Fondo de Investigación y Desarrollo En Educación - FONIDE
Departamento de Estudios y Desarrollo.
División de Planificación y Presupuesto.
Ministerio de Educación.

Innovación metodológica en la formación inicial de profesores de matemática. Una propuesta de intervención en prácticas tempranas.

Investigador Principal: María Aravena Díaz
Equipo de Investigación: Carlos Caamaño Espinoza
Jorge González Lorca
Carlos Cabezas Manríquez
Fernando Córdova Lepe
Institución Adjudicataria: Universidad Católica del Maule
Facultad de Ciencias Básicas
Proyecto FONIDE N°: F-104987

Diciembre 2010

Información: Secretaría Técnica FONIDE. Departamento de Estudios y Desarrollo – DIPLAP. Alameda 1371, Piso 8, MINEDUC. Fono: 3904005. E-mail: fonide@mineduc.cl

INFORMACIÓN SOBRE LA INVESTIGACIÓN:

Inicio del Proyecto: Agosto de 2009

Término del Proyecto: Diciembre de 2010

Equipo Investigación: María Aravena Díaz- Carlos Caamaño Espinoza-

Monto adjudicado por FONIDE: $17.838.760

Presupuesto total del proyecto: $100.731.184

Incorporación o no de enfoque de género: No

Comentaristas del proyecto: Lorena Espinoza - Leonor Varas

Esta publicación está disponible en www.fonide.cl

Información: Secretaría Técnica FONIDE.. Alameda 1371, Piso 8, MINEDUC. Fono: 3904005. E-mail: fonide@mineduc.cl

ABSTRACT.

Esta investigación, consiste en un experimento de aula, en la formación inicial de profesores de matemática de la UCM, cuyo objetivo fue determinar las capacidades que desarrollan en el diseño e implementación de un proyecto pedagógico en la enseñanza secundaria de la comuna de Talca y Linares, como también, determinar las habilidades y destrezas que logra el alumnado, objeto de intervención pedagógica.

El sustento teórico del estudio, se apoya en las investigaciones que han desarrollado propuestas en la línea de la resolución de problemas y en los resultados de investigaciones del proyecto FONDECYT 1030122, finalizado y se enmarca en el proyecto FONDECYT 1090617, en ejecución. El estudio consideró dos instancias de análisis, esto es, el trabajo realizado por el alumnado de pedagogía en matemática y por el alumnado de secundaria. El enfoque de la investigación fue de corte cuantitativo y cualitativo. Respecto del enfoque cuantitativo, se utilizó en tres momentos: (1) analizar el perfil de progreso del alumnado de pedagogía en matemática, que ha sido objeto de la innovación metodológica, mediante el diseño e implementación de un Proyecto pedagógico en su primera pre-práctica; (2) analizar las habilidades y destrezas que desarrolló el alumnado, objeto de la intervención pedagógica y que han sido reportadas por Alsina (1998), Aravena (2002) y Aravena & Caamaño (2007) y; (3) analizar la interrelación respecto de las capacidades desarrolladas entre el alumnado de pedagogía y el alumnado de secundaria. El enfoque cualitativo, se utilizó para el estudio de caso de un grupo de trabajo donde se analizó la planificación de la unidad didáctica y ejecución de una clase representativa tomando como referencia el método “Lesson Study”.

A nivel de conclusiones, se destaca que el alumnado de pedagogía en matemática desarrolla capacidades cognitivas, metacognitivas y de formación en el trabajo de proyectos, en un nivel significativo. Respecto del perfil de progreso, desarrolla capacidades de conceptualización, organización, matematización, estrategias generales y comunicación matemática, cuando se enfrenta a la resolución de problemas en contextos de aplicación, superando las dificultades y obstáculos iniciales en un nivel significativo. Asimismo, el alumnado de secundaria, desarrolla habilidades y destrezas matemáticas en un nivel significativo, superando las dificultades iniciales. Por último, se evidencia que el perfil del futuro docente, para que el alumnado de secundaria tenga un buen desempeño en la resolución de problemas, depende de los siguientes factores: (1) buena estructuración en la planificación de sus clases, con conocimiento matemático didáctico y problema en contextos, como algo prioritario, pero que no es suficiente para generar aprendizajes de calidad; (2) muy buen manejo en la conceptualización, es decir, el reconocimiento y significado de los conceptos en el contexto matemático y del problema; (3) alto nivel en la organización de la información, estableciendo condiciones y restricciones, cuando se enfrenta a problemas; (4) muy buena matematización, es decir, descripción de las relaciones matemáticas y aplicación de propiedades y algoritmos; (5) buenas estrategias para enfrentarse a la resolución del problema y; (6) muy buen nivel en la comunicación matemática.

Palabras claves: formación de inicial, pre-prácticas, resolución de problemas.

I. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA.

La formación matemática en Chile, salvo excepciones, está basada en un trabajo eminentemente algorítmico, con escasas aplicaciones en las diversas áreas del conocimiento e incluso existe una parcelación entre la propia matemática. Las críticas por esta problemática se han enfocado a la formación inicial del profesorado, concentrando la mayor atención la poca capacidad de innovación de los formadores de formadores, donde se coloca de manifiesto que la enseñanza no está respondiendo a las demandas requeridas en la sociedad actual. Al mismo tiempo, los cambios curriculares que se han realizado en la última década, a nivel universitario, no han dado respuesta a una enseñanza de calidad, puesto que ésta, tanto en sus metodologías como en los procesos evaluativos, sigue estando basada en un esquema tradicional. Entre los problemas más relevantes que dan cuenta de la magnitud del problema, destacamos: (1) escaso trabajo basado en la resolución de problemas, lo que tiene como consecuencia que los futuros profesores no logran establecer la interconexión de la matemática con las otras áreas del conocimiento; (2) escasa interrelación entre la propia matemática, en particular geometría y álgebra (Díaz & Poblete, 1998; Aravena & Caamaño, 2007; Aravena, Caamaño & Giménez, 2008; Aravena & Caamaño, 2008); (3) escasa interrelación con los modelos de enseñanza y las corrientes pedagógicas que no permiten a los futuros docentes preparar situaciones de enseñanza de acuerdo a los contextos en los cuales se va a impartir y (4) escaso conocimiento de los procesos histórico-epistemológicos de la disciplina, que no les permite comprender la dinámica del desarrollo científico.

Esta problemática vigente en Chile, y que tiene sus raíces en la formación del profesorado a partir de la década de los 60, ha sido compleja y difícil de revertir, tanto a nivel conceptual como metodológico. Al respecto, la enseñanza de los futuros docentes sigue estando sobrecargada de estructuralismo, de abstracción y de parcelación del conocimiento. Esta forma de enseñanza, arraigada en los sistemas educativos, ha tenido consecuencias negativas para la formación de los futuros docentes, puesto que no se están diseñando actividades que son consideradas aspectos claves de la matemática y que permiten el desarrollo de capacidades de alto nivel. Entre las más importantes destacamos: (1) ***la visualización*** y en este sentido, son numerosas las investigaciones que confirman la importancia de ésta y la intuición geométrica en la comprensión y tratamiento de problemas matemáticos (Bishop, 1989; Clements y Battista, 1992; Dreyfus, 1991; Zimmermann & Cunningham, 1991; Hitt, 1998; Fischbein, 1993; Presmeg, 2006); (2) ***la modelización*** de situaciones que ha sido ampliamente investigada, mostrando que cuando es incorporada en el aula, permite el desarrollo de capacidades de alto nivel necesarias para enfrentar un mundo en cambio permanente (Niss, 1989; Keitel, 1993; De Lange, 1996; Niss, 2001; Aravena, 2001; Aravena & Caamaño, 2007; Gómez, 2007; Aravena, Caamaño & Giménez, 2008); (3) ***las representaciones***, aspecto primordial en el trabajo matemático, ya que las investigaciones señalan que en el trabajo con problemas se vuelve central el tránsito por diferentes sistemas de representación (Janvier, 1987; Font, 2001; Aravena, Caamaño & Giménez, 2008), aunque se reconoce que resulta difícil de lograr "la conversión de representaciones es un problema crucial en el aprendizaje de la matemática" (Duval, 2002, p.318); (4*)* ***procesos de pensamiento y razonamiento matemático***, aspectos claves para la comprensión de los problemas, los procesos de resolución y la comunicación matemática de éstos (Aravena, Caamaño & Giménez, 2008). Otro aspecto clave, y que no ha sido considerado en la formación inicial de los futuros profesores, tanto en Chile como en numerosos países, está referida a la ***componente histórica-epistemológica de conceptos y procesos matemáticos***. Para quienes enseñan matemática, cualquiera sea el nivel, es

imprescindible el conocimiento de la historia de la disciplina, porque permite comprender en forma profunda los principios esenciales y para captar en toda su complejidad el carácter dinámico y procesual de la actividad científica (Lusa, 1990). En este sentido, ha sido muy importante la influencia que han tenido los trabajos en epistemología, donde se analiza el conocimiento del desarrollo histórico de los conceptos, porque ha permitido en muchos casos extraer pistas de una reconstrucción del saber matemático, como objeto de comunicación en los procesos educativos actuales (Kieran & Filloy, 1989; Filloy& Rojano, 1984). La formación matemática de los futuros docentes, suele entregarse totalmente separada del proceso histórico que dio lugar a su creación, acentuando cada vez más la separación entre los procesos claves: el de la génesis de los conocimientos y el de su transmisión (Peralta, 1995). El conocer cómo se han forjado los conceptos, procesos y las notaciones matemáticas, ayuda al docente a comprender mejor los errores y obstáculos que presentan los jóvenes, porque tal como lo plantea Lusa (1990) y Aravena (2001), muchos de éstos obstáculos que se han presentado en el desarrollo de la matemática, suelen presentarse a escala individual durante el aprendizaje.
Los elementos descritos anteriormente han sido reportados por numerosas investigaciones mediante el análisis, diseño y la puesta a prueba en los sistemas educativos con propuestas y modelos de enseñanza que han sido exitosos para elevar la calidad de los aprendizajes en todos los niveles de enseñanza, permitiendo romper con la atomización del currículum tradicional de la matemática que impera en numerosos países (Oliveras, 1996).

Por otro lado, investigaciones recientes han señalado que el nuevo currículum que ha sido implementado en Chile, no ha mejorado el rendimiento de los alumnos de educación media y básica, relacionándolo en que éste no se ha traducido en cambios sustantivos en las prácticas docentes, destacándose una preocupación ante las limitadas conexiones entre la formación de éstos (Latorre, 2004). Este aspecto coincide con investigaciones realizadas por Aravena & Caamaño (2007), quienes realizan un Diagnóstico en establecimientos municipalizados de la región del Maule en el marco del Proyecto Fondecyt 1030122 y lo relacionan con el SIMCE 2003 (2004). Allí se coloca en evidencia que los estudiantes presentan una serie de obstáculos y dificultades en la resolución de problemas y la articulación de los conceptos y procesos de resolución.

Asimismo, el informe de la OECD (2004) atribuye a la formación inicial de profesores parte importante de la responsabilidad en los resultados educativos, llamando la atención hacia la existencia de debilidades, principalmente en el dominio de la materia, las relaciones entre los contenidos disciplinares y las metodologías que los profesores utilizan en la sala de clases y los procesos evaluativos. Se recomienda que los países deben definir perfiles, establecer modelos claros y concisos de lo que se supone que tienen que saber y ser capaces de hacer los profesores, y esos perfiles deberían implantarse tanto en el sistema escolar como en el de formación de profesores. Los perfiles del profesorado deberán basarse en una visión enriquecedora de la docencia y englobar parámetros tales como: un sólido conocimiento de la materia que vaya a impartirse; competencias pedagógicas; competencias didácticas; conocimiento de modelos de enseñanza de acuerdo a contenidos específicos y capacidad de elaborar unidades didácticas con modelos de enseñanza acorde a las temáticas a impartir. En este contexto, el Informe de Educación Superior en Chile (2009) da cuenta que las instituciones han hecho esfuerzos considerables para lograr la acreditación de los programas, pero no hay evidencia concreta de que estos esfuerzos han producido un mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje, sin embargo, coloca en evidencia que muchas instituciones ya han definido perfiles de egreso, pero se plantea que no hay evidencia empírica de cómo se está desarrollando el proceso de enseñanza y aprendizaje de los futuros docentes.

A partir de los planteamientos descritos anteriormente y considerando las investigaciones que dan cuenta que la formación inicial sería uno de los elementos que explicaría la calidad del desempeño profesional, y tomando como referente que los buenos maestros marcan una clara diferencia en los aprendizajes que logran sus alumnos en sus rendimientos y, en definitiva, en el éxito escolar que estos alumnos puedan tener (Rivkin et.al, 2002, citado en Latorre, 2004), se realizó una intervención con un grupo de estudiantes de pedagogía en Matemática y Computación, incorporando en su formación inicial los elementos descritos anteriormente. Apostando además que el estudiantado participe activamente en la construcción y reconstrucción del conocimiento, lo que permitirá el desarrollo de capacidades y competencias para enfrentarse en forma eficiente a la problemática de aula, tanto en sus prácticas como en su futuro profesional docente. Esto es, se reconoce y es necesario que los futuros profesores, en su formación inicial, estén en contacto permanente con el sistema educativo de tal manera de enfrentarse, desde el inicio, con las dificultades del medio externo. Uno de los desafíos de esta aproximación temprana es fortalecer su formación, desarrollando una mirada crítica desde una propuesta teórica, aprovechando esta práctica para criticar o validar la teoría, un diálogo que Da Ponte (1999) considera esencial para codefinir ambas realidades y que le permita además, construir una estructura conceptual potente. Agregando también, que las necesidades actuales en la formación de profesores de matemática deben considerar los destinatarios. Por ello, es necesario que, en su formación se articulen: matemática, modelos de enseñanza y de evaluación, todo ello basado en la resolución de problemas, con sus aplicaciones en diferentes áreas del conocimiento.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN.

Para efectos del estudio se presentan las preguntas de investigación de los dos actores objeto de intervención que corresponden a:

1. Alumnado de pedagogía en matemática y computación

(1) ¿Cómo integran y articulan los conceptos y procesos matemáticos cuando son enfrentados a la resolución de problemas en contextos de modelización del ámbito escolar?

(2) ¿Qué estrategias y métodos utilizan los alumnos de pedagogía cuando se enfrentan a la resolución de problemas en contexto de modelización del ámbito escolar?

(3) ¿Qué dificultades y obstáculos presentan los alumnos de pedagogía cuando se enfrentan a la resolución de problemas en contextos de aplicación?

(4) ¿Cómo articulan los contenidos matemáticos con los modelos de enseñanza y práctica evaluativas cuando se enfrentan al diseño y a la implementación de un proyecto pedagógico en las aulas de secundaria?

(5) ¿Cuáles son las fortalezas y debilidades respecto de la planificación de un proyecto pedagógico y de su implementación en el aula de secundaria?

2. **Alumnado de secundaria de la comuna de Talca y Linares**

(1) ¿Qué habilidades y destrezas matemáticas colocan en juego los alumnos cuando se enfrentan a un trabajo matemático basado en la resolución de problemas?

(2) ¿Qué estrategias utilizan los alumnos cuando se enfrentan a problemas en contextos de aplicación?

(3) ¿Qué métodos y procesos colocan en juego los alumnos de secundaria para enfrentar problemas en contextos?

(4) ¿Cómo comunican y argumentan los procesos y resultados que permiten dar respuesta a un problema en contexto de aplicación?

Para dar respuesta a la problemática de investigación se propuso el siguiente objetivo:

OBJETIVOS GENERAL.

Determinar las capacidades cognitivas, metacognitivas y transversales, que desarrollan los estudiantes de Pedagogía en Matemática cuando se enfrentan al diseño teórico de un Proyecto Pedagógico que contiene planes de clases del Modelo Japonés y a su validación en las aulas de secundaria de la Comuna de Talca y Linares, en el contexto de sus prácticas tempranas. Incorporando además, las capacidades habilidades y destrezas que desarrollan los alumnos de secundaria, objeto de intervención, cuando son enfrentados a la resolución de problemas en contextos.

Objetivos específicos

1. Identificar las capacidades cognitivas, metacognitivas y transversales que desarrollan los alumnos de Pedagogía, en el diseño de un Proyecto Pedagógico así como durante la Intervención y Gestión en el aula.

2. Analizar cuantitativamente el perfil inicial y perfil de progreso de los alumnos de pedagogía, respecto de las capacidades cognitivas cuando son enfrentados a la resolución de problemas, a su análisis didáctico y evaluativo.

3. Describir a través de un estudio de caso, la evolución de un grupo de estudiantes de pedagogía, en el diseño de la planificación del plan de clases, la ejecución y análisis de la clase teniendo como referencia la metodología “Lesson Study”.

4. Identificar los avances en el logro de los aprendizajes del alumnado de secundaria, producto de la implementación del proyecto de intervención pedagógica. Describir cuantitativamente, a partir de la intervención pedagógica, habilidades y destrezas cuando se enfrentan a la resolución de problemas.

II. MARCO TEÓRICO

El posicionamiento teórico tomó como primer referente la importancia de incorporar la resolución de problemas en la formación inicial del profesorado, especialmente cuando se trabajan problemas en contextos de aplicación basado en la modelización de situaciones geométricas y algebraicas. Los referentes teóricos analizados, han sido aquellos que han conducido a una reflexión para el trabajo matemático de aula, tanto en la formación inicial de profesores como en la formación del alumnado de secundaria. Justificamos dicha reflexión en el sentido de la necesidad de que el alumnado de pedagogía conozca y reflexione sobre modelos de planificación, y que potencien el pensamiento y el razonamiento matemático en el alumnado de secundaria. Además, los futuros docentes deben conocer y analizar modelos de enseñanza para el aula, que han permitido una mejora en diferentes países y condiciones y, como una componente importante, los sistemas de evaluación para que conozcan formas de regulación, evaluación y diseños de formatos y pautas que permita valorar el trabajo matemático del alumnado de secundaria.

2.1. MODELO DE PLANIFICACIÓN DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA.

En un análisis del texto "Japanise Lesson Study in mathematics at a Glance" (Shizumi, et.al., 2005), se observa que el punto fuerte de la enseñanza en Japón, es la forma como el profesor o grupo de profesores organiza el Plan de Clases y de análisis de la clase, lo que denominan estudio de la lección. Los tres elementos que están en juego en el estudio de clase son: (1) diseñar su Plan de Clases atendiendo al currículo nacional y a los principios que guían el método, esto es, la formulación y discusión de los problemas que serán trabajados por el alumnado, orientando las clases hacia la resolución de problemas y la discusión de los materiales didácticos; (2) ejecutar la clase con presencia del equipo de profesores; (3) analizar la clase en equipo, para detectar los aciertos y dificultades mediante la discusión y reflexión conjunta; y (4) establecer los ajustes para la retroalimentación y la revisión del plan de clases (Aravena, 2007; Aravena &Caamaño, 2008; Isoda, Arcavi & Mena, 2008). Esta modalidad, donde se pueden incorporar profesores de distintas escuelas, les ha permitido retroalimentar el proceso y establecer mejoras, como también ayudar a otros docentes para que desarrollen sus propias prácticas pedagógicas.

Aravena (2007) y Aravena &Caamaño (2008), explican el modelo de planificación de Japón, colocando en evidencia que cada uno de estos pasos es muy bien organizado en las clases y queda plasmado en lo que denominan el Plan Didáctico Anual, de acuerdo a estándares nacionales para el currículo, cuyo objetivo es desarrollar la habilidad de comprensión y razonamiento creativo. En éste, se toman en cuenta los siguientes puntos: conexión del contenido anterior con el nuevo; desarrollo de contenido e inicio de otro sin conexión aparente; subdivisión de unidades para permitir el estudio en espiral. Respecto del plan didáctico de enseñanza, que apunta a cómo desarrollar las clases para generar aprendizajes de calidad, apunta a: (1) crear situaciones o problemas centrados en el reconocimiento de regularidades o propiedades que potencien el pensamiento matemático inductivo y la búsqueda de nueva información; (2) desarrollo de actividades matemáticas creativas que motiven la búsqueda de regularidades; y (3) desarrollo de estrategias innovadoras de enseñanza, para apoyar diversas formas de pensar. El propósito es asegurar que el alumnado aprenda por sí mismo, mediante la estimulación de ideas sobre los conocimientos necesarios para resolver problemas. Respecto del diseño del plan de clases, se estudia en profundidad el material didáctico, que sirve de puente para que los niños desarrollen sus propias ideas, anticipándose a las ideas de los niños, comprendiendo la calidad y eficacia de las ideas y desarrollando preguntas para estimular la solución (Aravena, 2007). Una planificación detallada centrada en estos aspectos, son claves para el desarrollo del pensamiento y conocimiento, basado en la resolución de problemas, principalmente porque las estrategias para el desarrollo de las clases busca potencias los métodos, conceptos, formas de razonamiento y comunicación de métodos y procesos.

2.2. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO EJE CENTRAL DEL CURRICULUM

Uno de los temas que ha concitado el interés nacional en todas las esferas educativas, está referido a los bajos resultados de los estudiantes chilenos en las pruebas nacionales (SIMCE) e internacionales (PISA y TIMSS), que dan cuenta que éstos están muy por debajo de la media internacional, no presentándose diferencias significativas en los últimos años. Al respecto, para comprender el problema de fondo, es necesario analizar lo que ha sido la formación matemática en las últimas décadas, ya que ésta ha estado orientada preferentemente a la ejercitación y al manejo de algoritmos, fuera de contextos, hecho que no permite a los estudiantes comprender su utilidad en el mundo actual, acrecentándose aún más en los establecimientos que atienden a los sectores de nivel socioeconómico medio bajo y aún más en los sectores rurales y marginales (Aravena & Caamaño, 2007; Aravena & Caamaño, 2008). Por ello, se han revisado las propuestas referidas a la resolución de problemas, cuyas investigaciones realizadas en Chile por Aravena & Caamaño (2007) dan cuenta, salvo excepciones, que el trabajo con problemas, está alejada de las aulas de nuestro país, constatándose que no se relaciona la matemática con la realidad ni con las otras áreas del conocimiento, e incluso existe una parcelación entre la propia matemática (Aravena & Caamaño, 2007). Al mismo tiempo, numerosas son las investigaciones que dan cuenta de la importancia que tiene la resolución de problemas para el desarrollo del pensamiento y habilidades de orden superior, como asimismo se muestran diferentes estrategias de resolución conocidas como métodos heurísticos que faciliten el trabajo de los estudiantes (Polya,1957; Schoenfeld, 1982; Mayer, 1986; Schoenfeld, 1988; Santos, 1992; Shumizu, et al., 2005; Aravena & Caamaño, 2008). Investigaciones importantes han marcado el estudio en la resolución de problemas desde la década de los 70, entre los que se destacan la creación de los Estándares Curriculares por el Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos, que fue asumido por varios países, transformándose en el objetivo fundamental de la enseñanza de la Matemática y eje del curriculum en la década de los 80 y el Informe Cockcroft (1985), donde el análisis comprensivo en 11 temas matemáticos, en Inglaterra y el país de Gales, da cuenta de las principales áreas de dificultades tanto en álgebra como en geometría.

A partir de los 80 se generan los primeros cambios en los planes de estudio en Europa, proceso que en Chile ha sido lento, especialmente el proceso de formación para los nuevos docentes, que son productos de un modelo diferente de enseñanza. Es a partir de la década de los 90 donde se realizan los primeros Diagnósticos, que dan cuenta de la magnitud del problema que afecta a la educación y en particular a la enseñanza de las ciencias y la matemática, allí se coloca en evidencia que el tratamiento de los temas de matemática y de ciencias está basados sólo en lo teórico-formal, las aplicaciones son escasas y la relación con otras áreas del conocimiento no es considerada. En las clases el problema se agudiza aún más donde se privilegia la algoritmización, la memorización y la parcelación del conocimiento. Las recomendaciones de expertos en matemática, en educación y en educación matemática, apuntan a mejorar la práctica educativa utilizando metodologías modernas y prácticas evaluativas acorde a los tiempos actuales, lo que ha obligado a una revisión curricular profunda, que ha tenido como consecuencia adecuar la oferta educativa acorde a los tiempos actuales, donde lo más importante es superar la fragmentación del saber, pasando de la simple transmisión de conocimientos a una verdadera educación para la vida, incorporando nuevas metodologías y métodos eficaces, nuevas tecnologías y medios y asumiendo una actitud diferente frente a la enseñanza y el aprendizaje, donde se considere la importancia de éste para la vida actual y futura de los educandos.

La propuesta curricular actual coloca a la matemática como uno de los ejes centrales para el desarrollo integral del ser humano, enfatizando además de los contenidos, que la matemática forma parte de la cultura y de la historia como ciencia y conocimiento acumulado. A partir de ello, ha establecido una organización curricular de los planes y programas de estudio, los contenidos y las metodologías didácticas preparando situaciones de enseñanza de tal manera de mantenerlos a la altura de los cambios sociales. Sin embargo, a pesar de todos los acercamientos sobre qué enseñar, cómo enseñar y que lograr en ese proceso, la problemática se acrecienta aún más y tal como lo plantea Alsina (1998), se ha tratado de buscar la raíz del problema en casi todas partes, excepto en los procedimientos de la propia matemática. En este sentido, las investigaciones dan cuenta de las numerosas propuestas que se han generado en las últimas décadas, caracterizándose la mayor parte de la investigación en educación matemática a partir de contenidos matemáticos específicos de tal manera de revertir la situación, entregando además recomendaciones metodológicas en las que se hace hincapié en la necesidad de un cambio en la enseñanza de la matemática, presentando como alternativas válidas: los estudios epistemológicos de los conceptos matemáticos en juego, la modelización de situaciones matemáticas, el trabajo con problemas de aplicación, el trabajo de proyectos de tal manera, de romper la atomización de los curriculum tradicionales de matemática (Gómez, 1998; Niss, 2001; Aravena, 2001; Blomhøj, 2009)

2.2.1. Enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas basado en la Modelización de situaciones.

Hacer un trabajo matemático basado en las aplicaciones y el modelaje no es algo nuevo, diversos autores justifican su importancia y su incorporación en las actividades curriculares de matemática, esto es, a partir de las ideas de Niss (1989) incorporar en el aula este tipo de problemas, permite a los estudiantes entrar en un trabajo sistemático, apreciar la aplicabilidad de los conceptos y su utilización práctica. Desde el punto de vista del aprendizaje, la enseñanza a través de las acciones de modelaje, es más conveniente para un buen desempeño matemático posterior, porque es a partir de la realización de problemas concretos, complementados con un tratamiento teórico, donde se modelan los nuevos objetos matemáticos, permitiendo con el tiempo introducirse en situaciones cada vez más abstractas (Niss,1989; Gómez, 1998; Aravena, 2001; Aravena, Caamaño & Giménez, 2008; Aravena & Caamaño, 2009). Las investigaciones, en especial aquellas que están enfocadas a un trabajo en la línea de Niss(1989), colocan en evidencia la importancia de este tipo de trabajo en un mundo cada vez mas matematizado, esto es, en la actualidad la matemática aplicada y la matematización de situaciones han tenido un crecimiento acelerado en todas las áreas del conocimiento, por ello, se hace imprescindible manejar conceptos matemáticos relacionados con la vida diaria y con las otras ciencias, para entender los diferentes fenómenos sociales. (De Guzmán, 1974; Gómez, 1998; Aravena, 2001; Aravena, Caamaño & Giménez, 2008; Aravena & Caamaño, 2009). Los argumentos básicos para determinar el modelaje como una forma de enseñanza y que son los pilares de esta metodología los podemos encontrar en las propuestas de Niss(1989), donde se destaca la importancia de incorporar en las aulas este tipo de trabajos puesto que permite desarrollar la capacidad de resolver problemas y la creatividad, prepara a los alumnos a usar la matemática, desarrolla la capacidad crítica de la matemática en la sociedad, permite una visión completa de la matemática y ayuda a la comprensión de los conceptos y métodos.

En la actualidad, la investigación sobre modelización matemática ha tenido gran impacto en las prácticas de enseñanza de las matemáticas. Durante las últimas dos décadas, la introducción de modelos matemáticos y aplicaciones es, probablemente, junto con la introducción de tecnología de la información, las reformas más importantes de los planes de estudio en matemáticas en todo el mundo (Kaiser, Blomhøj y Sriraman, 2006, p. 82, extraído de Blomhøj, 2009). Los planes de estudio de las reformas curriculares en muchos países occidentales, especialmente en la educación secundaria han hecho hincapié en trabajar en las clases de matemática a través de la modelización matemática, considerándose un elemento importante para una puesta al día de las matemáticas. Sin embargo, tal como lo plantea Blomhøj (2009), a pesar de las investigaciones reportadas que dan cuenta de la importancia de introducir en el aula un trabajo matemático basado en la modelización, cuando se trata del nivel de la práctica docente, sigue siendo una cuestión pendiente.

En este contexto, en Chile hay una desatención al trabajo de modelos y aplicaciones en todos los niveles de enseñanza (Aravena, 2001; Aravena & Caamaño, 2007; Aravena, Caamaño & Giménez, 2008; Aravena & Caamaño, 2009), en particular, en la formación de profesores, esta metodología de trabajo es poco considerada. La enseñanza de los formadores de formadores sigue estando cargada de estructuralismo y con escasas aplicaciones, con lo cual implementar un trabajo matemático basado en las aplicaciones y las acciones de modelaje, puede ser un medio potente en la formación de profesores, permitiendo que en su futuro laboral ayude a los alumnos del sistema educativo a superar las dificultades y poder enfrentarse como ciudadanos a una sociedad cambiante, en especial para los estudiantes más desfavorecidos socioculturalmente (Alsina, 1998; Niss, 2001; Aravena, 2001, Aravena & Caamaño, 2007).

2.3. Modelos de enseñanza para el aula.

La literatura especializada da cuenta que en los últimos años ha habido una explosión de trabajos que indican la importancia de utilizar modelos de enseñanza para enfrentar las actividades de aula. Dentro de los modelos de enseñanza y razonamiento, Gutiérrez (1996) reporta que de la variedad de modelos, unos han sido utilizados para describir determinadas componentes que tienen que ver con la enseñanza de la matemática, aquellos que se centran en los procesos mentales de los estudiantes cuando hacen matemática, los que describen la actividad en el aula y las interacciones sociales que tienen lugar dentro de un grupo y otros que ofrecen guía para la organización y el desarrollo de las clases. Entre los más conocidos encontramos el constructivismo, la investigación acción, el modelo de razonamiento de los Van-Hiele, el modelo de Polya, el modelo de resolución de problemas japonés. En Chile, como en numerosos países latinoamericanos, los profesores por años han trabajado modelos de enseñanza basado en el “constructivismo”, sin variar sus prácticas pedagógicas, lo que ha tenido como consecuencia las falencias en los logros y desarrollo de capacidades de sus alumnos, lo que queda demostrado en los resultados de las pruebas de medición de la calidad tanto nacionales como internacionales que dan cuenta del escaso éxito de los estudiantes chilenos.

Dentro de los modelos que han mostrado propuestas exitosas para el trabajo matemático de aula, se destaca el modelo de Polya, utilizado para el trabajo basado en la resolución de problemas, el modelo de razonamiento de los Van Hiele, que ha tenido éxito tanto en la organización de los curriculum, en la planificación de la enseñanza y en la organización de las actividades en los textos de estudio como es el caso de Singapur. Otro de los modelos que ha llamado la atención en el ámbito educativo de numerosos países, producto de los resultados elevados que han obtenido en las pruebas internacionales, es el modelo de resolución de problemas que se utiliza en Japón. El modelo para el trabajo matemático basado en la resolución de problemas, consta de los siguientes pasos: (1) “Comprensión del problema”; (2) “Desarrollo de una solución por sí mismos”, (3) “Progreso a través de la discusión” y (4) “Conclusión”. Este modelo que se utiliza para el trabajo de aula con el alumnado, se enmarca en las teorías de Dewey, Polya y Wallas, siendo el más utilizado en las escuelas de Japón.

2.4.1. Modelo de Polya.

Uno de los modelos de enseñanza que ha sido retomado con fuerza para el trabajo matemático basado en la resolución de problemas, es el modelo de Polya, que a pesar de los años en que fue formulado cobra vigencia en la actualidad. Al respecto, en diferentes épocas y condiciones se ha planteado que hacer matemática es por excelencia resolver problemas, sin embargo, es a partir de los trabajo de Polya (1945), donde se da un impulso significativo a este proceso con su obra *“How to solve it*”, y posteriormente con “Mathematical and Plausible Reasoning” (1954) y “Mathematical Discovery” (1965). Dichas obras se constituyen en una referencia para los distintos grupos de investigación que han hecho aportes en esta línea. En su obra “How to solve it”, presenta una serie de estrategias denominadas métodos heurísticos para la resolución de problemas, con lo cual potencia la construcción de una nueva metodología en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática. El autor propone cuatro pasos básicos para resolver un problema, que corresponden a: (1) comprender el problema, donde el estudiante resume la información dada e identifica las condiciones, (2) configurar un plan, donde se buscan las estrategias para enfrentarse al problema, (3) ejecutar el plan, donde el estudiantes establece las relaciones matemáticas, aplica procesos de resolución y propiedades que le permitan llegar a la solución y (4) mirar hacia atrás, visión retrospectiva de la solución con el objeto de verificar el resultado y el razonamiento seguido, esto le permite al estudiante afianzar sus conocimientos y desarrollar aptitudes para resolver otros problemas. Se trata, en este paso, de la confrontación de su resultado con el contexto obtenido y su contraste con la realidad que se quería resolver. Se puede señalar que el modelo de Polya se ha transformado en una metodología potente para el trabajo matemático basado en la resolución de problemas puesto que permite la organización y estructuración de los conceptos y procesos, ayudando a los alumnos a mejorar el entendimiento y a desarrollar una estructura conceptual potente.

2.4.2. Modelo de razonamiento de los Van-Hiele

Tal como lo plantea Jaime & Gutiérrez (1996), en geometría como en otras áreas de la matemática, durante años se ha considerado el constructivismo como la principal teoría para organizar la enseñanza. Sin embargo, desde hace unos 20 años, el modelo de los Van-Hiele ha sido utilizado con un éxito creciente, siendo base para el diseño de los currículos de matemática en numerosos países, también ha sido utilizado para diagnosticar la adquisición de los niveles de razonamiento en estudiantes de básica, media y universitaria y para caracterizar el nivel de razonamiento de los profesores en formación. Desde los años 90 ha sido documentado como un modelo de trabajo para reconocer la evolución en los niveles de razonamiento de los alumnos. En la actualidad, además, está siendo utilizado para orientar el trabajo geométrico de aula, en los textos de estudio de Singapur.

