FONIDE – Fondo de Investigación y Desarrollo en Educación

Departamento de Estudios y Desarrollo. División de Planificación y Presupuesto. Ministerio de Educación.

Informe Final

ANÁLISIS DE LA CALIDAD DE CLASES DE MATEMÁTICA

Teorema de Pitágoras y razonamiento matemático

Investigador Principal: M. Leonor Varas
Institución Adjudicataria: Universidad de Chile
Proyecto FONIDE N°: 209 - 2006

Enero 2008

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

Información: Secretaría Técnica FONIDE. Departamento de Estudios y Desarrollo – DIPLAP. Alameda 1371, Piso 8, MINEDUC. Fono: 3904005. E-mail: fonide@mineduc.cl

1

INFORMACIÓN SOBRE LA INVESTIGACIÓN:

Inicio del Proyecto: Marzo 2007

Término del Proyecto: Enero 2008

Equipo Investigación: María Leonor Varas, Lino Cubillos y Daniela Jimenez.

Monto adjudicado por FONIDE: $17.103.000-

Presupuesto total del proyecto: $22.443.000-

Incorporación o no de enfoque de género: NO

Comentaristas del proyecto: Fidel Oteiza, Eckhard Klieme, Lorena Espinoza y Malva Venegas.

Información: Secretaría Técnica FONIDE.. Alameda 1371, Piso 8, MINEDUC. Fono: 3904005. E-mail: fonide@mineduc.cl

2

Tabla de Contenidos

3

ABSTRACT

En esta investigación se analizan prácticas pedagógicas en la enseñanza de un contenido matemático específico (el teorema de Pitágoras), las que se contrastan con resultados de aprendizaje. Este análisis se realiza de acuerdo a la metodología utilizada por el estudio comparativo internacional "Pythagoras", desarrollado por el Instituto Alemán de Investigación Internacional en Educación (DIPF), adaptando y validando sus instrumentos, así como desarrollando nuevos.

Se buscan respuestas a preguntas de investigación relacionadas con la posibilidad de identificar válidamente factores de la instrucción matemática, de la preparación de los profesores, de su conocimiento pedagógico de la disciplina, de sus creencias y valoraciones, que incidan en resultados de aprendizaje de los estudiantes, particularmente en la capacidad de razonar matemáticamente y comprender en profundidad.

Participan 21 profesores y 802 alumnos de 7o Básico de Escuelas, Liceos y Colegios de la Región Metropolitana, de diversa dependencia, nivel socioeconómico y rendimientos SIMCE. Por cada profesor se analizan videos de 3 clases de introducción al teorema de Pitágoras, 5 pruebas de contenido aplicadas a los alumnos, un test a profesores y encuestas a profesores y alumnos, distribuidas a lo largo de un año.

La información recogida se somete a análisis de confiabilidad y coherencia de las dimensiones evaluadas, a través de análisis factorial, alfa de Cronbach y correlación item-test. Además de los análisis descriptivos se prueban modelos lineales jerárquicos, que permitan estudiar la incidencia de características del profesor en los resultados de aprendizaje, controlando a nivel de alumnos los conocimientos previos y las habilidades.

Ningún profesor chileno incluyó una demostración del teorema, lo que inutilizó la pauta internacional de observación de videos, que se centra en este importante aspecto. Los nuevos instrumentos destinados a suplir esta falla evalúan el aporte del profesor al razonamiento matemático y su conocimiento pedagógico de la matemática vinculada al Teorema de Pitágoras (con énfasis en demostraciones y razonamiento).

Los resultados muestran que se pueden medir confiablemente varios factores de las características del profesor recién descritas, y que éstas inciden en el aprendizaje de sus estudiantes. Contradiciendo la supuesta inmadurez de los estudiantes de 7° año para

4

entender demostraciones matemáticas, los estudiantes chilenos exhiben su mejor rendimiento relativo a sus pares europeos (de 8° y 9° año) en la tarea de juzgar la validez de demostraciones que se les presentan. Este exitoso desempeño al comienzo del año escolar estudiado, no progresa en el tiempo, pero se mantiene superior a los rendimientos en las pruebas de contenido.

Las prácticas instruccionales observadas no favorecen el razonamiento matemático en ninguna de sus expresiones. Las muy populares actividades de indagación, destinadas a “descubrir” el teorema de Pitágoras, no logran hacer su contribución al desarrollo del razonamiento, al evitar todos los aspectos relacionados con la distinción entre conjetura y verdad matemática, entre tesis e hipótesis, entre anécdota y generalidad.

En concordancia con estos resultados y recomendaciones internacionales se sugiere ampliar la evidencia científica de respaldo a un plan adecuado que permita la incorporación temprana y progresiva de demostraciones en el currículo escolar de matemática.

CONTEXTUALIZACIÓN

La educación en matemática del conjunto de la población es un objetivo y desafío universal de gran importancia, como lo reconocen y expresan innumerables documentos oficiales a nivel de estados y organizaciones multinacionales como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). El objetivo declarado por ésta -reflejo de un amplio consenso internacional- es el de la “alfabetización matemática” [1] definida como la capacidad del individuo para identificar y entender la función de las matemáticas en el mundo, para emitir juicios fundados, para utilizar y relacionarse con la matemática de modo que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.”

El éxito de la educación escolar en matemáticas representa un claro beneficio para las posibilidades de desarrollo de los países, pero también tiene altas implicancias a nivel de las personas, posibilitando el acceso a mayores niveles educacionales y oportunidades de trabajo. El reciente informe del panel de expertos que por encargo del presidente de los Estados Unidos, durante dos años estudió la evidencia acumulada en torno a la

5

enseñanza y el aprendizaje de la matemática [2], indica que según el Nacional Science Board en ese país el crecimiento de los puestos de trabajo del área de ingeniería y ciencias, intensivos en matemática, crece 3 veces más rápido que el promedio. A la luz de esta conexión entre la educación en matemática y la movilidad social, aumenta el dramatismo de las conclusiones del último informe de resultados de la aplicación en Chile de la prueba PISA 2006 [1]:

- "Matemática es el área que representa mayores desafíos para Chile. El resultado de nuestros estudiantes está más distante del promedio OCDE que en las otras áreas".
- "La brecha interna entre los estudiantes que tienen peores y mejores condiciones socioeconómicas y culturales es muy amplia y se levanta como una gran señal de inequidad en nuestro sistema educativo."

El importante informe norteamericano citado antes, [2], contiene una cuidadosa revisión del estado del arte de la investigación en educación matemática, puntualiza carencias precisas de investigación y pone el foco en temas que deben ser abordados con rigor y urgencia. Denuncia, asimismo, mitos y creencias extendidas en el ámbito educacional, que carecen de base científica o que han sido desmentidos por la investigación. Estos resultados son mayoritariamente válidos para Chile. Por ejemplo, se advierte de la repetidamente probada falsedad de la extendida creencia –basada en la muy influyente teoría de Piaget- de que los niños de determinadas edades no pueden aprender ciertos contenidos, por ser muy jóvenes para ello. Entre sus conclusiones destaca la necesidad de realizar más investigación rigurosa en el área, que pueda informar las políticas y las prácticas de un modo más efectivo.

El teorema de Pitágoras ofrece una oportunidad inmejorable para analizar una gran diversidad de aspectos de la instrucción matemática. Difícilmente se encontrará algún otro contenido de la matemática escolar que permita observar una similar variedad de factores a la que se despliega en su enseñanza. De ningún modo se circunscriben estos a la enseñanza de la geometría. Entre sus características más valiosas para fines de investigación, destacan:

- Se trata de un contenido de presencia universal en los currículos escolares, lo que lo hace apropiado para estudios internacionales;

6

- En él se establecen conexiones importantes y naturales entre el álgebra y la geometría;
- Tiene una variada gama de aplicaciones al interior de la matemática;
- Especialmente apropiado para realizar modelamiento matemático, a nivel escolar, de situaciones cotidianas;
- Es el primer teorema no trivial en geometría euclidiana;
- Está inmerso en una rica red de teoremas y resultados matemáticos importantes;
- Se necesita lógica y razonamiento matemático para entenderlo;
- No hay manera de “descubrirlo” sin una clara conducción del profesor.

En este proyecto se analizan prácticas pedagógicas en la enseñanza de este contenido específico -el teorema de Pitágoras- las que se contrastan con resultados de aprendizaje y motivacionales. Este análisis se realiza de acuerdo a la metodología utilizada por el estudio comparativo internacional "Pythagoras: Calidad de la clase y comprensión matemática en diversas culturas instruccionales” [3], [4], desarrollado por el Instituto Alemán de Investigación Internacional en Educación (DIPF). Participan 802 alumnos y 21 profesores de 7° Básico de Escuelas, Liceos y Coleg ios de la Región Metropolitana, de diversas dependencias, grupo socio económico y rendimiento SIMCE. Se analizan videos de 3 clases consecutivas de introducción de este tópico, de cada profesor, cinco evaluaciones de contenido a los alumnos, y encuestas a profesores y alumnos.

El proyecto se sustenta sobre una réplica abreviada del estudio internacional mencionado, desarrollado en Alemania y Suiza entre los años 2000 y 2006, actualmente en proceso de extensión a Japón, Francia y Chile, acerca de la calidad de clases de matemáticas. El tópico considerado -el Teorema de Pitágoras- se ha elegido por la riqueza de elementos centrales del aprendizaje de la matemática que intervienen en su enseñanza y por su universal presencia en los currículos escolares, lo que facilita las comparaciones internacionales. En la extensión a países distintos de Alemania y Suiza, se contempla la aplicación abreviada de la batería original de instrumentos. En ese marco el DIPF, institución sede del estudio Pythagoras en Alemania[1,] ha facilitado al Programa de

[1] El estudio se desarrolló paralelamente en Suiza y Alemania con equipos de investigadores en ambos países que trabajaron cooperativamente. En Suiza fue desarrollado en el Instituto de Educación de la Universidad de Zürich, mientras que en Alemania se realizó en el DIPF.

7

Investigación en Educación de la Universidad de Chile los instrumentos de evaluación correspondientes.

El diseño de este estudio comprende un análisis multidimensional acerca de los resultados académicos de los estudiantes a partir de la integración de las percepciones de estudiantes y profesores (por medio de cuestionarios) y la observación externa (análisis de video) de la misma situación instruccional. Además se combina una mirada microgenética (3 clases) con una de tipo longitudinal (el año escolar) con el fin de obtener mayor cantidad de evidencia y evidencia más específica acerca del impacto de la calidad de la enseñanza de la matemática en el rendimiento de los alumnos y en su motivación. El diseño permite además investigar la interacción entre características instruccionales y condiciones dentro de la sala de clases. El diseño controla las condiciones curriculares, ya que todas las situaciones instruccionales se dan en torno a las primeras clases que los alumnos tienen sobre el contenido del teorema de Pitágoras.

Uno de los propósitos del estudio consiste en utilizar la información recogida acerca de la efectividad escolar y la metodología de observación y análisis de clases para que los profesores en ejercicio y en formación puedan utilizarla como insumo o herramienta para la reflexión acerca de su propia práctica. Este elemento concuerda con indicaciones de los estándares de desempeño docente en uso (e.g. NBPTS National Board for Professional Teaching Standardas en EEUU, Marco para la Buena Enseñanza en Chile). Por otra arte, el estudio de clases ("Lesson Study") que el Ministerio de Educación chileno está introduciendo en varias instituciones formadoras de profesores, en el marco del proyecto JICA (con la Universidad de Tsukuba, Japón), ofrece óptimas condiciones para la aplicación de los resultados del proyecto, el aumento de su impacto, a la vez que permite contar con diversidad de metodologías de análisis, lo que favorece el desarrollo de perspectivas independientes. La importancia de investigar en profundidad acerca de la calidad de las clases de matemática y su vinculación con los logros de aprendizaje, se justifica en los conocidos y persistentes bajos resultados escolares en esta materia. Si bien en Chile falta investigación en educación en muchos ámbitos, entre los investigadores y tomadores de decisión existe cierto consenso en torno a que no sabemos y no entendemos lo que pasa en las aulas. Este proyecto tiene por foco el aula.

Concordante con una fuerte tendencia mundial de asignar importancia al razonamiento matemático, entre las condiciones de participación se les solicita a los profesores incluir una demostración del teorema de Pitágoras en una de sus tres clases filmadas. Todos los

8

profesores chilenos participantes accedieron a este requerimiento, pero ninguno de ellos lo cumplió. La valoración del razonamiento matemático a nivel escolar se aprecia en su creciente incorporación como “eje” para describir progreso en estándares escolares –como, por ejemplo, el reciente Principles and Standards del Nacional Council of Teachers of Mathematics-; además de ser una de las competencias evaluada por la prueba internacional PISA; el estudio de videos del TIMSS incluyó una pauta específica para su evaluación en la segunda versión realizada en 1999. Una de las componentes del razonamiento matemático, el razonamiento deductivo y la realización de demostraciones, ha sido elegido como tema central del Estudio 19 (Proof and Proving in Mathematics Education) del International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), en curso.

Las razones del incumplimiento de los profesores chilenos con su promesa de incluir una demostración, formó parte de las preguntas que este proyecto buscó responder.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

El proyecto busca relacionar diversos factores de la calidad de la instrucción matemática como son los conocimientos, las creencias y el nivel de experticia del profesor, con logros de aprendizaje, creencias y actitudes de los alumnos hacia la matemática. Considerando la complejidad de las interacciones y el hecho que estas relaciones están mediadas por características individuales y aptitudes de los alumnos, así como por múltiples factores de entorno, las preguntas de investigación se refieren al establecimiento de modelos que permitan estimar las magnitudes de estas incidencias y el modo en que los diversos factores declarados variables en estudio se relacionan. En primer lugar interesa establecer

- ¿cuáles de los factores identificados en el estudio internacional resultan corresponder en el caso chileno a constructos distinguibles (confiabilidad de itemes y escalas)?
- ¿se pueden distinguir elementos de una cultura instruccional propia, diferente a la alemana y la suiza?
- ¿cuáles prácticas instruccionales favorecen la comprensión de resultados matemáticos profundos o complejos?

9

- ¿cómo influyen las características del profesor en los resultados de aprendizaje de los alumnos, considerando los conocimientos previos de éstos y sus habilidades?

