pues en éstas últimas sí quedó explícito:
 - Que los alumnos tengan un tiempo adecuado para que comuniquen sus producciones iniciales (estrategias, resultados, explicaciones).
 - La contrastación entre procedimientos usados por los alumnos de modo que reconozcan los alcances y limitaciones de los procedimientos y conocimientos matemáticos usados en la clase.
 - Preguntas claves de tal modo que los alumnos comuniquen sus ideas y las argumenten.
- En el foco Finalidad, Sonia presenta un desempeño heterogéneo en los distintos indicadores, pero claramente lo observado permite establecer que su desempeño no evidencia un cambio positivo en este foco. Es así como:
 - Respecto a planificar que en el momento de desarrollo los alumnos comprendan la problematización de la actividad matemática y con ello

actúen, Sonia evidenció cambio desde sus planificaciones PRE hacia las POST, aunque siempre lo logró parcialmente.

- Respecto a proponer actividades donde se abordan adecuadamente algún proceso de la competencia predominante declarada, Sonia evidenció progresos significativos y estables, lo que se evidencia en que todos los indicadores de este logro fueron logrados.
- Respecto a la planificación del cierre donde incluye preguntas sobre aspectos de la actividad matemática que permiten reconocer en los alumnos los procesos en juego de la clase, en sus PRE no se observa. No obstante, en las planificaciones POST se evidencia PL en dos planificaciones pero NL en otras dos.
- Respecto a planificar dejando explícito las posibles preguntas que permitan problematizar el error o la dificultad, ella no lo deja en forma explícita en ninguna de las planificaciones. De hecho no se observa ni en las planificaciones PRE ni POST.
- En el foco Problematización, Sonia desde las planificaciones clase PRE hasta las clases POST muestra un desempeño que evidencia un cambio positivo, pues en las planificaciones PRE no se observaba o estaba PL en cambio en las planificaciones POST está logrado todos sus indicadores en todas las clases, es decir en estas últimas se incluye la activación de los conocimientos previos pertinentes al propósito de la clase, se incluyen preguntas o actividades que permitan provocar una evolución en las estrategias o técnicas utilizadas por los alumnos y se incluyen situaciones problemáticas al inicio de la clase que incluyan el conocimiento matemático nuevo.

Los cambios en la preparación de la enseñanza en Sonia se pueden visualizar comparando sus planificaciones. En su planificación P-PRE se puede observar en la figura 6.3 que en la primera clase no está especificado el propósito de la clase y tampoco se deja explícita la forma en que se activarán los conocimientos previos pertinentes al propósito de la clase. Además no está planificada la gestión de clase considerando los momentos didácticos de ella y menos aún cómo se gestionarán posibles errores o dificultades que puedan tener los estudiantes.

Figura 6.3 Planificación Sonia primera clase PRE

Nombre de la Unidad: Conociendo unidades de medida			Subsector: Educación matemática			
Duración : 18 horas			Curso: Cuarto Año		Profesora: Sandra Mardones García	
OFV: • Interpretar la información que proporcionan números de hasta seis cifras, presentes en situaciones de diverso carácter (científico, periodístico u otros) y utilizar números para comunicar información en forma oral y escrita.						
OFT: desarrollar la capacidad de resolver problemas, la creatividad y las capacidades de autoaprendizaje;						
Fecha	Hora	Aprendizajes Esperados	Indicadores	Actividades	Recursos	Evaluación
		Identifican unidades de medida de diferentes magnitudes y establecen relaciones entre ellas y el sistema de numeración decimal.	• Identifican el kilómetro, metro y el centímetro como unidades de medida de longitud.	Clase 1 Analizan y efectúan mediciones utilizando algunas unidades de sistemas de medición de carácter decimal y aplican relaciones de equivalencia entre unidades de una misma magnitud, en variadas situaciones. - Reciben una guía en la que están dibujados elementos que se puede medir con diferentes unidades, encierra la alternativa correcta que se usaría para medirlo.	- guía - tabla con unidades de medidas y sus equivalencias	- Guía de actividades - Prueba escrita.

En cambio, en las P-POST, se incluye el trabajo con los conocimientos previos pertinentes al objetivo de la clases, los cuales son activados mediante una actividad que también contribuye al propósito de la clase. Por otra parte, Sonia ha incorporado situaciones problemáticas en el momento de inicio que incluyen el nuevo conocimiento matemático que se quiere instalar con los alumnos, para que emanen las primeras estrategias para abordarlo, quizás poco eficientes, pero que después en el desarrollo de la clase irán evolucionando. Es importante señalar que este aspecto no estaba presente en las P-PRE, es decir antes de la implementación de la MCM.

Por otra parte Sonia en sus planificaciones P-POST incorporó de forma explícita dejar los tiempos necesarios para que los estudiantes comuniquen sus procedimientos entre sus pares antes de revisar la pregunta y además socialicen sus producciones o argumentaciones con la profesora y con los pares y cómo se gestionan esos tiempos de acuerdo a las posibles respuestas de sus alumnos y alumnas. Donde también hubo una evolución positiva entre P-PRE y P-POST es en la incorporación de las competencias abordadas en el marco de este proyecto considerando además los procesos de ellas, aspecto que en las P-PRE so se observaba, y por tanto ella incluyó actividades que abordan adecuadamente algún proceso de la competencia predominante declarada. Todo lo anterior se puede observar en la figura 6.4

Figura 6.4 Planificación Sonia de una clase POST

UNIDAD EDUCATIVA: Escuela Caleta del Medio, Columo	SUBSECTOR: Matemática
UNIDAD TEMÁTICA: Adiciones y Sustracciones	PROFESOR RESPONSABLE: Sandra Mardones
TIEMPO: 2 horas	CURSO: 1ro básico
PROPOSITO DE LA CLASE: Cálculo mental de adiciones utilizando técnica de trasvasije	
COMPETENCIA PREDOMINANTE: Cálculo y manipulación de expresiones	
OTRAS COMPETENCIAS:	
CONOCIMIENTOS PREVIOS: sobreconteo y composición canónica	

INICIO		
PROCESOS INVOLUCRADOS	GESTIÓN DE LA ACTIVIDAD	TÉCNICA
<p>Usar y/o manipular expresiones matemáticas</p> <p>Calcular y/o cuantificar</p> <p>Comunicar su pensamiento matemático.</p>	<p>Actividad 1: Los alumnos (as) pasan a la pizarra a calcular las siguientes adiciones y sustracciones: a) $10+7$ b) $20+5$ c) $10+6$ d) $20+7$ e) $19+1$ f) $9+1$ g) $29+1$</p> <p>Si la respuesta dada por los estudiantes es correcta o incorrecta haga que explique cómo obtuvieron el resultado. Es importante que en la gestión de la clase no se utilice la cinta numerada, ya que se espera que los alumnos:</p> <p>I) Utilicen composición canónica para los cálculos a) $10+7$ b) $20+5$ c) $10+6$ d) $20+7$. Se espera que $20+5$ se señale "veinte y cinco (veinticinco)" y que expliquen como llegaron al resultado. Es posible que algunos estudiantes utilicen sobreconteo con los dedos, otros utilicen</p> <p>II) utilicen el sobreconteo para los cálculos e) $19+1$ f) $9+1$ g) $29+1$. Se espera que los alumnos utilicen sobreconteo para hacer que $19+1=20$</p> <p>Actividad 2: Para finalizar el momento de inicio se discute con los alumnos las siguientes preguntas: ¿es fácil sumar $20+3$? ¿porqué? ¿$20+5$ es fácil? ¿$30+6$? ¿se necesita lápiz y cuaderno para decir cuánto es?</p>	<p>Utilización de SND (composición canónica)</p> <p>Sobreconteo</p>

+

DESARROLLO		
PROCESOS INVOLUCRADOS	GESTIÓN DE LA ACTIVIDAD	TÉCNICA
<p>Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y demostración.</p> <p>Comunicar su pensamiento matemático.</p>	<p>Actividad 3: Solicitar a los alumnos que resuelvan $29+6$ y que expliquen como obtuvieron el resultado.</p> <p>Socializar las diferentes formas que los alumnos utilizaron para resolver $29+6$. Es importante que observemos como llegaron al resultado pues muchos niños, lo hacen bien pero por no saber bien la consecutividad se equivocan en decir el número. Es importante que los alumnos expliquen cómo obtuvieron el resultado</p> <p>Si la técnica esperada no aparece en los alumnos (aunque el resultado dado sea correcto), utilizar dos vasos (colecciones no disponibles) para vivenciar el trasvasije. Inducir con los frascos que $29+6$ tiene la misma cantidad de fichas que $30+5$</p>	<p>Trasvasije</p>

