



FONIDE – Fondo de Investigación y Desarrollo en Educación

*Departamento de Estudios y Desarrollo. División de Planificación y Presupuesto.
Ministerio de Educación.*

Análisis de las competencias matemáticas en NB1. Caracterización de los niveles de complejidad de las tareas matemáticas.

Investigador Principal: Lorena Espinoza Salfate
Investigadores Secundarios: Joaquim Barbe F., Dinko Mitrovich G.; Horacio Solar B. Daniela Rojas B.; Claudia Matus C; Paula Olguín L.
Institución Adjudicataria: Universidad de Santiago de Chile,
Proyecto FONIDE N°: DED0760

Enero 2009



Índice

1. Introducción	3
2. Contextualización	5
2.1 Evolución del currículo: de la matemática moderna al constructivismo	6
3. Preguntas de investigación	9
4. Objetivos	10
4.1 Objetivo General	10
4.2 Objetivos Específicos	10
5. Marco teórico conceptual	11
5.1 Sobre competencia matemática	12
5.2 El enfoque epistemológico en didáctica de las matemáticas	24
5.3 Hacia el modelo de competencias matemáticas de la investigación	31
5.4 El modelo de competencia	33
6. Metodología	40
6.1 Construcción del Modelo de Competencias Matemáticas de la investigación	41
6.2 Construcción del instrumento Matriz de Competencia	52
6.3 Metodología de validación del instrumento matriz de competencia	54
7. Resultados de la investigación y su relación con los objetivos planteados	65
7.1 En relación al logro del objetivo específico 1 y construcción de un modelo de competencia	65
7.2 En relación al logro del objetivo específico 2	68
7.3 En relación al logro del objetivo específico 3	69
7.4 En relación al logro del objetivo específico 4	114
8. Conclusiones	120
9. Recomendaciones para las políticas públicas	127
Bibliografía	
Anexos	

1. Introducción

El problema que motiva esta investigación es el escaso nivel de aprendizaje matemático que logran los estudiantes de Educación Básica, problema que si bien si inicia en 1° ciclo, se ve agravado en 2° ciclo. Desde la perspectiva teórica que asumimos, este problema se formula en términos de que la actividad matemática que los alumnos aprenden en Básica es rudimentaria, rígida y desarticulada. En investigaciones anteriores hemos puesto de manifiesto que en dicha problemática intervienen, de manera decisiva, aspectos curriculares, pedagógicos e institucionales (Espinoza, Barbé, 2004; Espinoza, *et. al.*, 2008).

La presente investigación pretende indagar en una forma de replantear el curriculum de básica, que ponga el acento en un aprendizaje matemático entendido como sinónimo de *hacer matemáticas*, esto es, como un *proceso de estudio* de problemas auténticos y cercanos a la vida de los estudiantes que, partiendo de la *exploración* de dichos problemas, se produce la necesidad de construir conceptos matemáticos, algoritmos o técnicas, argumentos y/o demostraciones. Postulamos que dicha reformulación del curriculum es posible a partir de un enfoque basado en competencias matemáticas. Así, nuestra investigación pretende identificar, en las tareas matemáticas implícitas de los programas de estudio de matemática del primer ciclo básico, las competencias matemáticas asociadas a ellas, y sus respectivos niveles de complejidad.

Siguiendo la intención curricular actual de presentar un marco que caracterice la evolución o progreso de los aprendizajes matemáticos escolares, nuestra investigación pretende realizar una contribución al sistema educativo respondiendo a dos grandes cuestiones. La primera tiene relación con la necesidad de especificar con más detalle indicadores de los aprendizajes matemáticos de cada nivel, de forma que permitan constatar con mayor precisión qué saben, comprenden y son capaces de hacer los estudiantes en distintos momentos de su trayectoria escolar. En particular, incorporar una visión del aprendizaje que considere central el desarrollo de competencias. La segunda cuestión está relacionada con la necesidad de poner a disposición de los docentes instrumentos que orienten la gestión del proceso de aprendizaje de sus alumnos, indicando no sólo lo que deberían saber y saber hacer los estudiantes al final de un período de enseñanza determinado, sino que además caracterizando el tipo de actividad o tareas matemáticas que serían adecuadas y pertinentes proponer a los niños para que logren tales aprendizajes.

De esta forma, interesa que los productos de nuestra investigación sean útiles tanto para el ámbito de la investigación en educación matemática, así como para el desarrollo curricular y el ejercicio propiamente tal de la práctica docente.

2. Contextualización

En varios países desarrollados se ha experimentado un notable cambio en las formas de concebir y organizar la educación de las matemáticas, adoptando un enfoque que se denomina “competencias matemáticas”. El cambio radica, de manera resumida, en que en el proceso de escolarización de los estudiantes, los contenidos matemáticos deben ser estudiados desde una perspectiva funcional. Con ello se pretende que los estudiantes pongan en práctica sus capacidades en actividades que sean lo más cercana posible a situaciones de la vida real.

Este creciente interés ha provocado varias reformas curriculares; la gran mayoría de los países europeos han redactado el currículo escolar en términos de competencias. Y en consecuencia, las universidades han empezado a dictar cursos orientados a profesores para que puedan incorporar este nuevo enfoque, dando énfasis a la importancia de actividades que permitan desarrollar competencias matemáticas.

El surgimiento de este enfoque se puede explicar en gran medida por las limitaciones de los marcos precedentes y los cambios que se han llevado a cabo. Zabala y Arnau (2007) exponen que dichos cambios han pasado de una visión centrada en contenidos temáticos hacia una visión centrada en los estudiantes. En particular, al observar los procesos de cambio que ha vivido el currículo de matemáticas en los últimos 50 años, se puede constatar que, de un paradigma a otro, los cambios en general han sido extremos y controvertidos.