En Chile, son escasos los trabajos basados en el modelo de Van-Hiele, sin embargo, se ha realizado investigación que incorpora este modelo para el trabajo geométrico, se destaca el Proyecto FONDECYT 1030122, donde se diseñó un dispositivo didáctico basado en la modelización y proyectos en el tema de las Isometrías y se implementó en las aulas de secundaria de establecimientos municipalizados de la Comuna de Talca, en el primer año de educación media, donde se realizó trabajos de proyectos y de modelización geométrica. Los resultados dan cuenta de la potencialidad del modelo para el desarrollo del razonamiento geométrico (Aravena, Caamaño & Cabezas, 2006). A nivel superior se realizó una investigación con alumnos de Ingeniería en el tema del álgebra lineal, en el marco del proyecto FONDECYT 1030117, donde se utilizó el modelo para el diseño de un dispositivo pedagógico en el tema de las cuádricas (Caamaño & Aravena, 2004). En la actualidad, se está realizando un Diagnóstico en los segundos medios de la Región del Maule en el marco del Proyecto FONDECYT 1090617, para caracterizar y jerarquizar los niveles de razonamiento que han adquirido los estudiantes durante su formación, se implementará una propuesta de aula al grupo experimental y se analizará los niveles adquiridos una vez finalizada la experiencia.

Respecto de las componentes del modelo, éste está formado por dos partes: la primera se refiere a una secuencia de tipos de pensamiento, conocidos como *"niveles de razonamiento"*, que corresponden a: nivel 1, de reconocimiento, referido a la descripción de atributos físicos de las figuras; nivel 2, de análisis, referido a descubrir y generalizar propiedades a partir de la observación y experimentación, deducir y enunciar propiedades de manera informal; nivel 3: de clasificación, donde debe desarrollar la capacidad de entender que unas propiedades pueden deducirse a partir de otras, conectar lógicamente diversas propiedades de la misma o de diferentes figuras y dar definiciones matemáticamente correctas; nivel 4, de deducción formal, donde debe desarrollar la capacidad para realizar demostraciones formales de propiedades y nuevas propiedades, relacionándolas con las anteriores, entender y realizar razonamientos lógicos formales y reconocer la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto; nivel 5 de rigor; que consiste en trabajar sistemas axiomáticos distintos del usual y transferencia de conocimientos a otros sistemas. Éstos niveles permiten a los estudiantes, progresar en su capacidad de razonamiento matemático, desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en este campo y, la segunda parte denominada *"fases de aprendizaje"*, que constituye su propuesta didáctica para la secuenciación de actividades en el aula y que entrega a los profesores las orientaciones fundamentales para que ayuden a sus alumnos a alcanzar con más facilidad un nivel superior de razonamiento.

A continuación presentamos en un esquema las ideas centrales de las fases de aprendizaje tomadas de Jaime & Gutiérrez (1996); y Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1988).

Fases de aprendizaje.

Fases	Características de las fases
Fase 1 **Información.**	• Se coloca el énfasis en la visualización y la comparación de diferentes objetos geométricos • Enunciación de características de manera informal
Fase 2 **Orientación dirigida.**	• Se explora el campo de estudio, es conseguir que los estudiantes identifiquen, reconozcan algunas características, descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos involucrados, las propiedades y las relaciones. Esta fase es fundamental puesto que se construyen los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel.
Fase 3 **Explicitación**	• El objetivo es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos y propiedades, • Una de las finalidades principales de esta fase es hacer que los estudiantes intercambien sus experiencias, que comenten las regularidades de lo observado, que expliciten como han desarrollado las actividades. Durante esta fase el estudiante estructura el sistema de relaciones exploradas
Fase 4 **Orientación libre**	• Los estudiantes *aplican sus conocimientos a otras situaciones distintas de las presentadas, pero con estructura comparada*. • Se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las etapas anteriores. • Los estudiantes deben utilizar los conocimientos adquiridos para resolver problemas diferentes de los anteriores y, generalmente más complejos. Los problemas que se plantean en esta fase deben ser problemas más abiertos, en lo posible, con varías soluciones y con una, varias o ninguna solución.
Fase 5 **Integración**	• Se trata de condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento. • Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente. Las actividades que se proponen no deben integrar nuevos conocimientos, sino sólo la organización de los ya adquiridos y a diferenciar los conceptos, propiedades principales de las secundarias.

III. METODOLOGÍA

El estudio consideró dos instancias de análisis, esto es, el trabajo realizado por el alumnado de pedagogía en matemática y por el alumnado de secundaria donde se implementó un trabajo matemático basado en la resolución de problemas. De acuerdo a ello y para dar respuesta a los objetivos del estudio, el enfoque de la investigación fue de corte cuantitativo y cualitativo. Respecto del enfoque cuantitativo se utilizó en tres instancias: (1) para analizar el perfil de progreso del alumnado de pedagogía en matemática que ha sido objeto de la innovación metodológica, mediante el diseño e implementación de un Proyecto Pedagógico para las aulas de secundaria en su primera pre-práctica, (2) para analizar las habilidades y destrezas que desarrolló el alumnado de secundaria, objeto de la intervención pedagógica y que han sido reportadas por Alsina (1998), Aravena (2002) y Aravena & Caamaño(2007) y (3) para analizar la interrelación respecto de las capacidades desarrolladas entre el alumnado de pedagogía y el alumnado de secundaria. El enfoque cualitativo, se utilizó para el estudio de caso de un grupo de trabajo donde se analizó la planificación de la unidad didáctica y ejecución de una clase representativa tomando como referencia el método "Lesson Study".

A continuación, se da cuenta y justifican las distintas etapas que se ha seguido en la investigación, así como la construcción de los instrumentos, técnicas y métodos de análisis.

3.1. Descripción de la propuesta global del trabajo de proyectos pedagógicos

La innovación para los futuros profesores, se enfocó en un trabajo integrador que consideró las siguientes etapas:

I. Etapa de Planificación y diseño, donde se analizaron los siguientes aspectos: (1) Análisis de los elementos teóricos matemáticos y didácticos para el diseño de actividades basada en la resolución de problemas. Se colocó el énfasis en problemas basado en la modelización de situaciones del ámbito escolar como una estrategia poderosa para el desarrollo de capacidades y habilidades matemáticas (Niss, 1989; Aravena & Caamaño, 2009); (2) análisis de modelos de planificación para construir la unidad didáctica de aula. Se tomó como referencia el plan de clases utilizado en Japón, tomando en consideración el entorno sociocultural del alumnado de secundaria, (3) análisis de modelos de enseñanza para el aula. Como el propósito del estudio se enfocó en la resolución de problemas para el desarrollo de habilidades y destrezas, se estudiaron modelos de enseñanza y razonamiento que han sido exitosos en propuestas de aula en numerosos países. En este aspecto, se consideraron 3 modelos para organizar el trabajo de aula: (a) modelo de Polya, que ha sido trabajado en propuestas de aula en Chile (Aravena & Caamaño, 2008); (b) modelo de resolución de problemas de Japón (Isoda, et.al, 2008), y (c) modelo de razonamiento de los Van-Hiele para el trabajo geométrico (Fondecyt 1090617) y (4) modelos evaluativos considerando los procedimientos de la propia matemática, la comunicación matemática y la valoración del trabajo de los estudiantes, analizando además, la concepción tradicional que subyace en el sistema educativo (Giménez, 1997; Alsina, 1998; Aravena, 2001; Aravena & Giménez, 2002).

II. Etapa de diseño de las Unidades didácticas, que fueron trabajadas por el alumnado de pedagogía y supervisado por el profesor-investigador. Se trabajó en temas de álgebra y geometría, que fueron solicitados por los docentes del sistema donde se llevó a cabo la implementación. En esta etapa, se elaboró en detalle el plan de clases en una unidad de aprendizaje matemático. Este plan detallado incorpora: un análisis del trasfondo matemático, un modelo de enseñanza para guiar el trabajo del alumnado en el aula de secundaria y una propuesta de actividades basada en la resolución de problemas y el modelaje, atendiendo a la regulación continua del aprendizaje con sus respectivos instrumentos de evaluación.

III. Etapa de implementación y gestión. Con el propósito de fortalecer la formación de los futuros docentes y reconocer las capacidades, aciertos y dificultades cuando se enfrentan al trabajo de aula, se implementó, por tres semanas en las aulas de secundaria, las propuestas didácticas diseñadas. El alumnado de pedagogía, posterior a la intervención realizó un informe escrito y una exposición oral del proyecto pedagógico y de los efectos en la implementación, destacando las capacidades desarrolladas por el alumnado de secundaria, los aciertos y las dificultades, como de su gestión en el aula.

Para asegurar la calidad del diseño y la intervención en las aulas de secundaria, el alumnado de pedagogía en matemática fue sometido un pretest, antes de la puesta en práctica de la experiencia, que permitió reconocer el perfil inicial en la resolución de problemas y al final de la misma fueron sometidos a un postest que permitió reconocer el perfil de progreso.

El esquema que a continuación se presenta da cuenta de la forma como se organizó las diferentes etapas de trabajo de proyectos realizadas por el alumnado de pedagogía y guiada por el docente-investigador.

Cuadro 1. Descripción de la Propuesta Global

I. Etapa de Planificación yDiseño

- Análisis de los elementos matemáticos y didácticos
- Análisis de modelos de Planificación. Plan de clases
- Modelos de enseñanza para el aula.
- (a) Modelo de Polya
- (b) Modelo de Resolución de problemas de Japón
- (c) modelo de razonamiento de Van Hiele para el trabajo geométrico
- Modelos evaluativos para la regulación del trabajo de aula.

II. Etapa de Diseño de las unidades didácticas

- Selección de los temas de trabajo
- Diseño de matrices de capacidades
- Diseño del Plan de clases
- Diseño de instrumentos de evaluación

III. Implementacion y Gestión

- Implementación de la unidad en los establecimientos.
- Gestión y autocontrol. Análisis del modelo de planificación , secuencia, dificultades y aciertos
- Evaluación y regulación del trabajo de aula
- Información. Análisis del modelo de planificación y del itinerario seguido.

Secuencia metodológica en el trabajo de proyectos.

Para el diseño de los proyectos pedagógicos que elaboró el alumnado de pedagogía en matemática, se tomó como base los elementos que deben considerarse en un proyecto de trabajo de acuerdo a los lineamientos de: Aravena (2001); Aravena, Caamaño & Giménez (2008) y Aravena & Caamaño (2009), en el marco del proyecto FONDECYT 1030122, quienes colocan en evidencia que el trayecto que recorre un proyecto es complejo y requiere ser evaluado en tres momentos importantes, que corresponden a: (1) informes de avance, (2) informe escrito y (3) presentación oral. En el esquema siguiente se presenta las etapas seguidas en el proyecto.

Cuadro 2. Etapas en el trabajo de proyectos

Estados de avance. Se distinguen dos etapas, en la primera los alumnos presentan el avance de su proyecto, donde analizan los elementos teóricos que corresponden a: análisis de la importancia de trabajar en la resolución de problemas, modelos de enseñanza y de evaluación para el trabajo matemático de aula, modelos de planificación. En esta etapa el alumnado de pedagogía debe presentar, el marco teórico, el problema de investigación y los objetivos de acuerdo al tema matemático que le corresponde diseñar para implementarlos en las aulas. Además presentan la metodología que guiará su estudio. Este es revisado por la profesora que guía el trabajo de proyectos. Se revisan y se entregan las recomendaciones y sugerencias que le permiten afinar objetivos, problema de investigación y metodología. En la segunda etapa que corresponde al avance 2, el alumnado presenta el diseño de su propuesta de aula, se afinan detalles y se entregan recomendaciones de acuerdo al plan de clases utilizado para tal efecto. El equipo de investigadores revisa los planes de clases y da el visto bueno para el aula. Se destaca que la competencia en esta instancia es al 100%, ya que el grupo que no cumpla con los requisitos y recomendaciones en el diseño de la Unidad Didáctica, no puede asistir a su pre-práctica, quedando automáticamente reprobado.

Diseño de los planes de clases. En el diseño de los planes de clases, se toma como referencia el modelo Japonés, cuyos lineamientos apuntan a trabajar con problemas de acuerdo al contexto y la edad de los alumnos de tal manera que el quehacer matemático basado en la resolución de problemas es un punto esencial para el desarrollo del pensamiento donde los conceptos y procesos se van construyendo en base a la discusión y reflexión de los propios alumnos. Desde un punto de vista metodológico se consideró la actividad matemática mediante una discusión permanente de parte del alumnado, privilegiando el intercambio de ideas e incorporando un trabajo matemático sobre el razonamiento de los otros estudiantes. La estrategia consiste en una enseñanza en forma gradual para mejorar el entendimiento de tal manera que los alumnos encuentren un sistema que les permita aprender de forma sistemática para que vayan estructurando un marco conceptual potente (Shizumi, et.al.2005). A partir de estas consideraciones, para el diseño del plan de clases se consideraron los siguientes elementos:

(1)Plan didáctico para desarrollar la habilidad de comprensión y razonamiento. *Que involucra:*

- Conexión del contenido anterior con el nuevo.
- Desarrollo de contenido e inicio de otro sin conexión aparente.
- Subdivisión de unidades para permitir el estudio en espiral.

(2)Plan didáctico de enseñanza: **cómo desarrollar las clases en las que los alumnos puedan mejorar el entendimiento y organizar una estructura conceptual potente.**

(a) Crear oportunidades en donde los estudiantes experimenten el proceso de pensar.

- Crear situaciones de situaciones o problemas que potencien el pensamiento matemático inductivo y la búsqueda de nueva información.
- Reconocimiento de regularidades o propiedades, explicar dichas regularidades
- Potenciar el pensamiento matemático inductivo y la búsqueda de nueva información.

(b) Diseño de las actividades matemáticas creativas.

- Actividades matemáticas que motiven la búsqueda de regularidades posibles.
- Actividades matemáticas para obtener información que ayude a encontrar regularidades, conjeturas o propiedades.
- Diseño de actividades para considerar la explicación de dichas regularidades, conjeturas o propiedades.
- Actividades matemáticas avanzadas.

(c) Desarrollo de estrategias de enseñanza para apoyar diversas formas de pensar

(c1) Propósito del plan de clases. Planeamiento que considera los aspectos curriculares emanados del Ministerio de Educación y de las investigaciones.

- Objetivos de la unidad
- Estudio del material didáctico que sirve de puente para que los alumnos desarrollen sus propias ideas. Trasfondo matemático del contenido, Secuencia didáctica, relación con los contenidos anteriores y posteriores
- Importancia del contenido para la formación de los estudiantes.
- Comportamiento de los alumnos respecto de las capacidades cognitivas, metacognitivas y de formación transversal
- Tiempo asignados para el desarrollo de la unidad.

Se muestra un extracto de un plan de clases de uno de los grupos de pedagogía, donde primero desarrollan el plan de enseñanza de la Unidad que parte con el diseño de los objetivos de la unidad.

I.-Título de la unidad

Razones trigonométricas

II.- Plan de enseñanza de la unidad

1.- Objetivos de la unidad:

(a) Reconocer la importancia de la trigonometría en la vida cotidiana y en algunas ciencias, resolviendo problemas que involucren el cálculo, descripción y análisis de razones trigonométricas para distintas unidades de medidas, con el uso del ángulo de elevación y depresión.

(b) Desarrollar capacidades tales como la visualización, esquematización y destrezas que involucren el cálculo de razones trigonométricas. Fomentando el trabajo en grupo, la autonomía, el respeto y el pensamiento crítico de los alumnos.

(c) Desarrollar el pensamiento matemático en los alumnos, de manera que al enfrentarse a un problema que involucra razones trigonométricas, sean capaces de organizar e interpretar de la información, matematizar y desarrollar estrategias para resolver el problema, pudiendo extraer conclusiones y restricciones, para luego poder interpretar las soluciones obtenidas, en el contexto del problema.

Posteriormente realizan un análisis del trasfondo matemático sobre la importancia de las razones trigonométricas en la formación secundaria, donde se muestran las dificultades a partir de las investigaciones y del comportamiento de los alumnos en el desarrollo de capacidades.

2.- Puntos de vista del material didáctico: Trasfondo matemático

Las razones trigonométricas son de gran interés en investigaciones en Matemática Educativa, estas investigaciones han mostrado las dificultades en el aprendizaje al manipular, interpretar y significar a las razones, ecuaciones, identidades vinculadas a la trigonometría. Por ejemplo, De Moura (2000) reporta en su análisis didáctico, incorrecciones en el uso de la notación y en la aplicación de leyes que no son válidas para las razones trigonométricas; De Kee, Moura y Dionne (1996) reportan que el estado de comprensión de las nociones seno y coseno no están bien asentadas en los estudiantes, reportando que generalizan las propiedades de los triángulos rectángulos a cualquier tipo de triángulo, o aseguran un cambio de escala en el seno y el coseno al cambiar de escala un triángulo rectángulo.

Se considera que el origen de dichas dificultades puede situarse en las razones trigonométricas. Observamos que De Kee, Moura y Dionne (1996) Y Maldonado (2005) han dado evidencia de las dificultades y concepciones más clásicas del estudiante en este tema, mientras que Montiel (2005) ha considerado la naturaleza de la noción matemática como parte fundamental del fenómeno didáctico. En este sentido, se articulan los elementos didácticos, cognitivos y socioepistemológicos de estas investigaciones y se provee de evidencia empírica sobre la construcción de significados alrededor de la razón trigonométrica y los problemas aplicados a éstas.

3.Comportamiento de los alumnos

Conceptual:

Se espera que el alumno, como conceptos previos, tenga una clara idea sobre el Teorema de Pitágoras, Euclides y Thales; de manera que pueda utilizarlo como una herramienta para la resolución de problemas asociados al calculo de razones trigonométricas. Además deberá ser capaz de distinguir los elementos del triangulo rectángulo (catetos e hipotenusa), para luego poder establecer correctamente las razones trigonométricas. (…)

Procedimental

Se espera que el alumno, al enfrentarse a un problema sea capaz de **Organizar e interpretar la información, Matematizar y utilizar estrategias generales para la resolución del problema.** En lo que respecta a la **Organización e interpretación de la información**, se espera que identifique y extraiga los datos del problema a partir de la lectura, pudiendo establecer restricciones o condiciones asociadas al problema, (…) reconozca sus elementos (Catetos, hipotenusa y altura), esquematice mediante dibujo la situación presentada en el problema, (….)

En la **Matematización**, se pretende que el alumno coloque las ecuaciones matemáticas asociadas al problema, utilizando adecuadamente la simbología matemática, mediante la cual exprese una igualdad de la razón trigonométrica asociada a la solución, utilice algoritmos y propiedades (…)

Y en la utilización de **estrategias generales** el alumno determine la presencia del triángulo rectángulo en el problema de trigonometría para aplicar diferentes métodos de resolución de problemas a los entregados en clases como el apoyo de un esquema o representación visual, utilice otros conocimientos para resolver el problema (…)

Actitudinal

(…) interés en el desarrollo de los distintos tipos de problemas abordados en clase y en las diferentes actividades (…) respeto por la clase y por la opinión de sus pares (…) y además desarrolle una actitud matemática, proponiendo nuevos métodos de resolución de los problemas, generando una autonomía en el alumno y su conocimiento. (…)

La asignación de los tiempos para cada tema es muy importante para el posterior diseño de las actividades.

4.- Asignación de tiempo	
Tema / actividad	**Tiempo estimado**
Pre test: Prueba que evaluará los conocimientos previos de los alumnos	2 hrs. pedagógicas
Clase 1 :Triángulos a tu alrededor	1 hr pedagógica
Clase 2: Razones Trigonométricas y problemas (....)	1 h. pedagógica

(c2) Presentación del objetivo de la clase en el contexto del Plan Didáctico anual de enseñaza

- Plan de la unidad. Cómo los alumnos podrían aprender
- Las directrices de la enseñanza
- La secuencia de preguntas a ser utilizadas para lograr los aprendizajes.

Se presenta un extracto donde se observa los objetivos de las clases y las directrices de la enseñanza

III. Objetivos de las clases

- **Interés-actitud:** Desarrollar el interés en los alumnos por las matemáticas, resolviendo problemas que involucren uso de razones trigonométricas, creando conciencia sobre su importancia y el uso en diferentes ciencias en la actualidad. Promover la responsabilidad con el material utilizado en las clases y las plazos y horarios establecidos, enfatizando en el orden y la limpieza, fomentando el trabajo grupal, la autonomía y el respeto por las opiniones de sus pares. Incentivar los registros continuos y completos de las clases realizadas.
- **Pensamiento-juicio:** Fortalecer el pensamiento matemático de los alumnos a través de la resolución de problemas que involucren las razones trigonométricas en aspectos de la vida cotidiana. Realizando juicios matemáticos autónomos y coherentes al momento de abordar, desarrollar y solucionar problemas.
- **Destrezas matemáticas**: Desarrollar el cálculo de las razones trigonométricas (Seno, Coseno y Tangente) asociadas a diversos problemas contextualizados al ámbito de la vida cotidiana, en donde utilizando algoritmos, matematización, propiedades de los triángulos, y conocimientos anteriores (Teoremas de Thales, Pitágoras y Euclides), el alumno pueda dar una solución acorde al contexto del problema (interpretar las soluciones)..
- **Conocimiento matemático:**Comprender las características de las razones trigonométricas como herramienta para el calculo de alturas inalcanzables que involucren ángulos de elevación y depresión a través de un ángulo determinado. Establecer regularidades entre las razones trigonométricas seno, coseno y tangente para los ángulos especiales (0º, 30º , 45º , 60º , 90º).
- Establecer relaciones entre los distintos sistemas de medición sexagésimal y angular, además de comprender e interiorizar los teoremas del seno y del coseno como una herramienta para el desarrollo de problemas que involucren cualquier tipo de triángulo.

IV. Directrices de la enseñanza

- Promover el razonamiento matemático a través de actividades (…)
- Desarrollar la autonomía del alumno, (…)
- Potenciar y fomentar la capacidad de autoevaluación de los alumnos (…)
- Orientar al alumno para que sea capaz de descubrir, conjeturar y caracterizar elementos de las razones trigonométricas (…)

V. Plan y Criterios de enseñanza y evaluación para la unidad

- (…) a partir de pautas realizadas para cada una de las actividades, siendo estas actividades de trabajo en grupo o individual.
- (…) destacar los aspectos conceptuales, procedimentales y actitudinales,
- (…) los aspectos actitudinales serán evaluados a través de una pauta reflexiva en una actividad grupal, (…)

(c3) Desarrollo de clases que faciliten el logro de objetivos.

- Se especifican los objetivos de la clase
- Los contenidos a cubrir
- Materiales preparados y actividades
- Desarrollo de preguntas que permitan estimular la solución y anticiparse a la idea de los alumnos.
- Posibles dificultades
- Tipos de soluciones y cómo se tratarán los errores de los alumnos.
- Evaluaciones y criterios
- Planificación en la utilización de pizarrón para analizar la producción de los niños
- resúmenes de integración
- descripción detallada de los momentos de aula de acuerdo al modelo de enseñanza.

La secuencia que a continuación se presenta, muestra un ejemplo de un plan de clases por uno de los grupos.

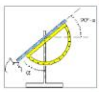
“Calculando la altura de la torre de la Catedral de Linares”

Objetivos Resolver problemas con el uso de los ángulos de elevación y depresión, para el cálculo de razones trigonométricas
Discutir en forma grupal y explican el procedimiento del cálculo de las razones trigonométricas, utilizando ángulos de elevación y depresión.
Resolver problemas asociados al cálculo de razones trigonométricas, con el uso de ángulos (especiales, elevación y depresión), los cuales son presentados en sistemas de medición radian o sexagesimal, y conocimientos previos (Teoremas de Tales, Pitágoras).
Desarrollar el razonamiento matemático.
Promover el trabajo colaborativo.

LA CLASE ACTUAL (clase nº...6... de un total de...9...clases

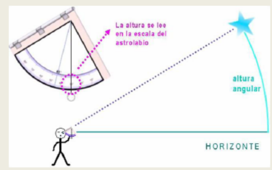
I.-Objetivo de la clase:
Objetivos: (1) Identificar la presencia de los ángulos (elevación y depresión) en contextos de la vida real. (2) Establecer diferencias entre los ángulos de elevación y el de depresión (3) Desarrollar el razonamiento matemático.(4) Promover el trabajo

II.-Preparación material:
a) La clase serán expuesta en diapositiva a través de una Proyector Multimedia
Entrega de problema.
Transportador, hilo, plomo, cinta adhesiva y un lápiz vacío.
Los alumnos utilizaran lápiz, goma, regla y el astrolabio.



Problema: En la siguiente actividad usaras el astrolabio informal que construiste. Contesta las siguientes preguntas antes de continuar…
Si observas un punto que se encuentra en el horizonte, ¿Qué medida de ángulo marcará el astrolabio?
Si observas un punto directamente hacia el cielo (justo arriba de ti), ¿Qué ángulo marcará el astrolabio?
Si seleccionas un punto fijo, como la punta de la cruz del techo de la capilla, ¿Qué sucederá con la medida del ángulo de elevación cuando miras por el astrolabio a medida que te alejas?, y ¿si te acercas? ¿Cuál sería el ángulo de depresión en cada uno de los caso? Esboce a lo menos 3 casos en el mismo dibujo. Ahora si la altura de la punta de la cruz del techo de la capilla es de 20 metros, ¿A qué distancia te encontrabas de la capilla en cada uno de los casos?

A continuación determinaras una altura estimada de un punto inalcanzable. Observa el siguiente diagrama con detenimiento para que puedas realizar la actividad.

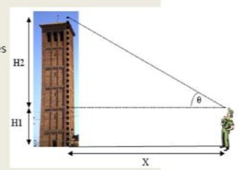


Hoja de trabajo

Medida nº	ÁNGULO DE ELEVACION θ (grados)	DISTANCIA HORIZONTAL X (metro)	ALTURA A LOS OJOS DEL OBSERVADOR H1 (metro)	ALTURA CALCULADA $H2 = (X)(TAN\ \theta)$ (metro)	ALTURA TOTAL HT (metro)
1					
2					
3					
				Promedio:	

En la figura se muestra un modelo que usaras para hallar la altura estimada de la torre de la Catedral de Linares, la cual es una altura inalcanzable.

- Escogerás cinco distancias horizontales de forma arbitraria. En cada punto medirás la distancia horizontal (X) desde tus pies hasta la base de la altura del objeto seleccionado.
- Medirás el ángulo de elevación (θ) desde cada punto seleccionado con el astrolabio.
- Medirás la altura de los ojos al piso (H1) del observador en cada punto.
- Completa la Hoja de Trabajo 1.
  - Hoja de presentación:
    - Título
    - Nombres de participantes
  - Objetivo de la actividad
  - Materiales
  - Procedimiento
  - Datos
  - Hojas de Trabajo
  - Conclusiones
  - Hojas reflexiva (1 por estudiante)



Hoja reflexiva

Yo conocía del tema….	Hoy aprendí….	Me gustaría aprender más sobre…..

Dificultades del trabajo:

Plan Detallado de la Clase:

Pasos de Polya	Minutos	Rol alumno	Rol profesor
Comprensión del problema	10	El alumno lee y extrae los datos (…) Analiza las interrogantes del problema.	El profesor, lee, instruye y orienta sobre el enunciado (…) Se pasea por la sala, resolviendo consultas de los alumnos.
Elaboración de un Plan	5	El alumno, junto a su grupo piensa como abordar el problema y como resolverán las interrogantes que se les presentan.	El profesor se pasea por la sala mirando, orientando y redirigiendo (…)
Ejecución del Plan	10	El alumno utiliza su plan, resuelve el problema, encontrando los resultados a partir del desarrollo de la actividad.	El profesor se pasea por la sala, mirando el trabajo de los alumnos.
Mirar hacia atrás	5	El alumno resuelve las interrogantes y contextualiza las soluciones del problema, extrae las conclusiones y comenta las estrategias utilizadas.	El profesor pasa por cada grupo, comentando sobre el proceso de los alumnos.
Exposición de los resultados e ideas	5	Un alumno elegido al azar (…) expone el desarrollo de su grupo, comentando sus observaciones y las respuestas (…)	El profesor elige a los alumnos que anoten (…) las conclusiones y los comentarios de los su grupo.
Conclusión	7	Anotan (…) o verifican, la visualizacion del problema, la cual es expuesta por el profesor. El alumno que aún tenga dudas, las comenta y las preguntan al curso.	El profesor, expone la visualización del problema, y resuelve posibles dudas (…)

Posibles Dificultades:

- No sumarle al resultado de la altura del asta (según el astrolabio), la altura de la persona que hacia las mediciones
- Construir mal el astrolabio
- No saber utilizar el astrolabio
- Equivocarse en interpretar el ángulo de elevación del astrolabio
- No saber utilizar las razones trigonométricas
- Equivocarse en el Cálculo de las razones trigonométricas
- No saber interpretar las soluciones
- No saber utilizar ecuaciones
- No saber despejar ecuaciones
- Confundir las razones trigonométricas Seno y Coseno
- No identificar el triángulo rectángulo
- No identificar los ángulos de elevación y el ángulo de depresión
- No saber utilizar la calculadora
- Equivocarse en los cálculos
- No saber o equivocarse en aplicar el Teorema de Pitágoras

Informe escrito. Al final de la experiencia el alumnado de pedagogía en matemática debe presentar un informe escrito que da cuenta del proyecto de trabajo, el cual consta de los siguientes capítulos: I. formulación y presentación del problema de investigación, objetivos e hipótesis. II. Antecedentes teóricos. III. Marco metodológico, que incorpora tipo de investigación, instrumentos y métodos. IV. Resultados y análisis de los datos extraídos del alumnado de secundaria que son revisados por el equipo de investigadores. V. conclusiones, implicaciones didácticas y recomendaciones. VI. Bibliografía en formato APA y por último los anexos, donde se muestran los datos en bruto y las producciones del alumnado de secundaria donde realizaron la intervención. La calificación de esta instancia corresponde a un 25% de la nota final del curso

Exposición oral. Este tiene las características de Seminario final del curso, el alumnado de pedagogía presenta un resumen de la investigación, colocando énfasis en los resultados y análisis de la experiencia en el aula. Los evaluadores de dicha presentación corresponden a los integrantes del equipo de investigación. El tiempo asignado por grupo es de 20 minutos. Se destaca que todos los integrantes del grupo deben exponer sobre el proyecto. Se califica con un 25% de la nota final del curso.

En el cuadro 3, se presenta un esquema que da cuenta de la secuencia metodológica que se siguió en la organización del trabajo de proyectos en sus diferentes etapas, donde se describe el contenido, las actividades, la metodología seguida en cada etapa y los momentos de regulación

Cuadro 3. Etapas y tareas que se planificaron para el trabajo de proyectos.

ETAPAS	CONTENIDO	ACTIVIDAD	METODOLOGÍA	REGULACIÓN
1. Inicial DIRIGIDA POR EL PROFESOR	Presentación Elaboración de un proyecto Características de: • Informes de avance • Informe escrito • Presentación oral • Duración del proyecto	Objetivos del proyecto Informe Presentación oral Formación de los grupos Temas a trabajar. *Presentación de pautas*	Exposición por parte del profesor, sobre las condiciones del proyecto.	***no hay***
2. De elaboración REUNIÓN DE AVANCE I	-Antecedentes recopilados -Organización de información -Generación de ideas. -Formulación del problema. -Planificación -Toma de decisiones. -Comunicación.	Exponer y desarrollar ideas sobre el estado del proyecto Resumen teórico del tema elegido	Entrevista a cada grupo de trabajo. Siguiendo un registro y una pauta.	***Pauta evaluación Registro.***
REUNIÓN DE AVANCE II	-progreso en compromisos adquiridos. **-Planificación y diseño unidad didáctica**	Exponer modificaciones detectadas en avance 1. -Presentación de la secuencia de aula	Entrevista a cada grupo	***Pauta Evaluación.***
3. INFORME ESCRITO	-Fundamentación y def. problema. -Objetivos e hipótesis. -Metodología -Resultados. Análisis -Conclusiones sugerencias -Presentación bibliográfica -anexos	**Diseñar un informe que contenga, los elementos descritos, de acuerdo a un formato establecido** Presentación del Informe en la fecha descrita.	Trabajo grupal, realizado durante todo el tiempo que dura el proyecto.	***Pauta de Evaluación de informes de Investigación.***
4. Etapa final EXPOSICIÓN ORAL	-Presentación del tema investigado. -Presentación del problema y justificación. -Objetivos e hipótesis. -metodología	Presentación oral de los diferentes grupos. Evaluación a cada grupo por el equipo de investigadores	Exposición de cada grupo, en un tiempo de 20 minutos. Preguntas de la audiencia o de los	***-Pauta Evaluación***

3.2. Muestras.

3.2.1. Selección de la muestra del alumnado de Pedagogía en matemática. La muestra para el estudio se seleccionó de acuerdo a los siguientes criterios: Alumnos que hubiesen cursado las asignaturas de: Eje algebraico completo, Historia y Epistemología de la Matemática y que se encuentren o hayan aprobado Análisis III. En la línea de Educación: Procesos de Aprendizaje y Didáctica General y que estuviesen a los menos cursando o haber cursado Metodología de la Investigación. De un total de 45 alumnos, la muestra quedó constituida de 38, que cumplían con los requisitos señalados. Estos alumnos se enfrentan a la asignatura de Didáctica del Álgebra y la Geometría que incorpora su primera práctica temprana de 3 semanas de intervención.
Respecto de las características de la muestra, destacamos que del alumnado: 7 estaban al día en la malla curricular, 19 atrasados un semestre y 12 con más de un semestre de retraso. En el cuadro 4, se presentan los 11 grupos de trabajo, y la situación académica del alumnado con el número asignado en el pretest/ postest.

Cuadro 4. Situación académica de la muestra del alumnado de Pedagogía.

ALUMNOS (AS) POR GRUPO DE TRABAJO EN EL PROYECTO/ Nº EN EL PRETEST/POSTEST		Año Ingr.	Situación Academ.
GRUPO 1	(4)	2006	Atr. 1 Sem.
	(7)	2006	Atr. 1 Sem.
	(5)	2006	Atr. 1 Sem.
	(6)	2006	Atr. 1 Sem.
GRUPO 2	(2)	2004	
	(8)	2004	
	(37)	2004	
GRUPO 3	(26)	2006	Atr. 1 Sem.
	(32)	2006	Atr. 1 Sem.
	(25)	2006	Atr. 1 Sem.
	(1)	2006	Atr. 1 Sem.
GRUPO 4	(14)	2005	
	(40)	2006	Atr. 1 Sem.
	(36)	2005	
	(33)	2005	
GRUPO 5	(35)	2005	
	(20)	2004	
	(39)	2005	
	(19)	2004	
GRUPO 6	(11)	2007	Al día.
	(34)	2007	Al día.
	(24)	2007	Al día.
GRUPO 7	(18)	2005	atrasado
	(21)	2006	Atr. 1 Sem.
	(13)	2006	Atr. 1 Sem.
GRUPO 8	(27)	2006	Atr. 1 Sem.
	(15)	2006	Atr. 1 Sem.
	(9)	2006	Atr. 1 Sem.
	(38)	2006	Atr. 1 Sem.
GRUPO 9	(10)	2006	Atr. 1 Sem.
	(22)	2005	
	(23)	2005	
GRUPO 10	(17)	2006	Atr. 1 Sem.
	(28)	2006	Atr. 1 Sem.
	(29)	2006	Atr. 1 Sem.
GRUPO 11	(30)	2007	Al día.
	(12)	2007	Al día.
	(16)	2007	Al día.
	(31)	2007	Al día.