6.2.1.3. Caso Valentina

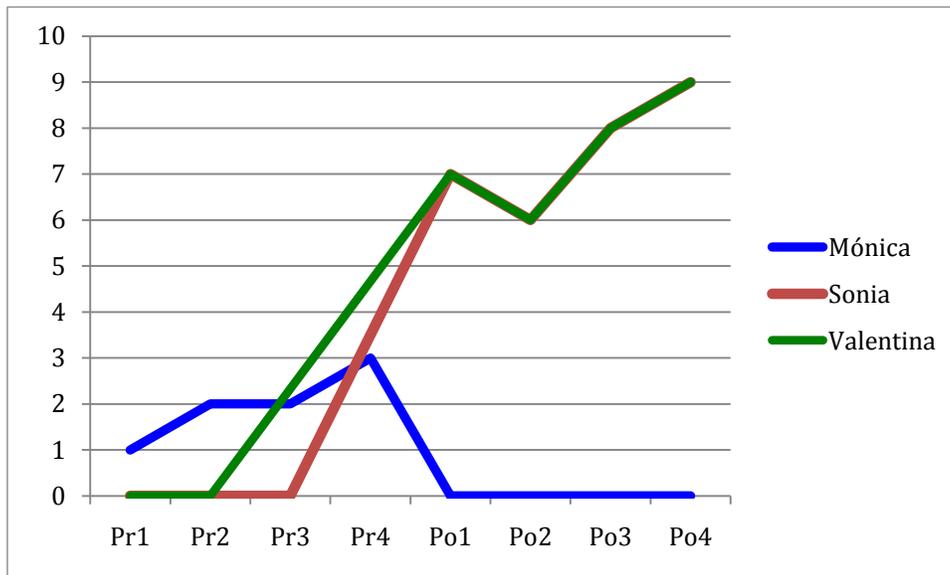
Focos	Indicadores	PRE				POST			
		P1	P2	P3	P4	P1	P2	P3	P4
Argumentación	Pmc2	NO	NO			NL	NL	PL	L
	Pmc6	NO	NO			PL	NL	NL	NL
	Pdc3	NO	NO			L	L	L	L
Articulación	Pco1	NL	NL			L	L	L	L
	Pmc8	NO	NO			PL	NL	PL	PL
Socialización	Pmc6	NO	NO			PL	PL	PL	PL
	Pmc5	NL	NL			L	NL	L	L
	Pmc7	NL	NL			PL	NL	L	L
Finalidad	Pmc3	NO	NO			PL	PL	PL	PL
	Pdc1	NO	NO			L	L	L	L
	Pdc5	NO	NO			PL	NL	NL	PL
	Ped2	NO	NO			PL	NO	NO	NO
Problematización	Pco1	NL	NL			L	L	L	L
	Pmc1	NO	NO			L	L	L	L
	Pmc4	NO	NO			L	L	L	L

Respecto al cambio en cuanto al nivel de logro de los distintos focos, se puede apreciar que:

- En el foco Argumentación, Valentina sólo en uno (de tres) de los indicadores logra evidenciar un cambio positivo por lo tanto no podemos afirmar que en el foco Argumentación tenga un cambio asociado. Es decir en las planificaciones PRE no se observa en forma explícita dar los espacios para que los estudiantes comuniquen sus producciones iniciales, tampoco que contrasten los procedimientos utilizados, pero en las POST estos aspectos varían entre NL, PL y L en algunas clases. Donde sí se evidencia un cambio desde PRE a POST es incluir preguntas claves para que los alumnos y alumnas comuniquen sus ideas.
- En el foco Socialización, Valentina logra evidenciar un cambio que apunta hacia lo positivo desde PRE (todos los indicadores No Observados) hasta sus planificaciones POST, pues en éstas últimas sí quedó explícito:
 - Que los alumnos tengan un tiempo adecuado para que comuniquen sus producciones iniciales (estrategias, resultados, explicaciones).
 - La contrastación entre procedimientos usados por los alumnos de modo que reconozcan los alcances y limitaciones de los procedimientos y conocimientos matemáticos usados en la clase.
 - Preguntas claves de tal modo que los alumnos comuniquen sus ideas y las argumenten.
- En el foco Finalidad, Valentina presenta un desempeño heterogéneo en los distintos indicadores, pero claramente lo observado permite establecer que su desempeño no evidencia un cambio positivo en este foco. Es así como:
 - Respecto a planificar que en el momento de desarrollo los alumnos comprendan la problematización de la actividad matemática y con ello actúen, Valentina evidenció cambio desde sus planificaciones PRE hacia las POST, aunque siempre lo logró parcialmente
 - Respecto a proponer actividades donde se abordan adecuadamente algún proceso de la competencia predominante declarada, Valentina evidenció progresos significativos y estables, lo que se evidencia en que todos los indicadores de este logro fueron logrados.
 - Respecto a la planificación del cierre donde incluye preguntas sobre aspectos de la actividad matemática que permiten reconocer en los alumnos los procesos en juego de la clase, en sus PRE no se observa. No obstante, en las planificaciones POST se evidencia PL en dos planificaciones pero NL en otras dos
 - Respecto a planificar dejando explícito las posibles preguntas que permitan problematizar el error o la dificultad, ella no lo deja en forma explícita en ninguna de las planificaciones. De hecho no se observa ni en las planificaciones PRE ni POST.
- En el foco Problematización, Valentina desde las planificaciones clase PRE hasta las clases POST muestra un desempeño que evidencia un cambio positivo, pues en las planificaciones PRE no se observaba o estaba PL en cambio en las planificaciones POST está logrado todos sus indicadores en todas las clases, es

decir en estas últimas se incluye la activación de los conocimientos previos pertinentes al propósito de la clase, se incluyen preguntas o actividades que permitan provocar una evolución en las estrategias o técnicas utilizadas por los alumnos y se incluyen situaciones problemáticas al inicio de la clase que incluyan el conocimiento matemático nuevo.

El análisis anterior permite identificar en qué aspectos se presenta una mejoría y cambio en los casos. El Gráfico que a continuación se presenta se la elaborado para contrastar entre los casos la variación en la frecuencia de los indicadores logrados a los largo de las clases registradas.



COMPORTAMIENTO DE FRECUENCIA TOTAL DE LOGRO DE INDICADORES

f	PRE				POST			
	Pr1	Pr2	Pr3	Pr4	Po1	Po2	Po3	Po4
Mónica	1	2	2	3	0	0	0	0
Sonia	0	0	0		7	6	8	9
Valentina	0	0			7	6	8	9

En las planificaciones PRE Valentina y Sonia no presentan indicadores logrados y en las planificaciones POST tienen una notable mejoría en los indicadores. En particular estas profesoras presentan cambios notables en las planificaciones de las clases 1 y 4 del POST aunque claramente sólo el foco problematización es el que está logrado. Mónica en cambio si bien presenta en las planificaciones PRE algunos indicadores logrados, en las clases POST presenta una evolución negativa pues no manifiesta una mejoría sino más bien un retroceso.

6.2.2 Cambios en la gestión de la enseñanza

6.2.2.1. Caso Mónica

	Indicadores	PRE	INTERMEDIA	POST				
Focos	CLASES	C1	C1	C1	C2	C3	C4	C5
Argumentación	Gmc2	PL	L	L	L	L	L	L
	Gmc6	PL	PL	PL	PL	PL	PL	PL
	Gdc3	PL	PL	PL	PL	PL	PL	L
Articulación	Gco1	L	L	L	L	L	L	L
	Gmc8	PL	L	L	L	L	L	PL
Socialización	Gmc3	PL	L	L	L	L	L	L
	Gmc5	PL	PL	PL	PL	PL	PL	PL
	Gmc7	NL	PL	PL	PL	PL	PL	PL
Finalidad	Gmc3	PL	L	L	L	L	L	L
	Gdc1	NO	NO	PL	PL	PL	PL	PL
	Gdc5	NL	PL	L	L	L	L	PL
	Ged2	NL	PL	PL	PL	PL	PL	PL
Problematización	Co1	L	L	L	L	L	L	L
	Gmc1	L	L	L	L	L	L	L
	Gmc4	PL	L	L	L	L	L	L

Respecto al cambio en cuanto al nivel de logro de los distintos focos, se puede apreciar que:

- En el foco argumentación, Mónica no presenta variación en la comunicación de los procedimientos y gestión de preguntas clave. Si bien se evidencia que Mónica intenciona mucho más procesos de argumentación en las clases POST que en la clase PRE, el problema radica es que esta intención no se refleja en los argumentos de los estudiantes.
- En el foco Socialización, Mónica no presenta variación. Una práctica habitual en todas las clases es que los estudiantes resuelvan en la pizarra el problema, y Mónica se enfoca en comparar los procedimientos utilizados, sin que los estudiantes expresen sus razonamientos. Por ello el indicador Gmc5 se mantiene como parcialmente logrado Mónica quien protagoniza el cierre y no promueve el espacio para que los estudiantes expliquen sus razonamientos.
- En el foco Finalidad, Mónica presenta variación sin obtener un desempeño adecuado. Si bien hay una evolución en considerar los procesos dado que en la clase PRE hay una ausencia de procesos competenciales. a partir de la clase intermedia y en especial en las sesiones del POST, Mónica intenciona el uso de diferentes procedimientos en cada una de las cinco sesiones y también se preocupa de contrastar estos procedimientos, procesos que serían parte de la competencia de Cálculo, Respecto a la competencia modelización, en su gestión

se observa que Mónica aborda los esquemas como una técnica impuesta más que un medio para que los niños modelicen el problema, por ello los indicadores Gdc1, Gdc2 se han valorado como parcialmente logrados. El indicador Gdc5 asociado a la gestión del cierre de los procesos sí evidencia un logro. Si bien la gestión del error no presenta un logro adecuado, sí presenta una variación significativa, dado que en la clase PRE prácticamente no hay gestión del error, en cambio en la clase intermedia y en las sesiones del POST, Mónica problematiza el error en forma personal, pero no en el grupo curso, lo que demuestra no interpretar de error como un momento problematizador.