Para explicar de qué manera los currículos escolares han llegado hasta una aproximación por *competencias*, describiremos la evolución que ha tenido el currículo de matemáticas a partir de la matemática moderna y su influencia en las matemáticas escolares, para luego identificar el surgimiento de las corrientes estructuralista formalista y constructivista, hasta llegar a lo que actualmente se identifica como competencias.

2.1 Evolución del currículo: de la matemática moderna al constructivismo

A fines de la década de los 70 el constructivismo empezó a insertarse prácticamente en la mayoría de las áreas sociales del conocimiento, y en particular, en la Educación Matemática. En los años 90, ya varios países habían adoptado en sus currículos de matemáticas esta visión, siendo los pioneros E.E.U.U. e Inglaterra. En Sudamérica la inserción del constructivismo a la educación se produce a principios de los años 90. Concretamente en Chile la reforma educacional de 1990 (Ministerio de Educación, 2006) tiene como pilar el enfoque constructivista del aprendizaje.

A finales del los 90, en varios países donde a nivel oficial prevalecía el constructivismo, aun se manifestaba un descontento con la educación. En particular, en la enseñanza de la matemática existía la sensación en los representantes de la educación de que el conjunto de esfuerzos que se habían promovido no parecían mostrar mejoras significativas. Esto puede ser debido, entre otras razones, a que las teorías psicológicas que daban buenos resultados en edades tempranas, no lograban traspasarlos a secundaria ni a la enseñanza superior.

Actualmente la orientación curricular de varios países ha adoptado otros criterios para organizar el currículo escolar. Bajo una postura general en que la enseñanza tiene como objetivo preparar ciudadanos críticos y reflexivos, para tal efecto, cada área del conocimiento ha tenido como variable a considerar, estructurar los contenidos mínimos con una connotación de que los sujetos apliquen tales conocimientos en la vida cotidiana. Un marco que ha respondido a estas preocupaciones es el enfoque por *competencia*. De esta manera se ha incorporado el término *competencias* a los marcos curriculares de varios países.

¿Por qué optar por un marco de competencias?, Rico y Lupiáñez (2008) esbozan la idea de que un marco por competencias incentiva a: aprender a hacer, dar significado al aprendizaje, aprendizaje social, aprender a resolver aprendizajes

complejos y cultivar un espíritu crítico. Por otra parte Zabala y Arnau (2007) plantean que la competencia ha de identificar aquello que necesita cualquier persona para dar respuesta a los problemas a los que se enfrentará a lo largo de su vida. Por tanto, *competencia* consistirá en la intervención eficaz, en los diferentes ámbitos de la vida, mediante acciones en las que se movilizan, al mismo tiempo y de manera interrelacionada, componentes actitudinales, procedimentales y conceptuales.

Las propuestas curriculares que se están realizando en el ámbito europeo, se pueden organizar, según Garragori (2007), en tres modalidades:

1. Modelos curriculares en los que se diferencian (y se integran) las competencias generales o transversales y las competencias específicas de las áreas curriculares.

Ejemplo: Reino Unido. El currículo de este país considera las competencias de: Comunicación; Aplicación del cálculo; Tecnologías de la información; Trabajar con otros; Mejorar el aprendizaje y el rendimiento propio y, Resolución de problemas.

2. Modelos curriculares mixtos en los que se contemplan, indistintamente, como competencias clave, tanto competencias transversales como las áreas disciplinares.

Ejemplo: Parlamento europeo (2006) que considera en su currículo las competencias: Comunicación en lengua materna, Comunicación en lenguas extranjeras, Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, Competencia digital, Aprender a aprender y Competencias interpersonales y cívicas, Espíritu emprendedor y Expresión cultural.

3. Modelos curriculares en los que las competencias básicas no se diferencian de las áreas disciplinares.

Ejemplo: Italia que está estructurado en: Lenguas (incluida la lengua materna); Historia, educación cívica y geografía; Matemáticas y ciencias (incluida la educación para la salud y la educación medioambiental); Enseñanza técnica; Enseñanza musical y Educación física.

Si bien los currículos de los países europeos describen de qué manera se potencian las competencias en cada una de las materias, en el caso de las matemáticas no se ha elaborado un análisis detallado.

3. Preguntas de Investigación

Tal como hemos expuesto en los apartados anteriores, es evidente que el Enfoque basado en Competencias es de creciente interés a nivel internacional, particularmente en el ámbito de la Educación Matemática. Asimismo, aunque no existe consenso entre las definiciones de competencias, ni tampoco sobre sus posibles usos, las iniciativas que se han realizado utilizando este enfoque como base, ponen de manifiesto su potencial contribución. Sin embargo, surgen varias interrogantes sobre los alcances y limitaciones del enfoque que requieren ser abordadas mediante rigurosos procesos de investigación para poder valorar su real contribución. A continuación presentamos aquellas preguntas que resultan centrales para nuestra investigación y que, con el trabajo realizado, pretendemos poder empezar a contestar.

En relación al currículo

- Aunque el Marco Curricular y los Programas de Estudio de primer ciclo básico chileno no han sido elaborados siguiendo un enfoque por competencias: ¿es posible identificar el tipo de competencia que movilizan los aprendizajes esperados de los programas, y el nivel de complejidad cognitiva que demandan a los estudiantes?
- ¿Qué competencias matemáticas y a qué nivel de complejidad cognitiva se encuentran implícitas en el Marco Curricular y los Programas de Estudio de primer ciclo básico?
- ¿Cómo se puede determinar el grado de complejidad cognitiva de los procesos que se ponen en funcionamiento al resolver una determinada tarea?