Obs. El alumnado de ingreso anterior al año 2006, tienen más de un semestre de retraso en su malla curricular.

3.2. 2. Muestra donde se realizará la intervención. Alumnado de secundaria.

Para la selección de los establecimientos se recurrió a la Dirección de Escuela de la U.C.M. de tal manera de establecer los contactos con los Directores de cada establecimiento de la comuna de Talca. Los criterios utilizados corresponden a cualquier establecimiento que: (1) posean enseñanza media donde se dicte cualquier asignatura de matemática; (2) que se acepte a los grupos para la pre-práctica. No fue posible utilizar alguna técnica estadística que permitiera la selección de aleatoriedad debido a que son los Directores quienes autorizan dichas pre- prácticas y prácticas. Con lo cual los establecimientos que autorizaron cursos para el estudio en Talca fueron: 4 liceos municipalizados científico-humanista, 5 establecimientos particulares subvencionados, 2 establecimientos técnico- profesional.

En el esquema siguiente se explicitan los grupos de trabajo, los establecimientos en los cuales realizaron la intervención y la muestra por cada curso.

Cuadro 5. Muestra de Establecimientos intervenidos en las pre-prácticas.

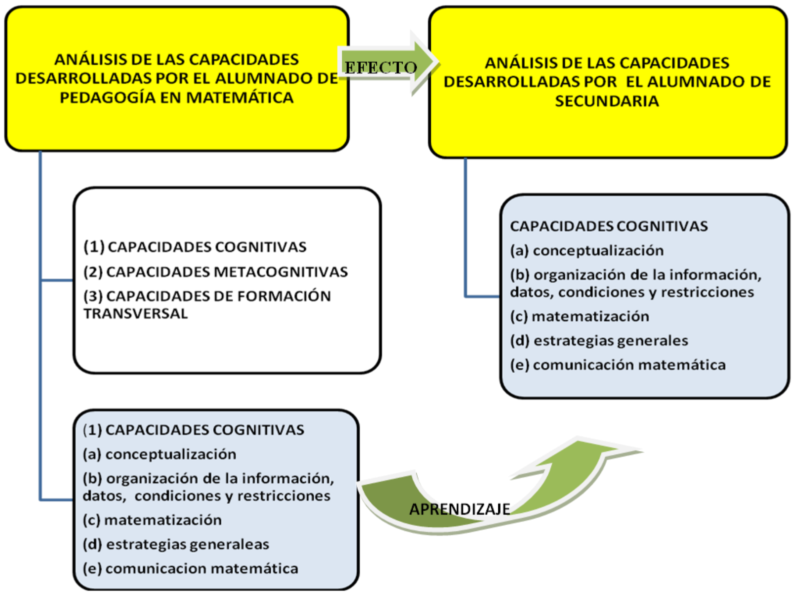
NÚMERO DE GRUPO	TIPO DE ESTABLECIMIENTO/CURSO	CÓDIGO	MUESTRA
GRUPO 1	LIceo municipalizado / 3 Medio	LM1	31
GRUPO 2	Liceo Municipalizado/3 Medio	LM2	31
GRUPO 3	Colegio particular subvencionado/2 medio	PS3	30
GRUPO 4	Liceo Municipalizado//1 medio	LM4	33
GRUPO 5	Liceo Técnico profesional/2 medio	TP	43
GRUPO 6	Colegio particular subvencionado/2medio	PS6	31
GRUPO 7	Colegio particular subvencionado/3 medio	PS7	36
GRUPO 8	Instituto técnico profesional/4 medio	TP8	41
GRUPO 9	Liceo Municipalizado/1 medio	LM9	29
GRUPO 10	Colegio Particular subvencionado/3 medio	PS10	31
GRUPO 11	Colegio Particular subvencionado/3 medio	PS11	35

3.3. Métodos e Instrumentos de Análisis.

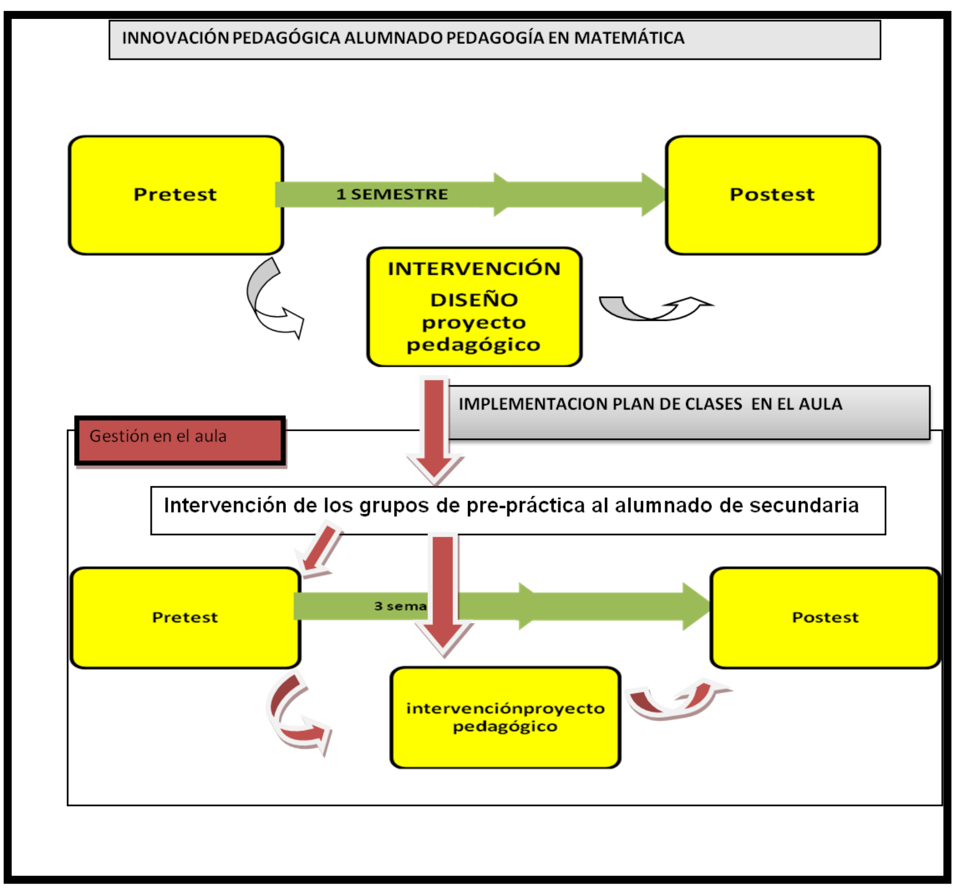
Los métodos e instrumentos de análisis corresponden a dos etapas interrelacionadas, esto es, la innovación al alumnado de pedagogía mediante el diseño e implementación de un proyecto pedagógico, un pretest y un postest y la intervención de la propuesta al alumnado de secundaria. El propósito del estudio fue analizar: (1) las capacidades de los futuros docentes cuando se enfrentan a la resolución de problemas mediante un pretest y postest, (2) las capacidades desarrolladas en el diseño de un proyecto y los efectos en la implementación de las propuestas en las aulas de secundaria, y (3) el efecto que dichas propuestas logran tener cuando son implementadas en el alumnado de secundaria, reconociendo las capacidades que éstos desarrollan al final de la intervención cuando son enfrentados a la resolución de problemas en contenidos matemáticos específicos. Esto permite dar cuenta del perfil del futuro docente para generar aprendizajes de calidad en los destinatarios.

El esquema que se presenta en el cuadro 6, se muestra la interrelación entre ambos análisis y en el cuadro 7, se presenta la interrelación entre ambos actores durante el desarrollo de la experiencia.

Cuadro 6. Interrelación de las capacidades desarrolladas en ambos grupos. Efectos producidos en el alumnado de secundaria.



Cuadro 7. Interrelación entre el alumnado de pre-práctica y el alumnado de secundaria



La intervención en el alumnado de pedagogía en matemática se realizó en el segundo semestre de 2009. El pretest se aplicó a la muestra a fines del mes de agosto y el postest a fines del mes de diciembre de mismo año a todos los alumnos. El diseño del proyecto y la unidad didáctica se inició una vez tomado el pretest y finalizó a fines de octubre y la implementación en el aula se llevó a cabo por 5 de los grupos durante el mes de noviembre del mismo año. Hubo 6 grupos de trabajo que realizaron la implementación en el aula en abril de 2010. Las razones de ello se debieron al paro de profesores que duró alrededor de un mes en el año 2009, y al terremoto que significó la destrucción de muchos de los establecimientos municipalizados en la Región del Maule, generando un retraso de un mes y medio para el inicio de las clases. La exposición oral de los grupos que trabajaron en noviembre del año 2009, se realizó en el mes de enero y de los grupos que trabajaron en mayo, en el mes de junio de 2010.

3.3.1. Instrumentos de control del alumnado de Pedagogía en Matemática.

A continuación se da cuenta de los instrumentos de control que se utilizaron para analizar las capacidades desarrolladas por los futuros docentes.

3.3.1.1. Instrumentos de control. Pretest y postest.

Para analizar cuantitativamente el perfil inicial y perfil de progreso del alumnado de pedagogía, respecto de las capacidades cognitivas cuando son enfrentados a la resolución de problemas, se diseñó un pretest y un postest. Tanto en el pretets como en el postest, se tuvo en consideración las propuestas de Aravena & Caamaño (2007), que dan cuenta de los elementos que se deben valorar en la resolución de problemas. A partir de este reconocimiento, se consideró en su diseño la resolución de problemas mediante la **modelización de situaciones del ámbito escolar**, tanto en álgebra como en geometría, donde se incorporan ideas centrales en el trabajo matemático, esto es: (a) representaciones que deben trabajar los estudiantes: tabla de valores, grafica y descripción analítica. El tránsito por diferentes representaciones ha sido ampliamente investigado dando cuenta que permite observar el fenómeno desde diversas perspectivas, (b) conceptualización y significado de los conceptos en el contexto de los problemas, (c) organización de la información identificando datos, condiciones y restricciones, (d) matematización, donde se valora la descripción de relaciones matemáticas que interpretan el proceso, las propiedades y algoritmos, (f) estrategias generales, que incorpora conjeturas, generalizaciones y (d) comunicación matemática, donde se valora los argumentos utilizados, el lenguaje matemático formal. La idea central del diseño consistió en que los futuros profesores deben articular los conceptos y procesos de la matemática en contextos de aplicación de tal manera que en su formación se genere una integración con otras disciplinas y con la realidad.

Descripción de los instrumentos de evaluación.

Se diseñaron 4 problemas dos del ámbito algebraico y dos del ámbito geométrico, cuya característica común, tanto para el pretest y postest, están inspirados en fuentes destacadas (PISA, Proyecto Cumenius, L´altra cara de les matematiques). En la selección de éstos, se optó por problemas de respuesta de construcción abierta, situados en el nivel de razonamiento (niveles de profundidad PISA) y tipo resolución de problemas, pues permitían al examinador determinar directamente lo que el alumnado de pedagogía era capaz de producir a partir de la comprensión de una pregunta y, además, conocer la explicación de sus métodos resolutivos, capacidades de argumentación, intuición y generalización. Este tipo de problemas es coherente con los considerados en la prueba PISA, la cual realiza una distinción entre pruebas de matemáticas y pruebas de resolución de problemas, conforme a tres niveles de profundidad: Reproducción, Conexión y Razonamiento.

La resolución de los problemas de respuesta abierta y de tipo extenso, como es el problema 2 del pretest y 2 del postest, necesita de construcciones y respuestas que muestren el reconocimiento conceptual del tipo de problema, uso de procesos de razonamiento, uso y articulación de conceptos matemáticos y organización de la información. Por lo anterior se exige al estudiante integrar y conectar conceptos y datos, evidenciar capacidad comprensiva, jerarquizar información y organizar su trabajo de resolución.

En este sentido, los problemas planteados en el pretest y postest obedecen a procesos de modelización. El problema 1 del pretest y del postest, se relacionan por su situación de representación gráfica y determinación de curvas de ajuste, en base a datos dados por tabla de valores y/o extraídos del enunciado (ver cuadro 8 y 9).

Respecto del problema 2 del pretest y postest, corresponden a un contexto algo diferente, que exige de los estudiantes mayor reflexión, interpretación adecuada de la información, uso de diversas representaciones, toma de decisiones y establecimiento de hipótesis (densidad y grosor constantes) (ver cuadro 8 y 9).

Para efectos del análisis, se comparó el problema 1 del pretest con el problema 1 del postest y el problema 2 del pretest con el problema 2 del postest. Respecto de la equivalencia de los ítems analizados en ambos problemas, éstos la mantienen en los aspectos fundamentales de acuerdo al plan de análisis propuesto (ver cuadro 10), atendiendo al tipo de situación. En el problema 1 de ambos test, la transposición de la información a una representación grafica exige la necesidad de, por un lado, un sistema de representación coherente al contexto (gráficos, ejes coordenados, graduación de ejes), y por otro lado, esta misma representación grafica en combinación con una visualización de la distribución de los puntos que representan la información (crecimiento, decrecimiento, distinción de puntos importantes, exclusión de puntos irrelevantes, significado de variable, rango de variación de variables), fue esencial para conjeturar el tipo de curva de ajuste (crecimiento, decrecimiento, modelo coherente con el problema: lineal, afín, cuadrático, por tramos). Otro aspecto importante es el que hace referencia a la extrapolación de datos. Por su parte, el problema 2 de ambos test, respecto de los primeros, exige una mayor reflexión en cuanto a una articulación de objetos y relaciones, a priori no explícitos, como también de la extracción y organización de los datos, establecimiento de relaciones que permitan una correcta comprensión y control de la situación por medio de la matematización, contexto en el cual el rol del establecimiento de hipótesis, a priori no explicitas, es primordial (densidad y grosor constante), así como la interpretación de algunos elementos del problema con objetos y conceptos matemáticos (masa, volumen, representación con sólidos, aproximaciones) son factores esenciales en estos problemas. Del mismo modo, el reconocimiento de las variables, establecimiento de relaciones y tipo de relaciones (establecimiento de relaciones causales entre las variables), fue esencial en la discusión que los datos y el trabajo de resolución condujeran a un establecer algún tipo de modelo aproximado y coherente con la situación.

Cuadro 8. Instrumentos de control pretest.

PROBLEMAS PRETEST-PEDAGOGÍA EN MATEMATICA

PROBLEMA 1.
SITUACIÓN 1. ***¿Llueve mucho en el sur?***

En una localidad de la zona sur de Chile, se realizó un estudio del promedio de las precipitaciones mensuales. Este estudio corresponde al periodo Marzo-Noviembre (indicados de 3 a 11, en la tabla), de tal manera de predecir el promedio de las próximas precipitaciones para organizar las actividades de los turistas.

Tabla de valores

Mes	Precipitaciones (mm.)
3	26,4
4	31,8
5	42,1
6	42,9
7	45,2
8	43,8
9	38,9
10	36,5
11	23,8

i) Grafica los datos de la tabla.
ii) Qué tipo de ajuste crees que es bueno. justifica
iii) Cuál son los puntos inevitables en la gráfica.
iv) Determina un modelo matemático de predicción que se ajuste a los datos.¿Crees que este modelo es un buen ajuste? ¿Qué datos se alejan?
v) De acuerdo al modelo, determina las precipitaciones para los meses que faltan.
vi) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la situación?
vii) Determina los puntos más importantes de la gráfica e interpreta su significado en el contexto.
viii) ¿Qué significa ajustar datos?
ix) ¿Qué significa un modelo matemático? Y un proceso de modelización.
x) Explique las etapas de un modelo matemático y de un proceso de modelización.

(extraído y Modificado Proyecto Cumenius)

PROBLEMA 2

SITUACIÓN 2. ¿Existió realmente King Kong?

En la pelicula "King Kong (1933)", se exhibe un gorila de una masa aproximada de 239[Kg] y de una altura de 1,8[m]. con un modelo aumentan sus dimensiones a las dimensiones de un monstruo de una masa de 2900 [Kg] y una altura de 14,5 [m].

Mostremos como las matemáticas ayudan a los cambios de escala

(1) Cómo resulta esta masa en relación con el modelo a escala del gorila.
(2) Es correcto el cambio de escala que se hizo en la película. Explica por qué y calcula las dimensiones y el cambio realizado en la película.
(3) Explica si es posible que se hubiese instalado en la torre El Empire State Building.
(4) Existió realmente King-Kong. Justifica.

(PROBLEMA EXTRAÍDO DE L'altra cara de les matematiques" y modificado en el contexto del Proyecto FONDECYT 1090617)

Cuadro 9. Instrumentos de control postest.

PROBLEMAS POSTEST-PEDAGOGÍA EN MATEMATICA

PROBLEMA 1.

SITUACIÓN 1. Tengamos cuidado con el consumo de cigarrillos". En la siguiente tabla, se aprecian algunos de los resultados de un estudio sobre la relación entre el hábito de fumar y el cáncer del pulmón. La primera fila muestra el número promedio de cigarrillos fumados por día y la segunda presenta la correspondiente tasa de mortalidad por cada 100.000 personas debido al cáncer pulmonar

Cigarrillos/día	0	5	15	30	45
Muertes /100000	30	132	256	447	606

(1) Determina un modelo que mejor se ajuste a los datos
(2) Representa gráficamente la situación
(3) Estime el número de muertes por 2 cajetillas diarias.
(4) Interpreta el significado de la pendiente y el término constante.
(5) Si el modelo de crecimiento sigue mostrando la misma tendencia, pronostica cuántas son las muertes con 3 cajetillas diarias y con 4.
(Considera que una cajetilla tiene 20 cigarrillos)

PROBLEMA 2

Situación 2. Las pizzas son favoritas de los jóvenes.

La pizzería "Donde la Nona" les encanta a muchos jóvenes, especialmente la extra queso y la napolitana ya que son las más vendidas. Las promociones llaman la atención por los precios que han establecido. Observa la lista de precios, donde la pizza mediana es el doble de ancha que la pequeña y la grande es el triple de ancho que la pequeña.

(1) ¿Existe una relación entre los precios considerando la relación entre los tamaños?

(2) ¿Cuál es el tamaño de pizza más económica?

PEQUEÑA(15 cm. diámetro)	**MEDIANA** (30 cm.)	**GRANDE** (45 cm.)
$ 2000	$ 8000	$18000

(A) Categorías de análisis.

Se levantaron categorías de análisis a priori, que se consolidaron en un segundo nivel de análisis, esto es, una vez revisado el material. Las categorías de análisis diseñadas a priori, han sido validadas mediante una triangulación de jueces expertos en el contexto del proyecto FONDECYT 1030122, de acuerdo a los que se debe evaluar en la resolución de problemas (Aravena & Caamaño, 2007).

A continuación se presentan las categorías con sus respectivas subcategorías, que fueron trianguladas mediante investigadores y que dieron origen al siguiente plan de análisis.

Cuadro 10. Categorías y subcategorías con sus criterios asociados que permitió analizar el trabajo matemático en la resolución de problemas en el alumnado de pedagogía en matemática.

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍA	CRITERIOS ASOCIADOS
CATEGORÍA 1. **Integración de los Aspectos Conceptuales** Está referido a la explicitación y significado que le dan a los conceptos y procesos matemáticos y a la interrelación que establecen entre los conceptos y el problema.	**SUBCATEGORÍA1: Reconocimiento de los conceptos involucrados en el problema**	- Significado de variable - Reconocimiento de las variables - Significado del concepto de función - Comprensión de los conceptos de crecimiento y de decrecimiento - Reconocimiento de conjuntos discretos y continuos.
	SUBCATEGORIA 2. Articulación y significado que le dan a los conceptos en el contexto del problema	- -Establecimiento de relación causal entre las variables -Conexión entre la relación causal con la extrapolación -Reconocimiento de la variable independiente en el contexto del problema -Discusión de la posibilidad de que los datos conduzcan a un modelo coherente con el problema - Significado de los objetos matemáticos relevantes expresados en lenguaje del problema
CATEGORÍA 2. **Integración de los aspectos procedimentales.** Está referido a la organización e interpretación de la información del problema, a las condiciones y restricciones. la matematización que hace referencia a la descripción de relaciones matemáticas que interpretan el proceso, y a las estrategias generales.	**SUBCATEGORÍA 1** **Organización de la información. Condiciones y restricciones del problema**	-Organización de datos del problema -Utilización de sistemas de representación -Determinación de puntos importantes -Establecimiento de hipótesis -Rango de variación de las variables en el contexto del problema -Asignación de unidades de medida de acuerdo al problema -conexión entre los datos del problema -Presenta criterios de selección de curva de ajuste (máximo, crecimiento, decrecimiento, Pendiente) -Trazado de curva mediante ajuste de los datos
	SUBCATEGORÍA 2. Matematización.	-Descripción de relaciones matemáticas que interpretan el proceso -Planteamiento de ecuaciones -Propiedades y algoritmos - Explicitación o formulación del modelo en términos -Simbología y lenguaje matemático.
	SUBCATEGORÍA 3. Estrategias generales.	- Estrategias heurísticas -Descubrimiento de regularidades entre los datos. - Establece conjeturas -Utilización de multiplicidad de representaciones. -Utilización de aproximaciones en la descripción de -Establecimiento de conjeturas - Generalización
CATEGORÍA 4 **Integración del los Aspectos comunicativos.** Hacen referencia a matemática, entre los que se destaca la comunicación de métodos, procesos y resultados de acuerdo al contexto del problema.	**SUBCATEGORÍA I** **Comunicación de métodos y procesos**	-utilización de lenguaje formal en la redacción de los procesos y resultados -comunica métodos y procesos de resolución. -presenta argumentos matemáticos
	SUBCATEGORÍA 2. Comunicación de resultados	-concluye de acuerdo a las condiciones del problema -explicita los resultados en el contexto del problema.

3.3.1.2. Instrumento de control proyecto pedagógico.

Para analizar las capacidades que desarrollan el alumnado de pedagogía en matemática en el trabajo de proyectos, se consideraron las siguientes variables, con sus respectivas categorías de análisis: (1) ***planificación de la actividad matemática***, que considera las etapas I y II (cuadro 1) y (2) ***efectos en la implementación***, que corresponde a un análisis de la gestión en el aula. Para cada una de las variables, se levantaron categorías de análisis tomando como referencia las investigaciones de Aravena (2001), Aravena & Giménez (2002), Aravena, Caamaño & Giménez (2008) y Aravena & Caamaño (2009), que dan cuenta de lo que debe valorarse en un trabajo de proyectos.

Los instrumentos de recogida de información corresponden a:

(1) Informes de avance. En el trabajo de proyectos es muy importante el seguimiento y control de todas las actividades, por ello, se diseño un primer momento denominado avance 1 y que consiste en el trabajo de planificación de la actividad matemática donde se elaboró una pauta de regulación que recoge el progreso de los grupos, para ello, se utilizó una entrevista semiestructurada y un registro de regulación que comprende el problema base de estudio, puntos débiles y compromisos para establecer mejoras en la elaboración del informe. Esta etapa corresponde a un 5% de la nota del curso.
Avance 2. Se elaboró un segundo instrumento de evaluación, que registra el diseño de la secuencia de aula. Por la importancia que tiene el diseño y la elaboración de la unidad didáctica se diseñó una pauta de evaluación que recoge la planificación de ésta. Ambos instrumentos, fueron diseñados en total coherencia con las categorías de análisis descritas para el proyecto global que se presentan en el cuadro 8. Por la importancia que presenta el diseño de la unidad didáctica, se le asigna un porcentaje de un 20% de la nota del curso.

(2) Informe escrito. Un instrumento de evaluación importante lo constituye el informe escrito del proyecto, ya que a través de este medio es donde se desarrollan recursos de comunicación rigurosos y se afianzan esquema conceptuales. Para ello, se diseñó una pauta de evaluación a partir de las categorías de análisis definidas en el cuadro 11 y 12.

(3) Exposición oral. Las investigaciones colocan de manifiesto que evaluar esta instancia es fundamental ya que permite comunicar oralmente y hacer una síntesis de sus conocimientos adquiridos, del trabajo matemático realizado y de los análisis de los resultados alcanzados en la experiencia (Aravena, 2001). Para ello, se construyó, una pauta de evaluación en total coherencia con las categorías de análisis (ver cuadro 11 y 12) que apunta a reconocer las capacidades de los estudiantes durante el trayecto del proyecto de aula.

Para analizar la información obtenida de las diferentes etapas del proyecto, se realizó un análisis interpretativo del contenido, una triangulación de datos y de investigadores utilizando las categorías de análisis con sus respectivas subcategorías que se diseñaron para tal efecto y que se presentan en el cuadro 11 y 12 respectivamente.

Cuadro 11. Plan de análisis para evaluar la planificación, el diseño, el análisis de la implementación y gestión en el aula realizado por los futuros profesores.

VARIABLE 1. PLANIFICACION DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA			
CATEGORÍAS	**SUBCATEGORÍA/CRITERIOS ASOCIADOS**	**TIPO DE CAPACIDAD**	**MEDIOS DE EVALUACIÓN**
CATEGORÍA1. **PLANIFICACIÓN, ORGANIZACIÓN Y DISEÑO** Hace referencia a la información recopilada donde se considera lecturas y documentos de los análisis teóricos respecto de la importancia de la matemática para el desarrollo de capacidades, la importancia de los modelos de enseñanza y evaluación de los aprendizajes.	***SUBCATEGORÍA 1.1.*** **INFORMACIÓN RECOPILADA** y la calidad de ella. -Estudios teóricos realizados. -Bibliografía trabajada consistente y al día	cognitiva	-avance -informe -exposición oral
	SUBCATEGORÍA1.2. ***FORMULACIÓN DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS DEL ESTUDIO*** -Selección del problema e importancia del problema en el sistema educativo -Objetivos del estudio	cognitiva	-avance -informe -exposición oral
	SUBCATEGORÍA 1.3. PLANIFICACIÓN DE LAS ACTIVIDADES Y ESTRATEGIAS QUE SEGUIR SEGUIDAS -Visión hacia dónde dirigir esfuerzos - visión y proyección	meta cognitivo	-avance -informe -exposición oral
	SUBCATEGORÍA 1.4. ELEMENTOS COMUNICATIVOS -Defensa de ideas y argumentos -participación en la discusión	-formación transversal	-avance -exposición oral
	SUBCATEGORÍA 1.5. METODOLOGÍA UTILIZADA EN -Descripción de las etapas y actividades -Cronograma de trabajo. -Descripción de las variables y categorías de análisis -Metodología para recoger datos y análisis	cognitiva	-avance -informe -exposición oral
CATEGORÍA 2. ***PLANIFICACIÓN Y DISEÑO DE AULA*** Hace referencia a la estructuración que le han dado al plan de clases y el plan detallado de cada clase y la regulación.	**SUBCATEGORÍA 2.1. ESTRUCTURACIÓN GENERAL DEL PLAN DE CLASES** -Objetivo de la unidad -Puntos de vista del material .trasfondo matemático - Comportamiento de los alumnos respecto de las capacidades a desarrollar -tiempos de ejecución -Objetivos -Criterios de evaluación -Directrices de la enseñanza	cognitiva	-avance 2 -informe -exposición oral
	SUBCATEGORÍA 2.2. ESTRUCTURACIÓN DETALLADA DE LAS CLASES -Plan detallado de cada clase -Posibles soluciones matemáticas -Posibles dificultades por parte del alumnado -Pauta de evaluación de las clases	cognitiva	-avance -informe -exposición oral
CATEGORÍA 3. CONOCIMIENTO MATEMÁTICO /DIDÁCTICO. Situaciones o problemas que potencien el razonamiento y pensamiento matemático inductivo y el desarrollo de los problemas y tipos de estrategias de resolución	**SUBCATEGORÍA 3.1. ESTRUCTURACIÓN DE LOS PROBLEMAS.** -Tipos de situaciones o problemas que potencian el pensamiento matemático inductivo y la búsqueda de nueva información -Desarrollo de preguntas que permiten anticiparse a la idea de los alumnos -Desarrollo de los problemas y tipos de soluciones	cognitiva	-avance 2 -informe
	SUBCATEGORÍA 3.2. ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS -Interpretación de los aspectos matemáticos que se trabajan -Posibles dificultades y obstáculos en cada problema tratamiento de los errores	cognitiva	-avance -informe
CATEGORIA 4. **CREATIVIDAD EN EL DISEÑO DE LOS PROBLEMAS** Hace referencia al diseño de problemas en distintos contextos, problemas novedosos	**SUBCATEGORÍA 4.1. ADECUACIÓN A CONTEXTOS DIFERENTES.** -ajuste a contextos reales -datos consistentes -coherencia y naturalidad de la relación	meta cognitiva	informe plan de clases
	SUBCATEGORÍA 4.2. TIPOS DE TAREAS NO TRADICIONALES -diseño de problemas novedosos -planteamiento de problemas no tradicionales	mate cognitiva	informe plan de clases

Cuadro 12. Plan de análisis para evaluar el análisis realizado por el alumnado de pre-práctica en el diseño, la implementación y gestión en el aula.

VARIABLE 2. ANALISIS DE LOS EFECTOS EN LA IMPLEMENTACIÓN			
CATEGORÍA	**SUBCATEGORÍA**	**CAPACIDAD**	**MEDIO DE EVALUACIÓN**
CATEGORÍA 5 . GESTIÓN Y AUTOCONTROL	**SUBCATEGORÍA 5.1.** **REFLEXIÓN Y ANÁLISIS DEL MODELO DE PLANIFICACIÓN** -Dificultades en el itinerario propuesto respecto de la secuencia de aprendizaje	metacognitiva	**-Informe** **_Exposición oral**
	SUBCATEGORÍA 5.2. **REFLEXIÓN Y ANÁLISIS DE LAS ESTRATEGIAS SEGUIDAS EN AULA** -Dificultades y aciertos en el trabajo con los problemas, metodología de aula, evaluación .	metacognitiva	**-Informe** **_Exposición oral**
CATEGORÍA 6. INFORMACIÓN DE LA INTERVENCIÓN.	**SUBCATEGORÍA 6.1.** ***COMUNICACIÓN DE RESULTADOS*** - Representaciones diversas. uso de tablas, gráficos, mapas, planos y esquemas -Utiliza las categorías de análisis en coherencia con la temática -Profundidad y precisión de la interpretación de gráficas y tablas. -Precisión de los resultados -Dominio de los elementos estadísticos asociados. -Relevancia de los resultados	cognitiva	**-Informe** **_Exposición oral**
	SUBCATEGORÍA 6.2. PRESENTACIÓN DE CONCLUSIONES E IMPLICACIONES DIDÁCTICAS -Da respuesta a los objetivos -Coherencia con los resultados -Implicaciones didácticas		**-Informe** **- Exposición oral**

3.3.1.3. Análisis cualitativo. Estudio de caso. Se seleccionó al azar a un grupo de estudiantes de Pedagogía en Matemática y se analizó ***el diseño y la secuencia de aula*** siguiendo el método “Lesson Study” (Shizumi, et, al.,2005; Aravena, 2007), que corresponde a: (1) planificación del plan de clases, (2) ejecución de la clase y (3) análisis de la clase por el equipo de investigadores. Para los análisis del estudio de clases y para verificar que se llevó a cabo la metodología propuesta, se utilizó como medio el escrito del plan de clases y la grabación de video. La finalidad del estudio de caso fue analizar la calidad de la actividad en el aula y las capacidades desarrolladas por un grupo de estudiantes de pedagogía. Un análisis de este tipo permite detectar en profundidad los aciertos y las dificultades que se dieron en el aula. Para ello, se definieron las siguientes variables con sus respectivas categorías que dieron origen al plan de análisis que se presenta en el cuadro 13. Se utilizó un análisis de contenido a partir de las categorías descritas para tal efecto.

Cuadro 13. Variables y categorías de análisis para el estudio de caso.

VARIABLE	CATEGORIA
1.Diseño del plan de clases ***Medio de verificación: unidad didáctica***	**1.Diseño de la secuencia de aula** **estructuración general del plan de clases** organización general -organización de las clases Objetivos, actividades, evaluación **2. Estructuración detallada de las clases** ***análisis de los problema*** - posibles dificultades de los estudiantes en su resolución. –análisis de posibles soluciones
2. Gestión en el aula **Medio de verificación video de la clase**	***Nivel de conceptualización:*** Define los conceptos involucrados en los problemas -Aplica los conceptos involucrados en la clase. -Argumenta el uso de los conceptos
	Nivel de organización: Organiza y jerarquiza los datos provistos en el planteamiento del problema, -Considera su futura utilización en su resolución-Realiza representaciones tales como diagramas, tablas.,- Establece condiciones y restricciones de acuerdo al contexto del problema.
	Nivel de matematización: Asigna objetos matemáticos en el contexto del problema. -Aplica algoritmos y propiedades. Resuelve el problema en términos matemáticos
	Estrategias:. Motiva la búsqueda de posibles regularidades y generalizaciones.- Plantea dudas a los alumnos, -Motiva el establecimiento de conjeturas
	Nivel de interacción en el aula: motiva la participación de los alumnos, recoge sugerencias de los estudiantes, trata adecuadamente los errores, organiza trabajos de grupo.
	Nivel de comunicación matemática: Comunica los procesos de resolución -Argumenta, usa representaciones diversas para la explicación de los contenidos-Precisión en las notaciones y en el análisis matemático-explicaciones, uso del lenguaje formal y simbología.

3.3.2. INSTRUMENTOS DE CONTROL DEL ESTUDIANTADO DE SECUNDARIA.

Para el análisis de la actividad matemática desarrollada por el estudiantado de secundaria, cada grupo de trabajo del alumnado de pedagogía en matemática que realizó su pre-práctica, diseñó un pretest y un postest, de acuerdo a la temática respectiva, guiado por la profesora-investigadora y revisado por el equipo de investigadores, de tal manera de verificar las capacidades desarrolladas por el alumnado de secundaria durante la intervención pedagógica. Para analizar las capacidades desarrolladas se levantaron categorías de análisis que son globales a cualquier temática de aula en el trabajo con problemas (Alsina, 1998; Aravena, 2002; Aravena & Caamaño, 2007)

A continuación se presenta un esquema que da cuenta del plan de análisis en cada una de las categorías.

Cuadro 14. Plan de análisis con las respectivas categorías y subcategorías para evaluar las capacidades desarrolladas en el alumnado de secundaria

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍA	criterios asociados
aspectos conceptuales	subcategoría 1. conceptualización	-significado de los conceptos -reconocimiento de conceptos -significado en el contexto del problema.
aspectos procedimentales	Subcategoría 1. Organización de la información, condiciones y restricciones.	-organización de datos -identificación de restricciones -representaciones
	Subcategoría 2. Matematización	-descripción de relaciones matemáticas -propiedades y algoritmos- resolución en términos matemáticos
	Subcategoría 3. Estrategias generales	-regularidades –generalización -conjeturas
Comunicación Matemática	Subcategoría 1. comunicación de métodos y procesos	-Comunica métodos de resolución.-Presenta argumentos
	subcategoría 2. comunicación de resultados	-Interpretación de datos desde el punto de vista matemático -Interpretación de soluciones en el contexto del problema -Revisión de resultados -Utilización del lenguaje matemático (simbología y notaciones)

3.3.3. INSTRUMENTOS DE CONTROL PARA EL ANÁLISIS DEL EFECTO PRODUCIDO POR LOS GRUPOS DE PRE-PRÁCTICA EN EL ALUMNADO DE SECUNDARIA AL FINAL DE LA INTERVENCIÓN.