- En el foco Problematización, desde la clase PRE hasta las clases POST existe una leve variación en los desempeños. Se mantiene que en el momento de inicio de la clase Mónica parten como preguntas a los estudiantes que involucran conocimientos previos, luego plantea el propósito de la clase y un problema introductorio en que se involucra el conocimiento nuevo.

6.2.2.2. Caso Sonia

	Indicadores	PRE	INTERMEDIA	POST			
Focos	CLASES	C1	C1	C1	C2	C3	C4
Argumentación	Gmc2	NL	PL	L	L	L	L
	Gmc6	NL	NL	L	PL	L	L
	Gdc3	NL	PL	L	L	L	L
Articulación	Gco1	PL	NL	L	L	L	L
	Gmc8	NL	NL	L	PL	L	L
Socialización	Gmc3	NL	NL	PL	PL	PL	L
	Gmc5	NL	PL	L	L	L	L
	Gmc7	NL	NL	L	PL	L	L
Finalidad	Gmc3	NL	NL	PL	PL	PL	L
	Gdc1	NO	NO	L	L	L	L
	Gdc5	NL	NL	L	L	L	L
	Ged2	NL	PL	L	PL	L	L
Problematización	Co1	PL	NL	L	L	L	L
	Gmc1	PL	PL	L	PL	L	PL
	Gmc4	NL	NL	L	PL	PL	L

Respecto al cambio en cuanto al nivel de logro de los distintos focos, se puede apreciar que:

- Respecto a la argumentación, Sonia desde la clase PRE a las clases POST muestra un cambio sustancial en cuanto a la comunicación y contraste de procedimientos y gestión de preguntas clave, En la clase PRE Sonia no hace que ellos contrapongan sus respuestas y justifiquen sus procedimientos o se hagan preguntas a partir de la actividad que están trabajando. En las clases POST en

cambio, Sonia manifiesta un cambio en la gestión de la clase, pues su foco ya no está solamente en la respuesta correcta al problema sino que muy por el contrario se centra en cómo los alumnos argumentan para decidir acerca de cómo obtuvieron la respuesta. Por tanto, Sonia pasa de inadecuado desempeño en la argumentación a un adecuado desempeño.

- Respecto a la articulación Sonia desde la clase PRE a la clases POST muestra un leve cambio en cuanto a la activación de ideas previas y una cambio sustancial en la articulación entre el conocimiento nuevo y las ideas previas, lo que representa un cambio desde un inadecuado a un adecuado desempeño en la articulación.
- Respecto a la socialización, Sonia desde la clase PRE a la clases POST muestra un cambio sustancial en los indicadores de socialización, en la clase PRE Sonia no hace que ellos socialicen sus argumentaciones. En contraste, en clase 5 las interacciones dejaron de ser bidireccionales para dar paso a una socialización multidireccional alumno-alumno, profesor-alumno, alumno-profesor.
- Respecto a la finalidad, Sonia desde la clase PRE a la clases POST presenta cambios sustanciales, en cuanto a promover la problematización de la actividad matemática en los estudiantes, Además pasa de no promover procesos competenciales a promover procesos de cálculo y argumentación en los estudiantes. Asimismo en las clases PRE la profesora no gestiona el error, muy por el contrario está muy preocupada por corregir a los estudiantes para que copien lo correcto. En cambio en las POST Sonia tiene una notable valoración en este aspecto de su gestión, pues ahora cuando los estudiantes se equivocan en vez de corregir ella, hace que los alumnos(as) reflexionen sobre su error.
- Respecto a la problematización, Sonia desde la clase PRE a las clases POST, considerando el momento de inicio presenta una leve mejoría en, cuanto activar los conocimientos previos y las clases si inician con una situación problemática. En cuanto al tercer indicador asociado a la evolución de las técnicas, Sonia presente una gran mejoría. Por ejemplo, en la clase PRE los estudiantes debían determinar la cantidad mayor, y en ningún momento se observa a la profesora consultando acerca de las estrategias utilizadas por los alumnos para saber si es mayor o menor una cantidad, por lo tanto no hay una gestión de la evolución de las estrategias. En cambio en las clases PRO existe una evolución en los estudiantes desde el sobreconteo al trasvasije como técnicas aditivas.

6.2.2.3. Caso Valentina

	Indicadores	PRE	INTERMEDIA	POST			
Focos	CLASES	C1	C1	C1	C2	C3	C4
Argumentación	Gmc2	NL	PL	L	L	L	L
	Gmc6	NL	NL	PL	PL	PL	L
	Gdc3	NL	PL	L	L	L	L
Articulación	Gco1	NL	PL	L	L	L	L
	Gmc8	NL	PL	PL	L	L	L
Socialización	Gmc3	NL	PL	L	L	L	L
	Gmc5	NL	L	L	L	L	L
	Gmc7	NL	NL	NL	PL	L	PL

Finalidad	Gmc3	NL	PL	L	L	L	L
	Gdc1	NO	NO	PL	L	L	L
	Gdc5	NL	NL	NL	PL	PL	L
	Ged2	NL	NL	PL	PL	PL	PL
Problematización	Gco1	NL	PL	L	L	L	L
	Gmc1	NL	L	L	L	L	L
	Gmc4	NL	PL	L	L	L	L

Respecto al cambio en cuanto al nivel de logro de los distintos focos, se puede apreciar que:

- En el foco Argumentación se aprecia una evolución por parte del desempeño de Valentina en la gestión de clases. Los indicadores asociados a este foco de mayor avance fueron los asociados a dar mayor y mejor espacio para la argumentación (Gmc2), así como el uso de buenas preguntas para promover los procesos argumentativos (Gdc3). El indicador Gmc6 de estimulación de la contrastación de procedimientos es el que ha tenido avances menos desarrollados. Esto tiene sentido, por cuanto los dos primeros indicadores son un requisito para lograr promover tal contrastación. Sólo hacia la clase 4 se pudo observar como Valentina promovió un ambiente de argumentación en torno a la contrastación y justificación de procedimientos, así como la problematización del error a través de la argumentación.
- En el foco Articulación se observa un avance muy importante en el desempeño de Valentina en la gestión de sus clases. Ambos indicadores se observaron como logrados en las tres últimas clases de la implementación de la secuencia didáctica. Es así que se aprecia a Valentina activando conocimientos previos que son pertinentes a la clase; además, la calidad de la forma de hacer tal activación ha mejorado, por cuanto sus preguntas ya no son de verificación, sino que pide poner en juego tal conocimiento y argumentarlo. Además, la síntesis de la clase se hace en el contexto de las tareas efectivamente realizadas por los alumnos, lo que permite una mejor participación de éstos en el cierre, respondiendo de forma significativa a las preguntas propuestas por Valentina.
- Respecto del foco Socialización, también se observa un cambio favorable significativo en su desempeño. En particular, el cambio se puede observar en los indicadores Gmc5 y Gmc7, los cuales fueron logrados a lo largo de las 4 clases de la implementación de la secuencia didáctica. Valentina ya no pide a los alumnos que solamente den la respuesta al problema, sino que promueve que comuniquen sus ideas y procedimientos; esta acción de Valentina ha permitido que el lenguaje de los niños haya evolucionado, observándose más claro y preciso que antes. Además, Valentina promueve la contrastación constante de procedimientos, ya sea para analizar las ventajas y limitaciones de éstos, así como para que los alumnos resuelvan sus dificultades y/o errores. Se observó avances en menor escala en la gestión de las justificaciones matemáticas. La gestión de Valentina estuvo con el foco puesto principalmente en la aplicación e identificación de condiciones de uso de las técnicas, así como en el contraste y análisis de sus ventajas; sin embargo, la justificación matemática de las técnicas sólo se pudo apreciar en un episodio del momento de cierre de la tercera clase, en donde los

alumnos mencionaron a la completación de decenas como justificación de la técnica. Este es un avance importante, pero parcial, respecto del indicador.