En relación al quehacer docente

- ¿Qué característica debiera tener un instrumento que contribuya a los docentes del 1º ciclo básico a distinguir grados de complejidad, y niveles de progresión en los conocimientos matemáticos que deben enseñar a los niños?
- ¿Cómo contribuye el enfoque por competencias para caracterizar una educación matemática de calidad?

En relación al estado del conocimiento

- ¿Cómo aprovechar los resultados de la investigación y el desarrollo del conocimiento en didáctica de la matemática para vincular los conocimientos matemáticos que se estudian en el 1º ciclo básico con las competencias matemáticas que se espera que los alumnos de este nivel logren?
- ¿Existe algún tipo de relación, por ejemplo jerárquica, entre las distintas competencias matemáticas?

4. Objetivos

Para el logro del propósito de la investigación nos trazamos los siguientes objetivos:

4.1 Objetivo General

Caracterizar el Marco Curricular y los Programas de Estudio de NB1 correspondiente al subsector de Matemática, en base a las competencias matemáticas y niveles de complejidad.

4.2 Objetivos Específicos

- i. Analizar las ocho competencias matemáticas caracterizadas por Niss y usadas en PISA, y establecer una categorización entre ellas.
- ii. Identificar las *tareas matemáticas* de los programas de estudios de NB1 en los Ejes de Números, Operaciones y Resolución de Problemas en lo que a Números y Operaciones se refiere.
- iii. Caracterizar las tareas matemáticas de los programas de estudio de matemática de NB1 en los Ejes temáticos referidos, en términos de las *competencias matemáticas* asociadas a ellas y sus respectivos *niveles de complejidad*. El propósito de este objetivo es principalmente de carácter investigativo.
- iv. Construir un instrumento que organice las tareas matemáticas de cada curso de NB1 en los Ejes temáticos escogidos, asociándoles las competencias predominantes y sus respectivos niveles de complejidad, de tal forma que sea utilizable por el profesor de matemáticas en la planificación y gestión de sus clases. El propósito de este objetivo es principalmente de carácter divulgativo.

5. Marco Teórico Conceptual

Dado que nuestra investigación pretende caracterizar el currículo de matemáticas de NB1 en términos de competencias y de niveles de complejidad, el marco teórico de nuestra propuesta se constituye a partir de herramientas teóricas y prácticas que proporcionan dos grandes vertientes: por una parte, el Enfoque Epistemológico en Didáctica de las Matemáticas y, por otra, el Enfoque basado en Competencias.

El apartado **5.1** se centra en la descripción propiamente tal de competencia matemática: su caracterización, cómo se ha desarrollado en los currículos, y una descripción detallada del estudio PISA que ha sido una fuente de gran importancia para la extensión y conocimiento de la competencia matemática. Asimismo, se discuten los diversos significados que tiene el término competencias. En el apartado **5.2** se presentan las bases teóricas de la didáctica de las matemáticas que servirán como fundamento para realizar la investigación. A partir de estas dos vertientes, en el apartado **5.3** presentamos la postura del equipo de investigadores del Centro Felix Klein, respecto a las competencias y los criterios didácticos para construir el modelo de competencias matemáticas que se utilizará en el desarrollo de la investigación.

5.1 Sobre Competencia Matemática

Dado que la investigación está centrada en las competencias matemáticas, el foco de atención en este apartado es considerar un marco general de propuestas que superen la generalidad que compete a las competencias. Para ello en el sub-apartado 5.1.1 se describe la puesta en marcha de diferentes proyectos en educación matemática en torno a las competencias, para luego en el sub-apartado 5.1.2 estructurar cuatro significados diferentes de competencia matemática que contribuyan a proponer un modelo de competencia matemática acorde con los objetivos de la investigación.

5.1.1. Puesta en marcha de las competencias matemáticas

La noción de competencia matemática se ha expresado concretamente en tres proyectos educativos en educación matemática. Cada uno de estos proyectos se describe a continuación:

Portugal: Proyecto MAT₇₈₉

Paulo Abrantes ha sido uno de los pioneros en reflexionar sobre las competencias y las matemáticas. A mediados de la década del 90, impulsa el proyecto MAT₇₈₉ (Abrantes, 1994), cuyo propósito era potenciar capacidades en los alumnos para resolver situaciones inherentes a la vida diaria. Sus resultados permitieron concretizar los denominados “proyectos matemáticos”. Este proyecto estimuló que Abrantes diseñara una propuesta curricular en matemáticas (Currículo Nacional do Ensino Básico, 2001).

El currículo portugués adoptó el concepto de competencia como uso de conocimiento, dando énfasis en la integración de conocimiento, procedimientos y actitudes. Se proponen las siguientes competencias esenciales:

- *Conocer, en un adecuado nivel, ideas fundamentales y métodos de las matemáticas, y valorar las matemáticas.*

- *Desarrollar la capacidad de usar las matemáticas para resolver problemas, razonar y comunicar tan bien como tener confianza para hacerlas.*

Los aspectos principales de la competencia matemática fueron expresados así:

La competencia matemática que todos los estudiantes deberían desarrollar por la educación básica integra actitudes, habilidades y conocimiento, e incluye:

- *La disposición para pensar matemáticamente, esto es, explorar situaciones problemáticas, buscar patrones, formular y probar conjeturas, generalizaciones, pensar lógicamente;*
- *El placer y la seguridad en sí mismo en el desarrollo de actividades intelectuales que implican el razonamiento matemático, y la concepción que la validez de una afirmación se relaciona más bien con la coherencia de la argumentación lógica que con alguna autoridad externa.*
- *La capacidad para discutir con otros y comunicar el pensamiento matemático, empleando tanto el lenguaje escrito como el oral.*
- *La comprensión de nociones tales como: conjetura, teorema y prueba, así como la comprensión de las consecuencias del empleo de definiciones diferentes.*
- *La disposición para intentar entender la estructura de un problema y la capacidad para desarrollar procesos de resolución de problemas, analizar errores e intentar estrategias alternativas.*
- *La capacidad para decidir sobre la plausibilidad de un resultado y usar, según la situación, procesos mentales computacionales, algoritmos escritos o dispositivos tecnológicos;*
- *La tendencia de ver y apreciar la estructura abstracta base de una situación, de vida diaria, naturaleza o arte, implicando tanto elementos numéricos como geométricos.*

Para el desarrollo de estas competencias se ponen en juego situaciones matemáticas que potencien procesos matemáticos tales como el razonamiento, la argumentación, construcción de modelos, interpretación, etc. La incorporación de actividades “interesantes” que acentúen el desarrollo de las competencias, transversales al desarrollo de contenidos, es fundamental en una orientación por competencias.