Para analizar el efecto producido por los grupos de trabajo en el alumnado de secundaria, se realizó un análisis de las capacidades cognitivas desarrolladas por el alumnado de pedagogía y el alumnado de secundaria, en algunos elementos claves de la resolución de problemas y que han sido reportados por las investigaciones. Entre los más importantes y que son comunes al trabajo matemático en la resolución de problemas, de ambos grupos, destacamos: (1) la conceptualización, referida a como articulan los conceptos y el significado de ellos en el problema en cuestión; (2) organización de la información, que comprende organizar datos, establecer condiciones y restricciones, utilizar sistemas de representación; (3) la matematización, elemento clave para describir las relaciones matemática que interpretan el proceso, la utilización de propiedades y algoritmos y la explicitación de problema en términos matemáticos; (4) estrategias generales, referida a la generalización, establecimiento de relaciones, regularidades y conjeturas; y (5) aplicación y comunicación matemática, que comprende, la explicitación y argumentación de los procesos y los resultados. En base a lo anteriormente expuesto, se consideraron las categorías descritas en el cuadro 14 del apartado anterior.

La comparación de ambos grupos, permitió detectar el perfil del alumnado de pedagogía para generar aprendizajes de calidad en el alumnado de secundaria.

3.4. INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN, TÉCNICAS DE VALIDACIÓN Y ANÁLISIS

3.4.1. INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN.

Para medir las variables de interés en el pretest y postest, en aquellos ítems equivalentes de acuerdo a las categorías de análisis, se diseño un instrumento tipo escala Likert, donde se utilizaron los siguientes rangos de puntaje:

1: No contesta, no sabe, no explicita la competencia.
2: Contesta incorrecto, argumenta de manera inconsistente, utiliza razonamientos, algoritmos errados, da respuesta al problema de manera incorrecta.
3: Contesta de manera regular, desarrolla algoritmos pero no los termina, utiliza algunas propiedades, los argumentos están incompletos, da respuesta al problema de forma incompleta, le falta en el trabajo matemático, se salta pasos.
4: Contesta bien, posee dominio conceptual, pero le falta profundidad en sus argumentos; utiliza procesos de razonamiento los justifica pero no completamente, desarrolla algoritmos pero se salta algunos pasos, termina el trabajo pero le falta rigurosidad.
5: Excelente, posee la competencia completa, utiliza propiedades, razonamientos, algoritmos, da respuesta al problema, utiliza argumentos consistentes, usa estrategias, posee dominio conceptual y procedimental de alto nivel, comunica resultados y procesos en forma completa.

Justificamos como adecuado esta forma de puntuación, aunque en rigor, es una medición ordinal, es muy común que se trabaje como si fuera de intervalos, pero en este caso, se uso en los análisis, los promedios resultantes en la escala permitiendo analizar la puntuación en el continuo de 1 - 5.

Para la revisión de los ítems en cada uno de los problemas, de acuerdo a las categorías de análisis, se realizó un análisis descriptivo-interpretativo del contenido, y se utilizó una triangulación de investigadores lo que permitió ingresar a la base de datos el rango de puntaje correspondiente a cada alumno.

3.4.2. TÉCNICAS DE VALIDACIÓN PARA EL ESTUDIO DE PRETEST-POSTEST ALUMNADO DE PEDAGOGIA EN MATEMÁTICA

3.4.2.1. Validación y técnicas de análisis.

Para la validación del pretest y postest, se realizó un análisis de fiabilidad mediante el alfa de Cronbach. El *alpha de Cronbach* permite cuantificar el nivel de fiabilidad de una escala de medida para la magnitud inobservable construida a partir de las *103* variables observadas. En esta investigación se mide una cualidad no directamente observable (por ejemplo, la conceptualización) en una población de alumnos. Para ello mide *103* variables que sí son observables a cada uno de los alumnos. Se supone que las variables están relacionadas con la magnitud inobservable de interés. En particular, las *103* variables deberían realizar mediciones estables y consistentes, con un elevado nivel de correlación entre ellas. Más concretamente, se obtiene como promedio de los coeficientes de correlación de Pearson entre todas las preguntas si las puntuaciones de los mismos están estandarizadas. La fórmula para calcular el Alpha de Cronbach, a partir de las correlaciones entre los ítems, es la siguiente:

$$\alpha = \frac{np}{1 + p(n-1)},$$

Donde: *n* es el número de ítems y *p* es el promedio de las correlaciones lineales entre cada uno de los ítems.

Este indicador se utilizó para medir la fiabilidad de la escala en el pre y postest. Por otra parte, y partiendo de la base de que una condición necesaria, aunque no suficiente, para validar una medida es su fiabilidad, se ha procedido a su determinación para cada uno de los constructos y dimensiones. La fiabilidad se relaciona con el hecho de que el instrumento de medición produzca los mismos resultados cada vez que sea administrado a la misma persona y en las mismas circunstancias. Así, normalmente los instrumentos pueden considerarse fiables si, con independencia de quién los administre y del modo en que se haga, se obtienen resultados similares. En este trabajo, de cara a la valoración de la fiabilidad de las medidas se ha utilizado el alfa de Cronbach, que es el indicador más ampliamente utilizado para este tipo de análisis. Además, en determinados contextos y por convenio, se considera que valores del alfa superiores a 0,7 son suficientes para garantizar la fiabilidad de la escala.

Técnicas de análisis. Para analizar las capacidades desarrolladas en el pretest en constraste con el postest, se utilizaron los siguientes análisis.

(1) Análisis de reducción de variables. Para cada una de las categorías de análisis, que denominamos dimensiones, que poseen criterios asociados, se realizó una reducción de éstos, de tal manera de realizar un análisis regresión lineal múltiple. El propósito de la reducción de los criterios asociados, fue evaluar el dominio de la competencia del alumno en cada una de las dimensiones.

(2) Estudio comparativo. Se realizó un estudio comparativo mediante dos métodos.

(2.1) Prueba t para muestras relacionadas. Con el propósito de analizar las diferencias significativas entre el pretest y postest, se utilizó la prueba t para muestras relacionadas, pues como se dijo anteriormente se crearon dimensiones, donde estas dimensiones son promedios de los ítems que median la misma característica. Asimismo, los ítems fueron medidos en escala ordinal tipo Likert, donde se consideró los promedios de estos ítems para cada dimensión, lo cual permitió aplicar la técnica, esto sumado al tamaño de muestra del estudio.

(2.2) Método de regresión múltiple. El objetivo fue explicar si una dimensión o categoría está relacionada con otra dimensión. Este análisis fue muy importante ya que nos llevó a verificar la relación existente entre las distintas categorías o dimensiones. Se correlacionaron todas las categorías que permitió explicar la relación entre ellas. Se utilizó además correlaciones bivariadas en las dimensiones descritas en el plan de análisis. Por último, se verificaron los supuestos de normalidad, independencia y homogeneidad de los residuos. Se ha considerado un modelo de regresión lineal múltiple, sin el intercepto, pues primero se realizó un modelo incluido el parámetro y no fue significativo.

El modelo utilizado es el siguiente:

$$Y = B_1 * X_1 + B_2 * X_2 + \ldots + B_k * X_k + e,$$

Donde,

- Y = variable dependiente
- X_i = variables independientes, $i=1,\ldots,k$.
- B_i = parámetros del modelo
- e = error

La estimación de los parámetros del modelo se entrega en las tablas, junto al valor-p, de la prueba de hipótesis.

3.4.2.2. TÉCNICAS DE VALIDACIÓN Y ANÁLISIS ALUMNADO DE SECUNDARIA.

Para los análisis de las capacidades desarrolladas por el alumnado de secundaria, se utilizó las mismas técnicas de validación que el alumnado de pedagogía en matemática. Para la validación y el progreso de los grupos, se utilizó la prueba t- student que da cuenta de las diferencias significativas en ambos instrumentos. Además, para verificar la validez de la información entregada, los investigadores realizarán un análisis minucioso de cada uno de los ítems considerados por el alumnado de Pedagogía.

3.4.2.3. TÉCNICAS DE VALIDACIÓN Y ANÁLISIS PARA DESCRIBIR EL EFECTO. PRODUCIDO EN EL ALUMNADO DE SECUNDARIA POR LOS GRUPOS DE PRE-PRÁCTICA.

El análisis de los efectos producidos en el alumnado de secundaria, producto de la innovación por cada grupo de pedagogía, tuvo como propósito detectar algunas características que debe tener un docente en formación cuando interviene en las aulas. Para ello, se realizaron los siguientes análisis:

(1) Modelo de regresión múltiple, cuya variable dependiente es el grado de cada dimensión obtenida por el alumnado de secundaria y las variables independientes (factores) corresponden a las 5 dimensiones medidas al alumnado de Pedagogía en Matemática (ver cuadro 7 y 10).

(2) **Análisis el perfil de los futuros docentes** que realizaron la intervención. Para ello, se consideró dos instancias: (1) la planificación y el diseño de la secuencia de aula, el conocimiento matemático y la creatividad en el diseño de los problemas mediante promedios que se presentan en tablas y gráficos y (2) identificación de las características que debe tener el alumnado de pedagogía en matemática para intervenir en las aulas de secundaria. Para ello, se utilizaron intervalos de confianza de un 95% (diagramas de barra y error) en las categorías de conceptualización, organización, matematización, estrategias y comunicación matemática.

3.4.2.4. TÉCNICAS DE VALIDACIÓN TRABAJO DE PROYECTOS.

Para analizar el desarrollo de capacidades en el trabajo de proyectos, se estableció comparación de promedios en las categorías descritas en el plan de análisis (ver cuadro 11), donde se consideró estado de avance, informe escrito y exposición oral.

3.5. Reducción de los datos e interpretación. Se realizó una adaptación del análisis clásico de Miles y Huberman(1984), de acuerdo al siguiente esquema: a) recogida de datos (pruebas, videograbación, avance, informe escrito, exposición oral; b)reducción de los datos (transcripción, selección, simplificación y transformación; c)exposición de los datos (tablas, matrices, gráficas, diagramas); d) conclusiones y verificación de los resultados. Para los datos cuantitativos, se utilizó el procesador de texto SPSS que permitió realizar los análisis estadísticos.

IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS

A continuación se da cuenta del resultado de la innovación pedagógica en la primera práctica temprana del alumnado de Pedagogía en Matemática de la U.C.M. Para ello, se presentan, en primer lugar, los análisis de fiabilidad de los instrumentos de control, pretest y postest de ambos actores. En segundo lugar, se presentan los resultados y análisis del pretest y postest del alumnado de pedagogía en matemática y una muestra del alumnado de secundaria, en cada una de las variables, con el propósito de reconocer en profundidad el perfil inicial y de progreso. En tercer lugar, se presentan los resultados y análisis del progreso en el trabajo de proyectos, para reconocer las capacidades que desarrollaron durante el transcurso de la experiencia de cada grupo de trabajo. En cuarto lugar, se presentan los resultados del efecto producido por los grupos de trabajo en el alumnado de secundaria y por último, los resultados de un grupo en particular que formó parte del estudio de caso.

4.1. ANÁLISIS DE FIABILIDAD DE LOS INSTRUMENTOS DE CONTROL

4.1.1. Análisis de fiabilidad del estudiantado de Pedagogía en Matemática

En este estudio se miden las capacidades cognitivas desarrolladas por el alumnado de Pedagogía en Matemática, esta medición no es directamente observable (ver cuadro 10) en una población de 38 alumnos. Por ello, se miden 103 variables que sí son observables (las distintas capacidades cognitivas) de cada uno de los alumnos. Se supone que las variables están relacionadas con la magnitud inobservable de interés. En particular, las 103 variables deberían realizar mediciones estables y consistentes, con un elevado nivel de correlación entre ellas. El análisis de fiabilidad (alfa de Cronbach), permite cuantificar el nivel de fiabilidad de una escala de medida para la magnitud inobservable, construida a partir de las 103 variables observadas. Cuanto más se aproxime a 1, mayor es la fiabilidad de la escala. Además, en determinados contextos y por convenio, se considera que valores del alfa superiores a 0,7 son suficientes para garantizar la fiabilidad de la escala.

Considerando el problema 1, para el pretest aplicado al alumnado de Pedagogía en Matemática, el instrumento puede considerarse como fiable, pues su fiabilidad global es de 0,917. Paralelamente se calculó el coeficiente de alpha de Cronbach eliminando un ítem a la vez, para identificar aquellos que podrían estar influenciando su valor, según esos resultados, ninguno de los ítems, en forma individual, produce un cambio mayor en el alpha, por lo tanto, se presentarán los alpha de Cronbach globales, considerando todos los ítems. De manera análoga, se puede concluir que el instrumento para el problema 2 es fiable en el pretest y postest, como se observa en la tabla 1.

Tabla 1: Alfa de Cronbach del pretest y postest del alumnado de Pedagogía en Matemática de la UCM.

	Problema 1		Problema 2	
	Pretest	Postest	Pretest	Postest
Alfa de Cronbach	0,917	0,952	0,945	0,941

4.1.2. Análisis de fiabilidad estudiantado de secundaria.

A continuación se presentan los resultados de fiabilidad por cada grupo de trabajo, tanto del pretest como del postest, que se implementó al alumnado de secundaria. En la tabla 2, se muestra que los valores de alfa son mayores que 0.7, lo que es suficiente para garantizar la fiabilidad de los instrumentos de control.

Tabla 2. Alfa de Cronbach del pretest-postest del alumnado de secundaria.

ALPHA DE CRONBACH		
GRUPO N°	PRE-TEST	POS-TEST
1	0,86	0,97
2	0,79	0,98
3	0,93	0,81
4	0,95	0,87
5	0,86	0,92
6	0,83	0,84
7	0,86	0,97
8	0,96	0,98
9	0,82	0,97
10	0,92	0,97
11	0,86	0,92

4.2. RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL ESTUDIANTADO DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA. PRETEST-POSTEST

Con el propósito de realizar un análisis en las capacidades cognitivas del alumnado de Pedagogía en Matemática y Computación en cada uno de los problemas del pretest y del postest, tanto al inicio de la experiencia como al final de ésta, se realizó un análisis univariado que permite conocer en detalle, el progreso en cada una de las categorías propuestas. Para ello, se ha considerado el problema 1 del pretest con el problema 1 del postest, ya que ambos son congruentes respecto del tipo de problema que involucra la temática de relaciones funcionales de aplicaciones a través de la modelización de situaciones del ámbito escolar. Asimismo, el problema 2 del pretest con el problema 2 del postest, está referido al trabajo geométrico con aplicación de situaciones basada en la modelización del ámbito escolar.

4.2.1. CAPACIDADES COGNITIVAS PRETEST-POSTEST. Problema 1

4.2.1.1. Integración de los aspectos conceptuales.

Respecto de la integración de los ***aspectos conceptuales***, referido al reconocimiento y significado de los conceptos en el contexto de un problema, se observa en el gráfico 1, que la mayor parte del alumnado se concentra en el rango 3 hacia abajo, es decir, de regular a malo o no contesta Sin embargo, en el significado y reconocimiento de las variables, tanto desde el punto de vista matemático, como de reconocerla en el contexto del problema, se encuentran en las categorías de muy bueno y excelente (entre los rangos 4 a 5). Respecto del reconocimiento de las variables, no llama la atención, debido a que en el nivel de tercer año han cursado asignaturas de análisis donde el trabajo con funciones es uno de los temas centrales. El problema mayor se presenta cuando tienen que reconocer y comprender el significado de los conceptos en el contexto de un problema, donde están las mayores dificultades. Esto concuerda con las críticas que se han realizado en la formación de profesores, donde se muestra que el trabajo matemático sigue siendo estructuralista, formal y sin aplicaciones.

Sin embargo, se puede observar en el gráfico 2, que al final de la intervención, cuando los estudiantes han trabajo este tipo de problemas, los resultados aumentan considerablemente, ya que sus categorías de respuesta, se agrupan desde el rango 3 hacia arriba, es decir, desde regular a muy bueno, quedando sin embargo, tres variables en los rangos de regular a deficiente, específicamente en la discusión y análisis entre los datos y la descripción de un modelo que de respuesta al problema y dar significado a los objetos matemáticos en el lenguaje del problema. Es muy importante haber realizado este análisis, puesto que generalmente, en el trabajo con problemas, la mayor importancia se le da a la resolución de éste, quedando muchas veces de lado la discusión y análisis conceptos matemático que han intervenido en el problema. Con lo cual queda de manifiesto, que en la formación del profesorado se necesita realizar análisis de mayor profundidad en los objetos matemáticos que intervienen en el desarrollo de los problemas, aparte de la importancia de su resolución.

Gráfico 1. Integración de los aspectos conceptuales pretest. Probl.1

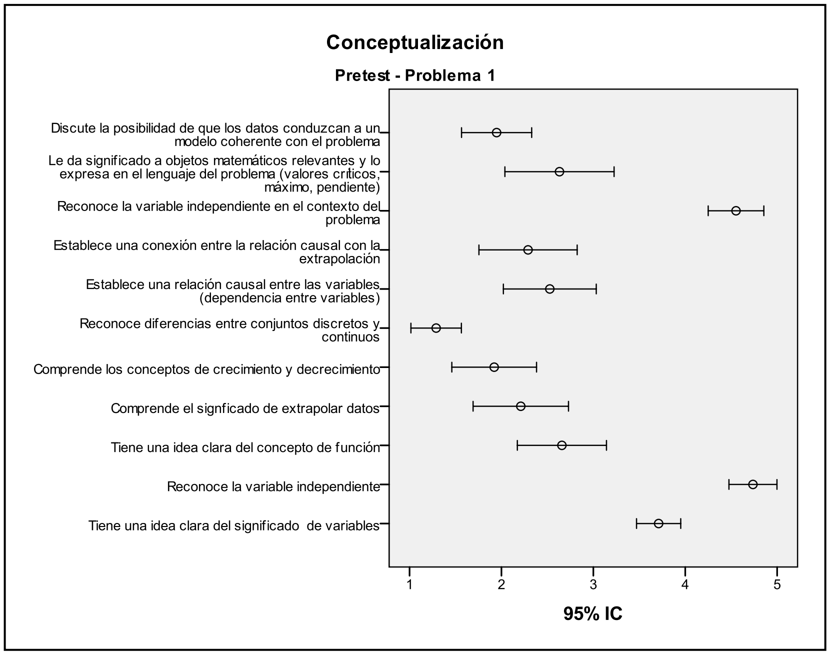
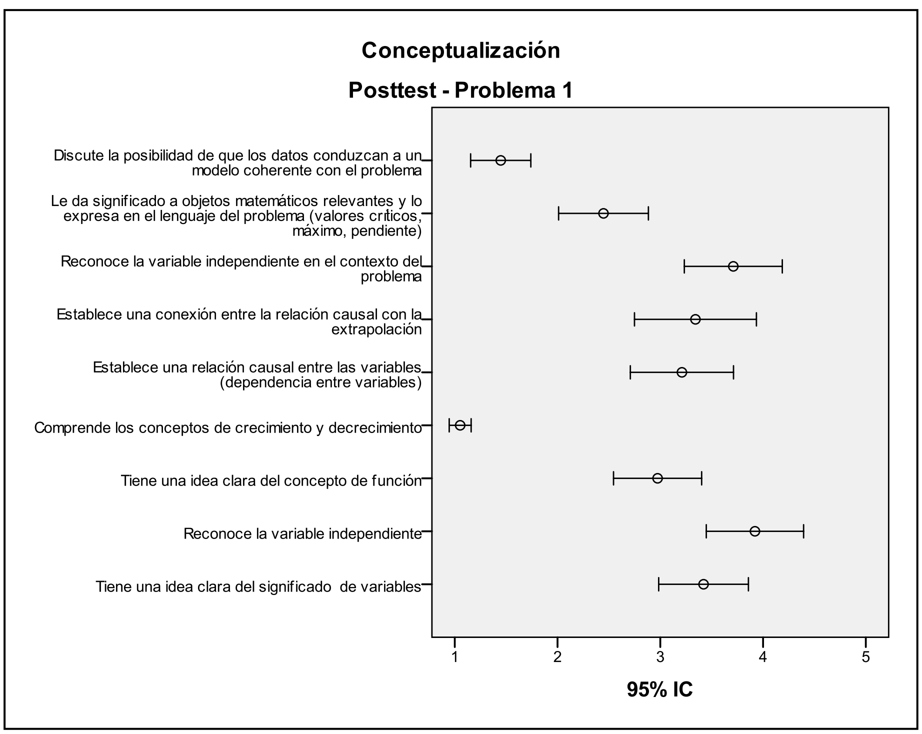


Gráfico 2. Integración de los aspectos conceptuales postest. Probl.1



4.2.1.2. Integración de los aspectos procedimentales.

Dentro de los aspectos procedimentales, hemos considerado la ***organización de la información y las condiciones y restricciones*** involucradas en el problema, donde se ha mostrado que en el pretest (gráfico 3), el estudiantado presentó problemas en las condiciones y restricciones iniciales de las variables en el contexto del problema y en el trazado de curva de ajuste de acuerdo a los datos, concretándose en los rangos de regular a malo. Las condiciones iniciales en un problema son de suma importancia ya que permite describir las relaciones matemáticas implícitas en éste, de tal forma de realizar la matematización. Respecto de las representaciones gráficas de la situación, el alumnado de pedagogía no presenta ningún problema, puesto que los rangos de respuesta se concentran de regular a excelente. Se observa en la gráfica 4, que en el postest, se siguen manteniendo los mismos problemas, superando sólo el criterio de curva de ajuste a los datos del problema, donde el rango se concentra en regular.

Gráfico 3. Organización de datos condiciones y restricciones en el pretest . prob.1

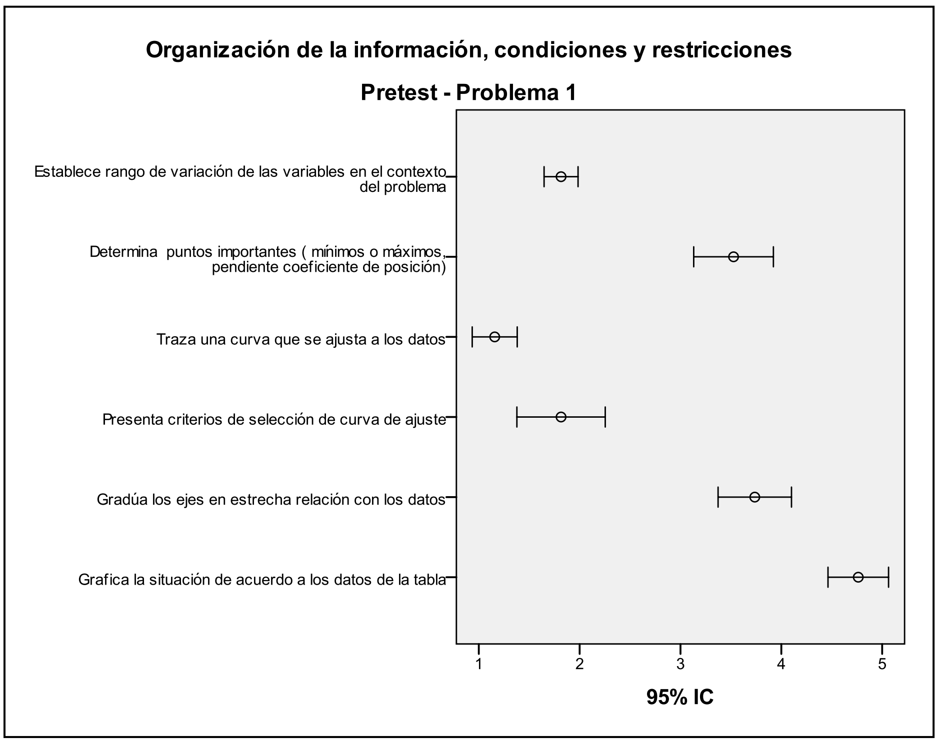
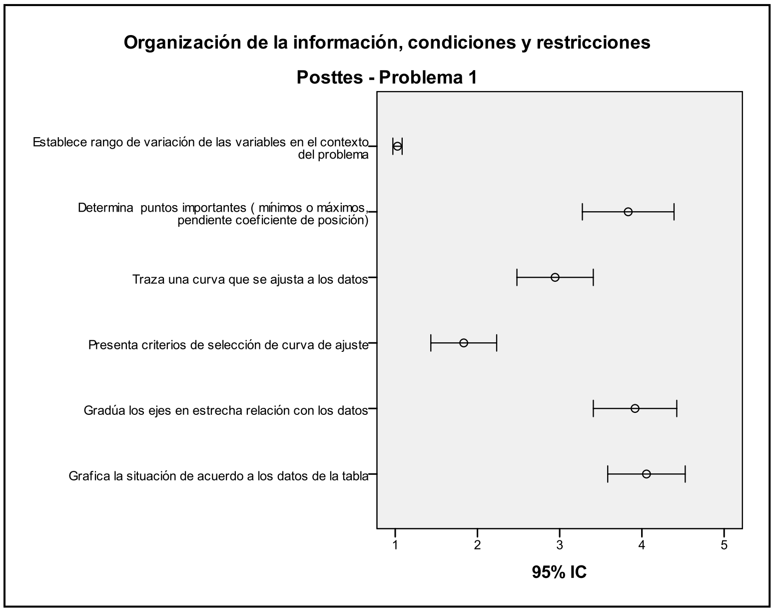


Grafico 4. Organización de datos. Condiciones y restricciones postest. Probl. 1



Respecto de la **matematización** de situaciones, donde se analizaron 4 criterios importantes para describir la situación en términos matemáticos, se observa en la gráfica 5, que el estudiantado de pedagogía, presenta problemas para plantear una ecuación general, aplicar propiedades y algoritmos que le permitan describir el modelo que da respuesta al problema, todo ello, expresado en un lenguaje matemático. En todos los criterios, los rangos de puntaje se concentran de regular a malo. Por el contrario, en el postest, se observa que sólo en la descripción del modelo en términos matemático, se siguen concentrando en regular. Lo anterior coloca en evidencia que en el trabajo con problemas concretos, donde tienen que formular un modelo que se aproxime a la situación, se necesita un trabajo más sistemático, de tal manera de lograr una mayor formación en este aspecto.

Grafico 5. Matematización pretest. Probl.1

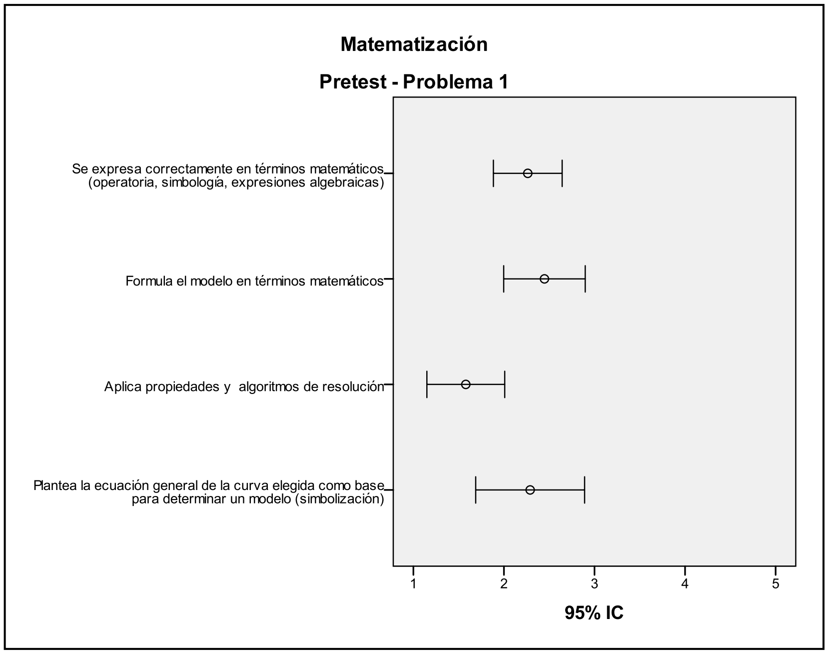
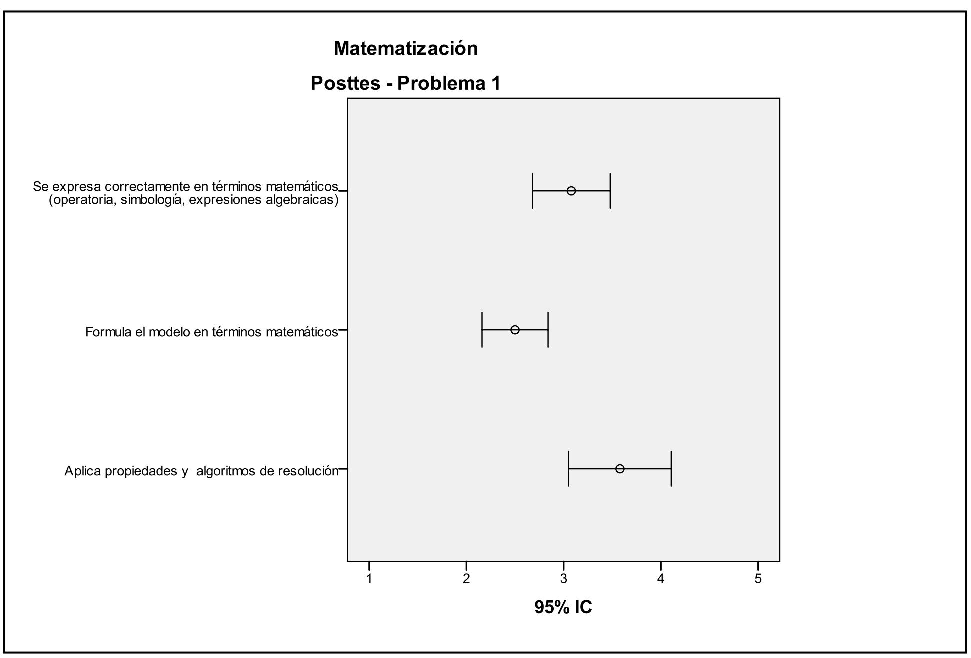


Gráfico 6. Matematización postest. Probl.1



Estrategias generales.

Respecto de las estrategias que utilizaron para la resolución del problema, se observa en el gráfico 7, que en los tres criterios, los resultados se concentran en el rango de no contesta. Esto es consistente con lo analizado anteriormente, ya que al no descubrir la regularidad entre los datos del problema o utilizar aproximaciones, no les permitió la formulación del modelo en términos matemáticos. En el postest, hay una leve mejoría respecto de las aproximaciones, ya que los datos se concentran en el rango 2, que aunque este errado, intentaron un trabajo en esta línea.

Gráfico 7. Estrategias generales pretest . probl.1

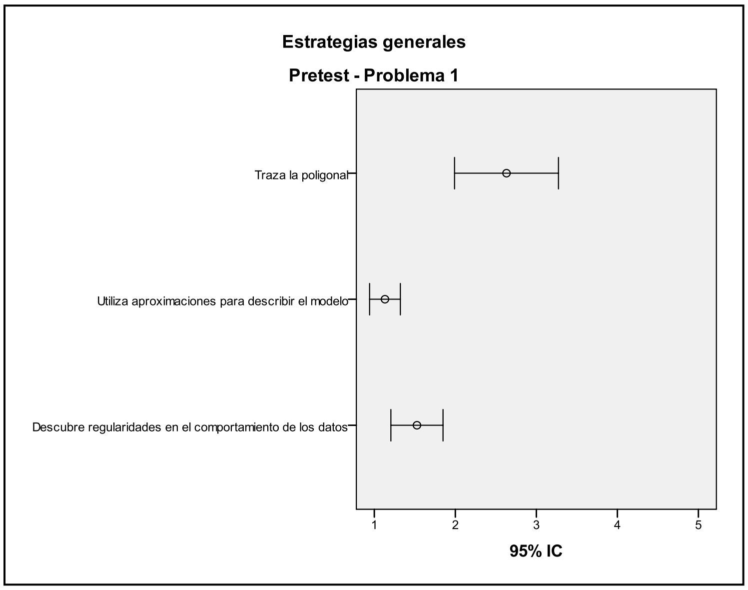
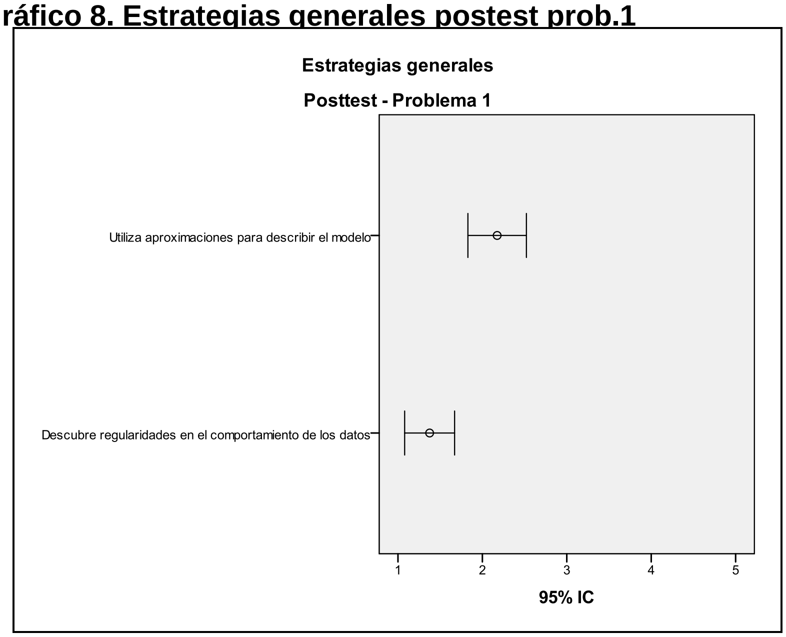


Gráfico 8. Estrategias generales postest prob.1



4.2.1.3. Comunicación matemática.
Respecto de la comunicación matemática, donde se valoró la comunicación de métodos y procesos y la comunicación de los resultados, se observa en el gráfico 9, que en el pretest, específicamente en explicitarlos en el contexto del problema y concluir de acuerdo a las condiciones de éste, el alumnado pedagogía, se concentra en el rango 2 y 1, es decir, comunican erradamente o no contestan. Sin embargo, en el postest, ha habido un progreso, ya que la concentración de los datos se encuentra en el rango 3, es decir, comunican matemáticamente en forma regular, faltando elementos más claros en sus argumentos.
Las investigaciones dan cuenta que este aspecto es lo que menos se trabaja en matemática, en todos los niveles de enseñanza (Alsina, 1998; Aravena, 2001; Aravena & Caamaño, 2007), lo que permite conjeturar que en las asignaturas de matemática, son escasas las aplicaciones en contexto.