- Sobre el foco Finalidad, Valentina mostró un avance importante pero parcial. Las principales dificultades estuvieron en el uso de preguntas clave que permitieran que los niños avanzaran en una comprensión profunda de los contenidos en estudio. En ese sentido, muchas de las preguntas de Valentina apuntan al “cómo” y al “para qué” más que al “por qué”. Se destaca el hecho de que la calidad de las preguntas de Valentina va mejorando en forma paulatina y gradual, lo que es un hecho esperable. En donde se pudieron observar avances importantes de logro fue en los indicadores asociados a involucrar a los alumnos en la problemática matemática. Hacia las clases 3 y 4, los alumnos sabían que estaban trabajando formas distintas y más eficientes de calcular ciertas adiciones, ofreciéndoles con ello un campo de acción importante. Además, las actividades permitieron que los niños participaran de los procesos competenciales planificados, lo cual se puede evidenciar por las respuestas que ellos dan en el cierre de la clase 4.
- Finalmente, respecto del foco Problematización, Valentina tuvo un avance importante, al lograr todos los indicadores de esta dimensión. Si bien la formulación de la situación problemática es un logro que proviene de su desempeño en la planificación de la secuencia didáctica, Valentina articula este logro con una activación articulada y pertinente de los conocimientos previos. Además, las actividades planificadas son gestionadas en forma correcta, conforme a la finalidad de ésta. Esta buena gestión se puede apreciar principalmente en los momentos de inicio de las clases 3 y 4, en particular, en el modo en que son controladas las variables didácticas. Si bien los tiempos no son administrados aun de una forma eficiente, las actividades, preguntas y promoción de la argumentación apuntan a poner en conflicto el conocimiento previo, o bien, a poner en juego el nuevo conocimiento, promoviendo con ello condiciones óptimas para el trabajo durante la clase de los procedimientos y técnicas de cálculo.

6.2.3. Evolución del Desempeño

El análisis anterior permite identificar en que aspectos se presenta una mejoría y cambio en los casos. El Gráfico 1 que a continuación se presenta se la elaborado para contrastar entre los casos la variación en la frecuencia de los indicadores logrados a los largo de las clases registradas.

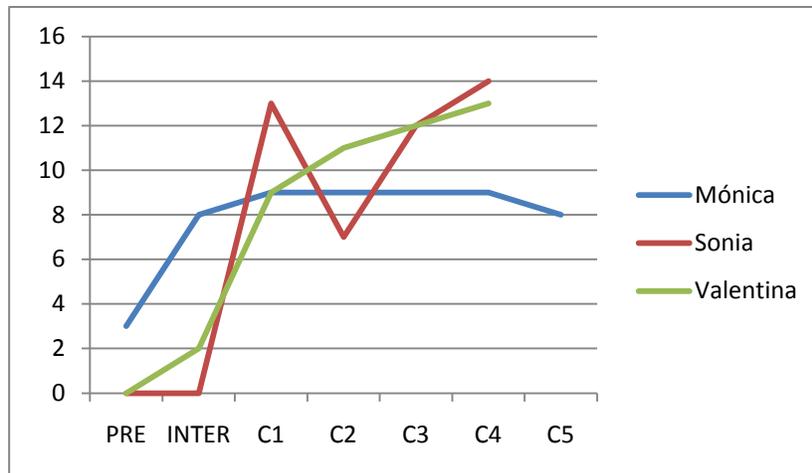


Grafico 1: comportamiento de frecuencia total de logro de indicadores

f	PRE	INTER	C1	C2	C3	C4	C5
Mónica	3	8	9	9	9	9	8
Sonia	0	0	13	7	12	14	
Valentina	0	2	9	11	12	13	

En las clases iniciales Valentina y Sonia no presentan indicadores logrados y en las siguientes clases tienen una notable mejoría en los indicadores logrados. En particular Sonia presenta cambios notables desde la clase 1 del POST mientras que Valentina en la tercera del POST logra los mismos indicadores que Sonia. Mónica en cambio si bien presenta en la clase PRE tres indicadores logrados, en las clases POST presenta una evolución solamente en algunos aspectos y otros los mantiene constantes lo que evidencia menores indicadores logrados en comparación a Valentina y Sonia. Por tanto, Mónica presentan una menor variación en el cambio que Sonia y Valentina.

Otra contraste entre las profesoras que se pretende analizar es sus desempeños por foco. Para ello se han considerado los datos de la última clase POST los que se han organizado a través del gráfico 2. El valor 3 significa logrado y valor 2 parcialmente logrado.

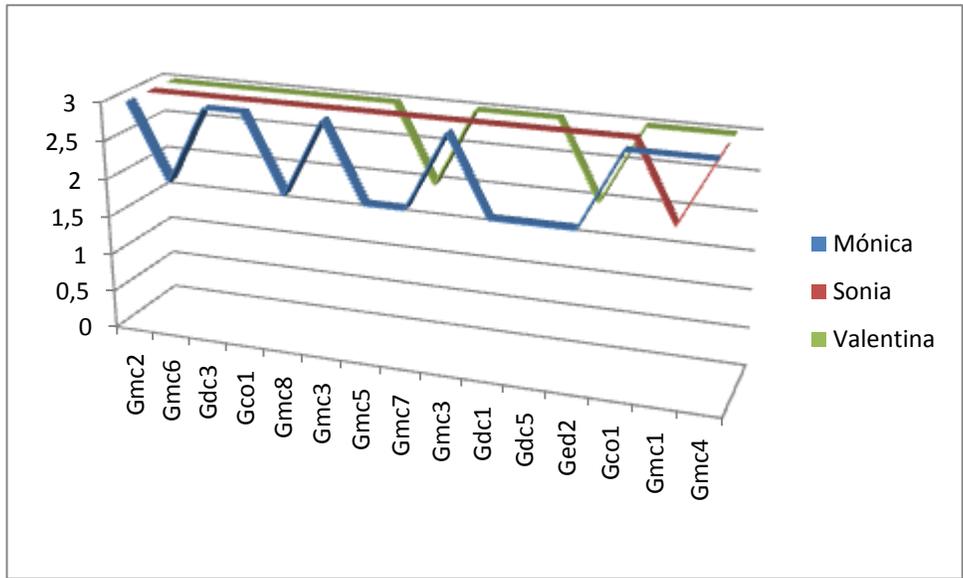


Grafico 2: desempeño profesora en última clase POST

Sonia presenta 14 de los 15 indicadores logrados en la última sesión, y Valentina 13 logrados, mientras que Mariana solamente presenta 8.

6.3. Articulación entre desempeño y reflexión

En los apartados anteriores se ha evaluado la metodología de trabajo docente caracterizando el impacto en la reflexión (objetivo 3 del proyecto) y desempeño docente (objetivo 4), obteniendo resultados de forma separada para cada variable. Para indagar en explicaciones en que se articule desempeño y reflexión, se presentan gráficos para cada caso que visualizan sus trayectorias a lo largo del año graficando ambas variables a la vez.

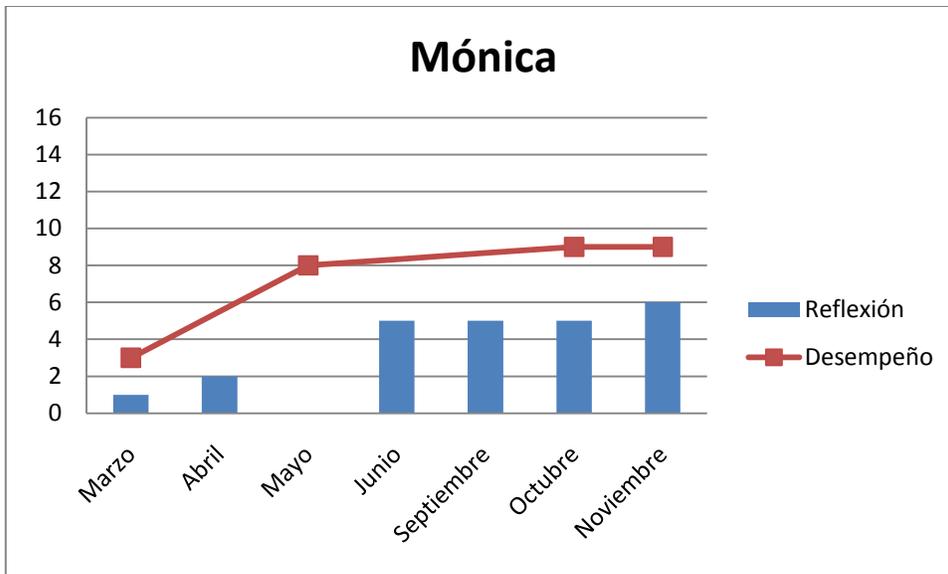


Gráfico 3: relación desempeño y reflexión Mónica

En el caso de Mónica se observa que la reflexión presenta un incremento importante en los primeros meses de seminario para luego presentar un leve incremento. Este comportamiento se corresponde con la variación en el desempeño que varía significativamente los primeros tres meses de seminario para luego incrementar levemente.