Dinamarca: Proyecto KOM

El proyecto KOM (KOM: Competencias y Aprendizaje de las Matemáticas) (Niss, 2002), fue iniciado por el Ministerio de Educación de Dinamarca y otros cuerpos oficiales. Tuvo como propósito crear una plataforma que llevara a cabo una reforma profunda en la enseñanza de las matemáticas de la escuela a la universidad. El matemático Mogens Niss, director del proyecto, fue quien impulsó una caracterización del currículo en matemáticas en términos de competencia.

El proyecto KOM plantea que ser competente en el aspecto personal, profesional o social es dominar (en condiciones y circunstancias justas) los parámetros esenciales de la vida. *La competencia matemática* es la habilidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de situaciones y contextos intra y extra matemáticos, en los que éstas juegan o podrían jugar un papel.

En el proyecto se adoptó una propuesta elaborada anteriormente por Niss para identificar estas competencias (Niss, 1999), y se concretó en ocho competencias, las que se han agrupado en dos partes.

El primer grupo de competencias tiene que ver con la *habilidad de preguntar y contestar las preguntas en y con las matemáticas*:

1- <i>Pensar matemáticamente</i>	2- <i>Plantear y resolver problemas matemáticos</i>
3- <i>Modelizar matemáticamente</i>	4- <i>Razonar matemáticamente</i>

El segundo grupo tiene relación con *la destreza o habilidad en el manejo del lenguaje matemático y de las herramientas matemáticas*:

5. <i>Representar entidades matemáticas</i>	6. <i>Manejar símbolos y formalismos matemáticos</i>
7. <i>Comunicarse en, con, y sobre la matemática</i>	8. <i>Hacer uso de ayudas y herramientas (incluidas las tecnológicas)</i>

Estas ocho competencias tienen que ver con procesos, actividades, y comportamientos mentales o físicos. Un comentario particularmente importante que plantea Niss (2002), es sobre la relación entre las competencias y la temática de la matemática. Una competencia matemática sólo puede desarrollarse y puede ejercerse en el manejo de una materia.

PISA

En la elaboración del sector Matemática de PISA, participó un equipo internacional de expertos en Educación Matemática.

Este equipo, con una tendencia enmarcada en la “Matemática Realista” de Hans Freudenthal (1905-1990), propone un marco teórico para PISA que integra el marco trabajado por De Lange (1999) y las competencias de Niss. De este trabajo surge la noción de *mathematical literacy*, traducido al castellano como alfabetización matemática; sin embargo, en los documentos de PISA en versión castellana (OCDE, 2003, 2006) se ha traducido como Competencia Matemática.

Para el equipo OCDE/PISA, el término «competencia matemática» se ha elegido con el fin de hacer hincapié en el carácter *funcional* del conocimiento matemático y en la posibilidad de aplicarlo de forma variada, reflexiva y perspicaz a una multiplicidad de situaciones de los más diversos tipos. Para que dicho uso sea posible y viable se requiere un considerable volumen de conocimientos y habilidades matemáticas fundamentales y, como es natural, dichas habilidades forman parte de la definición de competencia que considera este equipo.

PISA, al ser un marco con propósitos evaluativos, estructura una serie de elementos necesarios para evaluar la competencia matemática. Desde nuestra perspectiva, considerando el propósito de desarrollar las competencias matemáticas en un marco de aprendizaje y no sólo de evaluación, rescatamos su visión sobre los *procesos matemáticos*.

Los ocho procesos matemáticos que se caracterizan en PISA, son una adaptación de lo que Niss sugirió para la reforma curricular danesa (Niss, 2002) como las

ocho competencias matemáticas. A continuación presentamos las competencias que el marco teórico de PISA utiliza:

- **Pensar y razonar.** Plantear y reconocer preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones matemáticas; entender y manipular el rango y los límites de ciertos conceptos matemáticos.
- **Argumentar.** Saber qué es una prueba matemática y cómo se diferencia de otros tipos de razonamientos; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos y construir y expresar argumentos matemáticos.
- **Comunicar.** Entender y hacerse entender en forma oral o escrita.
- **Construcción de modelos.** Estudiar los procesos de modelización (identificar, reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus procesos)
- **Plantear y resolver problemas.** Plantear, formular, definir y resolver diferentes tipos de problemas matemáticos utilizando una variedad de métodos.
- **Representar.** Traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre ellas; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particulares.
- **Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas.** Decodificar, interpretar y manipular el lenguaje formal y simbólico, entender su relación con el lenguaje natural, utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.
- **Empleo de material y herramientas de apoyo.** Conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TIC's) que facilitan la actividad matemática, y comprender las limitaciones de estas ayudas y herramientas.