Gráfico 9. Comunicación matemática en el pretest. Prob.1

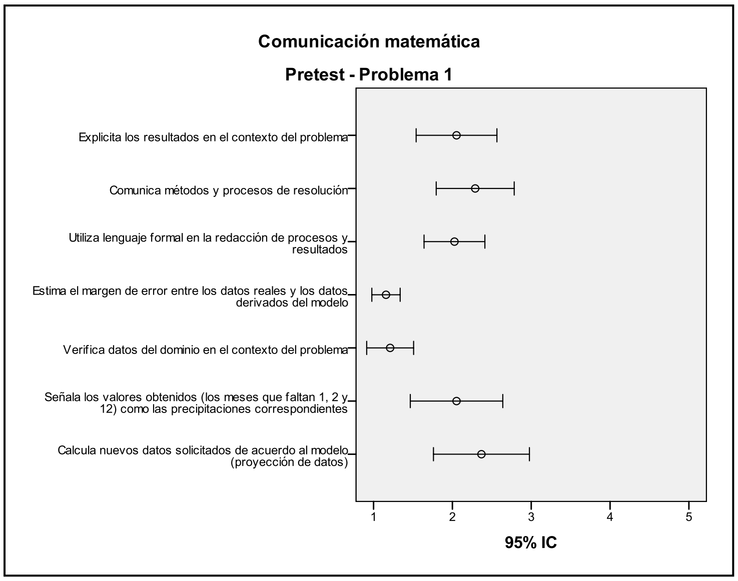
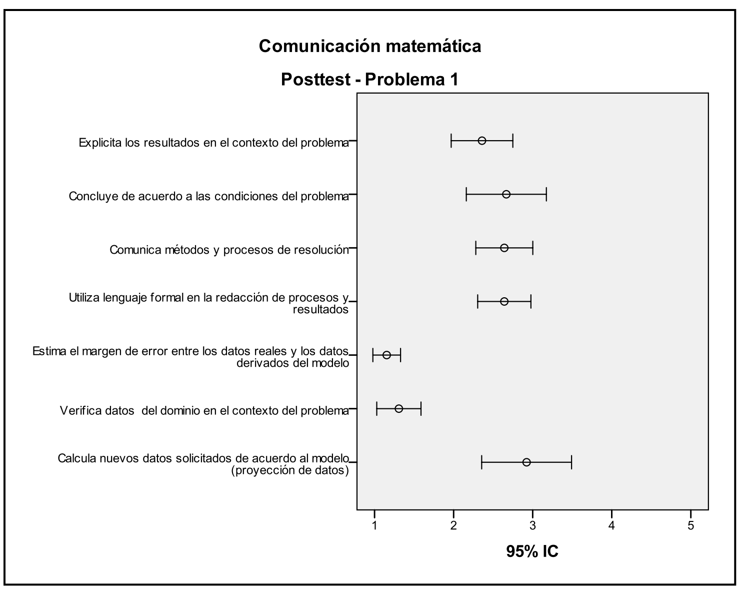


Gráfico 10. Comunicación matemática postest. Probl.1



4.2.2. CAPACIDADES COGNITIVAS PRETEST- POSTEST PROBLEMA 2.

4.2.2.1. Integración de los aspectos conceptuales pretest-postest

Respecto del reconocimiento y del significado de los conceptos en el contexto del problema geométrico, se observa en el gráfico 11 que el alumnado se encuentra en el rango 2 y 1, lo que significa que no reconoce las variables, ni su significado. Asimismo, no es capaz de establecer la relación causal entre ellas. Sin embargo, se puede observar en el gráfico 12, que en el postest, hay un progreso significativo en significado y reconocimiento de variables, ya que la mayoría de los datos se concentran en el rango 3 hacia arriba, es decir, desde regular a muy bueno. Además, hay un leve progreso en establecer una relación entre las variables del problema. No se presentan diferencias en analizar la posibilidad de que los datos conduzcan a formular un modelo coherente con el problema. Lo anterior coloca de manifiesto que, en la resolución de problemas geométricos, es escaso el análisis respecto de los conceptos y significado de éstos antes de dar resolución al problema.

Gráfico 11. Integración aspectos conceptuales pretest

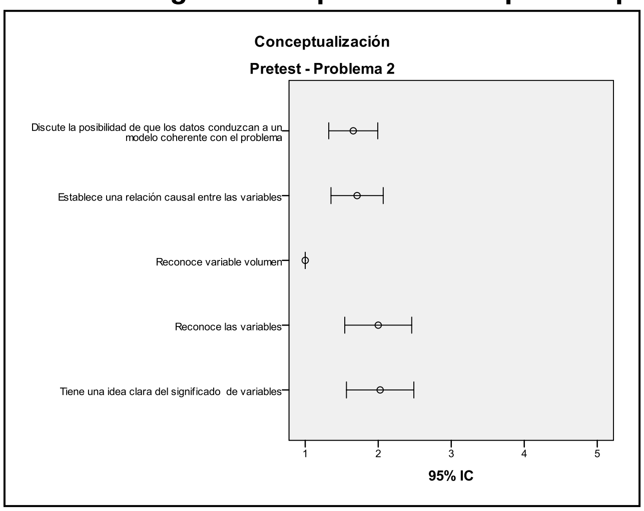
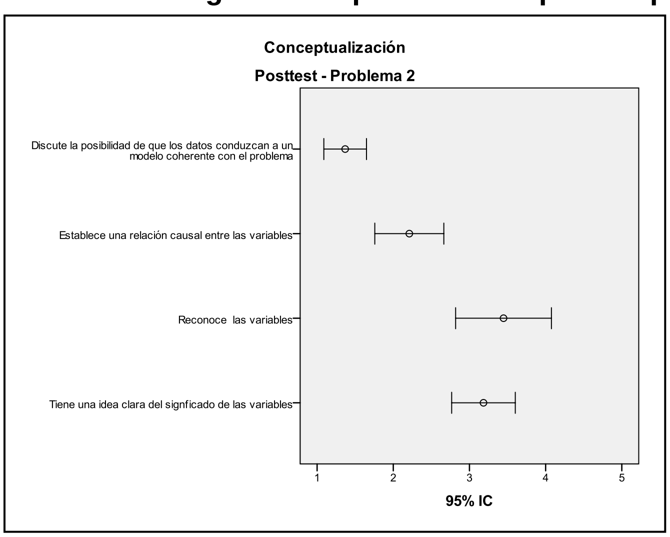


Gráfico 12. Integración aspectos conceptuales postest



4.2.2.2. Integración de los aspectos procedimentales. pretest-postest

Organización de datos condiciones y restricciones

Respecto de la organización de datos, condiciones y restricciones que permiten resolver el problema geométrico, se puede observar en el gráfico 13, que en el pretest, el alumnado de pedagogía, presenta serias deficiencias en la organización de los datos, en establecer hipótesis y la conexión entre los datos del problema, ya que la mayoría de las variables están bajo el rango 2, mostrando que el 100% del alumnado no establece hipótesis, ni representaciones geométricas del objeto de estudio. Sin embargo, si se observa el gráfico 14, se destaca un progreso en la organización de datos, superando el rango 3 (sobre regular) y en el reconocimiento de hipótesis, aunque éstas no alcanzan a superar el rango 3. De igual forma, hay un progreso en representar geométricamente el objeto de estudio, aunque éste se encuentre mal representado, han dado importancia en realizar una representación, concentrándose sus respuestas entre el rango 2 y 3.

Gráfico 13. Organización de datos, condiciones y restricciones pretest

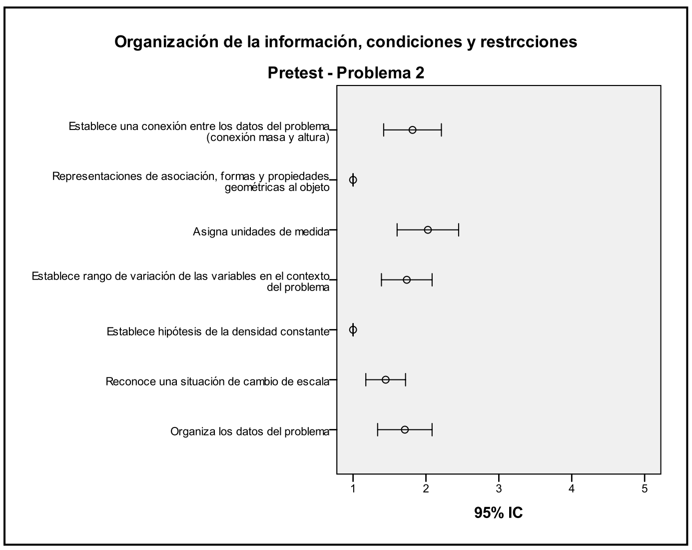
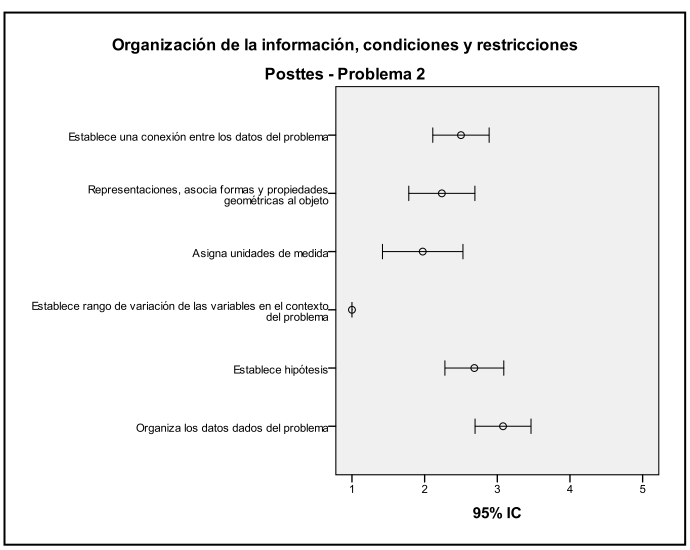


Gráfico 14. Organización de datos, condiciones y restricciones postest



Matematización

Sobre el planteamiento de ecuaciones, el 100% del alumnado se encuentra en la categoría de no contesta (rango 1), sin embargo, en el postest, hay un progreso significativo ya que los rangos de respuesta se concentran en 2, que aunque no son correctas, intentan un planteamiento de las ecuaciones. De igual forma, en la formulación de un modelo en términos matemáticos, hay un progreso en el postest, ya que las respuestas, se concentran entre el rango 2 y 3, es decir, formulan un modelo entre malo y regular, aspecto que en el pretest las respuestas se concentran en el rango 1, es decir, no formulan ningún modelo de acuerdo a la situación geométrica

Gráfico 15. Matematización pretest

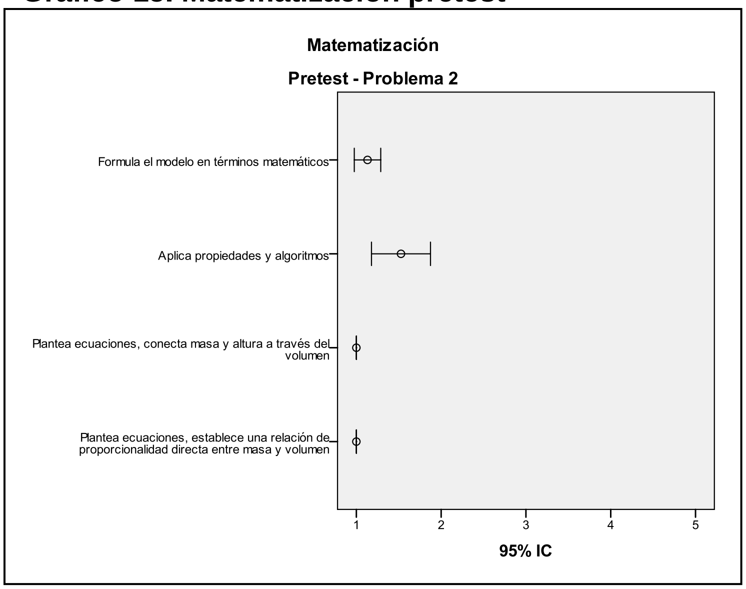
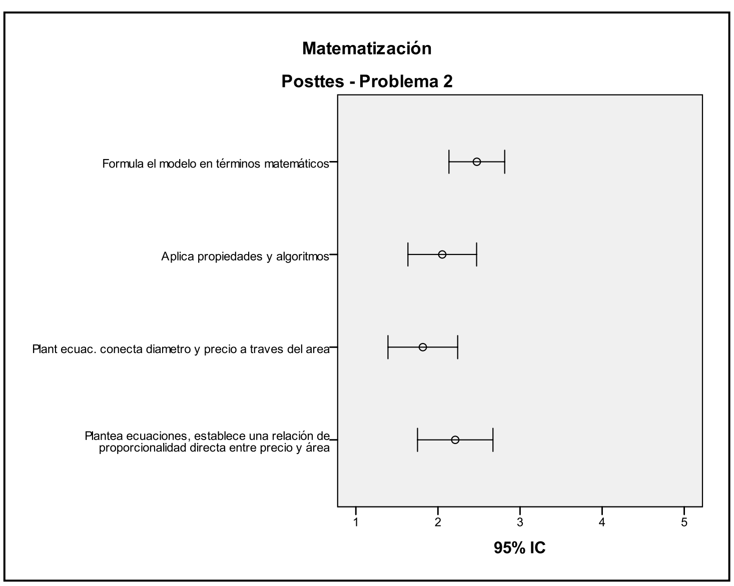


Gráfico 16. Matematización postest



Estrategias generales.

Respecto de las estrategias que utilizan para resolver el problema, se observa en le gráfico 17 que las respuestas del alumnado se concentran en el rango 1, lo que significa que no logran establecer conjeturas que permitan aproximarse al modelo, de acuerdo al contexto del problema. En el postest, aunque los rangos de respuesta se concentran en 2, hay un progreso al establecer conjeturas que permiten dar una aproximación al modelo geométrico, aunque este esté errado, lo que se observa en el gráfico 18.

Gráfico 17. Estrategias generales pretest

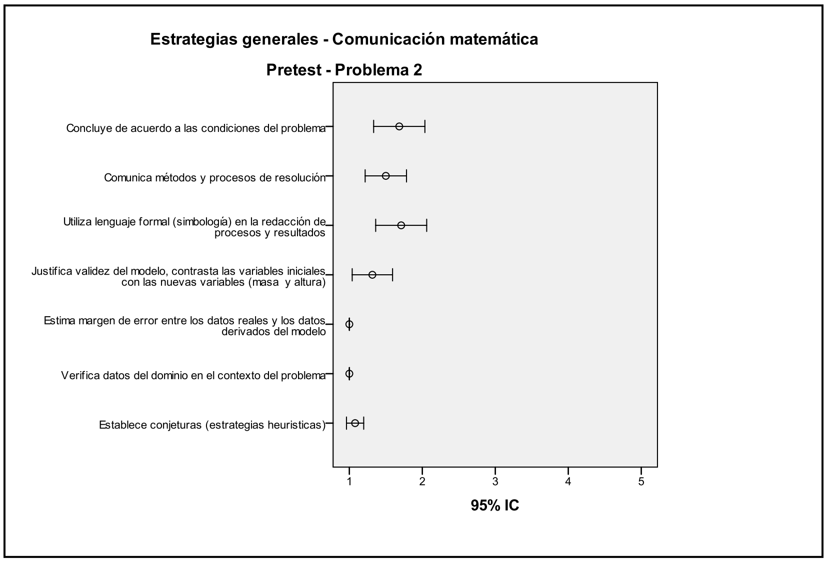
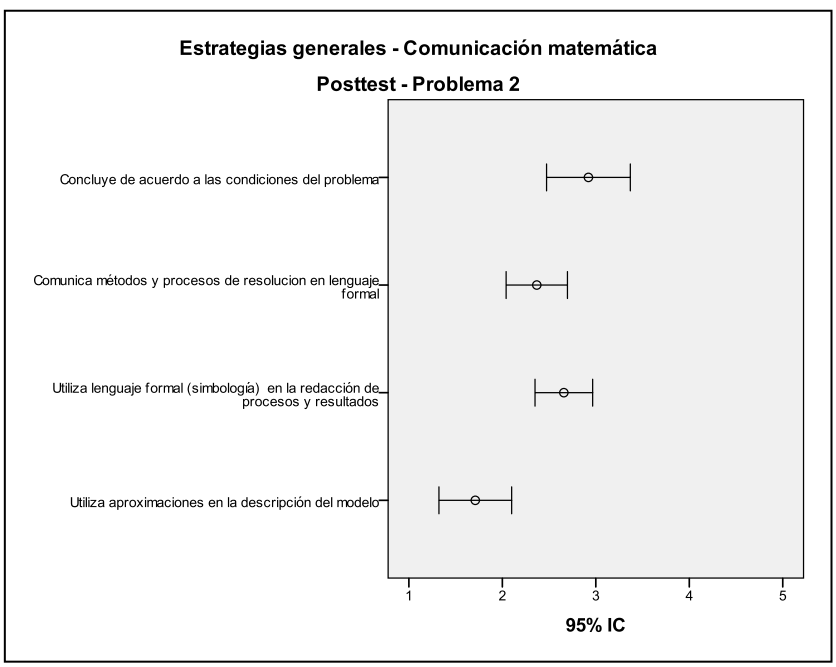


Gráfico 18. Estrategias generales postest



4.2.2.3. Comunicación matemática.

Sobre la comunicación de métodos y procesos y sobre la comunicación de los resultados, se puede observar en el gráfico 19 que el alumnado se concentra entre el rango 1 y 2, lo que significa que la mayoría no contesta o están erradas sus conclusiones. Lo anterior, es consistente con los análisis de la matematización, ya que no pudieron formular un modelo en términos matemáticos. Respecto del lenguaje utilizado, en la comunicación de resultados, los datos se concentran entre el rango 1 y 2, es decir, lenguaje incorrecto desde el punto de vista matemático o no logran redactar resultados. Por otro lado, se observa en el gráfico 20 que en la comunicación de métodos y procesos de resolución, así como en el lenguaje utilizado en la redacción de los resultados, hay un progreso en el alumnado, aunque no superan lo regular.

Gráfico 19. Comunicación matemática pretest

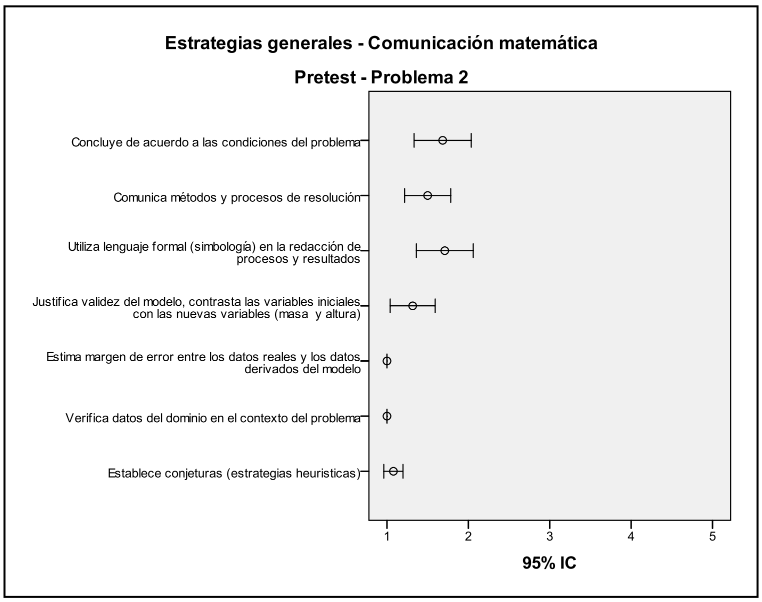
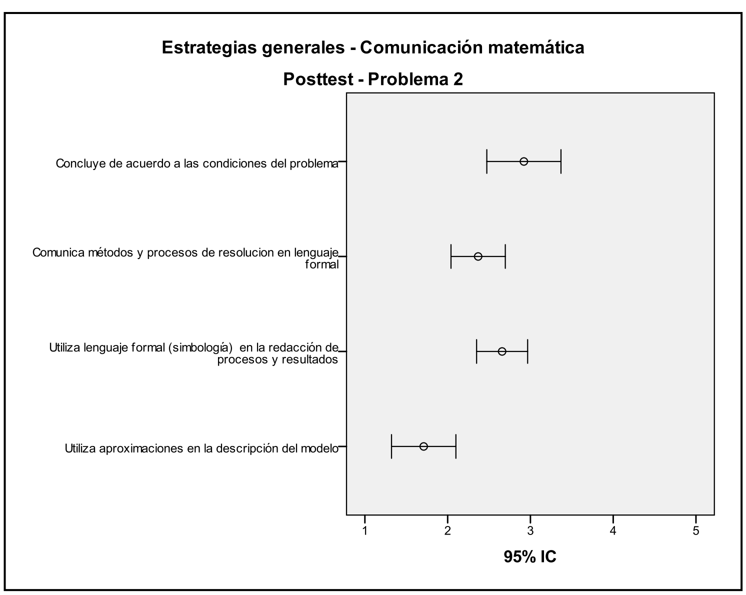


Gráfico 20. Comunicación matemática postest



4.2.3. RESULTADOS Y ANÁLISIS PRUEBA t-STUDENT.

Con el propósito de verificar los cambios significativos que se dieron entre el pretest y postest, respecto de las capacidades cognitivas adquiridas por el alumnado de pedagogía, se realizó una reducción de los datos agrupando los criterios asociados en dimensiones y se realizaron las comparaciones entre el pretest y postest, para cada una de las dimensiones asociadas a los aspectos conceptuales, procedimentales y de comunicación matemática, es decir, conceptualización, organización de datos, condiciones y restricciones, matematización, estrategias generales y comunicación matemática. Estas comparaciones se obtuvieron mediante la prueba t para muestras relacionadas, con un nivel de significación del 5%.

Según se observa en la tabla 3, existe suficiente evidencia para afirmar que se ha producido un aumento significativo (t de tabla= 1.673; valor-p <0.05), en las evaluaciones promedios de las distintas dimensiones, entre el postest y el pretest. Lo anterior coloca en evidencia que un trabajo matemático, basado en la resolución de problemas en contexto de aplicación, a través de la modelización de situaciones permite, al alumnado en formación, superar en un nivel significativo, las dificultades y obstáculos que presentaron al inicio de la experiencia.

Tabla 3: Estadístico de prueba y valor-p para la prueba de comparación de medias, de las distintas dimensiones evaluadas al alumnado de Pedagogía en Matemática.

Prueba de muestras relacionadas

	Diferencias relacionadas		t	gl	Valor-p
	Media	Desviación típ.			
Conceptualización - Posttest - Conceptualización - Pretest	,36342	,75626	2,962	37	,005
Organización de la información - Posttest - Organización de la información - Pretest	,51316	,56001	5,649	37	,000
Matematización - Posttest - Matematización - Pretest	,93474	,62372	9,238	37	,000
Estrategias generales - Posttest - Estrategias generales - Pretest	,73289	,88746	5,091	37	,000
Comunicación matemática Posttest - Comunicación matemática Pretest	,71500	,57585	7,654	37	,000

t observados son superiores a t tabla aprox., donde: $t_{0.975}(37) = 1.673$

4.2.4. ESTUDIO DE CORRELACIONES

Con el propósito de analizar si existe una relación entre las dimensiones, tanto en el pretest como en el postest, para el alumnado de Pedagogía en Matemática, se realizó un estudio de correlaciones que permitieron dar cuenta de la relación existente entre ellas. En la tabla 4, se observa que para las dimensiones medidas en el pretest, se dieron las siguientes correlaciones:

(1) El alumnado que tiene una mayor conceptualización, tiende a realizar una mejor organización de la información, esto es, reconocer y comprender el significado de los conceptos matemáticos en el contexto del problema, tienden a realizar una mejor organización de los datos, estableciendo las condiciones y restricciones del problema.

(2) El alumnado que tiene una mayor conceptualización, tiende a realizar una mejor matematización, es decir a describir las relaciones matemáticas, que interpretan el proceso.

(3) El alumnado que tiene una mayor conceptualización, tienden a realizar mejor comunicación matemática.

(4) El alumnado que tiene una mejor organización de la información, tiende a realizar mejor comunicación matemática.

(5) El alumnado que tiene una mejor matematización, tienden a realizar mejor comunicación matemática.

Tablas 4: Correlaciones para cada una de las dimensiones medidas a los alumnos de Pedagogía en Matemática en el pretest

Correlaciones

		Conceptualización	Organización de la información	Matematización	Estrategias generales	Comunicación matemática
Conceptualización	Correlación	1	,588**	,715**	,186	,799**
	Valor-p		,000	,000	,265	,000
Organización de la información	Correlación	,588**	1	,224	,251	,515**
	Valor-p	,000		,177	,129	,001
Matematización	Correlación	,715**	,224	1	-,017	,618**
	Valor-p	,000	,177		,920	,000
Estrategias generales	Correlación	,186	,251	-,017	1	,131
	Valor-p	,265	,129	,920		,433
Comunicación matemática	Correlación	,799**	,515**	,618**	,131	1
	Valor-p	,000	,001	,000	,433	

**. La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

Respecto del postest, se observa en la tabla 5, lo siguiente:

(1) El alumnado que tiene una mayor conceptualización, tiende a realizar una mejor organización de la información, una mejor matematización, mejores estrategias y una mejor comunicación matemática.

(2) El alumnado que tiene una mejor organización de la información, tiende a realizar mejor matematización, tiende a realizar mejores estrategias y tiende a realizar una mejor comunicación matemática.

(3) El alumnado que tiene una mejor matematización tiende a realizar mejores estrategias y una mejor comunicación matemática

Tabla 5: Correlaciones para cada una de las dimensiones medidas a los alumnos de Pedagogía en Matemática en el postest.

Correlaciones

		Conceptualización	Organización de la información	Matematización	Estrategias generales	Comunicación matemática
Conceptualización	Correlación	1	,662**	,570**	,562**	,746**
	Valor-p		,000	,000	,000	,000
Organización de la información	Correlación	,662**	1	,784**	,536**	,609**
	Valor-p	,000		,000	,000	,000
Matematización	Correlación	,570**	,784**	1	,663**	,675**
	Valor-p	,000	,000		,000	,000
Estrategias generales	Correlación	,562**	,536**	,663**	1	,550**
	Valor-p	,000	,000	,000		,000
Comunicación matemática	Correlación		,609**	,675**	,550**	1
	Valor-p	,000	,000	,000	,000	

**. La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

Por último, se realizó correlaciones entre las dimensiones del pretest y el postest, donde se constató que sólo la comunicación matemática es significativa (valor-p < 0,05), es decir, el alumnado de Pedagogía en Matemática que tiene una mayor comunicación matemática en el pretest, tiende a tener una mayor comunicación matemática en el postest (r=0,376; valor-p=0,020). No se puede afirmar lo mismo para las demás dimensiones (valor-p > 0,05), lo que se observa en la tabla 6.

Tabla 6: Correlaciones para las muestras relacionadas

	Correlación	Valor-p
Conceptualización - Posttest y Conceptualización – Pretest	,240	,146
Organización de la información - Posttest y Organización de la información – Pretest	,309	,059
Matematización - Posttest y Matematización - Pretest	,143	,392
Estrategias generales - Posttest y Estrategias generales – Pretest	-,015	,928
Comunicación matemática Posttest y Comunicación matemática Pretest	,376	,020

4.3. RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL ALUMNADO DE SECUNDARIA.

Para analizar los resultados del alumnado de secundaria, se realizó una prueba t para muestras relacionadas por separado en cada uno de los grupos de trabajo, ya que los cursos eran de diferentes niveles. Los resultados dan cuenta que en los 11 establecimientos, al aplicar la prueba t, los resultados son significativos y altamente significativos, a favor del postest. A modo de ejemplo mostramos en la tabla 7, el grupo 7, que trabajó en el establecimiento PS7.

GRUPO 7.

Tabla 7. Prueba t para muestras relacionadas

Categorías / Variables	**Pretest**		**Postest**		**t-Student**
	Media	SD	Media	SD	
Reconocimiento y significado de los conceptos					
Tiene claridad acerca de la idea de razón trigonométrica.	1,27	0,40	2,96	1,46	***
Reconoce la razón trigonométrica seno.	1,12	0,43	2,23	1,78	***
Reconoce la razón trigonométrica coseno.	1,77	0,45	2,19	1,17	***
Reconoce la razón trigonométrica tangente.	1,23	0,33	2,69	1,46	***
Distingue ángulos de elevación	1,27	0,51	3,88	1,58	***
Organización de la información					
Identifica variables (como ángulos y lados del triángulo).	1,85	0,37	3,46	1,45	***
Realiza un esquema a partir de la lectura del problema	1,31	0,47	3,31	1,44	***
Identifica elementos matemáticos en el esquema.	1,35	0,49	3,23	1,39	***
Matematización					
Relaciona razones trigonométricas.	1,65	0,80	2,23	1,24	**
Utiliza lenguaje matemático (notaciones).	1,73	0,45	2,65	1,06	***
Encuentra una expresión matemática asoc. al prob.	1,46	0,58	2,38	1,13	***
Utiliza algoritmos.	1,15	0,37	3,27	1,64	***
Aplica propiedades.	1,46	0,58	2,27	1,08	***
Despeja ecuaciones.	1,50	0,96	0,51	1,24	***
Calcula las razones trigonométricas.	1,00	0,00	2,92	1,50	***
Estrategias					
Demuestra Teoremas.	1,50	0,71	1,77	1,28	NS
Busca y descubre propiedades en los problemas	1,12	0,33	2,08	0,74	***
Comunicación matemática					
Comunica las soluciones en lenguaje adecuado.	1,42	0,50	2,27	0,87	***
Comunica las soluciones (aritmética, geométrica o algebraica).	1,96	0,20	2,92	0,89	***
Comprueba los resultados.	1,12	3,26	1,88	6,53	***

***** p< 0.01; **: P< 0.05 ; NS: no significativo**

4.4. RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL TRABAJO DE PROYECTOS.

4.4.1. Estudio comparativo de la planificación, organizacion y diseño del alumnado de Pedagogía en la evolución del trabajo de proyectos.

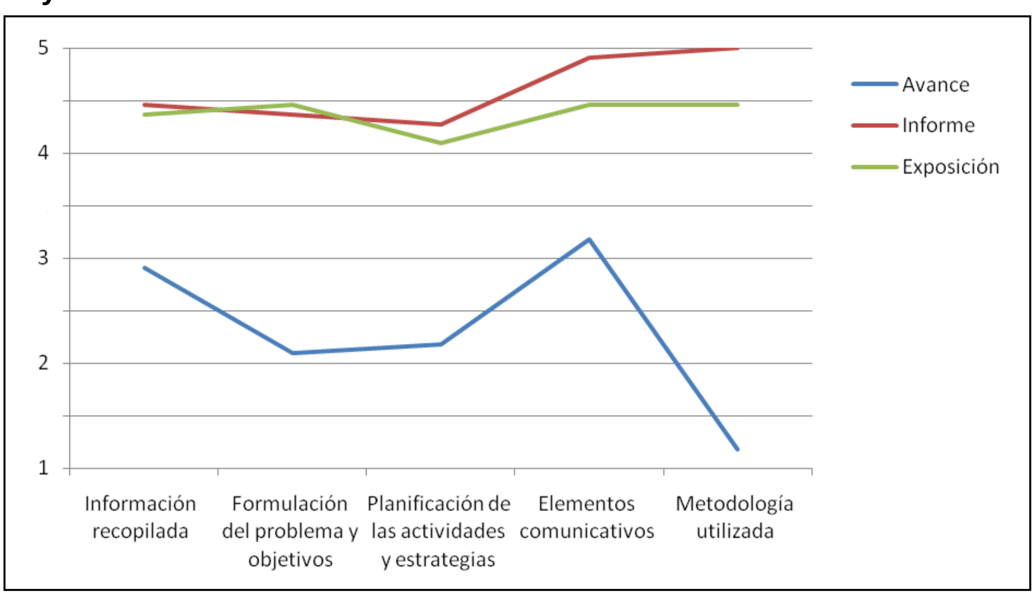
A continuación se presentan las evaluaciones promedios comparativas del alumnado de Pedagogía en Matemática en las dimensiones: Información recopilada, Formulación del problema y objetivos, Planificación de las actividades y estrategias, Elementos comunicativos, y Metodología utilizada. Se observa en la tabla 1, que se produce un aumento en las evaluaciones promedio, especialmente entre el avance 1 y el informe escrito y entre el avance 1 y la exposición oral. Además, se puede concluir que hay un progreso significativo entre el avance 1 y el informe escrito. Esto es muy importante ya que demuestra que el alumnado ha desarrollado capacidades cognitivas, metacognitivas y de formación transversal al final de trabajo. En el gráfico 1, se puede apreciar el progreso real entre el avance y el informe escrito y entre el avance y la exposición oral, colocándolos en otro nivel al final de la experiencia. Por otro lado, se justifica la diferencia entre el informe y la exposición oral, ya que en ésta se prepara un resumen del informe en las cuales se priorizan algunos elementos en la exposición

Tabla 1. Evaluaciones promedio de los grupos en la dimensión planificación

	Información recopilada	Formulación del problema y objetivos	Planificación de las actividades y estrategias	Elementos comunicativos	Metodologí a utilizada
Avance	2,91	2,09	2,18	3,18	1,18
Informe	4,45	4,36	4,27	------	5,00
Exposición	4,36	4,45	4,09	4,45	4,45

Puntajes de las evaluaciones: 1 a 5

Gráfico 1. Progreso en la planificación, organización y diseño del trabajo de proyectos



4.4.2. Estudio comparativo de la planificación y diseño de la secuencia de aula de los alumnos de Pedagogía en Matemática.

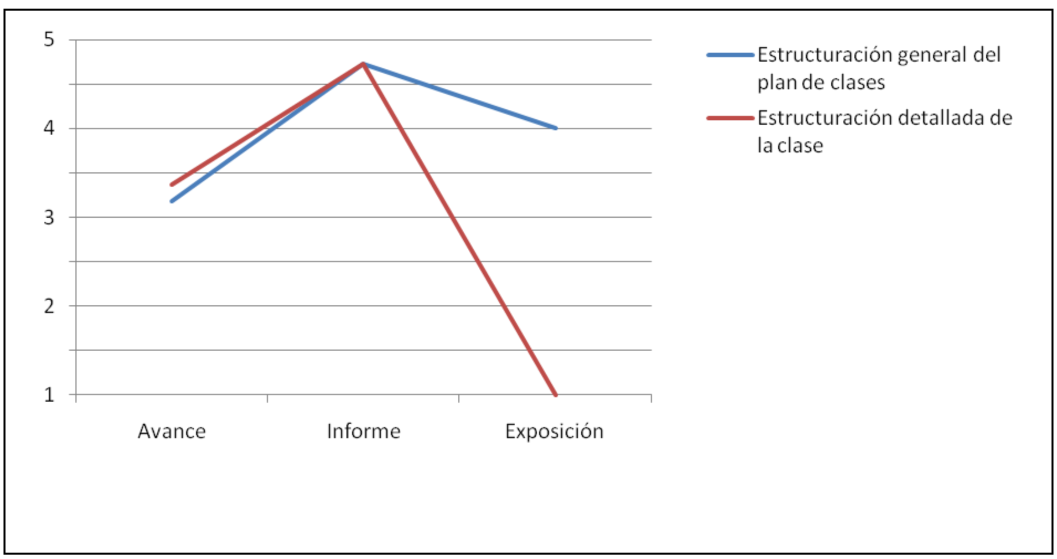
Respecto de la planificación y diseño de la secuencia de aula, donde se analizaron las dimensiones estructuración general del plan de clases y estructuración detallada de las clases, se puede observar que hay un progreso entre el avance y el informe escrito. Sin embargo, se puede observar en la tabla 2 que en la exposición oral el alumnado no da cuenta de la estructuración de las clases, sino más bien privilegia la presentación de otras dimensiones de la investigación, como se puede observar en el gráfico 1.
La gráfica 2, muestra que es en el informe escrito donde mejor se detalla la estructuración de las clases, alcanzando un promedio de 4.73.