Durante el desarrollo del proyecto se agregaron preguntas relativas al no cumplimiento de los profesores participantes del compromiso de incluir una demostración del teorema de Pitágoras en una de sus tres clases filmadas.

- Los profesores que enseñan matemática en 7° Básico ¿no conocen una demostración de este teorema, adecuada al nivel escolar? ¿Con fundamentos didácticos deciden no incorporarla? ¿Saben en qué consiste demostrar en matemática o lo confunden con una comprobación?

HIPÓTESIS Y OBJETIVOS

Las hipótesis se refieren principalmente a la posibilidad de distinguir factores identificables de la calidad de la instrucción, que se pueden observar y evaluar. En segundo lugar se supone que dichos factores inciden en los logros de aprendizaje, las creencias y actitudes de los alumnos hacia la matemática. En tercer lugar se entiende que esta incidencia es compleja, está mediada por otros factores del entorno y de características individuales de los estudiantes. Finalmente, se establece la hipótesis que esta complejidad se puede modelar mediante análisis multinivel.

Objetivo General

Instalar una capacidad de analizar clases de matemática en profesores en formación y en servicio, orientado a la reflexión acerca de la práctica propia y de pares, de acuerdo a una metodología decantada y con constatación de elementos de efectividad escolar.

Objetivos Específicos

1. Recolectar evidencia útil para estudios de la calidad de la instrucción matemática, en este proyecto y en estudios posteriores.

2. Adquirir, profundizar y adaptar una metodología de análisis de clases de matemática para el estudio de diversos factores y su incidencia en los resultados.
3. Instalar en una carrera de Pedagogía en Matemática la capacidad de análisis de clases, para su incorporación en el proceso formativo.
4. Difundir los resultados de la investigación desarrollada y la metodología de análisis utilizada, entre profesores en ejercicio e instituciones formadoras.

MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

El estudio internacional en el que este proyecto se enmarca, se basa en investigación acerca de profesores efectivos (por ejemplo [5], [6], [7] y [8]), aproximaciones constructivistas de la enseñanza de las matemáticas (por ejemplo [9], [10], [11]) y en la teoría de la autodeterminación [12]. Con estos elementos se desarrolló un modelo sistémico de calidad de la enseñanza [13] que sirviera de fundamento para la determinación de variables relevantes y, por lo tanto, guiara los análisis posteriores.

En este modelo el aprendizaje está al centro y es entendido como las oportunidades de aprendizaje que son ofrecidas a los alumnos por el profesor y que pueden ser percibidas y utilizadas por estos últimos de diversas formas. Se parte del supuesto que tanto la cantidad como la calidad de las oportunidades de aprendizaje ofrecidas tienen un impacto importante sobre los resultados de aprendizaje de los alumnos, su motivación y su desempeño percibido. No obstante, estas oportunidades no conducen directamente a cierto nivel de logro de aprendizaje, en cuanto se encuentran mediadas por las características individuales y aptitudes que posee cada alumno.

Se supone que la calidad instruccional depende tanto de las creencias del profesor, como de sus conocimientos y de su nivel de experticia en general. Se supone además que las características personales de los profesores tienen efecto sobre los resultados de los alumnos, pero que este efecto es indirecto, influenciando las percepciones de los alumnos. Por este motivo se realiza una combinación de evidencia empírica: preguntas a los profesores por sus creencias y análisis de su conducta por medio de codificación de videos.

El desarrollo teórico de la investigación en sala de clases se ha visto marcado por la perspectiva constructivista que ha conducido a la creación de aproximaciones de investigación más complejas y diferenciadas. Sin embargo, muchos estudios centrados en

prácticas pedagógicas en la sala de clases presentaron una escasa contribución al momento de referirse diferenciadamente a los efectos de la calidad instruccional. Recién en los últimos años ha habido profundización en este aspecto, lo que tiene una estrecha relación con el desarrollo de métodos de análisis multinivel. Estos permiten investigar los impactos de la calidad de la instrucción controlando variables individuales de los estudiantes, además de posibilitar el chequeo de la existencia de interacciones entre distintos niveles de agregación, por ejemplo nivel individual vs. Nivel curso.
Considerando que muchos estudios internacionales han aportado evidencia empírica acerca de la importancia del trasfondo social y cultural de los estudiantes, en este estudio se ha optado por controlar estas variables operacionalizándolas en país de origen y preguntando a profesores y estudiantes acerca de sus percepciones del ambiente escolar.

El desarrollo de nuevos instrumentos emprendido en este proyecto se enmarca en una creciente atención que, a nivel universal, está recibiendo el tema del dominio de los contenidos requerido en la tarea de enseñar. A partir del año 1985 –cuando Lee Shulman [14], en un célebre discurso presidencial de la AERA (American Educational Research Association), lanza el concepto de “conocimiento pedagógico del contenido”- se ha acumulado un importante desarrollo conceptual y de investigación empírica, en la que diversos autores han aportado a precisar su contenido específico en el campo de la matemática. Una contribución notable a este conocimiento ha sido develar cuan demandante matemáticamente resulta ser el trabajo de enseñar matemática, incluso a nivel elemental. En estos trabajos destacan los aportes referidos al desarrollo de instrumentos para la medición confiable de tal conocimiento y la determinación de su incidencia en los logros de aprendizaje de los alumnos.

El estudio alemán COACTIV [15], desarrollado por un consorcio de universidades e institutos de investigación liderados por el Max Planck Institut de Berlín, entre 2003 y 2006, buscó averiguar cómo es un buen profesor de matemáticas (qué hace, qué sabe, qué valora) de 9º y 10º grado. Para ello distinguió tres ámbitos de su saber profesional: conocimiento pedagógico, conocimiento matemático, conocimiento pedagógico de la disciplina (matemática). Evaluó el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico de la matemática, así como su estructura, entre dos grupos de profesores de secundaria, con diferente formación inicial, y otras poblaciones con preparación matemática pero sin preparación ni experiencia pedagógica. Este estudio buscaba explicar los decepcionantes resultados alemanes en la prueba PISA y su distribución asociada al tipo de establecimiento educacional. Sus principales conclusiones se refieren a que la integración de estos conocimientos y la conectividad cognitiva es una función de la experticia matemática. Es decir, entre profesionales con alto nivel de conocimiento disciplinar, ambos conocimientos se funden en un solo cuerpo cuyas componentes se vuelven indistinguibles. Estos impactantes resultados, sin embargo, no consideran información acerca de la instrucción matemática, es decir, de *lo que ocurre realmente al interior de las salas de clases.*

Dentro de este *conocimiento matemático para enseñar* (CME), según lo define el equipo de la U. de Michigan liderado por D. Ball [16],[17] (Heather Hill, Hyman Bass, Brian Rowan, Geophry Helps, Stephen Schilling), se distinguen tres componentes: conocimiento matemático común (operar correctamente, conocer definiciones, teoremas, propiedades), conocimiento matemático específico (variedad de representaciones y ejemplos, explicaciones precisas y adecuadas, aplicaciones, modelamiento, visualización), conocimiento de alumnos y matemáticas (conocer el razonamiento de los niños, sus errores típicos, lo que les resulta más difícil, en relación a los tópicos matemáticos escolares, estrategias más frecuentes). Los estudios de este equipo han logrado caracterizar con gran detalle el conocimiento matemático requerido para enseñar matemática principalmente en la escuela elemental. A través de pruebas de valor agregado a los estudiantes y test a los profesores han establecido que el CME de los profesores es un predictor significativo de los logros de aprendizaje matemático de los alumnos. También estos investigadores sugieren la necesidad de *vincular el CME con la calidad de la instrucción matemática.*

El estudio de videos de TIMSS constituye un esfuerzo de investigación de enormes dimensiones, acerca de las clases de matemática en países con altos rendimientos escolares en las pruebas estandarizadas internacionales, que fue realizado en 1995 y 1999. El TIMSS 1999 Video Study [18], a lo largo de 4 años, grabó, tradujo, transcribió, codificó y analizó clases de matemática de 8° grado en 7 países, sin selección de tópicos temáticos, como en nuestro caso. El objetivo principal de este estudio era caracterizar prácticas pedagógicas efectivas, en el sentido de estar asociadas a altos logros de aprendizaje. Más allá de las diferencias culturales y de la diversidad de patrones asociados a diferentes países, que este estudio logró establecer, se reconoce su importante aporte en el desarrollo de protocolos de grabación y resguardo de privacidad, criterios y pautas de observación objetivas, utilizables en una variedad de contextos.

Gracias a la repetición del estudio de 1995 en 1999 y a la amplia participación de expertos de diferentes nacionalidades, se realizó un perfeccionamiento de los instrumentos utilizados. Por ejemplo, en el segundo estudio se incorporó una nueva pauta relacionada con el "razonamiento matemático", que incluyó las categorías de: razonamiento deductivo, desarrollo de racionalidad, razonamiento inductivo, uso de contra-ejemplos.

Las preguntas de investigación de este proyecto son, por una parte, las que evalúan los indicadores de calidad de clases correspondientes al proyecto "Pythagoras" internacional, en la muestra chilena, en todos los casos en los que las condiciones lo permiten. En todos aquellos casos en que los instrumentos internacionales no se pueden adaptar razonablemente y no se logró recoger información adecuada para el estudio comparativo internacional, se desarrollaron pautas e instrumentos propios, que permitieran evaluar la calidad de la instrucción matemática, según los criterios utilizados por el proyecto Pythagoras y el 1999 TIMSS Video Study. En cuanto al conocimiento matemático del profesor se distinguió entre conocimiento común y específico de la tarea de enseñar.

DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA

Se evalúan diversos indicadores de calidad de clases acerca del teorema de Pitágoras, utilizando principalmente la metodología, los protocolos de aplicación y los instrumentos (tests de conocimiento, cuestionarios y escalas de codificación) desarrollados por el estudio internacional "Pythagoras", a fin de utilizar instrumentos ya probados, con propiedades métricas conocidas, en el marco de un diseño optimizado por medio del cual es posible obtener información precisa y detallada acerca del vínculo entre prácticas pedagógicas de un profesor y el rendimiento de los alumnos. Estas propiedades facilitarán la publicación de los resultados, el desarrollo de estudios posteriores a este proyecto y la comparación internacional. Sin embargo, las características de la situación chilena, que se exponen más adelante, obligaron a incorporar nuevos desarrollos de instrumentos no considerados originalmente.

VARIABLES DE ESTUDIO

- Corrección matemática del profesor, retroalimentación a intervenciones matemáticas de los alumnos y razonamiento matemático durante las clases, evaluado por medio de adaptaciones de la escala de codificación de videos especialmente diseñada para estos fines por Drollinger-Vetter & Lipowsky (en [3]) y nuevos desarrollos.

- Fomento de la motivación en clases de matemáticas por medio de la escala de codificación creada por Rakoczy & Pauli (en [3]).
- Nivel de aprendizaje de los alumnos acerca del teorema de Pitágoras en distintos momentos del año escolar, medido por varios test de conocimientos.
- Características de los estudiantes relativas al aprendizaje incluyendo elementos de autopercepción y percepción acerca del profesor y su rol dentro de la sala de clases.
    - Variables psicológicas de aprendizaje (percepción de autocontrol, percepción de competencia, confianza en sí mismo, teorías implícitas, orientación al futuro, intereses, compromiso).
    - Variables instruccionales relevantes en términos motivacionales (promoción del aprendizaje, promoción de la autonomía, compromiso con las metas, relevancia de los contenidos, utilidad de los aprendizajes, clima, etc.)
    - Estrategias de aprendizaje del estudiante (apoyo externo, metacognición, control y evaluación, planificación y estructuración y estrategias heurísticas).
    - Habilidades relativas a geometría (visuales, espaciales).
- Características de los profesores: conocimientos pedagógicos y matemáticos, autorreporte de prácticas pedagógicas, características de la escuela, preparación de clases, percepción acerca de las características que debe tener un buen profesor de matemáticas.

SELECCIÓN DE LA MUESTRA DE COLEGIOS

Acogiendo las sugerencias entregadas por el Comité Técnico del FONIDE, la reformulación del proyecto consideró extender el estudio a establecimientos educacionales de las tres dependencias (municipal, particular subvencionado y particular pagado) y, sin aumentar el tamaño de la muestra, procurar cubrir la diversidad de rendimientos medidos con el SIMCE y de grupos socio económicos.

Utilizando la Base de Datos SIMCE 2005, se establecieron grupos de establecimientos educacionales urbanos de la Región Metropolitana, de acuerdo a tramos de estas tres variables:

MUNICIPALES

TRAMO PUNTAJE SIMCE:	1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
Grupo Socio Económico A	1	25	29	9	4			68
Grupo Socio Económico B	5	140	205	16	3			375
Grupo Socio Económico C		13	88	49	2	1		153
Grupo Socio Económico D			2	6	14	4	3	29
Grupo Socio Económico E			1					1
TOTAL	6	178	325	80	23	5	3	626

PARTICULARES SUBVENCIONADOS

TRAMO PUNTAJE SIMCE	0	1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
Grupo Socio Económico A	1	3	6	5	1				16
Grupo Socio Económico B	3	3	47	82	21	3	1	1	161
Grupo Socio Económico C	4		24	162	156	47	3		396
Grupo Socio Económico D	1		3	26	79	77	22		208
Grupo Socio Económico E				2	2	3	6	1	14
TOTAL	9	6	80	277	259	130	32	2	795

PARTICULARES PAGADOS

TRAMO PUNTAJE SIMCE	0	1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
Grupo Socio Económico A									
Grupo Socio Económico B									
Grupo Socio Económico C	1			3					4
Grupo Socio Económico D	7	3	2	7	18	16	3	2	58
Grupo Socio Económico E	7	1	4	6	12	47	84	34	195
TOTAL	15	4	6	16	30	63	87	36	257

Los colores utilizados para demarcar zonas corresponden a un intento de agrupar la muestra en 15 celdas que cubrieran la diversidad requerida.

Los tramos de puntaje SIMCE utilizados en la construcción de estas celdas son:

0 No publican puntaje
1 Entre 165 y 200
2 Entre 201 y 225
3 Entre 226 y 250
4 Entre 251 y 275
5 Entre 276 y 300
6 Entre 301 y 325

7 Mayor o igual que 326

Los grupos Socio Económicos corresponden a la clasificación utilizada por el SIMCE.