En el ejercicio de caracterizar los ítemes en términos de las competencias que ponen en juego, y con ello las capacidades de los alumnos, PISA sugiere otra organización que resulte más operativa para clasificar los ítemes (OCDE, 2003):

La intención del proyecto OCDE/PISA no consiste en desarrollar preguntas de prueba que evalúen las competencias arriba mencionadas por separado. Dichas competencias se entremezclan y a menudo es necesario, al ejercitar las matemáticas, recurrir al mismo tiempo a muchas competencias, de manera que el intentar evaluar las competencias por separado resultaría por lo general una tarea artificial y una compartimentación innecesaria del área. Las diferentes competencias que presenten los alumnos variarán considerablemente de una persona a otra.

Para describir y transmitir de manera productiva las capacidades de los estudiantes, así como sus puntos fuertes y sus puntos débiles desde una perspectiva internacional, es necesaria cierta estructura. Un modo de ofrecerla de una manera comprensible y manejable es describir grupos de competencias a partir de los tipos de requisitos cognitivos necesarios para resolver diferentes problemas matemáticos.

El proyecto OCDE/PISA ha elegido describir las acciones cognitivas que estas competencias engloban de acuerdo a tres grupos de competencia: el grupo de reproducción, el grupo de conexión y el grupo de reflexión.

La reflexión citada ya se encuentra en el proyecto anterior de De Lange (1999) que sustenta el marco teórico de PISA, y es en dicho proyecto en que surge la idea de “*Grupos de competencia*”. Rico y Lupiáñez (2008) explican que las competencias matemáticas dependen fuertemente del sujeto que las posee. Por lo general una tarea puede movilizar diversos procesos, puesto que los sujetos que la resuelven lo pueden hacer por distintas vías. Las respuestas de los sujetos a tareas con distintos niveles de complejidad permiten establecer niveles de competencia entre los estudiantes. En los resultados empíricos de la prueba PISA se confirma la hipótesis de que los estudiantes que resuelven problemas de mayor complejidad, también responden a los problemas de complejidad inferior, por tanto a partir de los resultados de los estudiantes se observa una mayor riqueza de niveles que el planteamiento teórico en tres categorías de complejidad.

Así, los Grupos de Competencia se distinguen por las **demandas cognitivas** implicadas en los procesos requeridos por las tareas que los ejemplifican. En el cuadro 1 se definen los tres *grupos de competencias* y se tratan las maneras en que se interpretan cada una de ellas dentro de cada grupo.

Reproducción	Conexión	Reflexión
Las competencias de este grupo implican esencialmente la reproducción del conocimiento estudiado. Incluyen aquellos que se emplean más frecuentemente en las pruebas estandarizadas y en los libros de texto: conocimiento de hechos, representaciones de problemas comunes, reconocimiento de equivalentes, recopilación de propiedades y objetos matemáticos familiares, ejecución de procedimientos rutinarios, aplicación de destrezas técnicas y de algoritmos habituales, el manejo de expresiones con símbolos y fórmulas establecidas y realización de cálculos.	Las competencias del grupo de <i>conexión</i> se apoyan sobre las del grupo de <i>reproducción</i> , conduciendo a situaciones de solución de problemas que ya no son de mera rutina, pero que aún incluyen escenarios familiares o casi familiares.	Las competencias de este grupo incluyen un elemento de reflexión por parte del estudiante sobre los procesos necesarios o empleados para resolver un problema. Relacionan las capacidades de los alumnos para planificar estrategias de resolución y aplicarlas en escenarios de problema que contienen más elementos y pueden ser más «originales» (o inusuales) que los del grupo de <i>conexión</i> .

5.1.2. ¿Qué son las competencias matemáticas?

Desde que se propone la primera definición de competencia matemática hasta el presente, han ido apareciendo una serie de definiciones y significados de la misma. Hemos organizado las diferentes nociones de competencia matemática en cuatro apartados que expondremos a continuación.

a) Comprensión y Competencia

Una de las discusiones que se ha desarrollado en la literatura para definir el significado de competencia se centra en establecer su relación o incluso su contraposición con la noción de “comprensión”. Para Godino (2002) la competencia atiende a un componente práctico -saber hacer-, mientras que la comprensión, a un componente teórico -saber qué hacer y por qué-. Tanto la

competencia como la comprensión ponen en juego conocimientos. En el primer caso se trata de conocimientos de tipo procedimental, en el segundo, de tipo conceptual y argumentativo. Para este autor concebir un modelo de competencia matemática es un proceso semejante a caracterizar un modelo de comprensión. Si bien se han planteado modelos para la comprensión (Skemp. 1976, extraído de Godino, 2002), éstos no son válidos para explicar un modelo que considera tanto la comprensión como la competencia.

b) Capacidades y Competencia

Argumentar, resolver problemas, representar, son consideradas como competencias matemáticas. Dichas competencias son caracterizaciones, en términos de procesos, de la actividad matemática. Pero ¿cómo desarrollar las competencias? Para Vergnaud (2007), De Lemke (2007), Lupiáñez y Rico (2006, 2008), Gómez y Lupiáñez, (2007) desarrollar las *capacidades* en el estudiante contribuye a las competencias.