Tabla 2. Evaluaciones promedio de los grupos en la categoría planificación y diseño de la secuencia de aula

	Estructuración general del plan de clases	Estructuración detallada de la clase
Avance	3,18	3,36
Informe	4,73	4,73
Exposición	4,00	1,00

Puntajes de las evaluaciones: 1 a 5

Gráfico 2. Evolución en la planificación y diseño de la secuencia de aula



4.4.3. Estudio comparativo del conocimiento matemático y didáctico en el diseño de la secuencia de aula de los alumnos de Pedagogía en Matemática.

Respecto del conocimiento matemático y didáctico en el diseño de los problemas, se observa en la tabla 3 que el alumnado de pedagogía, presentó un progreso en la estructuración de los problemas, ya que subió de regular a muy bueno. De igual forma en las estrategias utilizadas en la solución de los problemas, hubo un progreso de regular a muy bueno.

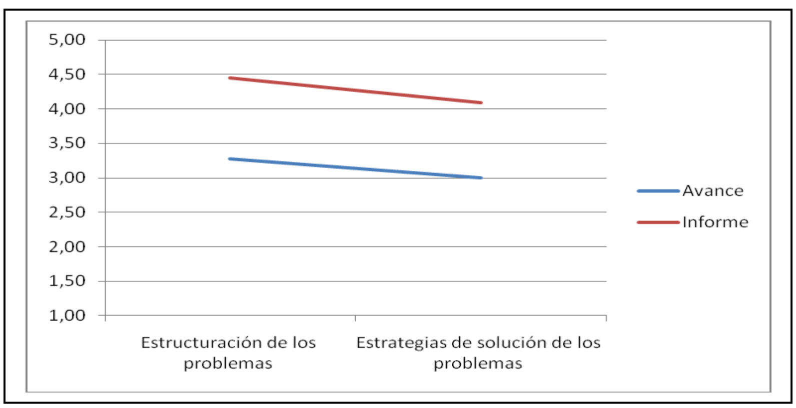
El gráfico 3, muestra que en las estrategias de solución el alumnado de pedagogía tuvo un descenso, ya que no consideró en sus análisis un trabajo más profundo de las posibles dificultades y la forma como tratar los errores que se le pudiesen presentar en el aula. Sin embargo, de igual forma el promedio se encuentra en el rango 4, es decir, muy bueno

Tabla 3. Evaluación promedio del Conocimiento matemático en el diseño de los problemas

	Estructuración de los problemas	Estrategias de solución de los problemas
Avance	3,27	3,00
Informe	4,45	4,09

Puntajes de las evaluaciones: 1 a 5

Gráfico 3. Conocimiento matemático en el diseño de los problemas



4.4.4. Estudio comparativo respecto de la creatividad en el diseño de los problemas elaborados por el alumnado de pedagogía en el informe escrito.

Se muestra en la tabla 4, que el alumnado de pedagogía, es capaz de utilizar la matemática en contextos diferentes, alcanzado un rango promedio sobre 4, es decir, de muy bueno. Sin embargo, en el planteamiento de tareas novedosas los resultados se encuentran en el rango de regular.

Tabla 4. Creatividad en el diseño de los problemas.

Estadísticos descriptivos

	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típ.
Adecuación a contextos diferentes	4	5	4,45	,522
Plantea tareas novedosas	3	5	4,27	,786
N válido (según lista)				

Puntajes de las evaluaciones: 1 a 5

4.4.3. Estudio comparativo de la gestión y autocontrol e información de la intervención del alumnado de Pedagogía en Matemática.

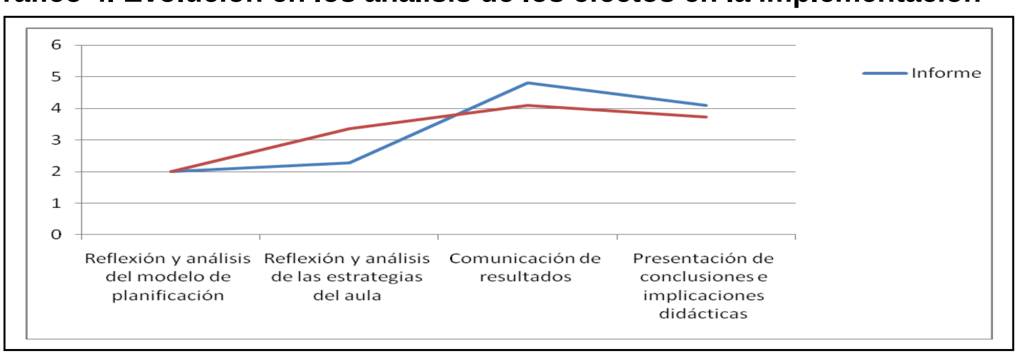
Respecto de la variable análisis de los efectos en la implementación, se observa en la tabla 5, que el alumnado de pedagogía, no realiza, al final de la intervención, una reflexión sobre su modelo de planificación que ha sido implementado en las aulas, de las dificultades y aciertos en el itinerario seguido, donde el promedio alcanzó a 2 de 5, que es el valor máximo, tanto en el informe como en la exposición oral. Asimismo, no presentan una reflexión sobre las estrategias seguidas en el aula, las dificultades y los aciertos, problemas con la metodología y evaluación utilizados, donde no sobrepasa el 2,5 en promedio en el informe. Sin embargo, es destacable la comunicación de resultados, referida a las representaciones utilizadas, la profundidad y precisión en las interpretaciones gráficas y tablas de datos, la precisión en los análisis de resultados y el dominio de las técnicas estadísticas, donde se alcanzan los mayores promedios de los grupos de trabajo en ambas instancias.

Tabla 5. Evaluaciones promedio de los grupos en la variable análisis de los efectos en la implementación.

	Reflexión y análisis del modelo de planificación	Reflexión y análisis de las estrategias del aula	Comunicación de resultados	Presentación de conclusiones e implicaciones didácticas
Informe	2,00	2,27	4,82	4,09
Exposición	2,00	3,36	4,09	3,73

Puntajes de las evaluaciones: 1 a 5

Gráfico 4. Evolución en los análisis de los efectos en la implementación



4.4.4. Capacidades desarrolladas en el proyecto.

Con el propósito de mostrar el progreso que ha obtenido el alumnado de pedagogía en el diseño e implementación del proyecto, problema base de este estudio, se presenta un resumen de las capacidades cognitivas, metacognitivas y de formación transversal que desarrollaron durante el semestre de trabajo.

4.4.4.1. Capacidades cognitivas

En el esquema siguiente, se presenta un cuadro resumen de las capacidades desarrolladas por el alumnado de secundaria en la elaboración del proyecto pedagógico. Para ello, se consideró los rangos de puntajes de 1 a 5.

Tabla 6. Capacidades cognitivas desarrolladas durante el proceso.

	avance	**informe**	**exposición oral**
ORGANIZACIÓN PLANIFICACIÓN Y DISEÑO. -Calidad en la información recopilada - Calidad en la formulación de problema y objetivos -Calidad en la metodología utilizada	**insuficiente** no sobrepasa el nivel de regular	**nivel de progreso muy bueno** sobrepasando el promedio de 4	**nivel de progreso muy bueno**, sobrepasa en promedio el 4
PLANIFICACIÓN Y DISEÑO DE LA SECUENCIA DE AULA. **-**Estructuración del plan de clases -Estructuración detallada del plan de clases	**regular,** alcanza en promedio el nivel 3.	**nivel de progreso muy bueno** Se logra un progreso en la planificación del plan de clases y la estructuración detallada de éste con un promedio de los grupos que sobrepasa el 4.7	**nivel de progreso muy bueno,** rango promedio sobre 4 Se logra sólo un progreso en la estructuración general del plan de clases con un rango promedio sobre 4,7
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO - Estructuración del pan de clases - Estructuración detallada de las clases, tipos de problemas	**regular,** alcanza en promedio el nivel 3.	**nivel de progreso muy bueno** presentan situaciones que potencian el pensamiento matemático y desarrollo de preguntas que	----------------

		permiten anticiparse a las ideas del alumnado de secundaria y estrategias de solución	
ANÁLISIS DE LOS EFECTOS EN LA IMPLEMENTACIÓN			
INFORMACIÓN DE LA INTERVENCIÓN -comunicación de resultados -presentación de conclusiones e implicaciones didácticas	**--------------------**	**Nivel de progreso muy bueno** el rango promedio sobrepasa el 4, se destacan especialmente en la comunicación de los resultados de la experiencia	**nivel de progreso muy bueno** alcanzando el nivel 4 en promedio **regular** en las implicaciones didácticas

4.4.4.2. Capacidades metacognitivas.

Respecto de las capacidades metacognitivas, se evaluó las estrategias seguidas en la planificación respecto de la visión y proyección en el trabajo de proyectos. Se observa en la tabla 5 que el alumnado de pedagogía, tuvo un progreso respecto de la planificación de estrategias, mostrando en la exposición oral un pensamiento estratégico con visión de futuro y proyección de los resultados.
Respecto de la creatividad en el diseño de los problemas, donde debían mostrar una adecuación a los contextos y problemas o tareas fuera de lo tradicional, sobrepasan el 4 en promedio, lo que significa que el alumnado ha mostrado creatividad cuando debe diseñar problemas en contextos de aplicación, entre los que se destacan la modelización geométrica, salidas a terreno y problemas en el contexto del alumnado de secundaria. Sin embargo, los resultados son deficientes respecto del desarrollo de la capacidad de reflexión y análisis y sobre el modelo de planificación y estrategias seguidas en el aula. Este elemento es importante ya que un análisis de la gestión en el aula les permite establecer las mejoras para una nueva intervención. El alumnado de pedagogía no prioriza en su presentación oral un análisis y reflexión en profundidad de lo que ocurrió en el aula. En la tabla 7, se muestra el nivel de progreso en las capacidades metacognitivas durante el desarrollo del proceso en proyecto.

Tabla 7. Capacidades metacognitivas

	avance	informe	exposición oral
ORGANIZACIÓN PLANIFICACIÓN Y DISEÑO. -planificación de las estrategias	**regular** **el rango de promedio no supera el 3**	-------------	nivel de progreso: **muy bueno** (sobre 4) poseen pensamiento estratégico

visión y proyección			respecto de la visión hacia y proyección de los datos.
CREATIVIDAD EN EL DISEÑO DE LOS PROBLEMAS **-**adecuación coherente de los problemas en distintos contextos - diseño de problemas novedosos	**---------------**	**muy bueno** se encuentran en un rango que en promedio sobrepasa el 4	---------------------
ANÁLISIS DE LOS EFECTOS EN LA IMPLEMENTACIÓN			
GESTIÓN Y AUTOCONTROL **-**reflexión y análisis del modelo de planificación	**--------------------**	**insuficiente** rango en promedio 2 no presentan un análisis de los efectos en la implementación	**insuficiente** rango en promedio 2
-reflexión y análisis de las estrategias seguidas en el aula	**--------------------**	**insuficiente** rango en promedio no alcanza a regular	**suficiente** sobrepasa en promedio el rango 2

4.4.4.3. Capacidades transversales.

Dentro de las capacidades importantes de desarrollar en el alumnado de pedagogía, se consideró los elementos comunicativos, especialmente que sepan defender ideas, presentar argumentos, participar en la discusión tanto en grupo, como con el docente y utilizar lenguaje adecuado.

Tabla 8. Capacidades transversales

	avance	**informe**	**exposición oral**
ELEMENTOS COMUNICATIVOS **-**argumentos consistentes -defensa de ideas -participar en discusiones respetando su turno	**regular.** el rango promedio es de 3.	**---------------------**	**nivel de progreso muy bueno** sobrepasando el rango promedio de 4.

4.5. RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL EFECTO PRODUCIDO EN EL ALUMNADO DE SECUNDARIA POR LOS GRUPOS DE PRE-PRÁCTICA.

4.5.1. EFECTO PRODUCIDO EN EL ALUMNADO DE SECUNDARIA POSTEST-POSTEST

Para analizar el efecto producido por los grupos en pre-práctica, en el alumnado de secundaria, se consideró el promedio del postest de cada grupo de trabajo y el promedio en el postest del alumnado de secundaria por curso. Para ello, se tomaron las dimensiones conceptualización, organización de la información, matematización, estrategias generales y comunicación matemática, que son elementos comunes en la resolución de problemas de cualquier tipo. En la tabla 1, se presentan las evaluaciones promedio, para cada dimensión, para el alumnado de secundaria y el alumnado de Pedagogía en Matemática.

Tabla 1. Evaluaciones promedio para cada dimensión de ambos actores.

	Conceptualización		Organización de la información		Matematización		Estrategias generales		Comunicación matemática	
Grupo	Alumnos	Alumnos UCM	Alumnos	Alumnos UCM	Alumnos	Alumnos UCM	Alumnos	Alumnos UCM	Alumnos	Alumnos UCM
1	2,83	2,73	2,76	2,48	2,58	2,64	2,98	2,42	2,38	2,46
2	3,41	2,87	3,35	2,38	3,18	2,29	2,23	2,09	3,08	2,18
3	3,69	2,83	3,26	2,94	4,13	2,72	3,77	2,25	4,12	2,48
4	2,33	3,20	3,12	2,65	2,84	2,75	2,42	2,75	2,92	2,64
5	2,94	2,69	2,54	2,65	1,72	2,36	2,69	2,09	2,26	2,21
6	3,21	2,31	2,89	2,20	3,19	2,24	3,29	2,00	1,63	2,12
7	3,21	2,26	2,89	2,25	3,19	2,28	3,29	2,55	1,63	2,00
8	2,74	2,93	3,14	2,67	3,22	2,82	2,44	2,42	2,33	2,09
9	2,88	2,69	3,21	2,25	3,80	2,29	4,37	2,00	3,25	2,27
10	4,13	2,77	3,93	3,11	4,00	2,90	3,36	2,67	3,45	2,24
11	1,86	2,87	2,18	2,75	2,21	2,68	1,00	1,83	1,66	2,68

Puntajes de las evaluaciones: 1 a 5

4.5.1.1. Identificación de los factores que influyen en la conceptualización medida al alumnado de los diferentes establecimientos

Se considera un modelo regresión lineal múltiple, cuya variable dependiente es el grado de conceptualización obtenida por el alumnado de los colegios, y las variables independientes (factores) corresponden a las 5 dimensiones medidas al alumnado de Pedagogía en Matemática.

Tal como se observa en la tabla 2, la variable que contribuye en la predicción de la conceptualización del alumnado de secundaria, es que alumnado de Pedagogía en Matemática posea una buena evaluación en la Organización de la información e identificación de datos condiciones y restricciones en un problema (valor – p =0,047).

La columna de coeficientes tipificados indica como es la asociación entre las variables y su grado de importancia. Es decir, la conceptualización medida al alumnado de pedagogía, está relacionada de manera inversamente proporcional con la conceptualización medida al alumnado de secundaria (beta= - 0,128), pero no es significativa esta relación.

Tabla 2. Modelo de regresión para la predicción de la conceptualización.

Coeficientes[a,b]

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes tipificados	t	Valor-p
		B	Error típ.	Beta		
1	Conceptualización - Alumnos Ped. en Matemática	-,144	1,161	-,128	-,124	,452
	Organización de la información - Alumnos Ped. en Matemática	2,495	1,372	2,098	1,818	,047
	Matematización - Alumnos Ped. en Matemática	-2,154	2,050	-1,787	-1,051	,167
	Estrategias generales - Alumnos Ped. en Matemática	1,356	,814	1,012	1,667	,084
	Comunicación matemática - Alumnos Ped. en Matemática	-,279	1,158	-,210	-,241	,418

a. Variable dependiente: Conceptualización – Alumnos

b. Regresión lineal a través del origen

4.5.1.2. Identificación de los factores que influyen en la Organización de la información medida al alumnado de secundaria.

Se considera un modelo regresión lineal múltiple, cuya variable dependiente es el grado de Organización de la información obtenida por el alumnado de secundaria, y las variables independientes (factores) son las 5 dimensiones medidas al alumnado de Pedagogía en Matemática.

Se puede observar en la tabla 3, que no existe suficiente evidencia muestral para afirmar que las variables contribuyen con información, para predecir el grado de la organización de la información, medida al alumnado de secundaria (valor-p >0,05).

Tabla 3. Modelo de regresión para la predicción de la organización de la información.

Coeficientes[a,b]

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes tipificados		
		B	Error típ.	Beta	t	Valor -p
1	Conceptualización - Alumnos Ped. en Matemática	,771	,821	,694	,939	,184
	Organización de la información - Alumnos Ped. en Matemática	,837	,971	,709	,862	,222
	Matematización - Alumnos Ped. en Matemática	-,696	1,450	-,581	-,480	,348
	Estrategias generales - Alumnos Ped. en Matemática	,933	,576	,701	1,621	,086
	Comunicación matemática - Alumnos Ped. en Matemática	-,697	,819	-,528	-,851	,228

a. Variable dependiente: Organización de la información – Alumnos

b. Regresión lineal a través del origen

4.5.1.3. Identificación de los factores que influyen en la Matematización medida al alumnado de secundaria

Se considera variable dependiente al grado de Matematización, obtenida por el alumnado de secundaria y las variables independientes (factores), corresponden a las 5 dimensiones medidas al alumnado de Pedagogía en Matemática.

Se observa en la tabla 4, que no existe suficiente evidencia muestral para afirmar que las variables contribuyen con información para predecir el grado de matematización del alumnado de secundaria (valor-p >0,05).

Tabla 4. Modelo de regresión para la predicción de la matematización

Coeficientes[a,b]

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes tipificados		
		B	Error típ.	Beta	t	Valor-p
1	Conceptualización - Alumnos Ped. en Matemática	-,098	1,640	-,085	-,059	,444
	Organización de la información - Alumnos Ped. en Matemática	,479	1,939	,390	,247	,423
	Matematización - Alumnos Ped. en Matemática	,419	2,897	,337	,145	,450
	Estrategias generales - Alumnos Ped. en Matemática	,746	1,150	,540	,649	,250
	Comunicación matemática - Alumnos Ped. en Matemática	-,282	1,636	-,205	-,172	,429

a. Variable dependiente: Matematización – Alumnos

b. Regresión lineal a través del origen

4.5.1.4. Identificación de los factores que influyen en la Estrategias generales medida al alumnado de secundaria.

De igual forma, se considera un modelo de regresión múltiple, cuya variable dependiente son las estrategias generales, utilizadas por el alumnado de secundaria y las variables independientes (factores), son las 5 dimensiones medidas al alumnado de Pedagogía en Matemática.

Se puede deducir de la tabla 5, que la variable que contribuye en la predicción de las estrategias generales del alumnado de secundaria, es que el alumnado de Pedagogía en Matemática posea una buena evaluación en las estrategias generales (valor – p =0,049).

Tabla 5. Modelo de regresión para las estrategias generales.

Coeficientes[a,b]

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes tipificados	t	Sig.
		B	Error típ.	Beta		
1	Conceptualización - Alumnos Ped. en Matemática	-,628	2,001	-,572	-,314	,354
	Organización de la información - Alumnos Ped. en Matemática	1,128	2,366	,968	,477	,330
	Matematización - Alumnos Ped. en Matemática	-1,868	3,535	-1,581	-,528	,316
	Estrategias generales - Alumnos Ped. en Matemática	1,914	1,103	1,456	1,722	,049
	Comunicación matemática - Alumnos Ped. en Matemática	,898	1,997	,689	,450	,349

a. Variable dependiente: Estrategias generales – Alumnos

b. Regresión lineal a través del origen

4.5.1.5. Identificación de los factores que influyen en la Comunicación matemática medida a los alumnos de secundaria.

Se considera un modelo regresión lineal múltiple, cuya variable dependiente es la comunicación matemática, obtenida por el alumnado de secundaria y las variables independientes (factores), son las 5 dimensiones medidas al alumnado de Pedagogía en Matemática.

Se puede observar en la tabla 6, que no existe suficiente evidencia muestral para afirmar que las variables contribuyen con información para predecir el grado de comunicación matemática medida al alumnado de secundaria (valor – p =0,304)

Tabla 6. Modelo de regresión para las estrategias generales

Coeficientes[a,b]

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes tipificados		
		B	Error típ.	Beta	t	Sig.
1	Conceptualización - Alumnos Ped. en Matemática	1,595	1,457	1,609	1,095	,156
	Organización de la información - Alumnos Ped. en Matemática	2,202	1,722	2,092	1,279	,128
	Matematización - Alumnos Ped. en Matemática	-2,545	2,573	-2,385	-,989	,161
	Estrategias generales - Alumnos Ped. en Matemática	,391	1,021	,329	,382	,325
	Comunicación matemática - Alumnos Ped. en Matemática	-,795	1,453	-,675	-,547	,304

a. Variable dependiente: Comunicación - Alumnos

b. Regresión lineal a través del origen

4.5.2. EFECTO PRODUCIDO EN EL ALUMNADO DE SECUNDARIA. PLANIFICACIÓN DEL PLAN DE CLASES VERSUS PROMEDIO EN EL POSTEST

Para efecto del análisis se consideró el promedio de cada grupo de trabajo en la planificación y diseño de la secuencia de aula, el conocimiento matemático en el diseño, y la creatividad por cada grupo de pedagogía y el promedio obtenido por cada grupo en el alumnado de secundaria (ver tabla 1). El propósito era determinar si estas dimensiones influyen en el rendimiento del alumnado de secundaria de los distintos establecimientos. Es decir, a mejor planificación del plan de clases, el alumnado de secundaria mejora su rendimiento. Se puede observar en los 5 gráficos que se presentan, que no hay una relación entre un buen diseño de plan de clases, con el rendimiento del alumnado de secundaria. Tampoco se observa una relación respecto del conocimiento matemático y la creatividad que utilizan los grupos practicantes en el diseño de los problemas.

La mayoría de los grupos del alumnado de Pedagogía, se encuentra en un rango de puntaje promedio sobre 4, en sus evaluaciones, no así los promedios de los grupos de secundaria. Se podría conjeturar que un buen plan de clases con problemas adecuados y creativos no asegura un buen rendimiento del alumnado de secundaria, sino que hay otros factores que están influyendo. Al observar los 5 gráficos, permitió detectar que, en todas las dimensiones hay dos grupos que se destacan por sobre los demás, que son el grupo 3 y 10.
Para reconocer las características de estos grupos, se analizó el promedio de cada grupo en el postest, que dio luces importantes sobre las características de ambos grupos que se analizaron en el apartado 4.5.3.

Tabla 1. Puntajes promedio en las dimensiones del plan de clases versus puntaje promedio en las dimensiones de resolución de problemas.

	Grupo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Alumnado de Pedagogía	Planificación y diseño de secuencia de aula	4,73	4,70	4,78	4,75	4,79	4,83	4,90	5,00	5,00	5,00	5,00
	Conocimiento matemático	4,27	4,20	4,17	4,13	4,14	4,17	4,30	4,25	4,00	4,00	4,50
	Creatividad en le diseño de los problemas	4,36	4,35	4,33	4,38	4,43	4,58	4,80	4,88	5,00	5,00	5,00
Alumnado de secundaria	Conceptualización	2,83	3,41	3,69	2,33	2,94	3,21	3,21	2,74	2,88	4,13	1,86
	Organización	2,76	3,35	3,26	3,12	2,54	2,89	2,89	3,14	3,21	3,93	2,18
	Matematización	2,58	3,18	4,13	2,84	1,72	3,19	3,19	3,22	3,80	4,00	2,21
	Estrategias	2,98	2,23	3,77	2,42	2,69	3,29	3,29	2,44	4,37	3,36	1,00
	Comunicación	2,38	3,08	4,12	2,92	2,26	1,63	1,63	2,33	3,25	3,45	1,66

Puntajes de las evaluaciones: 1 a 5

Grafico 1. Conceptualización

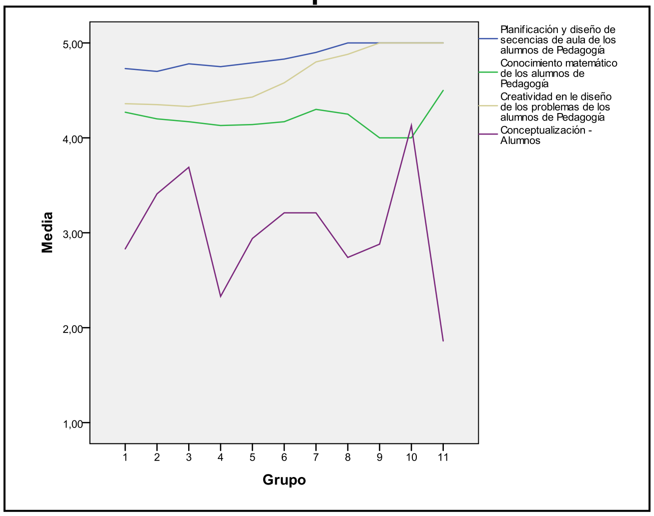


gráfico 2. Organización información

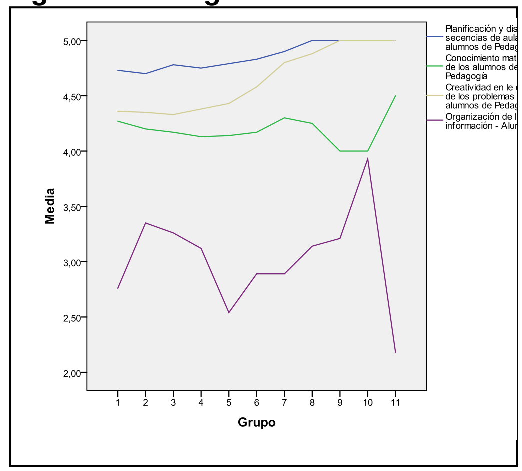


gráfico 3. Matematización

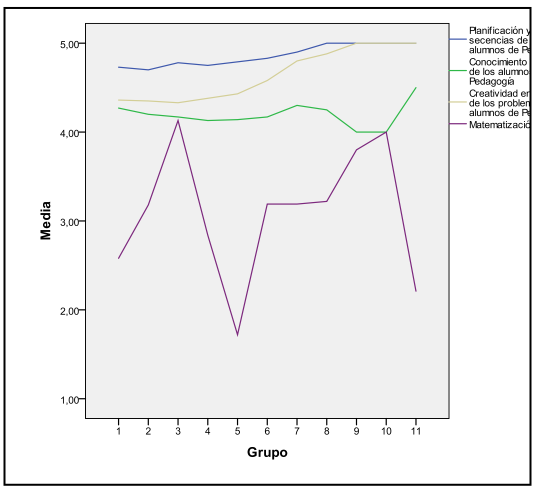


gráfico 4. Estrategias generales

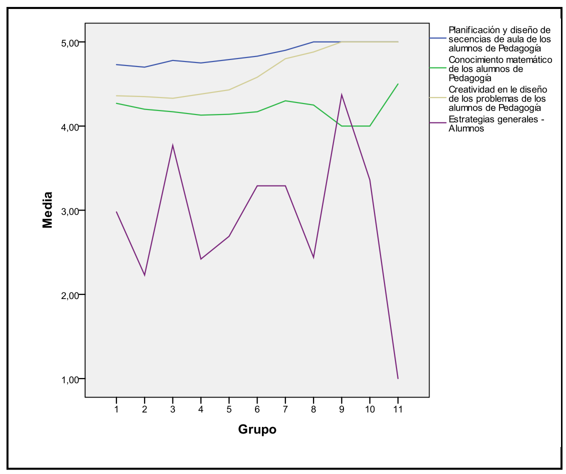
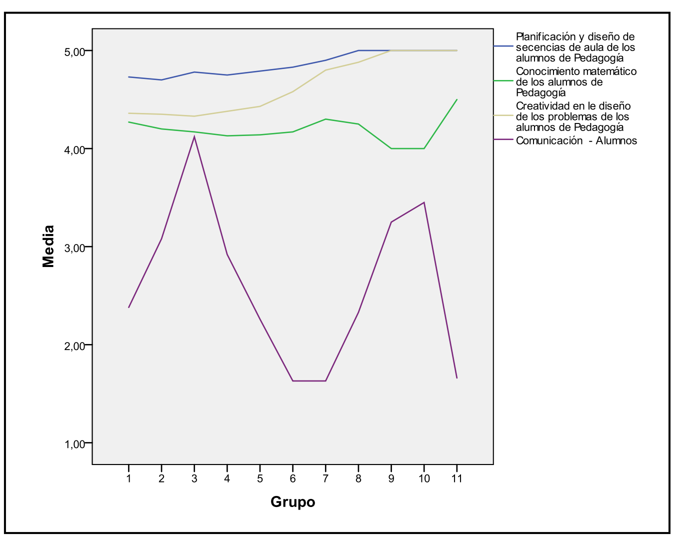


Gráfico 5.comunicación matemática



4.5.3. EFECTO PRODUCIDO EN EL ALUMNADO DE SECUNDARIA. CARÁCTERÍSTICAS DE LOS FUTUROS DOCENTES. POSTEST DE CADA GRUPO VERSUS EVALUACIÓN DEL ALUMNADO DE SECUNDARIA.

Para analizar las variables de los docentes que influyen en un buen rendimiento del alumnado de secundaria, se consideró las evaluaciones promedios de los grupos en el postest, con las evaluaciones promedio de cada curso de secundaria en el postest, donde se concluye que, los grupos que se destacan son el 3 y 10, presentando características comunes en todas las dimensiones (conceptualización, organización, matematización, estrategias y comunicación matemática). Lo anterior coloca en evidencia que el perfil de un futuro docente, tal como se puede observar en el gráfico 1 y 2, para que el alumnado tenga un buen desempeño en la resolución de problemas, depende de algunos factores, que se observan en estos dos grupos.

(1) Una buena estructuración en la planificación de sus clases con conocimiento matemático didáctico y problemas en contextos, como algo prioritario, pero que no es suficiente, como se muestra en los gráficos 1 al 5 del apartado anterior.

(2) Debe poseer un muy buen manejo en la conceptualización, es decir, el reconocimiento y significado de los conceptos en el contexto matemático y del problema.

(3) Poseer una muy buena organización de la información estableciendo condiciones y restricciones.

(4) Un alto nivel de matematización, es decir, descripción de las relaciones matemáticas y aplicación de propiedades y algoritmos.

(5) Buenas estrategias para enfrentarse a la resolución de problemas.

(6) Una muy buena comunicación matemática.

Grafico 1. Diagráma de barra y error comparativo de todas las dimensiones, obtenida por los grupos de Pedagogía en Matemática, en cada uno de los cursos de secundaria.

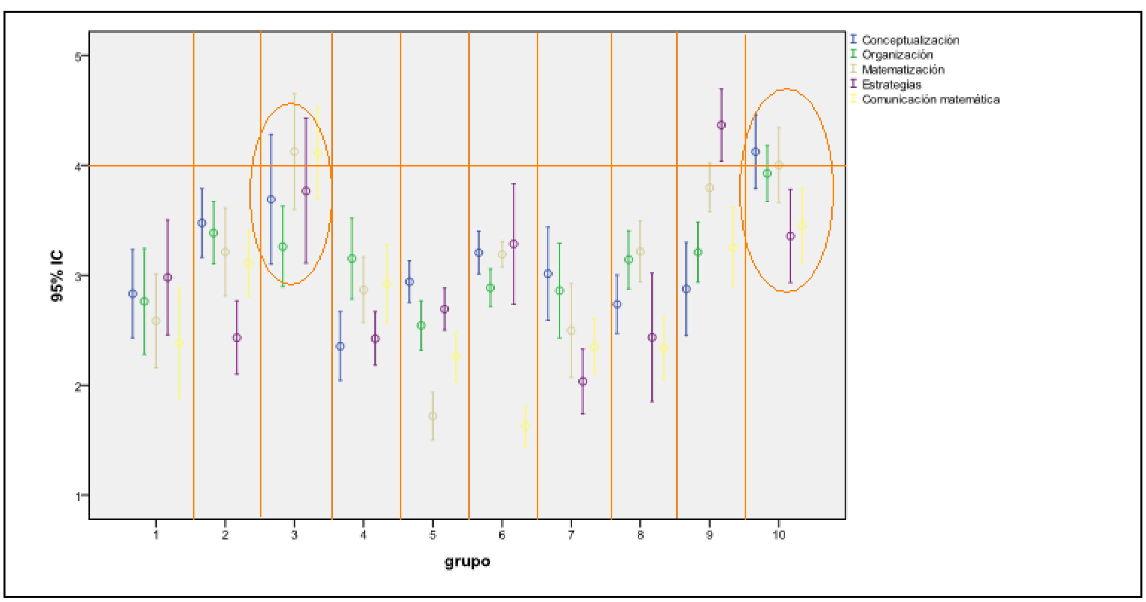
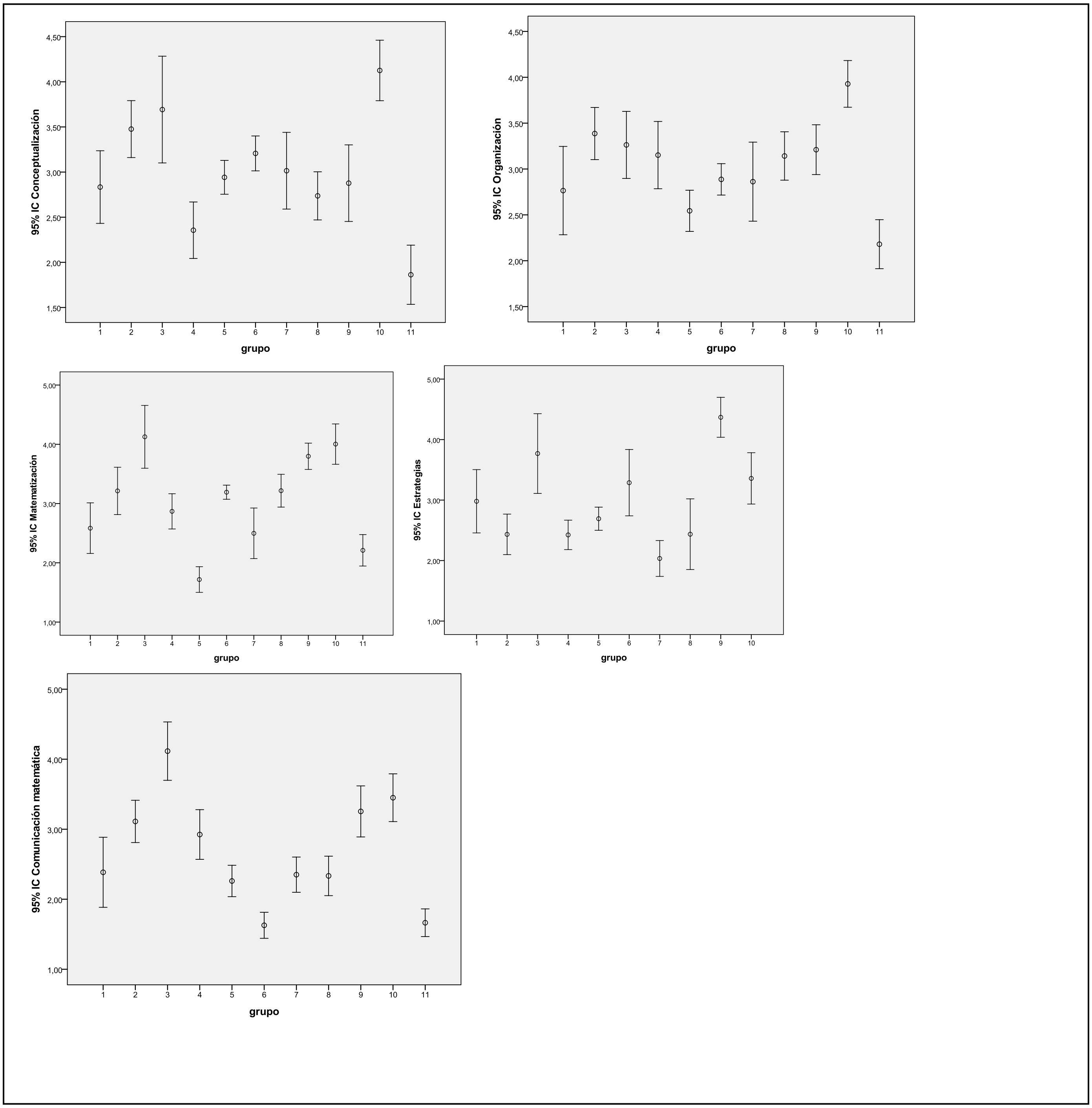


Gráfico 2. Diagráma de barra y error en la dimensión de conceptualización, organización de la información, matematización, estrategias generales y comunicación matemática, obtenida por el alumnado de Pedagogía en Matemática, en cada uno de los cursos de secundaria .