Se optó por una distribución de colegios consistente con las correlaciones de nivel socio económico y rendimientos SIMCE, maximizando la cobertura, dentro de un conjunto de establecimientos que ofrecían garantía de satisfacción de las condiciones requeridas por el estudio.

El resultado se resume a continuación:

TRAMO PUNTAJE SIMCE	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**TOTAL**
Grupo Socio Económico A									**0**
Grupo Socio Económico B	1		2	4	1				**8**
Grupo Socio Económico C				3	3		1		**7**
Grupo Socio Económico D					1	1	1	1	**4**
Grupo Socio Económico E						2			**2**
TOTAL	**1**	**0**	**2**	**7**	**5**	**3**	**2**	**1**	**21**

DISTRIBUCIÓN POR DEPENDENCIA	
Municipal	12
Particular Subvencionado	6
Particular pagado	3
TOTAL	**21**

Con todos estos colegios se firmó un Compromiso de Colaboración, que se adjunta en un Anexo. Este documento, suscrito por el/la directora(a), por el/la Profesor(a) y por la Directora del proyecto, fija las responsabilidades de cada uno de los firmantes y los resguardos de privacidad y buen uso de la información compartida.

LISTADO COMPLETO DE COLEGIOS PARTICIPANTES:

RBD	comuna	Nombre del Colegio	Dep	Grupo SEC	SIMCE Lengua.	SIMCE Matem.	Niv SIMCE
92835	La Florida	Colegio Bellavista	MC	C	259	258	4
92967	La Florida	Las Lilas	MC	C	234	236	3
92932	La Florida	Los Almendros	MC	B	234	234	3
92908	La Florida	Escuela Doctor Sotero del Río	MC	B	231	244	3
92827	La Florida	Guardiamarina Ernesto Riquelme	MC	B	234	223	2
250414	La Florida	Escuela Básica María Elena	MC	B	239	239	3
93076	La Florida	Colegio Oscar Castro	MC	C	247	228	3
103616	Conchalí	Zoltan Dienes	PS	B	213	220	2
102830	Conchalí	Aviador Dagoberto Godoy F.(**)	MC	B	265	*	0
102660	Conchalí	Dra. Eloisa Díaz Insunza	MC	C	262	259	4
92673	Ñuñoa	Manuel De Salas	PP	E	286	296	5
120944	Vitacura	San Esteban Diácono	PP	E	284	298	5
90085	La Reina	Confederación Suiza	MD	C	240	256	4
89338	Providencia	Providencia D-159	MC	D	282	273	4
86630	Santiago	Escuela Particular Hermanos Matte	PS	C	289	303	6
117668	Santiago	Instit. De Est. Sec. U. de Chile	PP	D	339	345	7
102202	Independencia	Presidente Alessandri	PS	D	285	306	6
100420	Quinta Normal	Elvira Hurtado De Matte	PS	D	284	296	5
121126	Renca	Escuela Básica Jorge Alessandri Rod.	PS	B	268	271	4
255424	Quilicura	Colegio Santa Bárbara H.S.	PS	C	237	239	3
101060	Lo Prado	Poeta Pablo Neruda	MD	B	227	226	3

APLICACIÓN DE INSTRUMENTOS

Los instrumentos que se aplican en este proyecto corresponden a traducciones de los instrumentos utilizados por el proyecto internacional PYTHAGORAS, de los que se han eliminado algunas preguntas y/o secciones, que no se ajustan a la situación chilena. Esto permite, por una parte recoger información utilizable en estudios comparativos internacionales más extensos y por otra contar con instrumentos validados sicométricamente.

El conjunto de instrumentos se describen en las tablas que siguen.

ENCUESTAS Y PRUEBAS PARA ESTUDIANTES

Instrumento	Duración	Descripción
Encuesta inicial (al comienzo del año escolar) n=704	60 minutos	- Interés por las matemáticas (8 ítemes) - Sensación de Autoeficacia (4 ítemes) - Sensación de control (6) Escalas de Percepción de fomento de la motivación: o Fomento de competencias (4 ítemes) o Fomento de la autonomía (4 ítemes) o Pertenencia (4 ítemes) o Relevancia del contenido (11 ítemes: 5 ítemes de vinculación con la vida cotidiana y 6 ítemes de relevancia instrumental) o Relación hacia el profesor (7 ítemes) o Estructuración de la clases (5 ítemes) o Tareas para la casa (5 ítemes) o Orientación a las normas (9 ítemes □ Total: 67 Ítemes
Test de entrada (al comienzo del año escolar) n=756		Contiene preguntas de geometría correspondientes a conocimientos previos y que evalúan competencias de razonamiento y argumentación matemática.
Pretest (en la clase anterior a la primera filmación) n=676	15 minutos	Conocimientos de geometría que son prerrequisitos para el Teorema de Pitágoras.
Encuesta filmación (en la clase siguiente a la última filmación) n=594	15 minutos	- Afectos positivos y negativos (8 ítemes) - Motivación actual (15 ítemes) - Variables cognitivas del aprendizaje(10) - Apreciación de los efectos de la enseñanza (1) - Calidad de las explicaciones (7 ítemes) - Escalas adicionales de Percepción de fomento de la motivación: o Fomento de competencias (4 ítemes) o Fomento de la autonomía (4 ítemes) o Pertenencia (4 ítemes) o Relevancia del contenido (11 ítemes: 5 ítemes de vinculación con la vida cotidiana y 6 ítemes de relevancia instrumental) o Relación hacia el profesor (7 ítemes)
Test de figuras (en la clase siguiente a la última filmación) n=696	8 minutos	Es un tipo de test de inteligencia que evalúa habilidades de visualización geométrica y de reconocimiento de patrones.

Postest 1 (en la clase siguiente a la última filmación) n=696	15 minutos	Test de resultados de aprendizaje acerca del teorema de Pitágoras (mide aprendizaje inmediato).
Postest 2 (al final de la Unidad) n=687	30 minutos	Test de resultados de aprendizaje acerca del teorema de Pitágoras (mide aprendizaje a corto plazo)
Encuesta de cierre (al fin del año escolar) n=616	20minutos	- Interés por las matemáticas (8 ítemes) - Escalas de Percepción de fomento de la motivación: o Fomento de competencias (4 ítemes) o Fomento de la autonomía (4 ítemes) o Pertenencia (4 ítemes) o Relevancia del contenido (11 ítemes: 5 ítemes de vinculación con la vida cotidiana y 6 ítemes de relevancia instrumental) o Relación hacia el profesor (7 ítemes) - Calidad de las explicaciones (7 ítemes) - Uso del tiempo (4 ítemes) - Vías de resolución de problemas (6) - Procedimientos Genético-Socráticos (5 ítemes) - Estructuración de la clases (5 ítemes) - Aprovechamiento del trabajo en grupo (8 ítemes) - Orientación a la comprensión (4 ítemes) - Uso del error (4 ítemes) - Autorregulación vs. Regulación externa (8 ítemes)
Test de fin del año escolar N=560	45 minutos	Test de resultados de aprendizaje acerca del teorema de Pitágoras (mide aprendizaje a mediano plazo)

ENCUESTA A PROFESORES (n=21)

Se aplica una sola encuesta a los profesores participantes, que se divide en cuatro partes, que se titulan e informan, como se muestra:

Parte I: ¿Cuál es su opinión personal acerca de las matemáticas, el aprendizaje y la enseñanza?

Parte II: Preguntas sobre su práctica pedagógica y experiencias como profesor(a) de matemáticas

a) Práctica pedagógica, Evaluación, Preparación de clases y tareas.

b) Demostraciones en clases de geometría.

Parte III: Condiciones generales en su colegio

Preguntas acerca de la organización escolar y la colaboración entre colegas.

Parte IV: Acerca de su persona

TEST A PROFESORES (n=20)

Debido a que ningún profesor chileno incluyó una demostración, como se pide en el estudio internacional, se hizo necesario desarrollar un test adicional para profesores que permitiera indagar en este y otros aspectos relacionados con el razonamiento matemático. Este test, que se aplicó junto con la prueba de fin de año escolar, consta de 6 preguntas: 3 referidas a conocimiento matemático común y 3 a conocimiento pedagógico de la matemática.

La obtención de la información se realizó de modo de garantizar el resguardo de la privacidad de profesores y alumnos participantes y de permitir seguir la trayectoria individual de cada alumno y cada profesor a lo largo del año.

Las filmaciones se realizaron de acuerdo al protocolo introducido por el Estudio de Videos del TIMSS, ampliamente utilizado por diversos proyectos internacionales, entre ellos el proyecto PYTHAGORAS. Los camarógrafos e investigadores que participaron en estos eventos recibieron indicaciones precisas y un manual, que se adjunta, para obtener un registro de calidad. En todas las filmaciones participó uno de los tres investigadores del proyecto.

PLAN DE ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

La información recogida y codificada se reunió en dos bases de datos –de alumnos y de profesores- para su análisis con el software SPSS.

En primer lugar se sometieron los instrumentos de evaluación de conocimientos de los alumnos a un análisis curricular que restringiera los itemes de contenido a aquellos correspondientes al nivel escolar.

Se analizó el comportamiento de cada uno de los instrumentos detallados anteriormente determinando la confiabilidad (alfa de Cronbach) de las escalas que los componen, en el caso de los cuestionarios y en términos de cada uno de los itemes en el caso de las pruebas de conocimiento. Este análisis llevó a excluir aquellos ítemes que no contribuían a buenos niveles de confiabilidad por un alto alfa total si se elimina el item y por baja correlación item-test.

Se calcularon estadísticos descriptivos de los ítemes y escalas de los cuestionarios, así como los puntajes totales de las pruebas, los que fueron normalizados para facilitar las interpretaciones en su utilización posterior.

La adaptación de la pauta de análisis de las clases registradas en los videos, del proyecto internacional al caso chileno, la redujo de tal modo que se prefirió desarrollar un nuevo instrumento de codificación de tales observaciones. Esta nueva pauta se testeó con tres codificadores y 11 series de 3 clases, ajustando su diseño en dos oportunidades. La aplicación definitiva y al total de los videos se sometió a controles de confiabilidad entre codificadores y a los resultados de sus itemes (37) y escalas (3) se aplicaron las mismas pruebas de confiabilidad descritas antes.

Complementariamente, y para recavar información relativa a las preguntas de investigación que los instrumentos descritos no obtendrían, se desarrolló un nuevo test para profesores (6 itemes), el que se sometió a las pruebas de confiabilidad descritas.

Posteriormente se hicieron correlaciones entre las principales escalas de percepción, indicadores de calidad de instrucción y resultados de los profesores y los resultados de las pruebas de los alumnos.

Las escalas del estudio internacional así como los nuevos indicadores desarrollados en este proyecto se sometieron a análisis factorial con extracción de componentes principales rotadas Varimax.

A través de un análisis multinivel realizado con el software HLM6 se probaron modelos que permitieran explicar resultados de aprendizaje de los alumnos con características de los profesores, controlando variables tales como inteligencia y conocimientos previos de los alumnos.

PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

De los 21 colegios participantes se tiene información completa en 19, debido a que en uno de ellos falló la segunda filmación de clases y en otro la aplicación del pretest.

Las adaptaciones a la situación chilena debieron hacerse de común acuerdo con el equipo alemán del DIPF, que desarrolló los instrumentos y permitió su uso por este proyecto, de modo de salvaguardar la calidad de la información recogida para su uso en el estudio comparativo internacional. Por otra parte, resultó imprescindible hacer adaptaciones y ajustes para obtener información válida acerca de la realidad nacional observada. Las principales particularidades de la situación chilena se originan en el nivel escolar en que se enseña el Teorema de Pitágoras. En el Marco Curricular chileno este contenido pertenece al 7° año Básico, mientras que en los otros países en que se ha desarrollado el proyecto PYTHAGORAS, éste es un contenido de 8º o 9° grado. En el caso chileno, por consiguiente, lo enseñan profesores generalistas, sin una preparación específica ni inclinación por la matemática. En los demás países participantes de este estudio, ese nivel escolar corresponde a un nivel medio y en él enseñan profesores especialistas.

Por otra parte, asociada a la diferencia de nivel escolar se producen importantes diferencias de conocimientos previos, necesarias de considerar. La diferencia más importante fue la total ausencia de demostraciones en las clases, cuya comprensión es uno de los focos del proyecto internacional.

Las diferencias entre la situación chilena y la de otros países donde se aplican estos instrumentos, producen, entre otros problemas, dificultad de registrar variaciones en el manejo del contenido matemático del profesor. Por ejemplo, en cuatro de los colegios particulares de la muestra, las clases de matemática de 7° y 8° Básico las imparten profesores de Enseñanza Media, en cambio en los colegios municipalizados las imparten profesores generalistas. Para poder consignar estas diferencias, en *el modo en que se expresan en las clases de matemática*, se desarrollaron nuevas pautas de codificación de videos, las que se sometieron a pilotaje y procedimientos de validación. La observación de estas clases, sin embargo, no permite responder preguntas acerca de la capacidad del profesor de eventualmente incluir una demostración o incluso de identificar el aporte al conocimiento y a la comprensión que implica la demostración, para, por ejemplo, eventualmente motivar la necesidad de una demostración, como pregunta el estudio internacional. Con tal fin se desarrolló un cuestionario para los profesores, de 6 preguntas (3 de conocimiento matemático y 3 de conocimiento pedagógico de la matemática).

Nueva pauta de observación de videos.

La nueva pauta de observación de videos se organizó en tres secciones que reflejaran características del dominio disciplinar de los contenidos enseñados en las tres clases filmadas:

1. Correcto uso del lenguaje y los símbolos matemáticos, y precisión de las afirmaciones relacionadas con el Teorema de Pitágoras (18 ítems)
2. Tratamiento que el profesor da a las intervenciones con contenido matemático de los alumnos, particularmente a los errores (9 ítems)
3. Elementos del razonamiento matemático (10 ítems)

Las preguntas de cada sección se agrupan en subsecciones temáticas.

Con esta pauta fueron codificadas 20 series completas de tres clases, por tres expertos.

Sección 1.-

Los resultados muestran que casi el 85% de los profesores en la muestra identifica correctamente los elementos del triángulo rectángulo, recordando las clasificaciones de triángulos según lados y según ángulos.