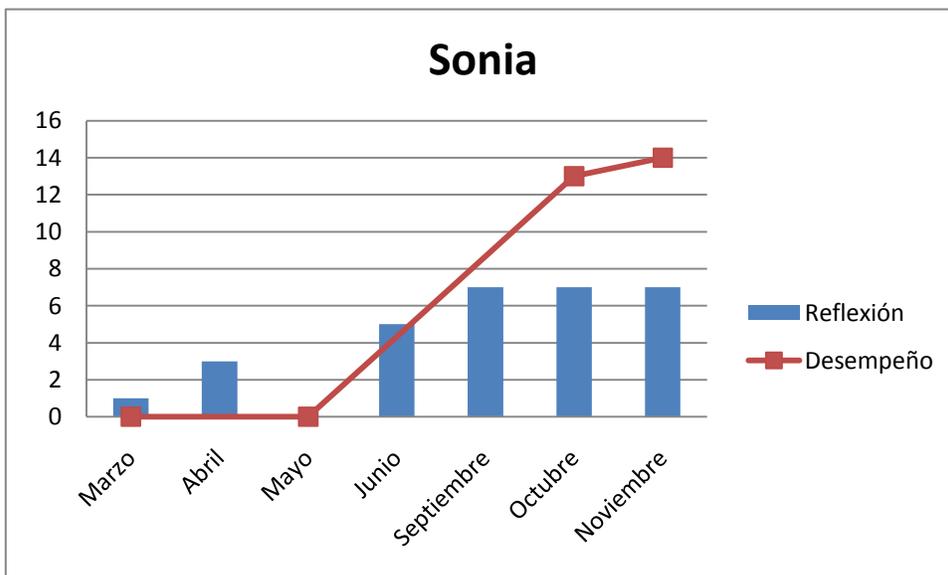


Gráfico 4: relación desempeño y reflexión Sonia

En el caso de Sonia, la reflexión produce un incremento importante en la mitad del seminario (junio) para luego mantenerse en niveles altos de reflexión. El desempeño comienza en un nivel bajo que se mantiene hasta la implementación intermedia, para

luego incrementarse muy significativamente en la implementación de la secuencia didáctica. Se destaca que el momento que se incremente la reflexión coincide con el incremento de desempeño.

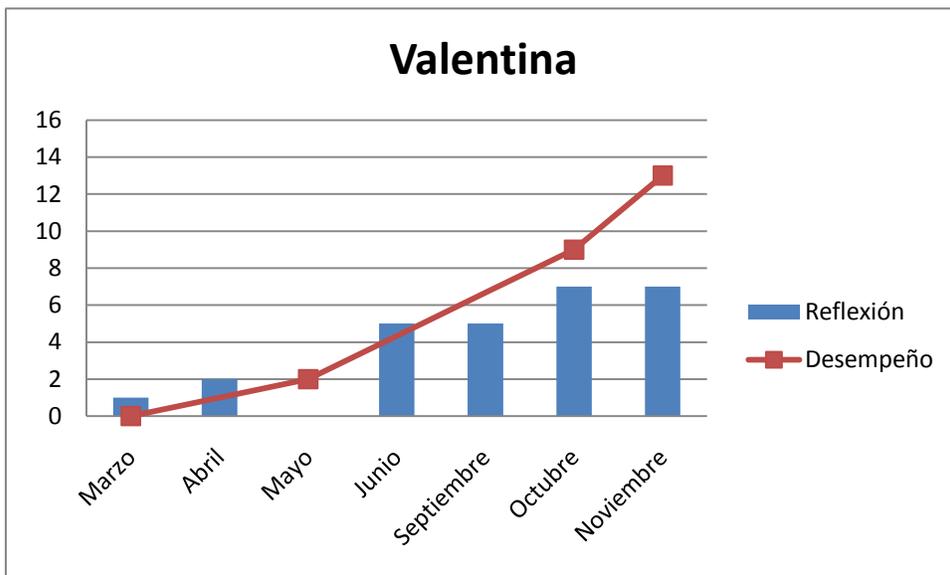


Gráfico 5: relación desempeño y reflexión Valentina

En el caso de Valentina, la reflexión aumenta de forma gradual en todo el transcurso de la investigación desde un nivel bajo a un nivel alto. Este comportamiento se corresponde con el nivel de desempeño que también se incrementa de manera gradual a lo largo del año.

En base a este análisis podemos destacar las siguientes relaciones entre reflexión y desempeño.

Variación en la reflexión se corresponde con variación en el desempeño: Se ha evidenciado que tanto Sonia como Valentina que muestran una mayor varianza en el nivel de reflexión pasando de descriptivo a interpretativo, también presenta incremento en el desempeño en todos los focos. Mientras que Mónica que evidencia menos cambio en la reflexión, presenta menos cambios en el desempeño.

Una temprana variación en la reflexión se corresponde en un cambio en el desempeño: Sonia es la primera profesora que obtiene niveles interpretativos, y a su vez la que presenta una mayor frecuencia de logro en los indicadores de desempeño que se corresponde en la primera clase del POST con 13 de los 15 indicadores logrados. En particular es interesante destacar que el momento que se incremente la reflexión coincide con el incremento de desempeño

Niveles altos de reflexión se corresponde con niveles altos de desempeño: Valentina y Sonia presentan los niveles más altos de reflexión y también de desempeño, mientras que Mónica que presenta un nivel medio de reflexión a su vez presenta niveles medios de desempeño.

Si bien no se ha diseñado un estudio que nos permita afirmar que hay una correlación entre el nivel de reflexión y desempeño, con este diseño cualitativo y con los tres casos estudiados, nos permite poner de manifiesto que hay asociación entre la reflexión de los docentes con su desempeño.

Por otra parte, podemos establecer otro tipo de relaciones diferentes a reflexión y desempeño. En particular *Un desempeño alto se corresponde con una planificación bien preparada*: Valentina y Sonia quienes mostraron una notable mejoría en los indicadores de preparación de la enseñanza, también muestran evolución en la gestión de la enseñanza, Para Mónica quien presentó menos avances en la planificación, también presentó menos focos logrados en el desempeño.

La interpretación de los resultados no pretende que se reduzca una relación de causalidad directa de que a un mayor nivel de reflexión mejor desempeño, sino que tipo de análisis realizado se ha enfocado a comprender las relaciones que pueden existir entre las dos variables que la podemos resumir en que las dos profesoras que han tenido más cambios en su desempeño está asociado con cambios importantes en sus niveles de reflexión.

7. Conclusiones y proyecciones.

7.1 Conclusiones de la investigación

El diseño e implementación de una metodología de trabajo docente, en cuanto a los dos primeros elementos del objetivo general de este trabajo, se desarrollaron mediante el diseño de un proceso de estudio basado en el MCM (objetivo específico 1) y el desarrollo e implementación de un seminario de trabajo docente (objetivo específico 2).

Las conclusiones sobre estos objetivos se describen en términos de la *comprensión de los temas del seminario* que aluden al MCM, y de la *metodología de trabajo docente*.

Respecto a los temas del seminario, se puede concluir que la comprensión de las competencias matemáticas pasó más por un entendimiento de cada competencia específica que por su comprensión global, lo que se evidenció en que las profesoras discutían las actividades haciendo referencia a la argumentación, la modelización, el cálculo, pero no refiriéndose en general a las competencias.

Las profesoras comprendieron la relevancia de una buena gestión de los elementos de la organización matemática: tareas, técnicas, variables didácticas y sus condiciones de realización, tecnología y teoría. Si bien algunas profesoras habían tenido experiencias con la estrategia LEM, tanto las que lo conocían como las que no, valoraron poder organizar la actividad matemática en estos términos. Asimismo, las profesoras, en distinto grado, incorporaron los elementos de la organización matemáticas para diseñar su secuencia didáctica.