4.6. RESULTADOS Y ANÁLISIS ESTUDIO DE CASO.

4.6.1. ANALISIS DEL PLAN DE CLASES

Grupo 6:
Contenido: Semejanza y Teorema de Thales
Establecimiento PS6
Clases: 6, 7 y 8

DISEÑO DE LA SECUENCIA DE AULA
Estructuración general del plan de clases

Los contenidos de Semejanza y Teorema de Thales forman parte de la Unidad de "Semejanza de Figuras Planas". Esta unidad fue diseñada para su aplicabilidad en un contexto de enseñanza en nueve clases, tres de las cuales corresponden al tratamiento de Semejanzas y Teorema de Thales (clases N° 6, 7 y 8). El tiempo asignado para la clase N° 6 es de una hora pedagógica y de dos horas pedagógicas para las clases N° 7 y 8. En plan de clases se presenta mediante diferentes actividades. A este respecto, la clase N° 6 es de un carácter introductorio e intuitivo en la noción de semejanza. Por su parte, la clase N° 7 se aproxima más a la articulación y aplicación de conceptos y propiedades más formales, donde en especial las habilidades de visualización son esenciales en el reconocimiento de la noción de semejanza y del teorema de Thales en el contexto de problemas. La demostración del teorema de Thales requiere un mayor nivel de razonamiento, esto fue tratado en la clase N° 8.

La estructura general de la unidad está diseñada por un "Plan de Enseñanza", "Objetivos de las Clases", "Directrices de la Enseñanza" y la "Planificación" de cada una de las nueve clases. Además, se realiza un pretest y un postest. Los Objetivos de la Unidad son coherentes con los conceptos, su tratamiento y nivel de conceptualización del alumnado de segundo año de Educación Media.

1. <u>OBJETIVOS DE LA UNIDAD:</u>

- Desarrollar técnicas de elaboración de modelos de situaciones reales a partir de las propiedades de los triángulos para realizar aprendizajes eficaces y autónomos.
- Conocer la existencia e importancia de figuras semejantes en la vida cotidiana, con el propósito de encontrar regularidades de tipo algebraico y/o geométrico, fomentando actitudes constructivas para su propio desarrollo intelectual, físico y emocional.
- Analizar regularidades y propiedades geométricas en casos concretos para potenciar la capacidad de observación y de abstracción.
- Promover las instancias donde se desarrolle la capacidad de razonamiento, de manera deductiva e inductiva y la capacidad de argumentación cuando emiten conjeturas sobre los contenidos matemáticos, con el fin de alcanzar un alto nivel de pensamiento abstracto y/o concreto para la resoluciones de problemas de la vida cotidiana, por medio de la matemáticas, demostrando y aplicando el Teorema de Thales.
- Apreciar la Geometría como una contribución al patrimonio de la humanidad que ha permitido a esta realizar avances científicos y técnicos importantes.

Los modelos de planificación para las clases son, por un lado el Modelo de Van Hiele, que permite captar conocimientos de forma intuitiva hasta la deducción formal de proposiciones y propiedades y por otro lado, el Modelo Japonés, con el propósito de promover las instancias de participación y reflexión en el alumnado, reflexión muy necesaria en el aprendizaje de la matemática:

> *El modelo de Van Hiele planifica las acciones en curso que se desarrollan en la unidad didáctica de semejanzas de figuras planas, permitiendo el desarrollo y perfeccionamiento de los niveles de conocimiento que, en nuestro caso, se agrupa desde el nivel 1 hasta el 4 de manera jerárquica.*
> *También, nos apoyaremos en el Modelo Japonés de enseñanza, que promueve las instancias de participación y reflexión de los estudiantes en el desarrollo de las clases, a partir del juego y de la acción exploratoria en los contenidos a enseñar.*
> El "Comportamiento de los Alumnos" responde a tres ejes: Conceptual, Procedimental y Actitudinal, los cuales expresan el tipo de comportamiento que se espera del alumnado de este nivel de enseñanza frente a este tipo de conceptos de índole geométrico.
> *Esperamos que el alumno domine la proporcionalidad entre las medidas de segmentos homólogos o correspondientes entre dos figuras a diferente escala.*
> *Se espera que el alumno relacione los conceptos de paralelismo, perpendicularidad y ángulo, con el Teorema de Thales y los criterios de semejanza de triángulos.*
> *Utilización del teorema de Thales en la división de segmentos de partes iguales o proporcionales y en el cálculo de longitudes y distancias.*
> *Comprobación de la semejanza cuando utilizamos triángulos en posición de Thales.*
> *Utilización de los criterios de semejanza de triángulos para detectar situaciones de semejanza en triángulos, o resolver problemas geométricos y de situaciones reales.*
> *El alumno presenta inquietudes sobre su entorno que promueva la utilización de sus conocimientos.*
> *Valoración de las aplicaciones de la semejanza en el cálculo de distancias.*
> *En la realización de actividades, los alumnos demuestran una actitud tolerante ante las sugerencias de sus pares y el profesor.*
> *Desarrollen el hábito de argumentación o de justificación cuando realizan conjeturas.*

La asignación y distribución de los tiempos de toda la unidad, es coherente con la planificación de los diferentes contenidos de la misma, incluyendo el pretest y postest.
Los objetivos generales de las clases están clasificados en cuatro ejes: Interés/Actitud, Pensamiento/juicio, Destrezas Matemáticas y Conocimiento Matemático, los cuales son coherentes con los objetivos de la Unidad. Por destacar algunos, señalemos en relación al interés y Actitud:

> *"El alumno manifiesta interés por el estudio de figuras semejantes, de manera independiente, cumpliendo con las actividades realizadas por el profesor en el aula, favoreciendo el fortalecimiento de valores transversales, tales como: la perseverancia frente a las dificultades en el desarrollo de sus aprendizajes."*

En relación al Pensamiento matemático:

> *"El alumno realiza conjeturas ante sus pares y/o profesor sobre el contenido, por medio del desarrollo del pensamiento inductivo-deductivo para la demostración del Teorema de Thales, expresando una actitud crítica al enfrentar situaciones problemáticas que surgen en la actividad a realizar en clases."*

En relación a las destrezas matemáticas

"Organiza la información, identificando los datos expresados en el problema, realizando operaciones aritméticas para su resolución, tales como los cálculos de distancia reales en mapas y planos, a partir de una cierta escala.
Formula y comprueba conjeturas sobre el Teorema de Thales, determinando de forma correcta el valor de la incógnita en los ejercicios de aplicación."

Y en relación al conocimiento matemático

"Utilizar los conceptos, definiciones y simbología matemática que permitan resolver problemas relacionado con el Teoremas de Thales, semejanzas de polígonos y homotecias.
Aplicación del Teorema de Thales a problemas de la vida real."

El tipo de razonamiento inductivo-deductivo, junto con el proceso de resolución de problemas, forman las directrices de enseñanza para la Unidad, las cuales por un lado, potencian el plan de clases en cuanto a su puesta en acción y por otro lado, mantienen una completa coherencia con los objetivos de cada clase:

Desarrollo del razonamiento inductivo-deductivo	Promueve el razonamiento y el pensamiento matemático. Guiar a los alumnos a que ellos descubran los conceptos que involucra la unidad. Aplicación de los conocimientos en diversos problemas que están presentes en la vida cotidiana.
Comportamiento y actitudes que promuevan la autoestima y la sana convivencia en los alumnos.	Promover la participación activa de los alumnos en actividades que permitan la comunicación y exposición de sus ideas, en un ambiente grato y sin miedo a equivocaciones por parte de los alumnos.

El plan de clases contempla una "Pauta de Evaluación" transversal al contenido de toda la Unidad de "Semejanza de Figuras Planas", en la cual se encuentran criterios particulares para la evaluación del desarrollo de las clases en relación a Semejanza y Teorema de Thales. La pauta mide los aspectos Cognitivos, Metacognitivos y Transversales.

Estructuración detallada del plan de clases.

En la planificación de cada una de las clases los objetivos son presentados con claridad y precisión. A este respecto, podemos citar los objetivos de la clase N° 7 y 8

OBJETIVOS DE LA CLASE:

- Conocer y aplicar los criterios de semejanzas, con el fin de distinguir si dos triángulos cualquiera son semejantes o no, con el fin de aplicar el Teorema de Thales para la resolución del problema.
- Aplicar el Teorema de Thales en la resolución de problemas de la vida cotidiana, permitiendo su comprensión y posteriormente, su demostración
- Fomentar el razonamiento matemático que permite distinguir si una conjetura expuesta por el profesor y/u otro compañero sea falsa o verdadera, fomentando la conexión de los conceptos que intervienen en la unidad y promueve espacio para el análisis lógico-matemático de las proposiciones de los alumnos.

OBJETIVOS DE LA CLASE:

- Demostrar el Teorema de Thales, utilizando los criterios de semejanza de triángulos, proporcionalidad, paralelismo y perpendicularidad, con el fin de desarrollar el pensamiento matemático de los alumnos, incentivar al debate, dialogo y comunicación que tienen los alumnos con sus compañeros y adquirir actitudes que fomenten la perseverancia constante, la reflexión y el dialogo entre los estudiantes, contribuyendo al mejoramiento constante de nuestra sociedad
- Identificar hipótesis y tesis de las proposiciones matemáticas, logrando diferencias y funciones de las hipótesis y tesis, con el fin de que el alumno demuestre o rechace correctamente una proposición matemática.
- Afirmar correctamente si una conjetura dada por el profesor, otro alumno u el mismo alumno, de acuerdo al correcto uso de la hipótesis y la tesis, con el fin de fomentar los momento de debate y pensamiento deductivo del alumno, con el fin de crear practicas constantes que aumente o perfeccionen mis conocimientos referentes a matemáticas y otros ámbitos del ser humano.

En coherencia con estos objetivos se entrega un detalle del plan de clases con los tiempos necesarios, el rol de los estudiantes y el rol del profesor para cada una de las cuatro etapas que comprende la resolución de problemas (comprensión del problema, desarrollo de una solución por sí mismo, progreso a través de la discusión y conclusiones). Este detalle muestra que la distribución de los tiempos asignados y los roles de estudiantes y profesores son adecuados y se encuentran en completa coherencia con los objetivos propuestos para la clase. Se destaca en especial el detalle del plan de clases de la clase de la demostración del teorema de Thales (clase 8):

PLAN DETALLADO DE LA CLASE:

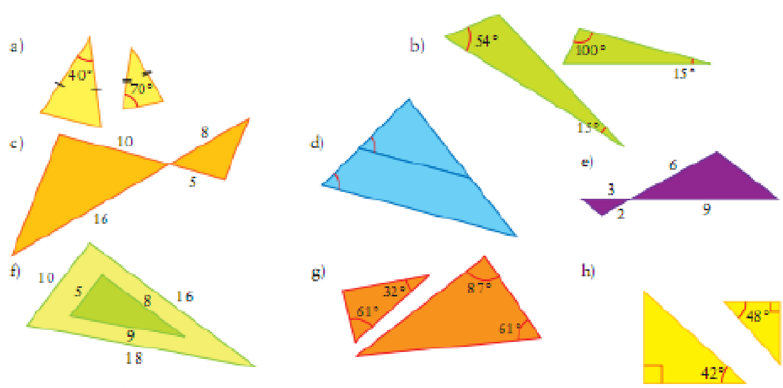
	Tiempo	Rol del grupo y/o alumno	Rol del profesor
Comprensión del problema	5 minutos	Comprende el enunciado del teorema, identificando hipótesis de tesis. El alumno va representado a través de un dibujo el enunciado del Teorema de Thales.	Ayuda al alumno al comprender el enunciado del teorema.
Desarrollo de una solución por si mismos	60 minutos	El alumno realiza deducciones, conjeturas y afirmaciones a partir de las hipótesis. Justifica el procedimiento utilizado para la demostración de las proposiciones.	Ronda por los diferentes puestos verificando que las deducciones y conjeturas realizadas por los alumnos sean correctas. Orienta a los alumnos que no pueden iniciar la demostración, dando pistas para que el identifique la hipótesis de la tesis y así construir su demostración.
Progreso a través de la discusión	20 minutos	Los alumnos discuten en grupo sus demostraciones, identificando regularidades y/o errores que puedan tener en el procedimiento.	El profesor se dirige a cada grupo para que le expliquen y justifiquen brevemente el procedimiento utilizado
Conclusión	5 minutos	El alumno comprende que un problema puede tener más de una solución. El alumno se percata que una representación gráfica del problema puede mejorar su comprensión.	Escucha las conclusiones obtenidas por los alumnos, preguntando por qué lo realizó de esa forma y no de otra.

La planificación de cada clase se realiza por medio de actividades, las cuales son afines al nivel de conocimientos del alumnado. La organización y diseño de estas actividades es adecuada, clara y coherente con los objetivos de la clase. En ellas se incluyen problemas para que los estudiantes trabajen y desarrollen, apoyadas con elementos: gráficos, de la

geometría euclidiana, problemas de aplicación y de la vida cotidiana; todos ellos con elementos cercanos y conocidos por el alumnado de este nivel de enseñanza, lo que permite una mejor socialización para el desarrollo de las actividades. Las consignas dadas en cada actividad son claras y con un vocabulario adecuado y accesible al nivel del alumnado.
Por citar algunas actividades:

Un problema de la Actividad Clase N° 6:

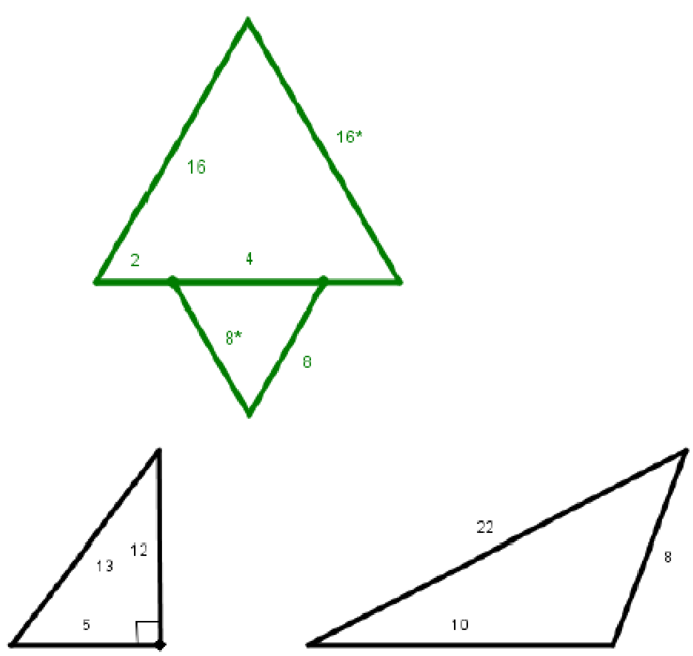
<u>**Problema 2:**</u> Identifica cuales de las siguientes figuras son o no semejantes y por qué.



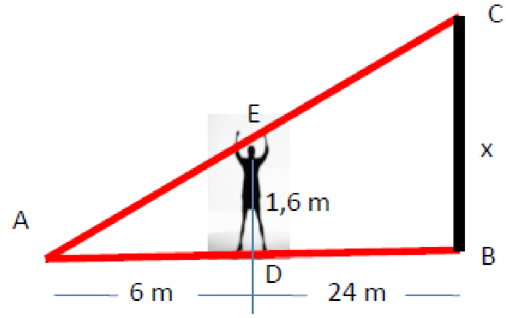
Actividades Clase N° 7:

PROBLEMA 1:

Distinga y argumente si las siguientes figuras son o no semejantes.

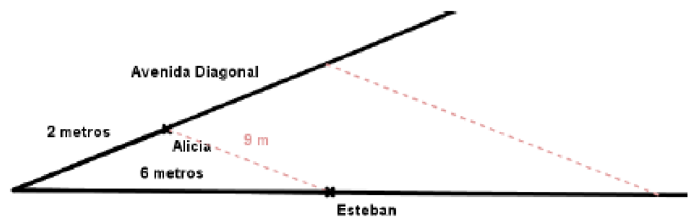


Problema 2: Para calcular la altura de un poste, un niño de 1,6 m de estatura se para bajo el Cable que lo sujeta a tierra, como se ilustra en la figura. Él tomó las medidas que aparecen indicadas. Ayúdelo a realizar lo necesario para cumplir con su propósito.



Problema 4:

Esteban y Alicia son pololos que se juntan en el Plaza de Armas de la ciudad de Talca (Ver figura). Después de juntarse, Esteban y Alicia se dirigen hacia sus casas. Alicia camina hacia la Avenida Diagonal y Esteban en la avenida 1 poniente. Por cada minuto, Alicia camina 2 metros y Esteban 6 metros. Si a los dos minutos la distancia entre Alicia y Esteban son de 9 metros, ¿Cuál es la distancia que hay entre Alicia y Esteban a los 5 minutos?



Actividad Clase N° 8:

Problema 1:

Demuestre el Teorema de Thales:

"Si se cortan varias rectas paralelas por dos rectas transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de los correspondientes de la otra."

Las actividades tienen preguntas dirigidas, pero al mismo tiempo permiten al alumnado plantearse otras interrogantes creando sus propios resultados y producciones. Las herramientas técnicas y uso de TIC´s están presentes y al alcance del alumnado (regla, compas, regla, computador, software geométricos).

El plan de cada clase entrega las posibles dificultades del alumnado, pero no se describen las posibles acciones a considerar por parte del profesor (alumnos en práctica), en caso que algunas de estas dificultades lleven a obstaculizar el desarrollo de la clase y el logro de los objetivos. En relación a esto, es conveniente revisar la realización de la propia clase, para observar en qué forma fueron enfrentados estas posibles dificultades u otras.

Entre las posibles dificultades, se presentan las que corresponden a la clase 7 y 8:

LAS POSIBLES DIFICULTADES:

Dificultades y obstáculos del alumno
No saber utilizar correctamente los criterios de semejanza de triángulos.
No plantear de manera correcta la ecuación, para determinar las distancias y alturas.
Tiene dificultad al resolver una ecuación de primer grado.
No establece correctamente la proporción de los segmento.

LAS POSIBLES DIFICULTADES:

Dificultades y obstáculos del alumno
No identificar las hipótesis del Teorema de Thales.
No saber utilizar las hipótesis para deducir proposiciones.
No relaciona las hipótesis con los contenidos anteriores, como paralelismo, Perpendicularidad y proporcionalidad.
No sabe explicar y justificar las conjeturas realizadas.
Tiene dificultades para concluir la demostración.
No puede diferenciar hipótesis de tesis.

Como estrategia de enseñanza, se presenta el trabajo en grupo con tiempos adecuados. Esto permite la discusión entre los miembros de cada grupo, incentivando la creatividad, argumentaciones fundamentadas y comunicación matemática y a posterior presentar en el pizarrón las conclusiones del grupo para socializar con los otros grupos.

CONOCIMIENTO MATEMATICO/DIDACTICO

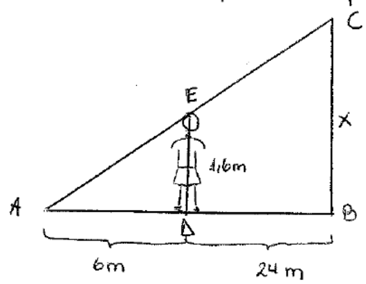
Estructuración de los problemas

Cada actividad es acompañada de un desarrollo de los problemas. Este desarrollo es realizado por el alumno en práctica a cargo de la clase, por lo que se trata más bien de un desarrollo experto que de un posible desarrollo por parte del alumnado. No se entregan posibles respuestas y desarrollos por parte del alumnado.

A continuación se presentan las soluciones de tres problemas por parte del alumno en práctica, que corresponden a problemas de las actividades de las clases 7 y 8:

Desde el punto de vista matemático, las actividades planteadas y el propio plan de clases fomentan y potencian el pensamiento matemático (en contexto geométrico y algebraico), búsqueda de regularidades y articulación de conocimientos anteriores. Además, una de las actividades (demostración del teorema de Thales) requiere un razonamiento más abstracto y formal, reconocimiento, aplicación y articulación de las hipótesis y de los conocimientos previos.

Problema (2): Para calcular la altura de un poste, un niño de 1,6m de estatura se para bajo el cable que lo sujeta a tierra, como se ilustra. en la figura. Él tomó las medidas que aparecen indicadas. Ayúdelo a realizar lo necesario para cumplir con su propósito.



A través de la imagen podemos decir que la estatura del niño es 1,6 metros, además la distancia entre A hasta el niño es 6 metros y la distancia entre A y el poste es 30 metros; pues:

$$30\,m = 6m + 24\,m \quad \text{con} \quad m = \text{metros.}$$

Aplicando Teorema de Thales se tiene:

$$\frac{6}{1{,}6} = \frac{30}{x}$$

multiplicando y despejando x: $6x = 30 \cdot 1{,}6$

$$6x = 48$$
$$x = \frac{48}{6}$$
$$x = 8m$$

Por lo tanto, El poste mide 8 metros.

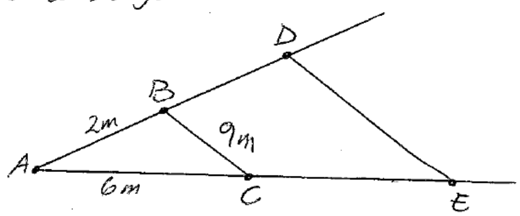
Verificando: $\frac{6}{1{,}6} = \frac{30}{8}$

$$\frac{6}{1{,}6} = 3{,}75 \quad \wedge \quad \frac{30}{8} = 3{,}75$$

$$\therefore \quad \frac{6}{1{,}6} = \frac{30}{8} = 3{,}75$$

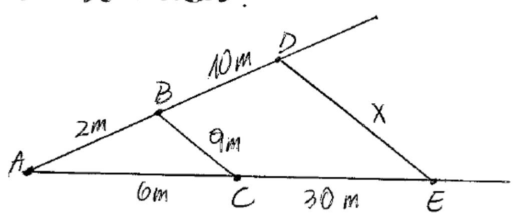
Por lo tanto, se ha verificado que el poste mide 8 metros.

PROBLEMA 4: PRIMERO IDENTIFIQUEMOS CON PUNTOS LA SITUACIÓN EN EL DIBUJO.



COMO ALICIA CAMINA POR MINUTO 2 METROS, EN 5 MINUTOS AVANZA 10 METROS, POR LO TANTO, EN EL DIBUJO EL SEGMENTO $\overline{BD}$ MIDE 10 METROS.

POR OTRO LADO ESTEBAN POR MINUTO CAMINA 6 METROS Y EN 5 MINUTOS AVANZA 30 METROS, POR LO TANTO, EN EL DIBUJO EL SEGMENTO $\overline{CE}$ MIDE 30 METROS.



AHORA UTILIZANDO EL TEOREMA DE THALES PODEMOS OBTENER LA SIGUIENTE PROPORCIÓN.

$$\frac{6m}{9m} = \frac{36m}{X}$$

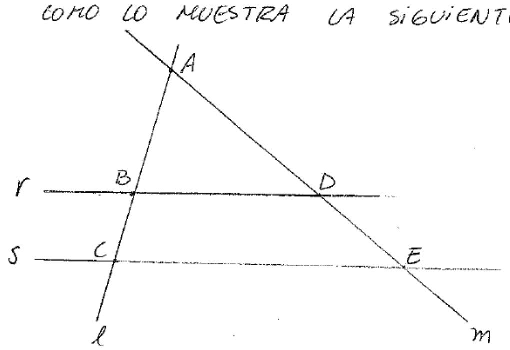
$$6X m = 36m \cdot 9m$$

$$X = 54m$$

POR LO TANTO, LA DISTANCIA QUE HAY ENTRE ESTEBAN Y ALICIA A LOS 5 MINUTOS ES DE 54 m.

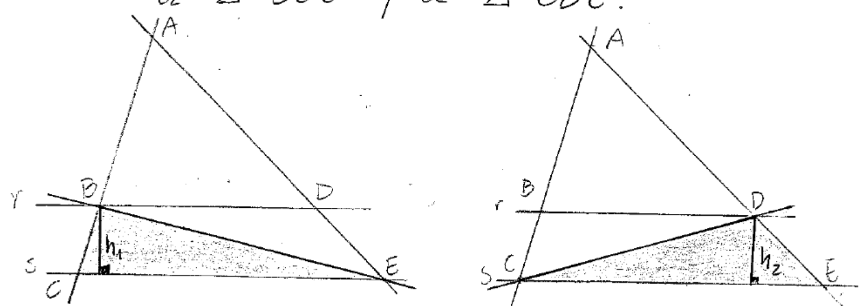
PROBLEMA 1: DEMOSTRAR EL TEOREMA DE THALES.

SEAN r y s DOS RECTAS PARALELAS y l, m, DOS RECTAS TRANSVERSALES. SEAN A, B, C, D y E LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN DE LAS RECTAS, COMO LO MUESTRA LA SIGUIENTE FIGURA:



POR DEMOSTRAR: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DE}$

PRIMERO TRACEMOS LAS RECTAS QUE PASAN POR LOS PUNTOS B, E y C, D, RESPECTIVAMENTE.
DE ESTA MANERA HEMOS FORMADO DOS TRIÁNGULOS, EL ΔBCE y EL ΔCDE.



EL ÁREA DEL ΔBCE ES IGUAL AL ÁREA DEL ΔCDE. ESTO ÚLTIMO ES MUY FÁCIL DEMOSTRARLO. SI NOS FIJAMOS

EN LA FIGURA HEMOS TRAZADO UNA ALTURA EN CADA TRIÁNGULO. h_1 CORRESPONDE A LA ALTURA DEL TRIÁNGULO CBE TRAZADA DESDE EL VÉRTICE B y h_2 CORRESPONDE A LA ALTURA DEL Δ CDE TRAZADA DESDE EL VÉRTICE D.

COMO r y s SON PARALELAS, ENTONCES $h_1 = h_2$, ADEMÁS EL SEGMENTO (LADO) $\overline{CE}$ ES COMÚN A AMBOS TRIÁNGULOS, POR LO TANTO, EL ÁREA DE AMBOS TRIÁNGULOS SE PUEDE EXPRESAR COMO:

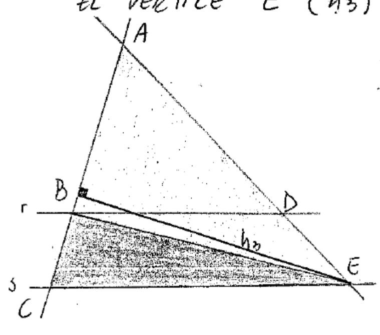
$$\text{ÁREA}(\Delta CBE \text{ y } CDE) = \frac{h_1 \cdot CE}{2} \quad \text{ó}$$

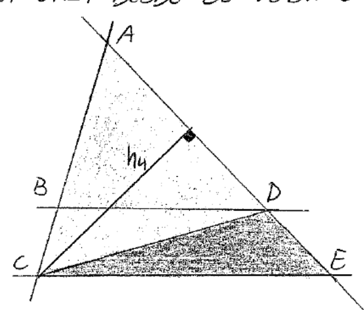
$$\text{ÁREA}(\Delta CBE \text{ y } CDE) = \frac{h_2 \cdot CE}{2}$$

ESTO ÚLTIMO DEMUESTRA QUE EL ÁREA DE AMBOS TRIÁNGULOS ES LA MISMA.

UNA VEZ DEMOSTRADO ESTO PODEMOS REALIZAR UNA NUEVA AFIRMACIÓN QUE NOS AYUDARÁ PARA DEMOSTRAR EL TEOREMA. ESTA AFIRMACIÓN ES QUE EL ÁREA DE LOS TRIÁNGULOS ABE y ACD ES LA MISMA. ESTOS DOS ÚLTIMOS TRIÁNGULOS TAMBIÉN SE FORMARON AL TRAZAR LAS DOS ÚLTIMAS RECTAS QUE FORMARON LOS Δ CBE y Δ CDE.

AHORA TRAZAREMOS DOS NUEVAS ALTURAS, UNA DESDE EL VÉRTICE E (h_3) y LA OTRA DESDE EL VÉRTICE C (h_4):





Si nos damos cuenta h_3 es una altura tanto para el $\triangle CBE$ como para el $\triangle ABE$.
Análogamente, h_4 es una altura para el $\triangle CDE$ y para el $\triangle ACD$.

Ahora el área para los diferentes triángulos es:

- Área $\triangle CBE = \dfrac{BC \cdot h_3}{2}$

- Área $\triangle ABE = \dfrac{AB \cdot h_3}{2}$

- Área $\triangle CDE = \dfrac{DE \cdot h_4}{2}$

- Área $\triangle ACD = \dfrac{AD \cdot h_4}{2}$

Como habíamos dicho antes el área del $\triangle ABE$ es igual a la del $\triangle ACD$ y el área del triángulo CBE es igual a la del $\triangle CDE$, es decir:

Área $\triangle ABE =$ Área $\triangle ACD$ y
Área $\triangle CBE =$ Área $\triangle CDE$

Si ahora dividimos el área mayor en la menor, la igualdad se mantiene, es decir:

$$\frac{\text{Área } \triangle ABE}{\text{Área } \triangle CBE} = \frac{\text{Área } \triangle ACD}{\text{Área } \triangle CDE}$$

$$\frac{\frac{AB \cdot h_3}{2}}{\frac{BC \cdot h_3}{2}} = \frac{\frac{AD \cdot h_4}{2}}{\frac{DE \cdot h_4}{2}}$$

Y SI AHORA SIMPLIFICAMOS EN AMBOS LADOS DE LA IGUALDAD.

$$\frac{\dfrac{AB\cdot \cancel{h_5}}{\cancel{2}}}{\dfrac{BC\cdot \cancel{h_5}}{\cancel{2}}} = \frac{\dfrac{AD\cdot \cancel{h_4}}{\cancel{2}}}{\dfrac{DE\cdot \cancel{h_4}}{\cancel{2}}}$$

OBTENEMOS : $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DE}$.

POR LO TANTO, QUEDA DEMOSTRADO QUE SI TENEMOS DOS RECTAS PARALELAS CORTADAS POR DOS RECTAS TRANSVERSALES EXISTEN SEGMENTOS PROPORCIONALES.

EN ESTE CASO SE CUMPLE QUE : $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DE}$.

En este desarrollo se visualiza bien el nivel de tratamiento, organización y de conocimiento matemático del profesor que realiza la clase (estudiante de Pedagogía en Matemática)

Estrategias de solución de los problemas.
Las estrategias de solución de los problemas son aquellas propias del proceso de resolución de problemas: comprensión del problema, desarrollo de una solución por sí mismo, progreso a través de la discusión y conclusiones.
En estas soluciones no se presentan las posibles dificultades y obstáculos de cada problema, los cuales debieron haberse planteado y analizados para enfrentar las posibles dificultades en el alumnado, así como el tratamiento de posibles errores.

Estudio de la clase.

1. CONCEPTUALIZACIÓN.
Concepto analizado: semejanza de triángulos y Teorema de Thales.

En video:
17´40” Alumnos y alumnas del curso resuelven problemas supervisados por los alumnos – practicantes y éstos guían la participación del curso: C. *“…en los triángulos de la pizarra uno es más chiquitito que el otro pero los ángulos ¿cómo son?...son (espera) entonces los triángulos ¿cómo son…?”*
18´22” Después de que una alumna del curso ha resuelto un ejercicio, C. intenta hacer una institucionalización de un criterio de semejanza: C.*“…dos triángulos son semejantes cuando dos de sus ángulos son iguales, acá, ¿cuáles sería nuestro ángulo igual…”*
22´41” Un alumno – practicante da explicaciones al curso: J. *“…no confundan los conceptos, ya, los criterios de semejanza son aquellos criterios que nos sirven para ver que aquellos triángulos son, valga la redundancia, semejantes, en cambio congruencia quiere decir igualdad”*

Conclusión: De acuerdo al video de la clase, los alumnos – practicantes están percibiendo alguna dificultad del alumnado del curso, para participar activamente y guían la argumentación que ellos debieran dar. También notan alguna dificultad para distinguir la diferencia entre congruencia y semejanza y dan explicaciones aclaratorias.
Los alumnos – practicantes tienen claridad sobre los conceptos en estudio (congruencia y semejanza) pero carecen de recursos lingüísticos para entregar las explicaciones al alumnado del curso.

2. ORGANIZACIÓN.
Actividad analizada: Resolución de ejercicios de aplicación de criterios de semejanza.

En video:
19´44” Algunos alumnos y alumnas resuelven ejercicios en la pizarra guiados por los alumnos – practicantes. En sus soluciones hacen cuentas sin declarar el significado de los datos. No reciben de los alumnos – practicantes indicaciones acerca de que deban organizarlos para hacer ver cuál es la correspondencia que considerarán para estudiar las respectivas proporciones o comparación de medidas, ya sea de ángulos o de lados de los respectivos triángulos.
Todos los ejercicios son presentados a través de triángulos dibujados en la pizarra, escribiendo las medidas de algunos elementos de los mismos de acuerdo al criterio que se desea sea aplicado.