El 75% de los profesores no utiliza distintas letras para nombrar la hipotenusa, lo que hace perder la noción de generalidad del teorema, que se ve reducido sólo a una fórmula.

El 90% no menciona frases del tipo “si – entonces” cuando se expone el teorema, lo que lleva a confusiones acerca del sentido de la implicancia. Teniendo esto en consideración no es de extrañar que ningún profesor haya mencionado la recíproca del teorema.

Solo el 40% de los profesores es cuidadoso en el uso del lenguaje y no utilizan frases ambiguas para referirse a aspectos importantes del teorema. Además, 40% de los profesores hacen afirmaciones falsas durante las clases.

Sección 2.-

Las tablas de frecuencia muestran muchos ítems que han sido dejados en blanco. Esto principalmente ocurre debido a la escasa participación de los alumnos en clases, mediante preguntas o afirmaciones relevantes desde el punto de vista matemático.

Si se restringe el análisis al caso en que se observan intervenciones de los alumnos, los resultados muestran que cerca del 90% de los profesores evitó censurar la participación de los alumnos y cerca del 70% intentó hacer razonar a los alumnos acerca de sus afirmaciones. Pero casi el 60% de los profesores no incorpora a la clase las preguntas para que se pueda sacar provecho de ellas.

Sección 3.-

La gran mayoría (85%) de los profesores realizó una actividad de indagación, método que ha aumentado fuertemente su popularidad y que se reconoce universalmente como un elemento importante del razonamiento matemático. Pero solo en 4 de estos casos el “diseño del experimento” llevaba a conjeturar que la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo, dependía solo de la característica de ser rectángulo y no de otros factores. Por último, se debe destacar, que solo dos profesores advirtieron que la conclusión de esta actividad no era el teorema mismo, ni tenía el valor de una certeza generalizable a todos los triángulos rectángulos, para lo cual se requería de una demostración. Por el contrario, la amplia mayoría de los profesores concluye que con la actividad de indagación se ha “demostrado” el teorema de Pitágoras. Ningún profesor intenta hacer una demostración del teorema de Pitágoras y los demás indicadores de uso de razonamiento deductivo quedan prácticamente sin respuesta positiva. Menos de un tercio de los profesores menciona la utilidad del teorema tanto dentro como fuera de la matemática.

Esta clasificación de elementos del razonamiento matemático, siguió la pauta del estudio de videos del TIMSS, excepto por el indicador de “racionalidad”, del cual no se encontró a priori un buen ejemplo para el tópico de Pitágoras. Sin embargo, la extensa revisión de videos, dejó en el equipo codificador la impresión de que gran parte de los profesores no comprenden ni trasmiten a sus alumnos el teorema de Pitágoras. Por ejemplo, con gran frecuencia se trabajó con Tríos Pitagóricos, sin que se aclarara la relación entre éstos y los triángulos rectángulos. De este modo, la propiedad de dichas ternas resulta completamente anecdótica, así como el teorema de Pitágoras mismo, que presentado como resultado de un juego de puzzles o de calzar piezas, limitado a un par de ejemplos, difícilmente despierta algún interés o admiración.

En cuanto a la rigurosidad del lenguaje matemático se plantea la hipótesis de que este elemento permite distinguir a un profesor de Enseñanza Básica de uno de Enseñanza Media. Si bien la muestra de 4 profesores de Enseñanza Media es demasiado pequeña, se advierte que, al menos, en el uso correcto del signo igual y en la diversidad de triángulos rectángulos que presentan, las diferencias son categóricas.

Para juzgar el tratamiento que unos y otros profesores dan a las intervenciones de los alumnos se enfrenta el problema de existencia versus calidad. Por una parte son los profesores de Básica quienes más participación de los alumnos logran, pero disponen de menos herramientas para retroalimentar en términos de las ideas matemáticas involucradas.

Para estudiar la confiabilidad de los ítems elaborados y su contribución a un constructo distinguible se calculó el coeficiente “alfa de Cronbach”. Descartando la sección 2, por contener demasiados ítems en blanco, se sometieron a análisis factorial diversas combinaciones de itemes con relaciones temáticas. Como resultado se obtuvieron tres factores con buenas propiedades estadísticas:

Un factor de claridad de elementos que intervienen en el teorema (1.9 1.11, 1.12)

Un factor de corrección y precisión del lenguaje y de las instrucciones (1.13, 1.16, 1.18, 3.2)

Un factor relacionado con el uso de ejemplos y contraejemplos (3.8, 3.9, 3.10)

```
****** Method 1 (space saver) will be used for this analysis ******
_


  R E L I A B I L I T Y   A N A L Y S I S   -   S C A L E   (A L P H A)

Item-total Statistics

               Scale          Scale      Corrected
               Mean         Variance       Item-            Alpha
              if Item        if Item       Total           if Item
              Deleted        Deleted    Correlation        Deleted

ITEM3.2        4,1000         2,7263        ,7432           ,7019
ITEM1.16       4,0500         2,6816        ,7929           ,6901
ITEM1.18       4,1000         3,2526        ,3945           ,7825
ITEM1.9        3,7000         3,9053        ,3216           ,7876
ITEM1.11       3,7500         3,5658        ,4980           ,7634
ITEM1.12       3,9500         3,3132        ,4121           ,7759
ITEM1.13       4,2500         3,1447        ,4724           ,7652


Reliability Coefficients

N of Cases =     20,0                   N of Items =  7

Alpha =    ,7836
```

Rotated Component Matrix(a)

	Component	
	1	2
ITEM1.16	,868	,287
ITEM1.18	,853	-,256
ITEM3.2	,752	,398
ITEM1.13	,646	,182
ITEM1.11	,190	,859
ITEM1.12	,248	,669
ITEM1.9	-,035	,872

Extraction Method: Principal Component Analysis. Rotation Method: Varimax with Kaiser Normalization.
a Rotation converged in 3 iterations.

Total Variance Explained

Component	Initial Eigenvalues			Extraction Sums of Squared Loadings		
	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %
1	2,045	68,154	68,154	2,045	68,154	68,154
2	,772	25,736	93,890			
3	,183	6,110	100,000			

Extraction Method: Principal Component Analysis.

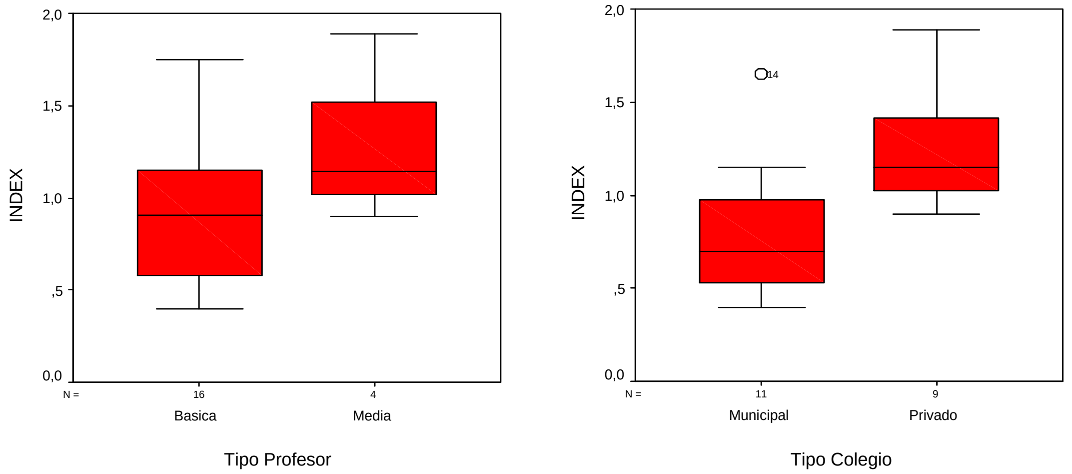
Component Matrix(a)

	Component 1
ITEM3.8	,662
ITEM3.9	,847
ITEM3.10	,942

Extraction Method: Principal Component Analysis.
a 1 components extracted.

```
****** Method 1 (space saver) will be used for this analysis ******
_


  R E L I A B I L I T Y   A N A L Y S I S   -   S C A L E   (A L P H A)


Item-total Statistics

               Scale          Scale      Corrected
               Mean         Variance       Item-             Alpha
              if Item        if Item       Total            if Item
              Deleted        Deleted    Correlation         Deleted

ITEM3.8         ,5000          ,6842        ,4134            ,8615
ITEM3.9         ,4000          ,4632        ,6407            ,6364
ITEM3.10        ,3000          ,3263        ,8231            ,3871


Reliability Coefficients

N of Cases =     20,0                    N of Items =  3

Alpha =    ,7660
```

De este modo se tiene una medida consistente de la corrección matemática de la serie de clases filmadas, que podría ser aplicada a la muestra de videos del proyecto internacional. En particular, el indicador permite distinguir entre profesores de Básica y Media y entre establecimientos particulares y municipales, como se observa en los boxplot que siguen.



Nuevo test a profesores

Para dilucidar interrogantes acerca del conocimiento de los profesores que subyace a las prácticas observadas, se desarrolló un cuestionario de seis preguntas, que equilibra el conocimiento disciplinar con el conocimiento pedagógico de la matemática. Las preguntas relativas a conocimiento matemático (4, 5 y 6) se enunciaron contextualizadas en situaciones de aula.

La pregunta 1 se refiere a un conocimiento pedagógico de la matemática, como es el tratamiento de errores frecuentes. De hecho la situación relatada ocurrió en varias de las aulas observadas, pero la falta de respuesta inmediata de los profesores podía deberse a una diversidad de razones y a la presión que se origina al instalar cámaras y observadores.

1) *Antes de introducir el teorema de Pitágoras usted dibuja en la pizarra un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3cm y 4cm y pregunta a sus alumnos por el posible largo de la hipotenusa. ¿Cómo reaccionaría a las posibles respuestas de los alumnos de 7cm o 12cm?*

	Si	*No*
Ignora esas respuestas		
Dice que son erróneas		
Hace ver el error mediante argumentaciones que puedan seguir los alumnos. *Describa sus argumentos:*		

Solo 2 profesores de 20 dan argumentos directos, que hicieran pensar a los alumnos sobre la insensatez de los números del enunciado de la pregunta, que analizaran la situación planteada, sin necesidad de ninguna otra acción o construcción adicional (medir, construir cuadrados,….).

La pregunta 2 se refiere al conocimiento que tiene el profesor de cómo aprenden matemática sus alumnos, lo que corresponde a la categoría de "*conocimiento de alumnos y matemáticas"* en la clasificación de los elementos que componen el "*conocimiento matemático para enseñar"* de D. Ball y coautores [16], [17].

2) *Ordene la siguiente lista de aspectos involucrados en el teorema de Pitágoras de acuerdo a la dificultad que usted cree que sus alumnos tendrán para recordarlos (ponga el número 1 a lo más difícil)*

Nivel de dificultad	
	Escribir correctamente la fórmula.
	Dibujar correctamente el diagrama con los cuadrados sobre los lados
	Verbalizar correctamente el enunciado.
	La relación del teorema con triángulos rectángulos.
	La relación del teorema con áreas.
	La relación del teorema con cuadrados.
	La relación del teorema con largo de lados

En esta pregunta el rendimiento de los profesores es muy bueno, con promedio 2.74 en una escala de 1 a 4, y donde 6 de los 20 profesores tienen el máximo puntaje.

La pregunta 3 se refiere al diseño de una actividad de indagación. (En la transcripción no se incluyeron los dibujos.)

3) *Para introducir el teorema de Pitágoras usted decide realizar una actividad de indagación, que elige entre los tres modelos que siguen. En todas ellas se construyen cuadrados sobre los lados más pequeños de los triángulos propuestos, los que después se recortan para hacer coincidir con el cuadrado construido sobre el lado más largo. Indique en cual de estos casos la actividad permite postular con mayor precisión las condiciones bajo las cuales se cumple el Teorema de Pitágoras, justificando su respuesta.*

   a) *Cuatro triángulos rectángulos de catetos: a=1, b=1; a=2, b=2; a=3, b=4; a=6, b=8, como en la figura*

   b) *Cuatro triángulos rectángulos de catetos a=1, b=1; a=3, b=3 a=3, b=4; a=3, b=5, como en la figura*

   c) *Tres triángulos cuyos lados más pequeños miden 3 y 4, donde uno es acutángulo, uno es obtusángulo y otro es rectángulo, además de un triángulo rectángulo de catetos a=3, b=3, como en la figura*

La gran mayoría de los profesores prefiere la alternativa a) que corresponde a la actividad con peor diseño de experimento. Cinco de los veinte profesores eligen la mejor alternativa (c) pero solo uno de ellos entrega una justificación adecuada. Esta pregunta se originó en la constatación de que casi todos los profesores incluyeron una actividad de indagación en la introducción del teorema de Pitágoras, con mal diseño de experimento, pero que no correspondía a un diseño propio del profesor, sino que había sido provisto centralmente, dotado de materiales, con apoyo de textos. Es decir, no correspondía a producción original del profesor, ni había éste elegido tal actividad, entre varias ofertas disponibles.

La pregunta 4 busca precisar la claridad de los profesores acerca de la lógica involucrada en el teorema de Pitágoras. En el análisis de los videos de clases se observaba poca rigurosidad en relación al sentido de la implicancia presente en el teorema. Pero este hecho podía deberse a un lenguaje impreciso y laxo o podía corresponder a una confusión en el dominio de éste contenido, lo que no era posible de evaluar a través de la observación de videos.

4) *Entre los trabajos realizados por sus alumnos, usted encuentra varias afirmaciones, acompañadas de justificaciones, sobre las cuales deberá usted pronunciarse. Para las afirmaciones que siguen diga si son verdaderas (V) o falsas (F) y si tal juicio se basa en el teorema de Pitágoras:*

Afirmación	*V*	*F*	*Por causa del Teorema de Pitágoras*	
			Si	*No*
Si los lados de un triángulo miden 3cm, 4cm y 5cm, entonces el triángulo es rectángulo.				
Si los lados de un triángulo miden 2cm, 2cm y 3cm, entonces el triángulo no es rectángulo.				
Si un triángulo es rectángulo y si sus catetos miden 3cm y 4cm, entonces su hipotenusa mide 5 cm.				