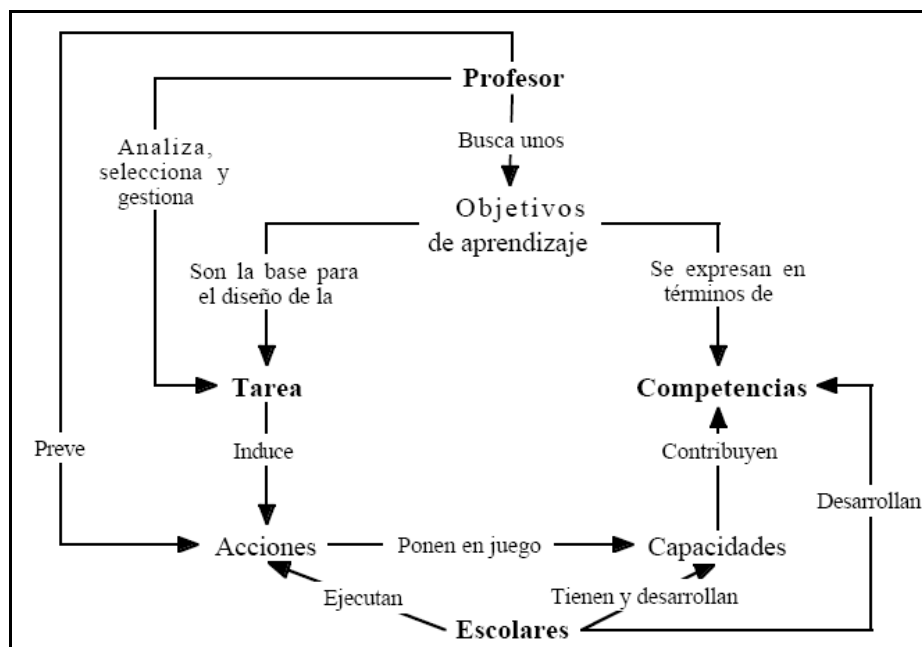
Lupiáñez y Rico (2006, 2008), perteneciente al grupo pensamiento numérico de la Universidad de Granada, describen la diferencia entre capacidad y competencia. Las competencias se conciben como desarrollables a largo plazo en la actividad matemática escolar (un semestre, un curso, un ciclo educativo), mientras que las capacidades son los objetivos en actividad matemática concreta. De esta manera se utiliza el término capacidades para referirse a la actuación de un estudiante con respecto a cierto tipo de tarea.

Para Lupiáñez y Rico, la descripción de PISA respecto a las competencias se asemeja a lo que son las capacidades, con la diferencia que ser competente en matemáticas es un objetivo a largo plazo.

Por tanto, las capacidades que desarrollan los escolares en los distintos temas de matemáticas contribuyen, en mayor o menor medida, a la evolución de sus competencias intelectuales y personales, con especial incidencia en aquellas vinculadas con las matemáticas, y esas capacidades se muestran al afrontar tareas.
(Lupiáñez y Rico, 2006)

Esta relación entre competencias, capacidades y tareas se describe en la Figura 1

Figura 1: Relación entre competencias, capacidades y tareas



Otras perspectivas curriculares plantean experiencias en que se discute la relación entre las competencias y las capacidades. Moreno (2007), en el contexto de la reforma curricular española, arguye que la competencia matemática global se desglosa en un conjunto de procesos o competencias matemáticas que él las define como “unidades de competencia”, las que se formulan en términos de capacidades. El desarrollo de dichas capacidades se destina a la adquisición de la competencia matemática al final de la etapa secundaria obligatoria.

Otro punto que resalta Moreno, relevante para esta investigación, es que la propuesta curricular no debería incluir un conjunto de procesos o competencias matemáticas (identificadas como Unidades de competencia) generales, para poner en práctica cuando se realizan tareas matemáticas situadas en contextos reales; como tampoco los elementos de diseño e implantación.

En el marco curricular chileno (Ministerio de Educación, 2002) en el sector de matemática, los Objetivos Fundamentales de cada eje temático se expresan en término de capacidades.

c) Alfabetización Matemática y Competencia

En PISA se considera la competencia como dominio de estudio, equivalente a la noción de alfabetización matemática, y supone un modo global de entender y hacer matemática, como a su vez comprender la naturaleza del conocimiento matemático. Desarrollar la competencia matemática se convierte en la finalidad principal de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (OCDE, 2003).

Ser competente matemáticamente implica estas nociones que impulsan varios currículos, PISA y diversos proyectos. El discurso que gira en torno a Alfabetización Matemática es de una índole diferente a los significados de competencia descritos. La Competencia Matemática, aquí entendida, se preocupa de dar orientaciones generales para la actividad matemática escolar, pero no está presente en lo que sería el diseño y puesta en marcha de un currículo por competencias, ya que eso depende, tal como sugiere Moreno (2007), directamente de los establecimientos educacionales. Considerar solamente la visión de Alfabetización Matemática de competencia, puede implicar a profesores y agentes educativos a discutir de qué manera poner en práctica dichas orientaciones sin tener herramientas y argumentos sólidos. Y, por como se ha puesto en marcha en los países que han incorporado las competencias, es un hecho que esta ambigüedad ocurre y no está resuelta.

En el Proyecto MAT₇₈₉ de Paulo Abrantes, la noción de competencia matemática que se utilizó tuvo principalmente un componente de alfabetización matemática. También tiene otra interpretación que se ilustra en el siguiente apartado.

d) Procesos y Competencia

En el sub-apartado 3.1.1 se describen siete aspectos que apuntan a lo que es competencia matemática en la reforma curricular de básica en Portugal (Abrantes, 2001). Estos siete aspectos se sintetizan en siete ideas clave: *Pensar matemáticamente; Razonamiento y argumentación matemática; Comunicar matemáticamente; Demostrar; Resolver problemas; Uso de Tic y herramientas de apoyo; Abstracción.*

Esta lista sintetizada sugiere la idea de que potenciar los aspectos de la competencia matemática significa, en definitiva, potenciar *procesos matemáticos*. Estos procesos, identificados como competencias matemáticas, expresan los modos en que los estudiantes deben actuar cuando hacen matemáticas, es decir, los procesos a cuyo dominio debe estar orientada la formación. Estas competencias matemáticas enuncian expectativas de aprendizaje a largo plazo.

Desarrollar *procesos* no es una idea nueva, existen currículos y proyectos que, de alguna manera, han insertado los procesos, incluso en otros términos (habilidades, capacidades). En este apartado se ha preferido describir solamente cuatro casos que reflejen la idea de proceso que interesa ilustrar.