Conclusión: En este criterio los alumnos – practicantes logran pobremente entregar al alumnado conductas de organización. En este aspecto no se ve que los alumnos – practicantes consideren importante la organización de los datos cuando éstos son obtenidos desde las representaciones gráficas. Las instrucciones verbales son bien dadas, pero la organización escrita de los datos se descuida.

3. MATEMATIZACIÓN.
Actividades analizadas: Establecimiento de condiciones para la semejanza de triángulos. Estudio de hipótesis para la demostración del teorema de Thales.

En video:
20´02” Una alumna – practicante pregunta a un alumno la razón de por qué dos triángulos dados son semejantes. El alumno explica, mostrando en el pizarrón, las razones calculadas y señalando que son iguales, con esto la alumna – practicante enuncia el criterio LAL de semejanza.
26´10” Una alumna – practicante enuncia el teorema de Thales haciendo hincapié en las hipótesis, para motivar la atención sobre las hipótesis han mostrado previamente un video acerca del Teorema.
26´55” Para hacer la demostración del Teorema de Tales, utiliza representaciones geométricas en la pizarra representando la situación en que se desarrolla el Teorema.

Conclusión: Los alumnos – practicantes usan adecuadamente las representaciones y consideran las restricciones para la validez de sus resultados. Utilizan con claridad las propiedades de los objetos matemáticos involucrados.

4. ESTRATEGIAS.

Actividades analizadas: ejercitación, actividades grupales, realización de demostraciones

En video:

16´6” *“Además la idea es que ustedes compartan y puedan argumentar sus conjeturas”*
21´5” Después de que un alumno resuelve un ejercicio de semejanzas declarando los argumentos utilizados, la alumna – practicante dice *“…entonces ¿como sería el criterio?...más fuerte más fuerte (hace gestos levantando la mano en señal de ánimo)”.*
28´25” Una alumna – practicante dicta un problema “después juntarse Esteban y Alicia…”

Conclusión: Los alumnos – practicantes promueven una actitud crítica y motivan al alumnado del curso a que hagan conjeturas, aunque esas conjeturas las guían demasiado y más parece una institucionalización de los conceptos. Los problemas propuestos al alumnado son motivadores y proponen situaciones en las que el estudiantado del curso debe poner en juego los conocimientos adquiridos. En el trabajo de grupo había participación de todos, sin embargo los tiempos eran cortos al parecer porque había mucho desorden: los alumnos – practicantes declaran en una conversación acerca de su experiencia *“apurábamos la situación, para que no ocurriera eso”*(se refiere a no quedar sin tiempo para terminar las actividades)
En general no plantean dudas a los alumnos, más bien dan respuestas directas a las dudas de ellos.

5. INTERACCIÓN EN EL AULA

Actividades observadas: Participación del alumnado. Discusión en los grupos, discusiones en el gran grupo.

En video:

16´6” *“Además la idea es que ustedes compartan y puedan argumentar sus conjeturas”*
23´ *“la idea es que intenten demostrar el Teorema de Thales, así es que atención…”* (muestran un video).
26´10” “…las hipótesis del Teorema…” (Escribe las hipótesis).

Conclusión: En el trabajo de grupo se da escasa discusión. Los alumnos – practicantes motivan la participación desde la pizarra tomando la posición de expertos y no realizan su trabajo desde el alumnado, provocando la desatención y la indisciplina, las preguntas por dudas provocadas por esta conducta y no por la dificultad propia de los contenidos.
No dan mucho lugar a la participación del alumnado a pesar de ser un objetivo declarado.
La organización de los grupos no fue muy fructífera en la producción de resultados.

6. COMUNICACIÓN MATEMÁTICA.

Actividad analizada: Todas las actividades donde los alumnos – practicantes tienen ocasión de explicar conceptos, aplicar algoritmos, realizar demostraciones.

En video:

17´40” Alumnos y alumnas del curso resuelven problemas supervisados por los alumnos – practicantes y éstos guían la participación del curso: C. *“…en los triángulos de la pizarra uno*

es más chiquitito que el otro pero los ángulos ¿cómo son?...son (espera) entonces los triángulos ¿cómo son…?"
18´22" Después de que una alumna del curso ha resuelto un ejercicio, C. intenta hacer una institucionalización de un criterio de semejanza: C.*"…dos triángulos son semejantes cuando dos de sus ángulos son iguales, acá, ¿cuáles sería nuestro ángulo igual…"*
22´41" Un alumno – practicante da explicaciones al curso: J. *"…no confundan los conceptos, ya, los criterios de semejanza son aquellos criterios que nos sirven para ver que aquellos triángulos son, valga la redundancia, semejantes, en cambio congruencia quiere decir igualdad".*
20´02" Una alumna – practicante pregunta a un alumno la razón de por qué dos triángulos dados son semejantes. El alumno explica, mostrando en el pizarrón, las razones calculadas y señalando que son iguales, con esto la alumna – practicante enuncia el criterio LAL de semejanza.
26´10" Una alumna – practicante enuncia el teorema de Thales haciendo hincapié en las hipótesis, para motivar la atención sobre las hipótesis (han mostrado previamente un video acerca del Teorema).
26´55" Para hacer la demostración del Teorema de Tales, utiliza representaciones geométricas en la pizarra representando la situación en que se desarrolla el Teorema.

Conclusiones: Los alumnos – practicantes comunican los procesos involucrados en la resolución de los problemas con algún grado de dificultad en la formalización del lenguaje. Tienen claridad de conceptos e intentan usar lenguaje formal pero carecen de un fluido lenguaje en este sentido. A veces dan explicaciones confusas al intentar dar explicaciones que encierren algún grado de generalización, pero el alumnado del curso comprende cuando le presentan ejemplos concretos.

V. CONCLUSIONES GENERALES.

Para responder a cada uno de los objetivos propuestos en la problemática de estudio, se presentan las conclusiones y aportaciones proporcionadas por la experiencia desarrollada en el alumnado de Pedagogía en Matemática y Computación y el alumnado de los establecimientos de la comuna de Talca y Linares, que fueron intervenidos por los futuros docentes, en su primera práctica temprana. Destacamos en primer lugar, que se han recogido las propuestas y planteamientos teóricos en la línea de un trabajo basado en la resolución de problemas, considerando los modelos de planificación y enseñanza y sistemas de evaluación que permitieron realizar la innovación metodológica en la formación inicial de profesores en su primera práctica temprana, para fortalecer su formación.

En segundo lugar, la planificación, el diseño y la puesta en práctica de las propuestas diseñadas por el alumnado de pedagogía, nos proporciona un aporte importante del progreso del alumnado de la comuna de Talca y Linares. Esto, ha puesto de manifiesto que, si se organiza la actividad matemática basada en la resolución de problemas, mediante un diseño riguroso de planes de clases, se apunta al desarrollo de capacidades necesarias en la formación matemática actual, tanto de los futuros profesores como del alumnado de secundaria. En este caso, se desarrollan capacidades de conceptualización, de organización de la información dada en un problema, de matematización para describir relaciones matemática, de estrategia para enfrentarse a un problema y de comunicación matemática, como un elemento importante en el trabajo matemático con problema, permitiendo en un nivel significativo, elevar la calidad de los aprendizajes en la resolución de problemas, mejorando el entendimiento y el razonamiento, lo que permite adquirir una estructura conceptual potente en su formación.

Por último, una organización planificada y diseñada en los términos descritos en la propuesta, ha permitido reconocer las capacidades que desarrollan los futuros docentes cuando se enfrentan al diseño e implementación de un proyecto pedagógico en las aulas de secundaria y reconocer además, el perfil inicial y de progreso, cuando se enfrentan a la resolución de problemas. Asimismo, los análisis de los resultados han permitido reconocer las habilidades y destrezas que desarrolla el alumnado de secundaria cuando es intervenido con un trabajo matemático innovador.

A partir de estas consideraciones, se explicitan las principales conclusiones extraídas de la experiencia, respondiendo así a cada uno de los objetivos propuestos en el estudio.

5.1 CONSECUCIÓN DE OBJETIVOS.

De los resultados obtenidos de la experimentación, se da respuesta a los objetivos propuestos en el estudio, presentando la importancia de trabajar la resolución de problemas, tanto en la formación del profesorado, como en el alumnado de secundaria. A partir de este reconocimiento, se presentan las principales conclusiones que se han extraído de ambos actores, reconociendo así la viabilidad de la propuesta teórica elaborada.

1. La importancia del diseño de un proyecto pedagógico basado en la resolución de problemas.

Los resultados obtenidos tanto en los avances como en el informe escrito, permitió determinar que el alumnado de pedagogía en matemática, desarrolla capacidades cognitivas relevantes, tales como recopilar, organizar y analizar información teórica, planificar actividades de aula y estrategias, estructurar planes de clases en forma detallada y diseñar problemas tendiente al desarrollo del pensamiento y razonamiento matemático, relacionando la matemática con otras áreas del conocimiento. Un elemento importante que es descrito es las investigaciones, lo constituye la comunicación de resultados y procesos, elemento que ha sido adquirido por el grupo en un nivel altamente significativo.

Respecto de las capacidades metacognitivas, que son las que menos se trabajan en todos los niveles de enseñanza (Alsina, 1998, Aravena, 2001), han sido desarrolladas por el alumnado durante la experiencia, mostrando un alto nivel en el diseño de los problemas de aula. Pero, faltando una reflexión respecto de la planificación y gestión en el aula.

Sobre las capacidades trasversales, tanto en el informe de avance como en la exposición oral, colocaron de manifiesto que estaban en otro nivel que al inicio del experimento. Se destaca el desarrollo de elementos comunicativos, tales como, argumentación en las discusiones y en la exposición oral, defensa de ideas en los avances, discusiones en los grupos de trabajo respetando la ideas de otros.

Sobre las dificultades en el trabajo de proyecto se destaca, la escasa reflexión del alumnado en formación respecto de realizar un análisis del modelo de planificación y de las estrategias seguidas en el aula, ya que los resultados en ese aspecto fueron insuficientes. Este elemento es muy importante en la formación de los profesores, ya que, un análisis de este tipo, permite autorregular el conocimiento, reconocer dificultades, aciertos y errores para establecer mejoras en próximas intervenciones.

2. La importancia del trabajo matemático a través de problemas en la formación de profesores.

Los resultados obtenidos, tanto en el pretest como en el postest, muestran que un trabajo matemático basado en la resolución de problemas en contexto de aplicación, es prometedor para elevar las capacidades del alumnado de pedagogía en matemática. Los análisis realizados colocan en evidencia que los futuros docentes presentan una serie de dificultades iniciales, entre las que se destaca la conceptualización, debido a que no reconocen los conceptos, ni le dan significado a éstos en el contexto de un problema, sin embargo, tienen un claro reconocimiento de las variables que intervienen, así como de su significado. Respecto de la organización de datos y el reconocimiento de condiciones y restricciones, así como de la matematización, tiene serias dificultades para iniciar los procesos de resolución.

De igual manera se observa en los análisis, algunas dificultades con las estrategias utilizadas y con la comunicación matemática del problema. Estos aspectos, quedan claramente superados en el postest, en un nivel significativo. Lo anterior coloca en evidencia que un trabajo de aula, centrado en situaciones de contexto, permite desarrollar capacidades de conceptualización, matematización, comunicación matemática y elaboración de estrategias de resolución, dando así respuesta, a las interrogantes de investigación.

Justificamos las dificultades iniciales del alumnado en el sentido que, este tipo de problemas, tal como se describió en el marco metodológico, que a pesar de ser del ámbito escolar, se aleja de lo que comúnmente se trabaja. La enseñanza de la matemática en la formación inicial de profesores, está orientada a un trabajo teórico formal, estructuralista y con escasas aplicaciones. En este contexto, el pretest pudo haber sorprendido a los estudiantes al enfrentarse a un tipo de problemas, de diseño algo desconocido por ellos. Esto se ve remediado en el desarrollo del postest, realizado al final de un curso cuyo objetivo, entre otros, es precisamente desarrollar las competencias para enfrentar problemas de modelización con las características ya descritas. La necesidad de estos procesos de integración conceptual, articulación de los conocimientos, aplicaciones en contexto, transposición al aula de secundaria, toman fuerza para el desarrollo de un nuevo curriculum basado en competencias, donde se hace necesario potenciar las capacidades de forma transversal a lo largo de toda la formación.

Respecto de la correlación entre las dimensiones antes señaladas, los análisis de resultados muestran que en el pretest, el alumnado que tiene una mejor conceptualización tiende a una mejor organización de los datos y del establecimiento de las condiciones del problema. De igual forma se da la correlación con la matematización y la comunicación matemática. En el postest, se observa que el alumnado, que tiene una mejor conceptualización, tiende a realizar una mejor organización de datos, una mejor matematización, mejores estrategias y comunicación matemática.

3. La importancia de trabajar la resolución de problemas en la enseñanza secundaria.

Se confirma que el alumnado de secundaria, presenta dificultades y obstáculos en la resolución de problemas, ya que en el inicio de la experiencia los resultados son deficientes en las dimensiones analizadas. Esto es, escasa conceptualización, poca capacidad de organizar e interpretar datos, de matematizar y comunicar sus resultados. Estas dificultades son revertidas al final de la experiencia, desarrollando habilidades de organizar datos, matematizar la situación y comunicar resultados en el contexto de los problemas, así como también, desarrollan destrezas de cálculo que le permiten llegar a la solución. Las dificultades iniciales han sido reportadas en los informes SIMCE y PISA, donde los bajos resultados de estas evaluaciones, están en la base de la comprensión, la poca capacidad de organizar e interpretar datos y la matematización (SIMCE, 2004; PISA, 2006).

4. Efectos producidos en el alumnado de secundaria. Perfil requerido en la formación de los docentes.

Para potenciar la formación inicial del futuro docente, se analizó los factores que influyen en el alumnado de secundaria en los niveles de logro cuando son intervenidos en las pre-prácticas, donde se detectó que hay suficiente evidencia muestral de que uno de los factores que influye en una buena conceptualización, es que el alumnado de pedagogía en matemática, posea una buena evaluación en la organización de la información involucrada en un problema y el otro factor, es una buena evaluación en las estrategias generales, ya que este hecho influye en las estrategias generales del alumnado de secundaria.

En la búsqueda de un perfil docente, que pueda influir en un buen rendimiento en el alumnado de secundaria, se detectó dos grupos de pre-práctica que tienen características comunes en todas las dimensiones analizadas (conceptualización, organización, matematización, estrategias y comunicación matemática), lo que permitió concluir que, para intervenir en las aulas de secundaria con un trabajo matemático basado en la resolución de problemas, y que el alumnado tenga un buen desempeño, los análisis de resultados muestran que no basta un buen diseño y planificación de sus clases, ni el conocimiento matemático didáctico en la elaboración de los problemas, aunque es algo prioritario, pero no es suficiente, sino que necesita algo más, esto es: (1) debe poseer un muy buen manejo en la conceptualización, es decir, el reconocimiento y significado de los conceptos en el contexto matemático y del problema, (2) poseer una muy buena organización de la información estableciendo condiciones y restricciones, (3) un alto nivel de matematización, es decir, descripción de las relaciones matemáticas y aplicación de propiedades y algoritmos, (4) buenas estrategias para enfrentarse a la resolución del problema y (5) una buena comunicación matemática. Lo anterior coloca en evidencia que los futuros formadores deben estar en un alto nivel de dominio de las dimensiones antes señaladas para generar aprendizajes de calidad, en el alumnado de secundaria, todo ello, basado en la resolución de problemas.

5. Respecto del estudio de caso.

El estudio de caso permitió un análisis detallado en las dimensiones anteriormente señaladas, donde se coloca en evidencia que el grupo, a pesar de tener un dominio de los conceptos, carecen de recursos lingüísticos para entregar las explicaciones al alumnado del curso. Respecto de la organización de datos condiciones y restricciones, no logran entregar en forma eficiente al alumnado conductas de organización. En este aspecto, es importante resaltar que las instrucciones verbales son bien dadas, pero la organización escrita de los datos se descuida. Dentro de las fortalezas del grupo, se destaca el uso de las representaciones y consideran las restricciones para la validez de sus resultados. Además, utilizan con claridad las propiedades de los objetos matemáticos involucrados. Respecto de las estrategias, motivan al alumnado a establecer conjeturas, aunque son demasiados guiadas y más parece una institucionalización de los conceptos.

5.2 LIMITACIONES DEL ESTUDIO.

1. LA DIFICULTAD PARA IMPLEMENTAR PROPUESTAS.

Un factor a considerar, dentro de las limitaciones es la dificultad que colocan en los establecimientos para realizar investigación, entre las que se destaca, no dejar grabar las clases en algunos establecimientos, para su posterior análisis.

2. EL PARO DE PROFESORES.

Dificultó a los grupos de trabajo realizar la intervención en los tiempos planificados, por lo cual 5 grupos implementaron la propuesta de aula en las fechas planificadas (mes de noviembre) y 6 grupos fuera de la fechas (mayo de 2010).

3. EL TERREMOTO DEL 27 DE FEBRERO DE 2010.

Atrasó el trabajo de aula de los 6 grupos que debían partir en marzo, ya que la mayoría de los establecimientos quedaron prácticamente destruidos. Esto además significó, un atraso en la obtención de las evidencias para los análisis de resultados, teniendo que trabajar horas extras a las destinadas en el proyecto para finalizar en los tiempos estipulados en las bases del concurso.

5.3. PROYECCIONES DEL ESTUDIO.

Aunque no se pueden establecer generalizaciones para todo el alumnado de pedagogía en matemática, sería de sumo conveniente poder replicar esta experiencia, en los términos descritos, en otras universidades con alumnados de otras regiones y en establecimientos similares de tal manera de darle mayor validez al estudio. Además, permitiría detectar las dificultades y obstáculos que posee el alumnado en formación y establecer mejoras antes de salir al campo profesional. Asimismo, es conveniente que en una próxima experiencia se pueda realizar un estudio en dos etapas, para analizar si hay mejoras en una segunda elaboración e implementación de proyectos y en las capacidades desarrolladas. Otro estudio importante sería, analizar el rendimiento en matemáticas utilizando algún modelo en varios niveles de tal manera de detectar los factores que tienen influencia en los logros de los futuros profesores, como también un estudio en esta línea con el alumnado de secundaria. Por último, se hace necesario un cambio metodológico en la educación universitaria chilena referido a modificar las estrategias de aula para formar profesionales de calidad. En consecuencia, un trabajo basado en la resolución de problemas es imperativo para mejorar los niveles de formación, tanto en el alumnado de matemática, como en la educación secundaria.

VI. RECOMENDACIONES PARA LAS POLÍTICAS PÚBLICAS.

1. Necesidad de un modelo de planificación de nivel nacional.

El país necesita contar con un Plan Didáctico de Enseñanza Nacional, cuyo eje central se base en la resolución de problemas**,** que incorpore un modelo de enseñanza, de acuerdo a las características sociales y culturales del país y prácticas de evaluación para el desarrollo de capacidades del alumnado de secundaria.

2. Diseñar un plan didáctico anual

El país necesita contar con un modelo de enseñanza para la actividad matemática, considerando como central la resolución de problemas con elementos de evaluación que apunte al desarrollo del razonamiento y pensamiento matemático.

3. Evaluar al profesorado en el trabajo de aula.

Esta investigación evidencia la necesidad de conocer en profundidad lo que se está enseñando en las aulas, ya que se puede conjeturar que la enseñanza de la matemática está basada más en la lógica del contenido y no en la lógica del que aprende.

4. Generar planes de perfeccionamiento.

Se evidencia la necesidad de un perfeccionamiento docente que aborde la enseñanza a través de la resolución de problemas en contextos de aplicación, considerando entre otros elementos, los estándares que se han diseñado en Chile, temáticas de evaluación y modelos de enseñanza para el aula.

5. Generar políticas de acreditación

Se evidencia la necesidad de generar políticas de acreditación donde se evalúe el trabajo en la aulas, tanto en las asignaturas de matemática, educación y en didáctica de la matemática, ya que se puede conjeturar que existe un escaso trabajo de reflexión y análisis de problemas, de planificación de la actividad matemática y de la articulación con la evaluación y enseñanza de los aprendizajes, elementos necesarios para una formación de calidad.

VII. BIBLIOGRAFÍA.

Alsina, C. (1998). *Neither a microscope nor a telescope, just a mathscope*. Proceed. ICTMA-1997.

Aravena, M. (2001): *Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica*. Tesis Doctoral no publicada. Departament de Didáctica de la Matemática i de les Ciències Experimentals. Universitat de Barcelona, España.

Aravena, M. (2002, diciembre). Las principales dificultades en el trabajo algebraico. Un estudio con alumnos de ingeniería de la UCM. *Revista Académica UC Maule*. *Universidad Católica del Maule* (pp. 63-81).Talca, Chile.

Aravena, M. & Giménez, J. (2002). Evaluación de procesos de modelización polinómica mediante proyectos. Monografía modelización y matemáticas. *Revista UNO. Didáctica de las Matemáticas. 31*, 44-56.

Aravena, M. (2007). Método de resolución de problemas. Lesson Study de Japón. ¿Es posible una aproximación a la realidad chilena?. *Actas XXI Jornada de Matemática de la Zona Sur pp. 60*. Concepción Chile.

Aravena, M.; Caamaño, C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca-Chile. *Revista Estudios Pedagógicos*. *33*, 7-25

Aravena, M.; Caamaño, C., Cabezas, C. (2007). Doblado de papel en el primer nivel de razonamiento del modelo didáctico de Van-Hiele y su proyección hacia la formalización del pensamiento geométrico. *Revista Chilena de Educación Matemática*. RECHIEM, Vol.*2*.

Aravena, M; Caamaño, C. & Giménez (2008): Modelos matemáticos a través de proyectos*., Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. V11, número 1*

Aravena, M.; Caamaño, C. (2008). The Method of Problem Solving based on the Japanise and Polya´s Models. A Classroom Experience in Chilean schools. *In Research and Development in Problems Solving in Mathematics Education. Topic Study Group 19.* (pp. 71-80). ICME-11. Monterrey. México.

Aravena, M; Carrión, Z; Fuentealba, E.; Garrido,F.; Miño, E., Morales, S.; Muñoz, M. (2007). *Resolución de problemas en contexto basado en el modelo "Study lesson" de Japón, apoyado por el "método de Polya".* Seminario de Integración de saberes. Postítulo Mención educación matemática. Universidad Católica del Maule. Talca. Chile.

Aravena, M; Caamaño, C. (2009). Mathematical Models in the secondary Chilean education. In Blomhøj, M. & S. Carreira, (eds.) (2009). *Mathematical applications and modeling in the teaching and learning of mathematics.* Proceeding from topic study group 21 at the 11th International congress on Mathematical education in Monterrey, México, July 6-13, 2008. Imfufa, Roskilde Universiy, Denmark: Authors.

Bishop, A. J. (1989). Review of Research on Visualization in Mathematics Education. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(1),* pp. 7-16.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Blomhøj M. (2000). Developing modelling competence: The different roles of modelling and problem solving. Roskilde University, Denmark.

Blomhøj ,M.(2009). Different Perspectives in Research on Teaching and Learning Mathematical Modelling. Categorizing the TSG21 Papers. In Blomhøj, M. & S. Carreira, (eds.) (2009). *Mathematical applications and modeling in the teaching and learning of mathematics.* Proceeding from topic study group 21 at the 11th International congress on Mathematical education in Monterrey, México, July 6-13, 2008. Imfufa, Roskilde Universiy, Denmark: Authors.

Burton, L. (1999). Why is Intuition so important to mathematics but Missing from mathematics Educations For the *Learning of mathematics, 19 (3)*, 27-32
BROWN, S.I. (1983). *The art of problem posing*. Philadelphia: Franklin Institute Press.

Caamaño, C.; Aravena, M. (2004) Bases didácticas para una formación integrada de álgebra lineal y geometría en ingeniería. *Revista Chilena de Educación Matemática, V1, número 1.*

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Servicio de Publicaciones.

Cunningham, S. (1991). The Visualization Environmet for Mathematicas Education. En: *Visualization intheaching and Learning Mathematics.* MAA NOTES number 19

Clements, D.H. y Battista, M.T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning, en Grouws, D. A. (ed.) (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* pp. 420-464. Nueva York: MacMillan.

De Guzmán, M. (1974). *Matemáticas en un mundo moderno*. Editorial Bluna. Madrid.

De Lange, J. (1996). Real problems with real world mathematics. , in Alsina C. et. Al (Eds): Porceedings of the 8th Congreso of Mathematics Education ICME (pp. 83-110). Sevilla, España.

Da Ponte(1999). *Recerca-Acció. Formació del profesorat en matemàtiques. Analisi metodológica. Seminar pera la formació de recerca. Departament de Didàctica de les CC experimentals i de la matemàtica. Universitat de Barcelona. (pp 1-122)*

Diaz, M. V. & Poblete, A. (1998). Resolver tipos de problemas matemáticos. ¿Uma Habilidad Inhabilitante?. *Revista Épsilon. Número Monográfico*. *42*, 409-423.
Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematics thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt (Ed). *Representations and mathematics visualization*, (pp. 311-335). North american Chapter of PME: Cinvestav-IPN.

Dreyfus, T. (1991). On the Status of Visual Reasoning in Mathematics and Mathematics Education, en Furinghetti, F. (ed.) (1991).*Proceedings of the l5th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 1, pp. 33-48. Italia: Asís

Filloy, E. & Rojano, T. (1984). La aparición del lenguaje aritmético-algebraico. *L'educazione matematica* V: 1-16.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics 24*, 139-162.

Font, V. (2001). Some views on the representation in teaching mathematics. *Philosophy of Mathematics Education Journal 14*, 1-35.

Fuys, D., Geddes, D. y Tischler, R. (1988). *The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents.* Journal for Research in Mathematics Education Monograph, 3. Reston: NCTM.

FreudenthaL, H. (1983). Mayor Problems in Mathematics Education. En: Zweng, M. and Green, T.; Kilpatrick, J.; Pollack, H.; Suydam, M. ed. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, Boston, Birkhauser.

Giménez, J. (1997). Evaluación en Matemáticas. Una Integración de Perspectivas. Editorial Síntesis S.A. Madrid, España.

Gómez, J. (1998). *Contribucio a l'estudi dels processos de modelitzacio a l'ensenyament/aprenentatge de les matematiques a nivel universitari*. *Tesi Doctoral* Departament de Didáctica de la Matemàtica i de les Ciéncies Experimetals. Universitat Autónoma. Barcelona.

Gómez, J. (2007). *La matemática reflejo de la realidad. La modelización matemática como herramienta para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.* Federación Española de Profesores de Matemática (FESPM). Badajoz. España.

Hershkowitz, R., Bruckheimer, M. y Vinner, S. (1987). Activities with Teachers Based on Cognitive Research, en NCTM (1987): *Learning and Teaching Geometry, K-12.,* 1987 Yearbook, pp. 222-235. Reston-VA: NCTM.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry, en Nesher, P. y Kilpatrick, J. (eds.) (1990). *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* pp. 70-95. Cambridge: Cambridge UP.

Hitt, F. (1998). Visualización Matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. En: *Educación Matemática.* Vol. 10 (pp. 23-45). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Isoda Masami, Arcavi abraham, Mena Arturo (2007) *El estudio de clases japonés en matemáticas*. Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Jaime A.; Gutiérrez, A. (1996): El Grupo de las Isometrías del Plano. Editorial Síntesis S.A. Madrid. España.

Janvier, C. (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics Hillsdale, New Jersey: Lawrence Earlbaum A. P. Kaput, J.J. (1988) representations, incripctions, description and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of mathematics Behaviors*, 17 (2), 266-281.

Jorba, J., Casellas, E. (1997). *La regulación y la autorregulación de los aprendizajes*. Madrid: Síntesis Ediciones.

Keitel, C. (1993). Implicit Mathematical Models in Social Practice and Explicit Mathematics Teaching by Aplications. En De Lange, J. and Keitel, C. Hunthey, I. Niss, M. (Ed) Innovations in Maths Education by Medelling an Aplications. Chichister, Ellis Horwood Limited.

Kieran, C. y Filloy, E., 1989. El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica.*Enseñanza de las Ciencias, 7*(3), pág. 229 - 240.

Kline, M. (1994). El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días. (Vols. I, II y III.) Trad. Martínez y otros. Madrid: Alianza Editorial.

Latorre, M. (2004). *Aportes para el análisis de las racionalidades presentes en las practicas pedagógicas. Estud. Pedagóg..* [online]. 2004, no.30 [citado 24 Noviembre 2008], p.75-91. Disponible en laWorldWideWeb:<http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S071807052004000100005&lng=es&nrm=iso>. ISSN 0718-0705.

Lusa, M. (1990). "*Una experiencia: un curso de Historia de la Ciencia y de la Técnica de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Barcelona".* Història Ciència i Ensenyament. Actes del III Simpòsium d'Ensenyamente i Història de les Ciències i de les Tècniques. CODINA- LLOBERA Editoras. Barcelona.

Matos, J.F; Blum, W.; Houston, S.K.; Carrera, S.P. (1996). (Ed.) Modelling and mathematics education. Chichester. Horwoord Publishing.

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Paidós. Barcelona
Miles, M. & Huberman, M. (1994). *Qualtative data analysis: An expanded sourcebook.* London: Sage.

N.C.T.M. (1980). Problem Solving in School Mathematics. Virginia:Preston. U.S.A.
Niss, M. (1996): "¿Por qué enseñamos matemáticas en las escuelas?". Dinamarca. Revista Investigación y didáctica de las matemáticas. MEC. pp. 19-30.

Niss, M. (1989). Aims and scope of applications and modeling in mathematics curricula. En: W. Blum et al. (Eds.): Applications and modeling in learning and teaching mathematics (22-31). Chichester: Ellis Horwood.

Niss, M.(1992)."Applications and Modeling in school mathematics-directions for Future Development", in I. Wrszup i Steint (ed) Developement in school mathematics around the world V. 3 NCTM. Reston.

Niss, M. (2001). Issues and problems of research on the teaching and learning of applications and Modelling. In Matos, J.F. ; Blum,W. ; Houston,S.K. ; Carrera,S.P.(Ed.) Modelling and mathematics education. (pp. 73-88) Chichester. Horwoord Publishing.

OCDE Y EL BIRD/BANCO MUNDIAL (2009). La Educación Superior en Chile. pp. 185-205

Oliveras (1996). Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular. Granada: Comares.

Peralta, J. (1995). *Principios Didácticos e Históricos para la Enseñanza de la Matemática.* Editorial Huerga y Fierro. España.

PISA 2000 (2001). Competencias para La vida. Resultados de los estudiantes chilenos.
PISA 2000 (extraído en marzo 2008 del sitio http://www.simce.cl/fileadmin/Documentos_y_archivos_SIMCE/evaluaciones_inter/pisa_2000/informe_CHILE_PISA_2000.pdf)

PISA 2006 (2007) The Programme for International Student Assessment .(extraido en marzo de 2008 de http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf).

PISA 2006 (2007). Rendimientos de estudiantes de 15 años en Ciencias, Lectura y Matemática Unidad de Curriculum y Evaluación. http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf

Polya, G. (1957). *How to Solve it*. N.J.: Princeton University Press. USA

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Ed. Tecnos. Madrid. España.

Polya (1954*). Mathematical and Plausible Reasoning* .Princeton University Press.

Polya, G. (1957). *How to Solve it*. N.J.: Princeton University Press. USA

Polya, G.. (1953). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Ed. Tecnos. Madrid.

Polya (1965). Mathematical discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving. (John Wiley, New York, 1962 (I), 1965 (II)).

Polya, G. (1985). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ed. Trillas, México.

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics 6* (3), 42-46.

Presmeg,N.C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 205-235). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Presmeg, N. (1999). Las posibilidades y los peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas matemáticos. En: *SUMA, Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Nº 32 (pp. 17-22).* Zaragoza Netherlands: Sense Publishers.

Rico, M. P. (1998): *¿Cómo desarrollar en los alumnos las habilidades para el control y la valoración de su trabajo docente?* Editorial Pueblo y Educación, La Habana

PROYECTO FONDECYT 1030122(2003-2005): Una propuesta integradora para la enseñanza de la matemática en la educación media chilena. La modelización matemática a través del trabajo de proyectos.

PROYECTO FONDECYT 1090617 (2009): Niveles de Razonamiento Geométrico en Estudiantes de Establecimientos Municipalizados de la Región del Maule.

Santos (1992). Resolución de problemas: El trabajo de Alan Schoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Educación Matemática 2*, 16-24

SIMCE 2003 (2004). *Prueba SIMCE 2° Medio 2003.Análisis de Resultados*. Obtenido en Septiembre 20, 2006, de http://www.biblioteca.mineduc.cl/documento/Informe_2_Medio_2003.pdf.

SIMCE 2006 (2007). Resultados Nacionales SIMCE. *Obtenido en junio 10 de 2008, de* http://www.simce.cl/fileadmin/Documentos_y_archivos_SIMCE/informe_resultados/Informe_nacional.pdf).

Schoenfeld, A. (1982) . Measures of Problem – Solving Performance and Problem – Solving Instruction. *Journal for Research in Mathematics Educations. 13,* 31-49*.*

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press, Inc. USA.

Schoenfeld, A. (1987). *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schoenfeld, A.. (1988). Problem Solving in Context(s), in R. Charles and E. Silver (Eds). *The Teaching and Assesing of Mathematical Problem Solving.*

Shizumi Shimizu, Masami Isoda, Kazuyoshi Okubo, Takuya Baba (2005). *Japanise Lesson Study in mathematics at a Glance*. Publicado por Meiji Tosho. Versión español traducida por Atsuko Ishikawa y Kyoto Obayashi, editado por Abraham Arcavi. (capítulo 2 y 5, sección 1).
Teachers Matter: Attracting, Developing and Retaining Effective
Teachers *Summary in Spanish (extarido el 17 de Julio de 2008 de la pagina web:* http://www.oecd.org/dataoecd/38/36/34991371.pdf).

TIMSS 2003 (2004). Highlights From the Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) (extraído de la pagina web: http://www.nces.ed.gov/pubs2005/2005005.pdf)
Van hiele, P.M. (1987). A method to facilitate the finding of levels of thinking in geometry by using the levels in arithmetic (Presentación en la "*Conference on learning and teaching geometry: Issues for research and practice".* Syracuse University, 1987).

Vinner, S.; Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 83 (1)*, 20-25.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En: *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library,* pp. 65-79. Cambridge: Board.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Visualization and the Nature of Mathematics. En: *Visualization in Teaching and Learning Mathematics. MAA NOTES, Number 19.* USA.

Williams,H., & Ahmed, A.(1997). Applications, modelling and communication in secondary school mathematics. (Ed) *Modelling and Mathematics Educations*.(pp. 11-21) Chichester. Horwood Publications.