Los resultados de esta pregunta son malos. 6 profesores (de 20) marcan con F afirmaciones que son verdaderas y 12 profesores sacan por conclusión del teorema de Pitágoras afirmaciones que no se deducen de él.

La pregunta 5 busca dilucidar las razones por las cuales los profesores no habían incluido una demostración del teorema en sus clases, tal como se habían comprometido. Se presentan gráficamente tres demostraciones sencillas, y bajo un pretexto contextualizado en el aula, se busca establecer si el profesor distingue los elementos de la demostración propuesta. Los resultados son malos. Solo uno de los 20 profesores reconoce todos los elementos de las tres demostraciones. Trece profesores, en cambio, no reconocen ni un elemento de ninguna de las tres demostraciones.

La pregunta 6 busca averiguar el conocimiento del profesor acerca del rol que juegan las demostraciones en matemática, es decir, un conocimiento disciplinar, a pesar de la contextualización a una situación de aula:

6) *Un alumno suyo ha visto en Internet que existen tablillas babilónicas donde aparece la relación entre largos de lados de un triángulo rectángulo, conocida como teorema de Pitágoras, pero de una antigüedad de varios siglos anteriores a la vida de Pitágoras. ¿Cómo le explicaría usted en que consiste el aporte de Pitágoras de haber entregado una demostración de tal relación?*

De los 20 profesores que respondieron este test solo uno había identificado correctamente el aporte de Pitágoras al dar una demostración del teorema y 15 profesores no entregaron ningún argumento relacionado con el rol o valor de demostrar una propiedad general.

Sometidos estos resultados al análisis de confiabilidad y de componentes principales, se rescata un factor con buenas propiedades estadísticas, formado por los ítems 4.1, 4.3, 4.5 y 4.6.

```
****** Method 1 (space saver) will be used for this analysis ******
_
  R E L I A B I L I T Y   A N A L Y S I S  -  S C A L E  (A L P H A)

Item-total Statistics

               Scale        Scale       Corrected
               Mean        Variance      Item-           Alpha
              if Item      if Item       Total          if Item
              Deleted      Deleted    Correlation       Deleted

ITEM4.1        4,4500       4,2605       ,4886           ,6485
ITEM4.3        5,0000       3,6842       ,4668           ,6686
ITEM4.5        4,9500       3,9447       ,4396           ,6805
ITEM4.6        5,2500       4,0921       ,6214           ,5826


Reliability Coefficients

N of Cases =     20,0                    N of Items =  4

Alpha =    ,7071
```

Total Variance Explained

Component	Initial Eigenvalues			Extraction Sums of Squared Loadings		
	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %
1	2,193	54,829	54,829	2,193	54,829	54,829
2	,777	19,426	74,255			
3	,639	15,981	90,236			
4	,391	9,764	100,000			

Extraction Method: Principal Component Analysis.

Component Matrix(a)

	Componen t
	1
ITEM4.1	,751
ITEM4.3	,695
ITEM4.5	,668
ITEM4.6	,837

Extraction Method: Principal Component Analysis.
a 1 components extracted.

Test de inicio del año escolar.

El test de inicio del año escolar tiene dos secciones claras: una de conocimientos previos de geometría y otra de razonamiento matemático. Las preguntas de conocimientos se refieren a cálculo de áreas de rectángulos, descripciones de triángulos, determinación de medidas de ángulos. En las preguntas de razonamiento matemático se pide juzgar la validez de 4 secuencias argumentativas destinadas a demostrar que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es de 180 grados, que se presentan en detalle. Sorprendentemente los alumnos chilenos, jamás expuestos a demostraciones en sus clases de matemáticas exhiben comparativamente mucho mejores resultados en esta última parte de la prueba. En ambas secciones los estudiantes alemanes y suizos de 8º y 9º grado muestran un rendimiento superior a los alumnos chilenos. Pero la superioridad promedio en las preguntas de contenido alcanza 40,61 puntos porcentuales, mientras que en las preguntas de razonamiento deductivo alcanza solo 21,75 puntos porcentuales. Estas diferencias se calcularon solo con aquellas preguntas que muestran un buen comportamiento estadístico y que no fueron eliminadas en el análisis de confiabilidad.

Pretest

En este test solo 2 preguntas de un total de 14 debían eliminarse por motivos curriculares. Sin embargo, otras 5 preguntas tuvieron también un mal comportamiento estadístico y se eliminaron posteriormente. El logro promedio de los estudiantes chilenos alcanza al 25% del pretest, lo que se compara con el 29% de logro en el test de principio de año escolar, ambos reducidos a los ítemes confiables

Postest 1

Este test se toma en la clase de matemática siguiente a la última clase de la serie de tres clases filmadas. En la mayoría de los casos esto ocurrió el mismo día de la última filmación, inmediatamente después de ella. Consta de 6 preguntas. Para ilustrar el comportamiento del aprendizaje de este tópico y su relación con características de la instrucción pesquisadas con la pauta de observación de videos descrita antes, analizaremos la pregunta 3, para la cual contamos con los resultados de 1.015 alumnos alemanes y suizos. El enunciado de esta pregunta dice:

Marca todas las representaciones que expresen el Teorema de Pitágoras.

a lo que siguen 8 triángulos, con diferentes etiquetas y ecuaciones o frases descriptivas, cuyos resultados son:

a)	% correctas	Ranking dificultad
Chile	69,7%	2
Al.+Sui.	85,6%	1
Diferencia	15,9%	

b)	% correctas	Ranking dificultad
Chile	61,3%	3
Al.+Sui.	71,9%	4
Diferencia	10,6%	

c)	% correctas	Ranking dificultad
Chile	43,9%	6
Al.+Sui.	62%	5
Diferencia	18,1%	

d)	% correctas	Ranking dificultad
Chile	43,9%	7
Al.+Sui.	59,9%	6
Diferencia	15,0%	

e)	% correctas	Ranking dificultad
Chile	60,9%	4
Al.+Sui.	56,6%	7
Diferencia	-4,3%	

f)	% correctas	Ranking dificultad
Chile	38,4%	8
Al.+Sui.	53,5%	8
Diferencia	15,1	

g)	% correctas	Ranking dificultad
Chile	71,4%	1
Al.+Sui.	82,8%	2
Diferencia	11,4%	

h)	% correctas	Ranking dificultad
Chile	59,7%	5
Al.+Sui.	78,9%	3
Diferencia	19,2%	

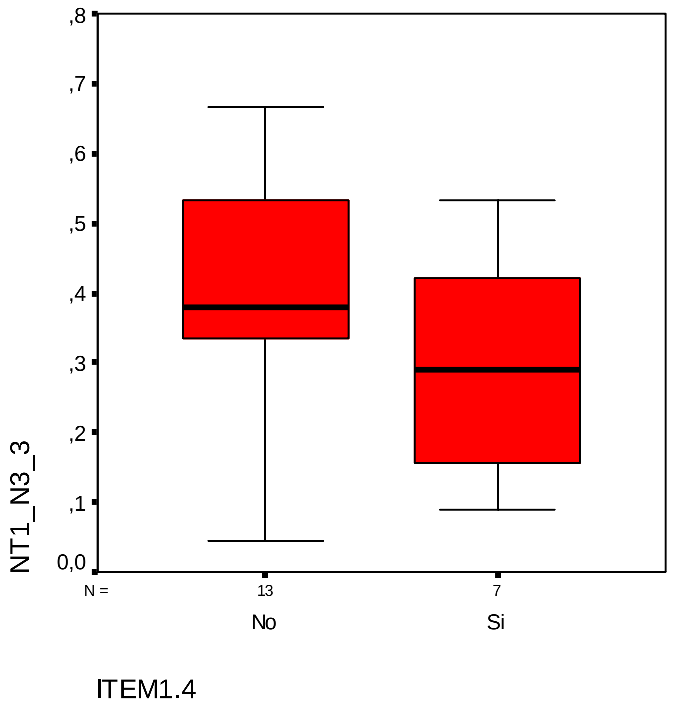
En 7 de las 8 preguntas los alumnos europeos superan a los chilenos por una cantidad de puntos porcentuales que varía entre 10,6 y 19,2. Solo en una pregunta (**e**) los estudiantes chilenos superan a sus pares europeos en 4,3 puntos porcentuales. Esta pregunta se parece a la pregunta (**h**) donde curiosamente se maximiza la superioridad europea. En ambas preguntas - al igual que en la pregunta **a**) – se presenta un triángulo rectángulo de lados ***x, y z***, con hipotenusa ***z***. Reconocido este hecho para aplicación del Teorema de Pitágoras –lo que un 70% de los estudiantes chilenos hace- quedaría reconocer en cuales de estas dos preguntas - **e)** y **h)** – se presenta una relación válida debido al teorema de Pitágoras. A los alumnos chilenos, en general, se les entregaron fórmulas para calcular largos de catetos, usando el teorema de Pitágoras, lo que sin duda aplicaron, marcando ambas preguntas, sin notar que la ecuación en **h)** es falsa. Es decir, la leve ventaja de los estudiantes chilenos, probablemente producida por la "enseñanza de la fórmula" se convierte en la peor desventaja, probablemente por su aplicación irreflexiva.

La dificultad relativa de estas 8 preguntas es muy similar para europeos y chilenos, con la sola excepción de las dos preguntas comentadas.

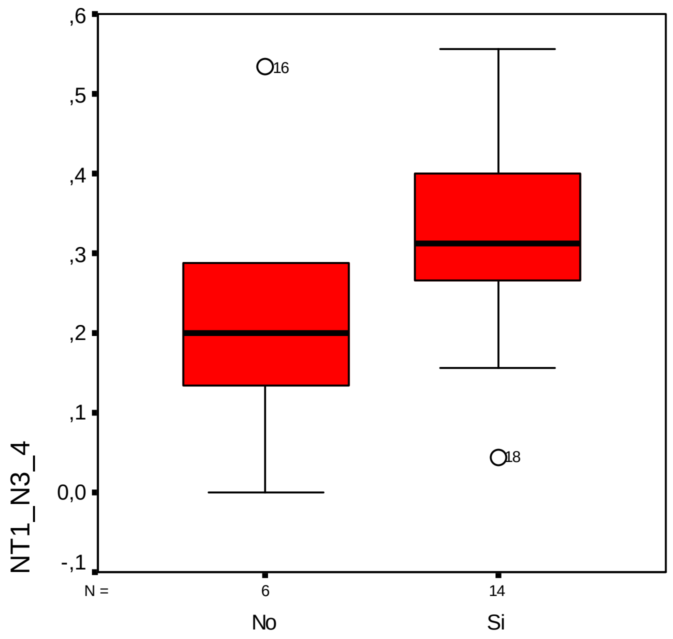
Otros resultados de los estudiantes chilenos en esta pregunta:

- el 70% no se confunde por un cambio del conjunto completo de letras con que se etiquetan los lados.
- El 61% sabe que no vale la relación pitagórica en triángulos no rectángulos.
- El 56% se equivoca si se usan las letras *a, b, c,* para etiquetar los lados pero *c* no es la hipotenusa.
- El 56% no reconoce una verbalización del teorema que incluye la raíz cuadrada.
- El 62% no reconoce el teorema de Pitágoras en un triángulo isósceles. (Esta es la pregunta más difícil, universalmente).
- El 71% reconoce el diagrama con cuadrados sobre los lados.

Finalmente se destaca la relación entre estos resultados y los del profesor correspondiente, según la pauta de observación de videos. Para ello se creó un índice de notas de los alumnos por cada profesor, como una variable agregada por cada ítem, la que indica la cantidad de "1" que se obtuvo en el ítem por curso, normalizando por la cantidad de alumnos por curso se obtiene un puntaje para cada ítem y profesor. Los profesores se distinguen luego, en cada item, según su resultado en un item relacionado de la pauta de observación de videos. A continuación se muestran dos ejemplos ilustrativos.



Este gráfico muestra que cuando los profesores SI "*utilizan distintas letras para los catetos y la hipotenusa"* (item 1.4 de la pauta de observación de videos), los alumnos se equivocan menos en la pregunta 3c) del postest 1 que aquellos cuyos profesores NO utilizan distintas letras, los que se equivocan más. En la pregunta 3c) del postest 1 la respuesta errónea daba 1 punto, por lo que la mayor altura de la caja roja corresponde a mayor error.



Este gráfico muestra que cuando el profesor plantea bien la pregunta de la raíz cuadrada (ítem 1.12 de la pauta de observación de videos) los alumnos se equivocan mucho menos en la pregunta 3d) del postest 1 (correspondiente a la verbalización del teorema utilizando raíz cuadrada), que cuando la pregunta acerca de la raíz cuadrada no está bien planteada. (En este ítem equivocarse se codificaba como 0 y correcto era 1).

Otros resultados interesantes de este test se refieren a como recuerdan el teorema de Pitágoras los 649 alumnos chilenos de 7ª en comparación con los 1015 alumnos alemanes y suizos de 9ª y 10ª grado.

“El Teorema de Pitágoras trata de…	% de alumnos chilenos que marcan la opción	% de alumnos alemanes y suizos que marcan la opción
…triángulos rectángulos”	72%	74%
…números cuadrados”	40%	39%
…áreas”	44%	47%
…longitud de segmentos”	22%	32%

Recuerdan….	% de alumnos chilenos	% de alumnos alemanes y suizos
Un diagrama y es un diagrama correcto	43% 28%	66% 9%
Una fórmula y es una fórmula correcta	27% 17%	59% 57%

La primera tabla muestra asombrosas similitudes, mientras que en la segunda sorprenden las diferencias. Una posible explicación para la gran cantidad de diagramas erróneos de los estudiantes europeos puede encontrarse en el hecho de que todos ellos fueron expuestos a demostraciones del teorema de Pitágoras, las que incluyen diagramas adicionales y por lo tanto mayores fuentes de confusión. Por el contrario, ningún estudiante chileno fue expuesto a una demostración de este teorema.

En las demás preguntas la diferencia promedio entre el rendimiento de los alumnos chilenos con los alemanes y suizos es de 25,65 puntos porcentuales, con una distribución en la que la superioridad de los alumnos europeos es mayor en las preguntas de mayor dificultad (menor porcentaje de aciertos).