1. Niss (1999) elabora una propuesta de “ocho competencia matemáticas” que se deben considerar en la educación matemática escolar. Esas ocho competencias fueron adaptadas por el estudio PISA y calificadas como procesos matemáticos (OCDE, 2003; 2006). En el marco teórico de PISA (OCDE, 2003) se asocia Competencia Matemática con Alfabetización Matemática. No obstante, en el informe final (OCDE, 2005) se denomina a las competencias como *procesos*. Así, las ocho competencias adoptadas de NISS (2002), pasan a ser consideradas como procesos matemáticos.
2. Las ocho competencias han servido de inspiración tanto para reformas curriculares (Niss, 2002) como para formación de profesores (Lupiáñez y Rico, 2008)
3. Varios marcos curriculares han incorporado procesos matemáticos en su estructura curricular, dos ejemplos son: Canadá (Ministerio de Educación de Ontario, 2005), Comunidad Autónoma de Catalunya (DOGC, 2007).
4. *Los Estándares Norteamericanos*: Una propuesta curricular de gran envergadura y que ha sido muy significativa para nuestro estudio, son los *Principios y Estándares para la Educación Matemática*¹, propuestos por la NCTM (2000). Los *Estándares* son una propuesta curricular impulsada por la

¹ Nos referimos a la propuesta con el término *Estándares*

NCTM², organización profesional de Estados Unidos comprometida con la excelencia de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

La estructura del documento está organizada en tres apartados: *Principios*, *Estándares de Contenido* y *Estándares de proceso*.

Principios: Describen las características particulares de una educación matemática de gran calidad. Estos son: Igualdad; Currículo; Enseñanza; Aprendizaje; Evaluación; y Tecnología.

Estándares de contenido: Describen explícitamente los contenidos que deberían aprender. Éstos aparecen organizados por ejes: Números; Álgebra; Geometría; Medida; Análisis de datos y probabilidad.

Estándares de proceso: Ponen en relieve las formas de adquisición y uso de dichos contenidos. Estos son: Resolución de problemas; Razonamiento y prueba; Comunicación; Conexiones; y Representación.

La lectura y discusión de este documento, junto con los anteriores antecedentes, nos contribuyó significativamente a poner punto final al trabajo de revisión de antecedentes, para dar pie a comenzar a elaborar un modelo de competencia matemática compatible con nuestra visión epistemológica y con los objetivos del estudio.

² National Council of Teachers of Mathematics

5.2 El Enfoque Epistemológico en Didáctica de las Matemáticas

La investigación propuesta se fundamenta en la corriente del que se ha denominado Enfoque Epistemológico en Didáctica de las Matemáticas, iniciado por Guy Brousseau en la década de los 70. Este enfoque se construye a partir de la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau, que actúa como núcleo generador del paradigma, y de los aportes de Yves Chevallard (Transposición didáctica; Teoría Antropológica de lo Didáctico), Michèle Artigue (Reproductibilidad de Situaciones), Régine Douady (Teoría Herramienta-Objeto) y de otros autores. Este enfoque constituye un marco teórico robusto, legitimado, que dispone de resultados sólidamente probados y es seguido por una parte importante de la comunidad científica internacional que investiga en esta área.

Nos apoyamos especialmente en los últimos aportes de Teoría de Situaciones de Guy Brousseau (1990) y de Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard (Chevallard, 1999; Espinoza et al., 2005). Estas herramientas teóricas han permitido analizar el currículo de matemática de primer ciclo de Educación Básica en términos de tareas matemáticas y condiciones de realización.

El enfoque epistemológico considera la didáctica de las matemáticas como la «ciencia de las condiciones de creación y difusión de los conocimientos matemáticos útiles a los hombres y a sus instituciones», (Brousseau, 1994). Postula que la investigación de cualquier problemática didáctica debe incorporar el análisis de los conocimientos matemáticos tal cual son reconstruidos en las instituciones de enseñanza, y su correspondiente proceso de transposición didáctica (Chevallard, 1985). Este proceso consiste en las sucesivas adaptaciones que deben experimentar los conocimientos matemáticos para ser enseñados. El proceso transpositivo plantea la necesidad de ejercer una vigilancia epistemológica sobre la distancia, necesaria, entre el saber matemático de referencia (saber-sabio) y el saber efectivamente enseñado.

Se sostiene que aprender matemáticas consiste esencialmente en hacer matemáticas y, por tanto, en la realización de una práctica. Aprender matemáticas comporta la realización de un proceso que sitúa en el corazón del quehacer del que aprende el estudio de problemas articulados entre sí, más allá de la sola resolución de problemas aislados y, en este sentido, consiste en “ocuparse de problemas”. Según la teoría Antropológica de lo Didáctico, este proceso de estudio está constituido por distintas dimensiones o momentos del trabajo que realizan profesor y alumnos, que van desde la exploración auténtica de problemas, a la justificación y sistematización de lo matemáticamente construido, pasando por el trabajo de rutinización de los procedimientos que permite a los estudiantes no solo resolverlos, sino que plantear nuevos problemas. Un postulado básico de la didáctica de las matemáticas plantea que, para que los estudiantes encuentren el verdadero sentido y significado de los contenidos matemáticos que estudian, deben necesariamente enfrentarse con las situaciones problemáticas características de cada uno de ellos, es decir situaciones que, sin recurrir a los conocimientos relativos a dichos contenidos, no podrían ser resueltas. En este sentido el trabajo de la didáctica consiste en recuperar y analizar las situaciones originarias que provocaron la emergencia y construcción de los contenidos matemáticos, para luego adaptarlas de tal forma que sean abordables por alumnos de una determinada institución de enseñanza (Bosch, et al., 2003).