Respecto a los casos clínicos, podemos concluir que su incorporación en los seminarios permitió que las profesoras pusieran en evidencia la apropiación de los elementos del modelo. Los tres casos clínicos que se grabaron sirvieron de pie para que se generaran tres situaciones de análisis más, a partir de las implementaciones puntuales que se realizaron en el transcurso del seminario. Los casos clínicos eran precedidos por actividades que introducían el tema de la sesión del seminario, y las preguntas realizadas por los investigadores en el análisis del caso clínico, tenían la intención de problematizar la actividad anteriormente vista. Esta secuencia de los talleres de seminario reportó discusiones ricas en reflexión por parte de las profesoras, tal como se ha evidenciado en el estudio de las competencias de modelización y argumentación. Por tanto, una de las contribuciones de esta metodología de trabajo docente son actividades secuenciadas que permiten apropiarse del modelo de competencia didáctica y generar reflexiones docentes por medio del análisis de la práctica.

Se diseñó un seminario de ocho sesiones en las cuales se reflexionó, en una primera instancia, sobre cada una de los componentes del modelo, se pasó a un segundo momento, en el cual se creó una secuencia de enseñanza que posteriormente se implementó en aula. Respecto a la experiencia en el diseño de dicha secuencia, se evidenció que el tiempo invertido (cuatro sesiones) para estudiar los elementos de un diseño fue el suficiente para que las profesoras aplicaran los temas discutidos en la primera parte del seminario.

El grupo focal si bien fue pensado como un dispositivo para recoger datos para la investigación también se convirtió en una instancia formativa, dado su carácter evaluativo, de alto nivel de reflexión y que produjo contraste entre las profesoras; ello nos proporcionó antecedentes que en una metodología de trabajo docente deben existir

instancias no solo de enseñanza sino de evaluación, y con características que se pueden rescatar del grupo focal, tal como un guía en vez de un profesor.

Finalmente queremos destacar que la metodología de trabajo docente se sustenta en un modelo que orienta las trayectorias reflexivas con las siguientes características:

Diferentes instancias reflexivas: a lo largo del seminario se presentaron tareas matemático-didáctica en diferentes instancias. En primer lugar un estudio del modelo de competencia matemática, luego un diseño de secuencias didácticas y finalmente una evaluación de dicha secuencia, las cuales se pueden sintetizar en la siguiente secuencia: estudio del modelo didáctico - diseño- evaluación.

Diferentes temáticas de reflexión: en cada sesión de los seminarios se trataron diferentes temas que sirvieron de génesis para la reflexión, tales como: sobre la práctica, condiciones para una implementación efectiva en el aula de situaciones de aprendizaje, planificaciones, y complejidad de las actividades.

Selección de un contenido curricular relevante: Es fundamental que en la metodología de trabajo docente se trabaje en torno a un contenido matemático que sea relevante para todos los actores, para los profesores, para el sistema educativo y significativo para los estudiantes. En nuestro seminario se constató que un contenido como el campo aditivo, relevante para los tres actores mencionados en NB1, fue un muy buen contexto para diseñar tareas matemático- didácticas.

Además de las características del modelo que sustenta una metodología de trabajo docente, también es fundamental cautelar ciertas condiciones de realización. En nuestro caso, identificamos tres relevantes:

Autonomía del procesos de la reflexión: en la medida que transcurre el seminario las diferentes instancias de reflexión pasan de más a menos guiadas, ello para que el docente vaya teniendo una mayor autonomía en su reflexión.

Sujeto de la reflexión: las diferentes instancias de reflexión son cada vez más complejas. En el seminario mediante los casos clínicos se discutieron sobre prácticas de otros profesores, luego en la segunda parte del seminario se discutió tanto sobre sus propias prácticas como sobre planificaciones, y en las entrevistas finales solamente sobre su propia práctica. Las tareas didáctico - matemáticas que se solicitaban en estas instancias eran cada vez más complejas promoviendo reflexiones más profundas en las profesoras.

Grado de completitud del contenido curricular asociado: se pueden dar diferentes grados de profundidad y extensión del contenido matemático que es estudiará con los docentes. Desde organizaciones matemáticas puntuales a regionales.

En síntesis, en relación al diseño e implementación de un seminario que promueva esta metodología docente podemos decir que:

- Fue necesario que los componentes del MCM tuvieran su espacio propio para su introducción a las profesoras, pero también que emergieran en las sesiones siguientes, tal como ocurrió con las competencias matemáticas y la organización matemática del campo aditivo.
- Tanto los casos clínicos elaborados para el seminario, como los generados dentro del propio seminario, permitieron poner en práctica las relaciones entre los componentes del MCM.

- Asimismo el diseño de la secuencia de enseñanza también fue un espacio necesario para poner en práctica las relaciones entre los componentes del MCM.
- Las instancias de reflexión son cada vez más complejas en el seminario: la reflexión de aspectos sobre la práctica de los demás, sobre las planificaciones de otros y propia, y luego de la propia práctica.
- Diseñar instancias evaluativas en el seminario, como el grupo focal.
- Se ha “modelizado” la forma de orientar las trayectorias reflexivas.

La evaluación de la metodología docente, asociado al objetivo 3 y 4 de investigación, se ha realizado caracterizando la comprensión del MCM de los docentes. El impacto de esta metodología se determina por el nivel de apropiación de las profesoras del MCM, en que un alto nivel de apropiación significaría que la metodología es eficaz. La apropiación se caracteriza a través del estudio de la reflexión y el desempeño de las docentes.

Para estudiar el nivel de apropiación, se han seleccionado a tres de las profesoras del seminario para realizar un estudio de casos. Se ha caracterizado el cambio en la reflexión de los tres casos por medio de niveles de reflexión y se ha evidenciado que los niveles de reflexión aumentan en los casos desde niveles descriptivos hasta interpretativos, produciéndose los cambios de manera paulatina en las diferentes instancias de reflexión.

Las profesoras evidencian diferentes trayectorias de reflexión, produciéndose que una profesora alcance reflexiones en niveles altos y de manera más temprana que otra en las instancias reflexiva. Los tres casos comparten que pasaron de un nivel descriptivo de carácter pedagógico, a niveles interpretativos que demuestran causalidad con criterios didácticos mediados por el Modelo de Competencia Matemática.

Respecto al cambio en el desempeño, estudiado a través de los casos, se ha propuesto cinco focos que sistematizan los temas paradigmáticos en que se sitúan los cambios de un profesor de matemáticas: Problematización, articulación, finalidad, argumentación y socialización. Existen varios criterios para caracterizar el desempeño docente; Beas, Gómez y Thomsen (2008) proponen características de un profesor tanto para la planificación como para la enseñanza. Si bien varios aspectos pueden coincidir tales como la consideración de las ideas previas, son de naturaleza diferentes puesto que no están caracterizados desde la particularidad del profesor de matemáticas. Los cinco focos propuestos en función de indicadores, contribuyen a dotar de especificidad a los criterios de buenas prácticas para un profesor de matemáticas.

Respecto a la preparación de la enseñanza, los cambios más importantes están en el foco problematización, mientras que en la gestión de la enseñanza se presentan cambios importantes en problematización y en articulación. Los otros focos también presentan cambios de manera más paulatina siendo el foco de argumentación y socialización los focos en que se presentaron cambios de forma más rápida en algunos de sus indicadores.

El avance en estos focos, presenta un enriquecimiento de sus prácticas para las profesoras. Varios de estos cambios se pueden explicar desde el Modelo de Competencia Matemática, modelo didáctico que permite organizar la actividad matemática escolar mediante unos criterios que consideran promover competencias matemáticas no de forma aislada con la actividad matemática, sino que en sintonía con el estudio de una organización matemática específica. Mediante el estudio del MCM en los seminarios, las profesoras han obtenido más herramientas que se ha constatado en la calidad de sus

reflexiones y en la calidad de su desempeño. Un ejemplo es la competencia de argumentación que fue ampliamente valorada por las profesoras y puesta en práctica en sus aulas, lo que se reflejó en que indicadores de los focos de argumentación y socialización mostraran cambios importantes desde las implementaciones intermedias que realizaron las profesoras en el seminario, Furió y Carnicer (2002) plantean que una condición de mejor desempeño en los profesores, es que valoren positivamente y estén convencidos de que la implementación mejorará el aprendizaje de sus alumnos. Las profesoras estaban convencidas de que debían promover la argumentación en sus aulas y ello impactó en sus prácticas.

Con ello, no se pretende que se deba instruir a todos los profesores en este modelo, pero sí dejar en evidencia que un modelo didáctico que permite desglosar la actividad matemática escolar entrega herramientas que mejoran las prácticas del profesor.