También en este caso la comparación se realiza solo con las preguntas que satisfacen los criterios de confiabilidad estadística. El promedio general de logro del test en Chile es de 31,21%.

Postest 2

En esta prueba el análisis de confiabilidad eliminó tal cantidad de ítemes, que no fue posible considerar sus resultados para ninguna comparación. Esta es la única prueba cuyos resultados no se correlacionan con los de las otras pruebas de conocimiento ni con el test de inteligencia, por lo que no se la considera en ninguno de los modelos probados. Las preguntas que la componen son claramente de dificultad superior a la de otras pruebas, y su respuesta requiere el desarrollo de destrezas que se adquieren trabajando en profundidad en aplicaciones no triviales del Teorema de Pitágoras. Esta prueba también pide juzgar la validez de demostraciones mucho más sofisticadas que las del test de comienzo de año y que suponen el conocimiento de alguna demostración del Teorema de Pitágoras, lo que no ocurre con los alumnos chilenos.

Prueba de fin de año escolar

Esta prueba se compone de 2 partes, la primera corresponde a 13 ejercicios breves de diversos contenidos curriculares incluyendo algunos ítemes de geometría. La segunda parte consta de 3 problemas de mayor complejidad que involucran conocimientos de geometría, álgebra y competencias de razonamiento matemático.

Cabe destacar que, aun cuando hubo una disminución en la cantidad de alumnos que rindieron en comparación con los otros instrumentos (259 missing), se obtuvo un buen nivel de confiabilidad (α=.845), siendo necesario eliminar sólo un ítem del análisis (ítem m, alumnos-profesores), el cual presentó una baja correlación ítem-test además de un promedio muy bajo en comparación con los otros ítemes. El nivel de logro promedio de la prueba de fin de año alcanza el 32,5% en la primera parte y 19,1% en la segunda.

Estadísticos descriptivos

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típ.
Ecuación rec	542	,00	1,00	,2048	,40393
Metro rec	542	,00	1,00	,3469	,47641
Números negativos rec	542	,00	1,00	,3672	,48248
Suma de ángulos en rectángulo rec	542	,00	1,00	,3782	,48539
Fracción-Decimales rec	542	,00	1,00	,3764	,48493
Litro rec	542	,00	1,00	,3838	,48675
Propiedad Distributiva rec	542	,00	1,00	,2325	,42280
Factorización rec	542	,00	1,00	,0904	,28703
Perímetro del rectángulo rec	542	,00	1,00	,3358	,47270
Suma de fracciones rec	542	,00	1,00	,2657	,44210
Cálculo de términos rec	542	,00	1,00	,4852	,50024
Porcentaje rec	542	,00	1,00	,4354	,49627
Alumnos-profesores rec	542	,00	1,00	,0480	,21390
Cubo rec	542	,00	1,00	,2066	,40527
Faro rec	542	,00	1,00	,1974	,39842
Manzanas a rec	542	,00	2,00	,6661	,87326
Manzanas b rec	542	,00	1,00	,0830	,27618
Manzanas c rec	542	,00	2,00	,0738	,26866
N válido (según lista)	542				

Cuestionarios Alumnos

- En lo que sigue se incorporan resultados de 45 escalas aplicadas en 3 cuestionarios al comienzo del año escolar, después de la tercera hora de clases del teorema de Pitágoras grabada y al finalizar el año escolar.
- La mayoría de las escalas alcanzó niveles de confiabilidad aceptables (α de Cronbach sobre .65, ver anexo de confiabilidad). Salvo que se indique los contrario los resultados están basados en escalas compuestas por ítemes donde 1 corresponde a muy en desacuerdo y 4 a muy de acuerdo frente a afirmaciones relacionadas con el concepto a evaluar.

Cuestionario de inicio de año escolar

Percepción de control

Según se observa en los datos, la percepción que los estudiantes tienen de sí mismos en cuanto alumnos de la asignatura de matemáticas es básicamente positiva, ya que, en una escala de 1 a 4 de percepción acerca del control, se registró un promedio de cercano a 3, con un 40% de los alumnos evaluando su percepción de control por sobre el promedio. Esto significa que los alumnos perciben que tienen control sobre sus resultados en la asignatura, es decir, que son capaces de revertir situaciones adversas y que si se esfuerzan pueden conseguir buenos resultados.

- Percepción de aptitud para las matemáticas

Al momento de autoevaluar su habilidad para las matemáticas los estudiantes alcanzan un promedio de 2,68 en una escala de 1 a 4, donde sólo el 24% de la muestra obtiene un promedio entre 3 y 4 puntos.

Cabe destacar que existe una correlación [2]importante entre los resultados de esta escala y la anterior, lo que es esperable desde un punto de vista conceptual, ya que mientras mayor sea la habilidad mayor es el control que se puede percibir sobre los resultados de aprendizaje (*p*=0.531, α=0,01)

- Interés por las matemáticas

[2] Todas las correlaciones indicadas en este documento corresponden a correlaciones de Spearman (rho)

En esta escala se obtuvo un promedio de 2,97 frente a preguntas relacionadas con el gusto por las matemáticas, si les resultan divertidas, si dedicarían voluntariamente tiempo a ellas y otras afirmaciones de esa naturaleza. Esta escala tiene una correlación de p=0.417 (α=0,01) con la escala de "Percepción de control" y (p=0.493, α=0,01) con la escala de "Percepción de Aptitud para las matemáticas"

- Fomento del Aprendizaje y relación con el profesor

Mientras que la primera indaga acerca de conducta del profesor en clases relacionadas con la promoción del aprendizaje de los alumnos, la segunda aborda la relación profesor alumnos en términos más personales. Aun cuando ambas escalas tienen componentes distintos, los promedios son similares, en torno al 2,8, mientras que ambas escalas tienen una correlación de p=0.526 (α=0,01).

- Fomento de la autonomía

Esta escala presentó bajos niveles de consistencia interna α=.4684, por lo que es poco recomendable incorporar sus resultados en análisis posteriores.

- Sentido de pertenencia

Estas variables presentan un promedio cercano a 3 y busca evaluar el sentido de pertenencia que tiene el alumno dentro de su grupo curso. No se observaron correlaciones significativas con otras variables en análisis.

- Relevancia del contenido

Esta escala busca establecer qué tan importante perciben los alumnos a las matemáticas, específicamente en su relación con la vida diaria. Su promedio es levemente más alto que el de las otras escalas. Cabe señalar que un 60% de los alumnos obtiene una puntuación igual o mayor a 3 en esta escala.

Por otra parte esta escala tiene una correlación p=0.472 (α=0,01) con la de Fomento del Aprendizaje y entre p=0.489 y p=0.535 (α=0,01) con la orientación del profesor a actuar en función de criterios absolutos, o relativos ya sea según criterios individuales o grupales.

- Orientación del profesor según criterios absolutos o relativos (al grupo o al individuo).

Por medio de estas escalas se buscaba medir si en temas relativos a rendimiento y calificaciones y valoración de logro, se rige por normas conocidas para los estudiantes y si éstas apuntas más a criterios absolutos o relativos ya sea caso a caso o en función del grupo curso.

Como se indica anteriormente estas escalas tienen una importante correlación con la escala de “Relevancia del contenido” además de estar correlacionadas entre sí.

- Manejo de las tareas y Estructuración de la transmisión de contenidos.

Ambas escalas tiene promedios muy altos, cercanos a 3,5 y correlacionan significativamente con la escala de “Fomento del Aprendizaje” p=0.497 y p=0.494 (α=0,01), respectivamente. En cuanto estas escalas miden elementos de la percepción que tiene el alumno respecto de la forma como el profesor hace clases resulta coherente que estas escalas presenten resultados en la misma dirección.

Cuestionario Inicio Año Escolar

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
Percepción de control	786	1,00	4,00	2,9689	,55568
Percepción de capacidad	786	1,00	4,00	2,6801	,63821
Interés	786	1,00	4,00	2,9710	,52471
Fomento del aprendizaje	703	1,00	4,00	2,8549	,69178
Fomento de la autonomía	706	1,00	4,00	3,0113	,57746
Relación con el profesor	786	1,00	4,00	2,8856	,56425
Sentido de pertenencia	706	1,00	4,00	2,9981	,78047
Relevancia del contenido	686	1,00	4,00	3,1769	,58552
Profesor actúa seg. criterio	679	1,00	4,00	2,8662	,77398
Profesor actúa seg. individuo	678	1,00	4,00	3,2542	,71101
Profesor actúa seg. grupo	678	1,00	4,00	2,9127	,63667
Tareas	703	1,00	4,00	3,5229	,62638
Estructuración en la transmisión de cont.	687	1,00	4,00	3,4433	,57914
Valid N (listwise)	670				

Correlations

			rcepc cont	epció pacid	iteré	nento endiz	nento utono	ación profes	ntido tener	levan conter	ofes úa s riteri	ofes úa s lividu	ofes úa s grupo	area	tructu n en nsmi le co
Spear	Percepci	Correlat	,000	,531*	417*	,157*	,169*	,264*	,026	,188*	108*	186*	151*	129*	111*
		Sig. (2-t	.	,000	000	,000	,000	,000	,496	,000	005	000	000	001	004
		N	786	786	786	703	706	786	706	686	679	678	678	703	687
	Percepci	Correlat	,531*	1,000	493*	,142*	,120*	,241*	,007	,145*	092*	074	096*	117*	091*
		Sig. (2-t	,000	.	000	,000	,001	,000	,848	,000	016	054	012	002	017
		N	786	786	786	703	706	786	706	686	679	678	678	703	687
	Interés	Correlat	,417*	,493*	000	,225*	,236*	,309*	,053	,229*	192*	185*	167*	197*	209*
		Sig. (2-t	,000	,000	.	,000	,000	,000	,158	,000	000	000	000	000	000
		N	786	786	786	703	706	786	706	686	679	678	678	703	687
	Fomento	Correlat	,157*	,142*	225*	,000	,418*	,526*	,262*	,472*	343*	482*	367*	497*	493*
		Sig. (2-t	,000	,000	000	.	,000	,000	,000	,000	000	000	000	000	000
		N	703	703	703	703	702	703	702	682	675	674	674	699	683
	Fomento	Correlat	,169*	,120*	236*	,418*	,000	,317*	,231*	,401*	264*	297*	281*	308*	329*
		Sig. (2-t	,000	,001	000	,000	.	,000	,000	,000	000	000	000	000	000
		N	706	706	706	702	706	706	706	686	679	678	678	703	687
	Relación	Correlat	,264*	,241*	309*	,526*	,317*	1,000	,197*	,372*	335*	419*	264*	453*	408*
		Sig. (2-t	,000	,000	000	,000	,000	.	,000	,000	000	000	000	000	000
		N	786	786	786	703	706	786	706	686	679	678	678	703	687
	Sentido c	Correlat	,026	,007	053	,262*	,231*	,197*	,000	,115*	093*	200*	098*	169*	157*
		Sig. (2-t	,496	,848	158	,000	,000	,000	.	,003	015	000	011	000	000
		N	706	706	706	702	706	706	706	686	679	678	678	703	687
	Relevanc	Correlat	,188*	,145*	229*	,472*	,401*	,372*	,115*	1,000	489*	535*	510*	489*	596*
		Sig. (2-t	,000	,000	000	,000	,000	,000	,003	.	000	000	000	000	000
		N	686	686	686	682	686	686	686	686	675	674	674	686	686
	Profesor criterio	Correlat	,108*	,092*	192*	,343*	,264*	,335*	,093*	,489*	000	415*	488*	309*	428*
		Sig. (2-t	,005	,016	000	,000	,000	,000	,015	,000	.	000	000	000	000
		N	679	679	679	675	679	679	679	675	679	678	678	679	676
	Profesor individuo	Correlat	,186*	,074	185*	,482*	,297*	,419*	,200*	,535*	415*	000	398*	482*	565*
		Sig. (2-t	,000	,054	000	,000	,000	,000	,000	,000	000	.	000	000	000
		N	678	678	678	674	678	678	678	674	678	678	678	678	675
	Profesor	Correlat	,151*	,096*	167*	,367*	,281*	,264*	,098*	,510*	488*	398*	000	303*	455*
		Sig. (2-t	,000	,012	000	,000	,000	,000	,011	,000	000	000	.	000	000
		N	678	678	678	674	678	678	678	674	678	678	678	678	675
	Tareas	Correlat	,129*	,117*	197*	,497*	,308*	,453*	,169*	,489*	309*	482*	303*	000	526*
		Sig. (2-t	,001	,002	000	,000	,000	,000	,000	,000	000	000	000	.	000
		N	703	703	703	699	703	703	703	686	679	678	678	703	687
	Estructur transmisi	Correlat	,111*	,091*	209*	,493*	,329*	,408*	,157*	,596*	428*	565*	455*	526*	000
		Sig. (2-t	,004	,017	000	,000	,000	,000	,000	,000	000	000	000	000	.
		N	687	687	687	683	687	687	687	686	676	675	675	687	687

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

*. Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

Cuestionario posterior a las clases grabadas

Varias de las escalas aplicadas a inicio del año escolar se repiten luego de las clases grabadas, ya que el período de tiempo entre ambas aplicaciones es bastante amplio.

Se observa que en general, hay una buena percepción por parte de los alumnos de las clases grabadas en tanto las emociones asociadas son predominantemente positivas, además de que la escala que evalúa la calidad de las explicaciones efectuadas por el profesor alcanza un promedio de 3,31. Se observan además altos niveles de motivación declarada.

Es importante destacar que existen importantes correlaciones entre el puntaje de la escala “Relación con el profesor” y varias otras escalas como por ejemplo:”Capacidad de explicar del profesor”, p=0.493 (α=0,01), “Emociones positivas asociadas a las clases grabadas, (p=0.512, α=0,01), “Actividades/Clases” percibidas como comprensibles por parte de los estudiantes (0.481, α=0,01), “Actividades que permiten profundizar u organizar el conocimiento” (p=0.449 α=0,01).

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
Emociones positivas	599	1,00	4,00	3,0927	,67464
Emociones negativas	582	1,00	4,00	1,8796	,72005
Relación con el profesor	601	1,00	4,00	2,9589	,58160
Promoción de la capacidad	601	1,00	4,00	2,7361	,82905
Promoción de la autonomía	597	1,00	4,00	2,9647	,69477
Percepción sentido de pertenencia	598	1,00	4,00	3,0921	,73181
Relevancia del contenido	748	1,00	4,00	3,1444	,64215
Capacidad de explicar del prof	600	1,14	4,00	3,3147	,59208
Motivación intrínseca	591	1,00	4,00	3,1605	,70160
Motivación identificada	592	1,00	4,00	3,3032	,69177
Motivación extrínseca	591	1,00	4,00	2,8181	,93310
Motivación introyectada	591	1,00	4,00	3,0116	,68924
Actividades/clases comprensibles	595	1,00	4,00	3,3207	,65802
Actividades permiten profundizar/organizar	596	1,00	4,00	3,1593	,65227
Desmotivación	591	1,00	4,00	1,8796	,73700
Valid N (listwise)	569				

Correlations

			ocion ositiva	ocion gativ	ación profes	noción apaci	noción utono	rcepc ntido tener	levan conte	pacio expli el pro	tivac rínse	tivac ntifica	tivac rínse	tivac oyect	ivida clase mpr ible	ivida ermi fund gani	smo ación
Spear	Emocion	Correla	,000	,401*	,512*	,367*	,462*	,415*	,400*	,378*	,518*	,209*	,014	,394*	454*	488*	372*
		Sig. (2-	.	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,734	,000	000	000	000
		N	599	581	598	598	594	595	599	597	588	589	588	588	592	593	588
	Emocion	Correla	,401*	,000	-,373*	-,183*	-,271*	,175*	-,228*	,484*	,352*	,085*	,098*	,310*	380*	256*	395*
		Sig. (2-	,000	.	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,041	,019	,000	000	000	000
		N	581	582	581	581	578	579	582	580	573	573	573	573	576	576	573
	Relación	Correla	,512*	,373*	,000	,508*	,519*	,400*	,450*	,493*	,481*	,240*	,052	,377*	481*	449*	460*
		Sig. (2-	,000	,000	.	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,204	,000	000	000	000
		N	598	581	601	601	597	598	601	600	591	592	591	591	595	596	591
	Promoci	Correla	,367*	,183*	,508*	,000	,557*	,350*	,470*	,244*	,434*	,272*	,017	,388*	392*	480*	276*
	capacida	Sig. (2-	,000	,000	,000	.	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,673	,000	000	000	000
		N	598	581	601	601	597	598	601	600	591	592	591	591	595	596	591
	Promoci	Correla	,462*	,271*	,519*	,557*	,000	,388*	,446*	,280*	,519*	,323*	,007	,427*	469*	551*	251*
	autonom	Sig. (2-	,000	,000	,000	,000	.	,000	,000	,000	,000	,000	,867	,000	000	000	000
		N	594	578	597	597	597	597	597	597	589	589	589	589	593	593	589
	Percepc	Correla	,415*	,175*	,400*	,350*	,388*	,000	,337*	,251*	,354*	,214*	,044	,248*	346*	315*	167*
	pertener	Sig. (2-	,000	,000	,000	,000	,000	.	,000	,000	,000	,000	,286	,000	000	000	000
		N	595	579	598	598	597	598	598	597	589	589	589	589	593	593	589
	Relevan	Correla	,400*	,228*	,450*	,470*	,446*	,337*	,000	,362*	,454*	,317*	,001	,393*	458*	510*	291*
		Sig. (2-	,000	,000	,000	,000	,000	,000	.	,000	,000	,000	,971	,000	000	000	000
		N	599	582	601	601	597	598	748	600	591	592	591	591	595	596	591
	Capacid	Correla	,378*	,484*	,493*	,244*	,280*	,251*	,362*	,000	,406*	,147*	,156*	,272*	502*	331*	542*
	del prof	Sig. (2-	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	.	,000	,000	,000	,000	000	000	000
		N	597	580	600	600	597	597	600	600	591	592	591	591	595	596	591
	Motivaci	Correla	,518*	,352*	,481*	,434*	,519*	,354*	,454*	,406*	,000	,444*	,005	,544*	571*	591*	433*
		Sig. (2-	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	.	,000	,913	,000	000	000	000
		N	588	573	591	591	589	589	591	591	591	591	591	591	590	590	591
	Motivaci	Correla	,209*	,085*	,240*	,272*	,323*	,214*	,317*	,147*	,444*	,000	,144*	,354*	392*	399*	238*
		Sig. (2-	,000	,041	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	.	,000	,000	000	000	000
		N	589	573	592	592	589	589	592	592	591	592	591	591	590	591	591
	Motivaci	Correla	,014	,098*	-,052	-,017	-,007	,044	,001	,156*	,005	,144*	,000	,009	025	002	204*
		Sig. (2-	,734	,019	,204	,673	,867	,286	,971	,000	,913	,000	.	,832	549	958	000
		N	588	573	591	591	589	589	591	591	591	591	591	591	590	590	591
	Motivaci	Correla	,394*	,310*	,377*	,388*	,427*	,248*	,393*	,272*	,544*	,354*	,009	,000	541*	538*	363*
		Sig. (2-	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,832	.	000	000	000
		N	588	573	591	591	589	589	591	591	591	591	591	591	590	590	591
	Activida	Correla	,454*	,380*	,481*	,392*	,469*	,346*	,458*	,502*	,571*	,392*	,025	,541*	000	663*	459*
	comprer	Sig. (2-	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,549	,000	.	000	000
		N	592	576	595	595	593	593	595	595	590	590	590	590	595	595	590
	Activida	Correla	,488*	,256*	,449*	,480*	,551*	,315*	,510*	,331*	,591*	,399*	,002	,538*	663*	000	370*
	profundi	Sig. (2-	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,958	,000	000	.	000
		N	593	576	596	596	593	593	596	596	590	591	590	590	595	596	590
	Desmoti	Correla	,372*	,395*	-,460*	-,276*	-,251*	,167*	-,291*	,542*	,433*	,238*	,204*	,363*	459*	370*	000
		Sig. (2-	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	000	000	.
		N	588	573	591	591	589	589	591	591	591	591	591	591	590	590	591

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

*. Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

Cuestionario de fin de año escolar

En este cuestionario se incluyeron algunos ítemes que ya habían sido medidos con anterioridad, así como escalas nuevas, tales como uso del tiempo instruccional, uso de estrategias constructivistas, percepción del fomento que hace el docente del uso de distintas vías de solución para resolver problemas, percepción del trabajo grupal realizado en clases, entre otros.

La mayoría de las escalas presentan niveles aceptables de confiabilidad ($\alpha \geq$ a 0.65) y al igual que en los instrumentos anteriores se excluyeron aquellos ítemes que no contribuyen con ésta.

Se observan correlaciones significativas entre el interés por las matemáticas y la relevancia instrumental de las matemáticas de acuerdo con la percepción del alumno p=0.508 (α=0,01). Por su parte la escala de promoción de las competencias en las matemáticas presenta una correlación significativa con la promoción de la autonomía que hace el profesor con los alumnos p=0.542 (α=0,01), al igual que con la percepción que tienen los alumnos acerca de la calidad de las explicaciones realizadas por el profesor p=0.606 (α=0,01).

De la misma manera cabe destacar que la escala relativa a la vinculación de las matemáticas con la vida cotidiana percibida por los alumnos presenta correlaciones significativas tanto con las escalas de fomento de distintas vías de resolución de problemas y de la utilidad percibida por los alumnos en los trabajos grupales con p=0.551(α=0,01) y p=0.556 (α=0,01) respectivamente.

Aparecen correlaciones con la prueba de fin de año escolar: calidad de las explicaciones y puntaje Z de la prueba de fin de año escolar p=0.369 (α=0,01), mientras que la escala de Interés por las matemáticas y el puntaje Z de la prueba de fin de año escolar presentan una correlación de p=0.337 (α=0,01).

Estadísticos descriptivos

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típ.
Escala: interés por la matemáticas	541	1,00	4,00	2,9154	,59989
Escala: fomento de la competencia	533	1,00	4,00	2,9026	,74030
Escala: promoción de la autonomía	534	1,00	4,00	2,9707	,63784
Escala: percepción de pertenencia	534	1,00	4,00	3,0259	,69940
Escala: Relevancia instrumental	541	1,00	4,00	3,4410	,56567
Escala: Relación con la vida cotidiana	536	1,20	4,00	3,1705	,57591
Escala: Relación con el profesor	540	1,00	4,00	2,8801	,67608
Escala: Calidad de las explicaciones	534	1,43	4,00	3,1729	,59633
Escala: Uso del tiempo instruccional	533	1,00	4,00	2,8274	,71847
Escala: Uso de estrategias genético socráticas	541	1,00	4,00	3,0832	,71071
Escala: Vías de solución de problemas	541	1,40	4,00	3,0764	,56982
Escala: Trabajo grupal	517	1,00	4,00	3,1574	,59043
Escala: Comprensión	208	1,00	6,00	4,8375	1,02133
Escala: Uso del error	522	1,00	4,00	3,2245	,68334
Escala: Regulación del profesor	506	1,00	4,00	3,4109	,57626
Escala: Autorregulación	506	1,00	4,00	3,1897	,65370
N válido (según lista)	188				

Los Modelos Lineales Jerárquicos.

La relación entre la calidad de la instrucción y los resultados de aprendizaje se establece principalmente a través de modelos lineales jerárquicos mediante análisis multinivel. Hay una amplia gama de posibilidades para las numerosas y diversas variables evaluadas. Considerando la diversa calidad estadística de los indicadores obtenidos, se han desarrollado análisis que buscan explicar los resultados del postest 1 con antecedentes previos del nivel de alumnos, como son los resultados de la prueba de inteligencia y los rendimientos en el pretest o la prueba de inicio del año escolar, y donde a nivel de profesores se consideran todas las escalas del cuestionario y los indicadores obtenidos del análisis de videos y del test.

Algunas de las escalas del cuestionario de profesores más significativas son:

- importancia que atribuye al aprendizaje de las matemáticas para la vida futura de sus estudiantes
- valoración del buen clima de aprendizaje
- adhesión a situaciones de aprendizaje abiertas y clases innovadoras
- (negativo) creer que sus alumnos tienen poca motivación y capacidad cognitiva
- (negativo) considerar que sus alumnos tienen mal comportamiento y confesar dificultades con la disciplina.
- cooperación de la escuela y entre colegas
- valoración del constructivismo.

Los indicadores desarrollados muestran su contribución a explicar los resultados de aprendizaje, como se aprecia en los modelos ensayados. Como ejemplo se muestra un modelo donde la variable de salida (Y) es el postest 1, a nivel de alumnos se considera el test de comienzo del año escolar y en el nivel de profesor se considera un indicador de su formación (profesor de Enseñanza Media o Básica) y el resultado en el test de conocimiento pedagógico de la matemática.

Level-1 Model

Y = B0 + B1*(ZEIN_TOT) + R

Level-2 Model

B0 = G00 + G01*(MED_BAS) + G02*(ZITEM4) + U0

B1 = G10 + U1

Final estimation of fixed effects

(with robust standard errors)

Fixed Effect	Coefficient	Standard Error	T-ratio	Approx. d.f.	P-value
For INTRCPT1, B0					
INTRCPT2, G00	-0.104481	0.106851	-0.978	15	0.344
MED_BAS, G01	0.341503	0.129633	2.634	15	0.019
ZITEM4, G02	0.098391	0.047905	2.054	15	0.058
For ZEIN_TOT slope, B1					
INTRCPT2, G10	0.127442	0.037506	3.398	17	0.004

CONCLUSIONES

El análisis de la abundante información recopilada muestra con nitidez que se pueden evaluar confiablemente varios elementos de la instrucción matemática y relacionarlos con logros de aprendizaje de los alumnos.

En particular se ha probado que los instrumentos desarrollados con el fin de evaluar conocimiento matemático y conocimiento pedagógico de la matemática, así como la pauta de observación de la corrección matemática y el razonamiento matemático expresado en el aula, han entregado resultados confiables, que muestran impacto de estas variables en resultados de aprendizaje.

El impacto observado es directo, en el sentido que se pueden rastrear con precisión aprendizajes específicos que aumentan con determinados factores de la instrucción.

La completa ausencia de demostraciones en la enseñanza escolar llama profundamente la atención de los investigadores chilenos y alemanes. Esta ausencia no se reduce a un tipo de discurso formal, sino que incluye toda forma de razonamiento deductivo, partiendo de las expresiones que permiten distinguir en una frase, cuales hechos son consecuencia de cuales otros. No es anecdótico que el teorema de Pitágoras no se enuncie siquiera en esos términos y que ninguno de los profesores mencionara la recíproca del teorema, a pesar de que la utilizan en “aplicaciones del teorema de Pitágoras” en una clara confusión acerca del sentido de la implicancia.

En los últimos años se ha vivido una fuerte tendencia a valorar la enseñanza del método utilizado por la ciencia por contraste de la mera enseñanza de hechos o resultados científicos. El rol de la indagación en la enseñanza de la ciencia es completamente paralelo al rol del razonamiento deductivo en la enseñanza de la matemática. Enseñar matemática sin enseñar a encadenar afirmaciones que se deducen una de otra, en una cadena que permite concluir hechos para una generalidad de casos imposibles de verificar experimentalmente, es igualmente criticable que enseñar ciencias naturales sin indagar.

La conciencia de esta necesidad, sin embargo, está muy lejos de los niveles de los que goza la indagación. Y la factibilidad de implementar tal enseñanza parece ser aún más distante, si se considera que 17 de 20 profesores preguntados, no saben en qué consiste una demostración o cual es su valor.

Existe en el mundo una creciente preocupación por este tema, como lo prueban las incorporaciones explícitas a los currículos escolares, la modificación de la pauta de observación de videos del segundo estudio de videos de TIMSS y la convocatoria actual del ICMI a un estudio acerca de las demostraciones en la educación matemática. En Chile, sin embargo, tal preocupación se manifiesta solo entre matemáticos profesionales involucrados en educación, y no parece tener acogida en los profesionales de la educación matemática. Los argumentos basados en la incapacidad de alumnos muy jóvenes para comprender demostraciones contrastan con todos las recomendaciones internacionales acerca de su incorporación temprana y progresiva y con la sorprendente habilidad "natural" de los estudiantes chilenos en el test tomado dentro del primer mes de clases de 7° Básico, donde logran (confiablemente) un 34,46% de éxito analizando demostraciones, que ellos mismos jamás han realizado ni visto antes. Este porcentaje de éxito es muy superior al de todos los otros test rendidos. La observación de videos de clases provee también notables ejemplos de preguntas y razonamientos extraordinariamente sofisticados de los niños, que no alcanzan a ser pesquisados confiablemente por los indicadores desarrollados y que solo pueden reportarse como *casos de estudio*.