Varios autores plantean que los cambios en las prácticas en los profesores es lento, y que los cambios en sus reflexiones no se vislumbran en sus desempeños (Beas, Gómez, y Thomsen, 2008). En la investigación hemos podido sobrellevar este hecho dado que hemos constatado que se han transferido los cambios en la reflexión al desempeño docente. Si bien el tipo de estudio que se ha realizado no pretende mostrar que, a un mayor nivel de reflexión, mejor desempeño, al seguir tanto los procesos reflexivos como los desempeños de cada uno de los casos, se ha evidenciado que hay asociación entre la reflexión de los docentes con su desempeño. En particular las profesoras que han tenido más cambios positivos en su desempeño, son también aquellas que mostraron cambios significativos en sus niveles de reflexión. Ello implica que la metodología de trabajo docente propuesta ha impactado en el desempeño por medio de las instancias de reflexión que se han promovido en los seminarios. El entendimiento de varios de los criterios didácticos estudiados en el seminario pasa porque los profesores vivencien instancias reflexivas, tales como comprender la importancia de las condiciones de realización de una tarea matemática, así como el tipo de preguntas para promover procesos competenciales en los estudiantes. Además, es fundamental el estudio de las prácticas por medio de casos clínicos, y en particular el hecho de poder analizar la propia práctica permite a los profesores visualizar qué han cambiado de sus prácticas.

Si bien nuestro estudio se realizó con una muestra pequeña de 11 profesoras con un diseño principalmente cualitativo, los resultados nos permiten concluir sobre aspectos que trascienden al estudio en particular, y que tienen relación con una metodología de trabajo docente y un modelo didáctico que permita impactar las prácticas de los docentes. En las conclusiones asociadas al objetivo 1 y 2, se propone unas características y condiciones para esta metodología de trabajo docente, las que pueden ser aplicables a otros modelos didácticos robustos.

Respecto al modelo didáctico propuesto (MCM), es importante hacer un alcance sobre la manera de promover las competencias a los estudiantes. Del mismo modo que en los niveles iniciales no se debería promover que los estudiantes establezcan diferencias entre las estructuras matemáticas – álgebra, números, datos, medida, geometría- dado que discutir sus diferencias requiere de niveles de abstracción que en niveles medios y avanzados sería más pertinente estudiar. En primer ciclo no debería ser finalidad del docente enseñar competencias matemáticas, sino que considerarlas como un medio para organizar y gestionar el quehacer matemático en el aula. En cambio, en los niveles medios y sobre todo avanzados, el profesor debería promover que los estudiantes tomen conciencia que la actividad matemática no son estructuras matemáticas atomizadas sino que comparten ciertos procesos matemáticos. De ahí la importancia de explicitar las competencias matemáticas en los estudiantes.

Destacamos la importancia de cautelar una articulación y equilibrio fecundo entre el modelo didáctico y la metodología de trabajo docente. En esta investigación se ha constatado que esta metodología con este modelo didáctico ha impactado en el aula. Si uno de estos dos aspectos no se considera se tiene una base débil para impactar en las prácticas docentes; un modelo didáctico teórico sin una metodología de trabajo docente (MTD) apropiada corre el riesgo de no ser transferible a los profesores, y una MTD sin un modelo didáctico robusto, corre el riesgo de carecer de contenido para los profesores. En consecuencia, tanto el modelo didáctico como la metodología de trabajo docente deben cautelar cierta consistencia para impactar en el docente.

7.2 Proyecciones

La investigación que se ha realizado se enmarca en una línea de investigación más amplia denominada competencias matemáticas (Solar, Rojas y Ortiz, 2011). Sus orígenes comenzaron hace pocos años con las primeras propuestas del Modelo de Competencia Matemática (MCM) que ha permitido estudiar problemáticas en torno al currículo de matemáticas (Espinoza et al, 2008) y ha permitido caracterizar competencias matemáticas que se ponen en juego en el estudio de un tema matemático específico en el aula de matemáticas (Solar, 2009). La investigación actual se enmarca en la formación de profesores. Ha sido sustancial estudiar con docentes el modelo competencial propuesto, reflexionando sobre su gestión en el aula y en cómo se llevan a cabo y concretizan en actividades matemáticas relevantes. Considerando los resultados nacionales e internacionales relativos al conocimiento matemático y didáctico de los profesores de educación primaria, el desarrollo de modelos que contribuyan a la formación docente en aspectos altamente valorados por la comunidad internacional como lo es el enfoque por competencias, y presente en nuestros actuales documentos curriculares, permitiría mejorar éstos y otros indicadores, tanto a nivel del profesorado como de los propios estudiantes.

Nuestro desafío a futuro es poder estudiar problemas en torno al aprendizaje matemático de los estudiantes basado en competencias, como por ejemplo problemas tradicionales de dificultades de aprendizaje en un determinado contenido que pueden ser ahora interpretados desde una visión de los procesos y competencias matemáticas. Este tipo de problemáticas requieren estudios longitudinales extensos temporalmente para analizar los desempeños de los estudiantes. Una condición es que los profesores sigan participando en espacios de reflexión fecunda. Para que la metodología de trabajo docente impacte en los profesores y en los estudiantes, tiene que prolongarse en el tiempo.

Los casos clínicos elaborados para este informe tienen como propósito que pueda servir a la comunidad educativa como un dispositivo para generar instancias reflexivas tanto en formación inicial como continúa. Se ha comprado el dominio www.competenciasmatematicas.cl en que estarán disponibles los casos clínicos para la comunidad. Esta página además de difundir los resultados de este proyecto, será el espacio de los académicos que conformamos la línea de investigación competencia matemática, y se compartirán otros trabajos del grupo y publicaciones de interés. La página si bien ya está en funcionamiento, a la fecha del informe está en construcción, disponiendo solo algunas apartados como los caso clínicos. Se espera que para el 13 de enero la página este en pleno funcionamiento, fecha en que se ha fijado la jornada de difusión de los resultados en el marco de un seminario sobre Competencias matemáticas organizado en la UCSC, Concepción, y que contará con la presencia de un experto internacional en competencias matemáticas.

8. Recomendaciones para políticas públicas

El proceso de formación continua de profesores es uno de los desafíos más complejos para la mejora de la calidad de la educación. Es reconocido que las culturas docentes son resistentes al cambio de prácticas pedagógicas, con lo cual no cualquier proceso de formación puede llegar a ser adecuado según contextos específicos.

En este contexto, la propuesta que se ha implementado por medio de este proyecto para trabajar con profesores, apuesta a ser una metodología sistémica y sistemática, que contempla un modelo didáctico robusto a la base de su quehacer, y cuya forma de desarrollarse potencia la contrastación y quiebre de culturas arraigadas en los y las docentes.

Esta metodología de trabajo docente se basa en un modelo didáctico integrado (MCM), que complejiza la acción de la enseñanza desde la propia actividad matemática escolar. Es desde aquí que aborda el análisis de los distintos elementos que implican lograr efectivos aprendizajes en los estudiantes, a la vez que desarrollar competencias que perduran en el tiempo.

Este modelo de competencia matemática presenta elementos estructurales de la actividad de aula, tal como son las organizaciones matemáticas de referencia, los procesos competenciales adyacentes a dichas organizaciones, y la necesaria progresión de complejidad, que se convierte en elemento fundamental en los desafíos cognitivos necesarios para el aprendizaje.

Sin embargo, un modelo didáctico como el presentado, por sí solo no es suficiente para lograr cambios que impacten a nivel de clase. Se requiere de formas de trabajo que potencien distintos elementos. En este sentido es que la propuesta de trabajo docente contempla momentos de estudio del modelo didáctico, momentos de diseño de experiencias de aprendizaje basadas en dicho modelo, e implementaciones de dicha secuencia junto a las reflexiones proyectivas y retrospectivas necesarias para complejizar la actividad de aula, además de retroalimentaciones permanentes del quehacer docente.

La potencia de un modelo de este tipo debe ir acompañada por parte de los agentes formadores, o de quienes incentivan esta política, de un beneficio al docente (acreditación, mejoras contractuales,...), ya que el solo compromiso no basta para el logro efectivo de la apropiación de modelos didácticos innovadores. En este proyecto, hemos visto el alto compromiso de las docentes al asistir y participar del mismo, pese a las restricciones institucionales por las cuales permanentemente se veían afectadas, sobre todo a la hora de poner en práctica las comprensiones que lograban en el transcurso de la experiencia.

Es por esto que la participación de los docentes en este tipo de metodología de formación continua, debe ser promovida e instalada a nivel de escuela. Es muy difícil que un profesor aislado pueda sostener en el tiempo cambios paradigmáticos en su práctica, si al mismo tiempo la institución en la que ejerce tiene instalada una cultura pedagógica tradicional, que presenta grandes resistencias frente al cambio. Es necesario que tanto docentes como coordinadores académicos y directivos de la escuela estén involucrados en la apropiación y efecto de nuevos modelos didácticos; su eficacia dependerá en gran medida del grado de incorporación de dicha metodología dentro del proyecto educativo institucional.

Modelos de formación continua que traten de manera aislada y atomizada los componentes de un modelo didáctico para el aula, esto es por un lado lo disciplinar y por otro lo pedagógico, no lograrían cuestionar las prácticas docentes, además de trasladar al

profesorado una tarea de difícil abordaje como es la propia integración de los elementos estructurantes de la práctica docente. Dicha integración, guiada por principios didácticos fundamentales, es lo que permite revisitar reflexivamente la acción de enseñanza, y tender al cambio y mejora escolar.

Por otra parte, se pueden aprovechar los postítulos de formación continua para implementar esta metodología de trabajo docente. En algunos postítulos de segundo ciclo se consideran espacios de seminario en que un grupo de docentes tienen que diseñar una unidad didáctica. Proponemos aprovechar esta instancia que es idónea para implementar las características de la metodología de trabajo, para ampliarla a que también reflexionen sobre la práctica. De hecho, la metodología de trabajo docente tal como fue instaurada en la investigación, puede ser transferida tanto a los postítulos de matemáticas en segundo ciclo, como de primer ciclo.

9. Bibliografía

- Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 125-143.
- APM. (2001). Competências matemáticas essenciais na educação básica. En Cadernos do CRIAP (Ed.), *Competências essenciais no Ensino Básico: visões multidisciplinares*. Porto: ASA.
- Beas, J., Gómez, V., y Thomsen, P. (2008). ¿Cómo cambian los profesores con la práctica reflexiva? En J. Cornejo y R. Fuentealba (Eds.), *Prácticas reflexivas para la formación profesional docente: ¿Qué las hace eficaces?* Santiago: Ediciones UCSH.
- Beas, J., Santa Cruz, J., Thomsen, P., y Utreras, S. (2000). *Enseñar a pensar para aprender mejor*. Santiago: Ediciones Universidad Católica.
- Blomhøj, M., y Højgaard, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), 123-139.
- Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W., y Niss., M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education*. New York: Springer.
- Boertien, H., y de Lange, J. (1994). *The national option of TIMSS in The Netherlands*. Enschede, The Netherlands: University of Twente.
- Borko, H., y Jacobs, J. (2007). Video as a tool for fostering productive discussions in mathematics professional development. *Teaching and Teacher Education*, 24(2), 417-436.
- Bosch, M., Espinoza, L., y Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudios. Análisis de praxeologías didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(1), 79-136.
- Brendefur, J., y Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: two preservice teachers conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 125-153.
- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: Le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 308-336.
- Bryman, A. (2004). *Social Research Methods. Second Edition*. Oxford: Oxford University Press.
- Canales, M. (2006). El Grupo de Discusión y el Grupo Focal. En M. Canales (Ed.), *Metodología de investigación social* (pp. 265-287). Santiago de Chile LOM.
- Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., y Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal of Research in Mathematics Education*, 28, 258-277.
- Chevallard, Y. (1997a). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 17-54.
- Chevallard, Y. (1997b). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinariété. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Intervención en el Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'informatique. Grenoble: Université Joseph Fourier.

- De Lange, J. (1995). Assessment: No change without problems. En T. A. Romberg (Ed.), *Reform in school mathematics and authentic assessment* (pp. 87-172). New York: SUNY Press.
- De Lange, J. (1999). *Framework for classroom assessment in mathematics*. Madison: WCER.
- Dekker, T., y Querelle, N. (2002). *Great assessment picture book*. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.
- DOGC. (2007). 4915 Decret 142/2007 de 26 de juny, d'ordenació dels de l'educació primària.
- Espinoza, L., Barbé, J., Bosch, M., y Gascón, J. (2005). Didactic Restrictions on the Teaching of Limits of Functions at Secondary School. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 235-268.
- Espinoza, L., Barbé, J., Mitrovich, D., Solar, H., Rojas, D., y Matus, C. (2008). *Análisis de las competencias matemáticas en primer ciclo. Caracterización de los niveles de complejidad de las tareas matemáticas. Proyecto FONIDE N°: DED0760*. Santiago: Mineduc.
- Espinoza, L.; Barbé, J. y Gálvez, G. (2009). Estudio de fenómenos didácticos vinculados a la enseñanza de la aritmética en la educación básica chilena. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(2), 157-168.
- Font, V. (2001). Processos mentals versus competència. *Biaix*, 18(33-36).
- Furió, C. y Carnicer, J. (2002). El desarrollo profesional del profesor de ciencias mediante tutorías de grupos cooperativos. Estudio de ocho casos. *Enseñanza de las ciencias*. 2002, 20 (1), 47-73.
- Godino, J. D. (2002). Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen? *Revista Uno*, 29, 9-19.
- Gómez, P., y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1(2), 79-98.
- Greer, B., y Verschaffel, L. (2007). Modelling competencies - overview. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 119-124). New York: Springer.
- Henning, H., y Keune, G. (2007). Levels of modeling competence. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 225-232). New York: Springer.
- Houston, H. (2007). Assessing the "phases" of mathematical modeling. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 249-256). New York: Springer.
- Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling. The 12th ICTMA Study. Education, Engineering and Economics*. Chichester: Horwood.
- Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Lupiáñez, J. L., y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: organización de competencias y capacidades de los escolares en el caso de los números decimales. *Indivisa: Boletín de estudios e investigación*, 4, 47-58.
- Lupiáñez, J. L., y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 3(1), 35-48.

- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? . *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 113-142.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Mena, A. M., y Méndez, J. M. (2009). La técnica de grupo de discusión en la investigación cualitativa. Aportaciones para el análisis de los procesos de interacción. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43(3).
- Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.
- Mineduc. (2006). Historia. Descargado el 17 de junio del 2006, desde http://www.mineduc.cl/index.php?id_portal=1&id_seccion=205&id_contenido=89
- Mineduc. (2011). Bases curriculares de Educación Básica: consulta pública. Santiago de Chile: Ministerio de Educación.
- Ministério da Educação. (2001). Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais. Lisboa: Departamento da Educação Básica.
- Ministry of Education. (2005). The Ontario Curriculum in Secondary Mathematics. Descargado el 23 de Marzo de 2006, desde <http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/secondary/math.html>.
- NCTM. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Niss, M. (1999). Competencies and Subject Description. *Uddanneise*, 9, 21-29.
- Niss, M. (Ed.). (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish kom project*. Roskilde: Roskilde University.
- OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*. Paris: autor.
- OCDE. (2005). La Definición y Selección de Competencias Claves. Resumen ejecutivo. Descargado el 25 de junio de 2008, desde www.deseco.admin.ch
- OCDE. (2006a). *PISA marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. España: Santillana.
- OCDE. (2006b). *PISA: marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. España: Santillana.
- Rico, L., y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- Rojas, F. (2011). *Instrumentos discursivos para caracterizar la comunicación del profesor en el aula de matemáticas y las posibilidades de participación de los estudiantes*. Artículo presentado en XIII CIAEM - Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife (Brasil).
- Schön, D. A. (1998). *El profesional reflexivo: cómo piensan los profesionales cuando actúan*. Barcelona: Paidós Iberica.
- Sherin, M. G., y Han, S. Y. (2004). Teacher learning in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, 20(2), 163-183.
- Solar, H. (2009). *Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráficas funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso*. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra.
- Solar, H., Rojas, F., y Ortiz, A. (2011). *Competencias matemáticas: Una línea de investigación*. Artículo presentado en XIII CIAEM - Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife (Brasil).

- Steffe, L. P., y D'Ambrosio, B. S. (1995). Toward a working model of constructivist teaching: a reaction to Simon. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.
- Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Van Es, E. A., y Sherin, M. G. (2007). Mathematics teacher' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, 24(2), 244-276.
- Vergnaud, G. (2007). *Forma operatoria y forma predictiva del conocimiento*. Artículo presentado en I encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática (Conferencia Plenaria), Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
- Zeichner, K. M. (1993). El maestro como profesional reflexivo. En D. Liston y K. M. Zeichner (Eds.), *La formación del profesorado y las condiciones sociales de la enseñanza*. Madrid: Morata.

Anexos (en versión digital)

ANEXO 1 FICHA DOCENTE

ANEXO 2 CALENDARIO SEMINARIO PROFESORES

ANEXO 3 CUESTIONARIO CONCEPCIONES

ANEXO 4 EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

ANEXO 5 DOSSIER DE VALIDACIÓN

ANEXO 6 SESIONES SEMINARIO

ANEXO 7 GRUPO FOCAL

ANEXO 8 PLANIFICACIONES DE CLASES

ANEXO 9 PAUTA OBSERVACIÓN DE CLASES

ANEXO 10 FORMULARIO CPEIP

ANEXO 11 ACTAS REUNIONES

ANEXO 12 CASOS CLÍNICOS

ANEXO 13 VIDEOS Y TRANSCRIPCIONES GRUPO FOCAL

ANEXO 14 ENTREVISTAS ESTUDIO DE CASO

ANEXO 15 PLANIFICACION DE LAS DOCENTES

ANEXO 16 CERTIFICACION CPEIP