La mayoritaria inclusión de una actividad dirigida a "descubrir" el teorema de Pitágoras, es una muestra clara de la existencia de exitosos lineamientos centrales, plasmados en textos de estudio, programas focalizados, perfeccionamiento de profesores, que han logrado imponerse en las aulas.

Esta actividad de indagación debería ser una importante instancia de desarrollo de "razonamiento matemático". Sin embargo, su diseño en el 80% de los casos no llevaba a concluir que la relación del largo de los lados era una propiedad relacionada con la propiedad de ser rectángulo y no con otros hechos. Es decir, las actividades de indagación fueron diseñadas en el 80% de los casos de un modo que no fomentaban el razonamiento matemático. Reconocido el hecho de que el amplio uso de este tipo de actividades no es espontáneo y que fue introducido recientemente, se vislumbra la posibilidad de incluir en estas acciones de fomento, la preocupación por que realmente presten servicio al objetivo de enseñanza de la matemática, haciendo ver las diferencias entre posibles diseños de estas actividades.

El masivo –y abusivo- uso de la expresión "descubrir el teorema de Pitágoras" para referirse al resultado de la actividad de indagación, sin aclarar que se obtiene apenas una conjetura, que no tiene la validez de un teorema, aumenta la confusión acerca de lo que es un teorema, una demostración, una certeza en matemática, lo que es la matemática, su estructura interna, su racionalidad.

Los profesores de Enseñanza Media participantes en el estudio muestran idénticas falencias que los profesores de Enseñanza Básica en relación con el razonamiento matemático en general y con las demostraciones en particular. En entrevistas informales destinadas a buscar explicaciones a esta "ignorancia por desuso" de profesores de Enseñanza Media, cuyos estudios universitarios debieron incluir las demostraciones, aparecieron referencias a demostraciones extremadamente formales, con argumentaciones basadas en los axiomas. Es decir, las demostraciones de las que se tiene memoria aparecen como piezas de museo, totalmente distantes de cualquier práctica cotidiana, que nunca fueron parte de la vida, ni siquiera mientras se cursaba la formación universitaria.

Si bien los profesores de Enseñanza Básica no tienen la formación matemática de un profesor de matemática de Enseñanza Media, no resulta clara la superioridad de estos últimos en varios aspectos. Llama la atención, en particular, las mayores oportunidades de *pensar* que los profesores de Básica ofrecen a sus alumnos, producto del mayor nivel de participación que logran.

El reiterado error de los alumnos frente a la pregunta inicial acerca de una estimación del largo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos de largo 3 y 4 (responden "7", sumando 3 y 4, o "12", multiplicándolos) contrasta con el evidente conocimiento práctico de cualquiera persona de esa edad, aún sin instrucción, en cuanto a que es más corto el camino directo que "dar la vuelta a la esquina" (la suma de los tramos perpendiculares). Este hecho, junto con la escasa reacción de los profesores confirma que en la clase de matemáticas se promueve con mayor énfasis el *calcular* que el *pensar*. Considerando los objetivos declarados universalmente para la educación en matemática y las expectativas formativas que se le asignan, se acentúa la importancia de la observación, que pierde así el carácter anecdótico. Existe abundante investigación internacional (un muy completo compendio se presenta en [19]) de niños y adultos que desarrollan mayores aprendizajes matemáticos fuera de la escuela que dentro de ella, en Brasil, Liberia, Costa de Marfil, Angola, asociados a fenómenos de conflictos culturales con el modelo de enseñanza. Estos casos se refieren a poblaciones claramente distantes de la cultura institucionalizada en el sistema escolar, lo que lleva a rechazar la analogía con la situación observada aquí.

Pero tal rechazo no elimina la sugerencia de posibles conflictos culturales de índole más sofisticada, relacionados con otras marginalidades menos étnicas.

RECOMENDACIONES PARA LA FORMULACIÓN DE POLÍTICAS PÚBLICAS

1. Aplicar los instrumentos desarrollados y calibrados en este proyecto a una muestra más amplia de establecimientos (al menos duplicarla). Para obtener una evidencia sólida, acorde con altos criterios de calidad, capaz de sustentar políticas públicas, se requiere ampliar la muestra. Los desarrollos realizados y los resultados obtenidos en este proyecto otorgan una base de gran consistencia para una extensión del estudio, focalizado en las componentes cuya relevancia se ha manifestado claramente a través del trabajo ya realizado. El carácter cuasiexperimental del estudio y el control de variables que incorpora, permite agregar la información nueva a la ya obtenida, con evidente ahorro de costos en la obtención de una evidencia de alta calidad y potencial de uso eficaz.
2. La baja conciencia que se observa en Chile respecto del valor del razonamiento matemático debe ser enfrentada decididamente, tanto a nivel del currículum escolar como a nivel de la formación de profesores. Las falencias detectadas en este ámbito no tienen reales posibilidades de superación, sin intervenciones centrales deliberadas.

   La generalizada incorporación de actividades de indagación para introducir el teorema tiene el claro sello de provenir de orientaciones centrales (ministeriales) precisas. Esto alienta la posibilidad de mejorar su diseño y clarificar los elementos de razonamiento que se ponen en juego. Por otra parte, es urgente enfrentar la ausencia de demostraciones en clases de matemática y dar señales potentes de la necesidad de su incorporación regular y sistemática. Dada la notable falta de preparación en este ámbito, resulta imprescindible generar ejemplos de demostraciones para distintos niveles escolares, cuidadosamente adecuadas. La capacidad de los profesores de desarrollarlas, comprenderlas y enseñarlas debe incluirse en los estándares e instrumentos de evaluación en uso y que se desarrollen en el futuro.

3. Se hace ver la necesidad de realizar estudios longitudinales con plazos mayores a los aquí contemplados, para poder dar respuestas confiables a varias preguntas importantes relacionadas con el desarrollo de la capacidad de razonar matemáticamente, el impacto de esta capacidad en los niveles de comprensión y su contribución al objetivo de formar ciudadanos capaces de tomar decisiones fundadas racionalmente. El impacto de distintos programas de formación de profesores en los resultados de aprendizaje de sus alumnos es muy difícil de establecer, pues se manifiesta en plazos muy largos y la cantidad de variables que llegan a intervenir en tales extensiones de tiempo difícilmente se pueden controlar. Sin embargo, se sostiene que la capacidad de enseñar a razonar matemáticamente, se adquiere y desarrolla de un modo explícito y específico, y que lo mismo ocurre con su aprendizaje. Por lo tanto es posible estudiar su evolución y dependencia de diversos factores. En particular se puede establecer la relación entre el desarrollo habitual de demostraciones en los programas de formación de profesores y la comprensión matemática alcanzada por esos profesores, así como su capacidad de enseñar a razonar matemáticamente a sus alumnos y el nivel de comprensión que, a su vez, éstos desarrollan.

4. La próxima redefinición de los niveles escolares chilenos (Enseñanza Básica y Enseñanza Media) debería traer aparejada una discusión que caracterice diferenciadamente ambos niveles. La pregunta acerca de cómo es un buen profesor de Enseñanza Básica y cómo se diferencia de un buen profesor de Enseñanza Media, ha sido sorprendentemente poco reflexionada. Esta falencia resulta curiosa por el contraste con el hecho que la población haga esta diferencia y utilice criterios diferentes para elegir una escuela básica y un liceo de Enseñanza Media.

   El Marco para la Buena Enseñanza es inespecífico respecto a las disciplinas y también lo es respecto del nivel. Caracterizar al buen profesor de matemática de Enseñanza Media y al buen profesor de Enseñanza Básica para enseñar matemática son tareas no triviales, cuya relevancia aumentará. Se necesita mucha más investigación acerca del aporte diferenciado de ambos tipos de profesores al aprendizaje de sus alumnos, para generar propuestas que iluminen el debate inminente.

La recomendación que surge de aquí es fomentar tal investigación, y utilizarla en la creación de un Marco para la Buena Enseñanza específico de cada nivel educacional, con tanta especificidad cuanta sea posible.

5. Los resultados del estudio comparativo internacional Teds-M, en el que participa Chile junto con otros 20 países, entregará el año 2009 importantes resultados acerca de la preparación de los profesores de Enseñanza Básica chilenos para enseñar matemática.

   Esos resultados, así como los del presente proyecto y otros proyectos en curso *(por ejemplo, "Oportunidades de adquirir el Conocimiento Pedagógico de la Matemática en las carreras de Educación General Básica"*, del Consejo Superior de Educación) mostrarán previsiblemente la necesidad de aumentar la preparación matemática de estos profesores. Sin embargo, definir con claridad aquel saber disciplinar que se requiere para enseñar con éxito la matemática elemental, y entender como se adquiere y desarrolla tal conocimiento, son tareas delicadas en las que hay poca experiencia y trabajo acumulado en Chile. En países con mayor producción de investigación científica en este campo, hay abundantes resultados que muestran la especificidad de este conocimiento y el gran riesgo de no comprender tal característica.

   La recomendación que surge de estas consideraciones es la de desarrollar investigación y crear estándares acerca del *conocimiento matemático específico de la tarea de enseñar* matemática elemental que debería tener un profesor de Enseñanza Básica (a diferencia del conocimiento matemático de otros usuarios). Crear instrumentos que permitan evaluar la presencia de este conocimiento específico a diversos grados de desarrollo y fomentar su utilización en el monitoreo de procesos de formación inicial y continua de docentes para este nivel educacional.

6. El 13 de Marzo de 2008 se hizo público el informe del panel de 24 expertos de prestigio mundial, que por encargo del presidente de los Estados Unidos, durante dos años estudió la evidencia acumulada en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, con el fin de hacer las recomendaciones que llevaran a mayores logros [2]. El resultado es tan valioso como la idea misma y el extraordinario ejemplo que brinda la sola iniciativa, digna de ser emulada. El informe puntualiza carencias precisas de investigación y pone el foco en temas que deben ser

abordados con rigor y urgencia. Denuncia así mismo mitos y creencias extendidas en el ámbito educacional, que carecen de base científica o que han sido desmentidas por la investigación. Estos resultados son mayoritariamente válidos para Chile.

La importancia de la educación en matemática, las enormes consecuencias a nivel de país y a nivel de las personas de sus éxitos y fracasos, justifican la recomendación de destinar un esfuerzo especial en comprender el problema, dimensionarlo y contribuir a fijar una agenda nacional, a través de la convocatoria a un grupo amplio de expertos nacionales en educación matemática y en matemática, con similar encargo al del panel descrito.

Bibliografía

[1] PISA 2006: Rendimientos de estudiantes de 15 años en Ciencias, Lectura y Matemática. Unidad de Currículum y Evaluación. Gobierno de Chile, Ministerio de Educación.

[2] Foundations for Success. The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel. 2008. U.S. Department of Education.

[3] Klieme, E. & Reusser, K. (2003). Unterrichtsqualität und mathematisches Verständnis im internationalen Vergleich – ein Forschungsprojekt und erste Schritte zur Realisierung. Unterrichtswissenschaft, 31(3), 194–205.

[4] Klieme, E. & Lipowsky, F. (2004). Understanding short-term and long-term effects of instruction. The added value of video based case studies. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego, California.

[5] Brophy, J. E. & Good, T. L. (1986). Teacher behaviour and student achievement. In M. C. Wittrock (Ed.), Handbook of research on teaching (S. 328–375). New York: Macmillan.

[6] Fraser, B. J., Walberg, H. J., Welch, W. W. & Hattie, J. A. (1987). Syntheses of educational productivity research. International Journal of Educational Research, 11, 145–252.

[7] Einsiedler, W. (1997). Unterrichtsqualität und Leistungsentwicklung. Literaturüberblick. In F. E. Weinert & A. Helmke (Hrsg.), Entwicklung im Grundschulalter (S. 225–240). Weinheim: PVU.

[8] Klieme, E., Schümer, G. & Knoll, S. (2001). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: 'Aufgabenkultur' und Unterrichtsgestaltung. In Bundesministerium für Bildung und Forschung

[9] Cobb, P., Wood, T., Yackel, E. & Perlwitz (1992). A follow-up assessment of a second grade problem-centered mathematics project. Educational Studies in Mathematics, 23, 483–504.

[10] Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A. & Human, P. (1997). Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth, NH: Heinemann

[11] Grouws, D. A. & Cebulla, K. J. (2000). Improving student achievement in mathematics. Educational Practices Series (Vol. 4.) Genf: International Academy of Education/International Bureau of Education

[12] Deci, E. L. & Ryan, R. M. (2002). Handbook of self-determination research. Rochester, NY: The University of Rochester Press.

[13] Lipowsky, F., Rakoczy, K.,Vetter, B., Klieme, E., Reusser, K.& Pauli, C. (2005) Quality of geometry instruction and its impact on the achievement of students with different characteristics. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA), Montreal, April 2005.

[14] Shulman, Lee "The Wisdom of Practice: Essays on Teaching, Learning, and Learning to Teach", Jossey-Bass, 2004.

[15] Krauss,S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Jordan, A. (2007), "Pedagogical Content Knowledge of Secondary Mathematics Teachers", enviado a JEP.

[16] Hill, H., Ball, D. L., Schilling, S. (2004) "Developing Measures of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching", The Elementary School Journal, Vol. 105, No 1,11-30.

[17] Hill, H. C., Rowan, B., Ball, D. L. (2005) "Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement", American Educational Research Journal. Vol. 42, No 2, 371-406.

[18] Third International Mathematics and Science Study 1999 Video Study Technical Report, NCES, September 2003.

[19] Hermann-Guenter Hesse, „Lernen innerhalb und ausserhalb der Schule aus interkultureller Perspektive“. Sonderdruck aus Enzyklopaedie der Psychologie, 2007, Hogrefe Verlag fuer Psychologie, Gôttingen, Bern, Toronto, Seattle.

Anexos