Por ello, uno de los propósitos de la didáctica de las matemáticas es justamente el de caracterizar las **condiciones** bajo las cuales los aprendizajes matemáticos específicos pueden desarrollarse y, en función de ellas, proponer situaciones, dispositivos, medios y orientaciones de gestión, para que se logren efectivamente en la escuela.

Un criterio central para elaborar situaciones de aprendizaje para tal efecto consiste en elegir aquellas que potencialmente puedan generar situaciones de aprendizaje fundamentales en el sentido de G. Brousseau (1990). Esto es, una situación problemática que el niño enfrenta sin la intervención directa del profesor, a través de su interacción con un medio que le devuelve información sobre la adecuación de sus acciones frente al problema, cada vez que lo manipula. En este medio

intervienen ciertas **condiciones o variables didácticas** que, al ser controladas adecuadamente por el profesor, “obligan” al niño a progresar en sus acciones hasta lograr la construcción del conocimiento matemático esperado.

La teoría de Situaciones Didácticas distingue, al interior del proceso de enseñanza-aprendizaje, los momentos en los que el alumno trabaja sin la intervención directa del profesor en condiciones generadas por el profesor para que los niños construyan efectivamente matemáticas en el aula, de los momentos en que el profesor interviene directamente sobre el trabajo de los niños. En el primer caso, los alumnos se enfrentan a la exploración y estudio de problemas mediante la interacción con sus compañeros y con un medio, rigurosamente estructurado, que les devuelve información sobre la adecuación de las acciones realizadas frente al problema en estudio. Este tipo de situaciones, denominadas *a-didácticas*, resultan ser esenciales para que los estudiantes construyan conocimiento matemático significativo. En el segundo caso, se requiere de la intervención del profesor para institucionalizar, es decir sistematizar y legitimar el conocimiento, reconociéndolo como matemático. En este tipo de situaciones la participación del alumno también es central, pero requiere de la gestión directa del profesor, y por ello se denominan *situaciones didácticas*. Parte fundamental de la participación del alumno la constituye la validación de la producción de soluciones a las situaciones problemáticas abordadas. Por validación se entiende el proceso a través del cual un alumno puede determinar si su producción ha sido adecuada o no y, especialmente, argumentar el por qué de su adecuación. Se trata de un modo de control de la producción sustentado en conocimiento matemático que es típico del quehacer matemático y que puede ser implementado en la escuela.

La teoría antropológica de lo didáctico, en adelante TAD, por su parte, adopta un punto de vista institucional de la problemática didáctica, situándola dentro del marco más general de las prácticas humanas.

Al considerar desde una perspectiva global el problema escolar en torno a las matemáticas, se observa que la sociedad se esfuerza por lograr condiciones de bienestar para sus miembros, y especialmente para las generaciones más

jóvenes, a través de la creación y consecuente difusión de *obras matemáticas*, intentando por ello poner el conocimiento correcto en el lugar correcto. Según la TAD, hay principalmente dos formas de hacer esto. La primera ya ha sido ampliamente criticada: consiste en difundir *obras* alejadas de sus razones de ser, de sus sentidos originales, como si las obras fueran significativas por sí mismas. La segunda forma consiste en asumir que las obras “viajan” a través de la sociedad por la necesidad de resolver problemas o para revolver cuestiones. Básicamente, la situación puede ser resumida así: se plantea una cuestión Q y se intenta buscar una respuesta R. La cuestión podría ser, por ejemplo, “¿cómo podemos vivir juntos en paz?” o “¿cómo podemos realizar cálculos con números grandes?”, esto es con números con los que la calculadora de mi teléfono celular no puede trabajar. Estas cuestiones son cuestiones “prácticas”, porque responderlas equivale a proporcionar una “técnica”. La respuesta a la primera pregunta permitiría a la gente vivir juntos pacíficamente, y, en el segundo caso, permitiría a la gente realizar cálculos con grandes números de modo efectivo. Pero una respuesta no puede ser reducida sólo a la *praxis*; ésta requiere alguna forma de justificación, de modo que cualquier respuesta debe ser pensada como una parte de una obra completa, es decir de una organización que contenga sus elementos prácticos y teóricos. Así, para justificar una técnica de cálculo con números grandes, se tendrá que recurrir a la aritmética básica.

Así, se considera la matemática como una producción social y cultural que responde a cuestiones problemáticas planteadas; por tanto, cuando en la escuela se enseña cualquier contenido de las matemáticas, se está transmitiendo parte de una obra humana, se está transmitiendo cultura. De esta forma, la enseñanza debe plantearse la comunicación de un quehacer o una práctica que conserve los rasgos esenciales de la práctica matemática. Esto exige analizar cuáles son las formas de pensar y producir en matemática que pueden comunicarse a través de la escuela.

Una primera cuestión plantea que es necesario que las matemáticas sean estudiadas porque resuelven cuestiones problemáticas importantes, en particular para la vida. Esta exigencia es descrita como la necesidad de conservar la

funcionalidad de los conocimientos, esto es, que respondan a una necesidad, y que sirvan para “hacer cosas”. Otra cuestión esencial es la de la justificación de las producciones por parte de los alumnos. La matemática brinda la posibilidad de tener un vínculo particular con la verdad. Los alumnos deben aprender a usar el conocimiento como medio para fundamentar su trabajo. Esto sería un modo de control de la producción sustentado en conocimiento matemático; es algo típico del quehacer matemático y es posible de comunicar a través de la escuela.

Para modelizar el conocimiento matemático, la TAD utiliza la noción de *organización* o *praxeología* matemática, o bien de *obra matemática*. Una organización matemática, en adelante OM, nace como respuesta a un tipo de cuestiones problemáticas y está constituida por cuatro categorías de elementos: tipos de tareas, elementos técnicos, tecnológicos y teóricos. Las técnicas generan nuevos problemas y apelan a nuevos resultados tecnológicos que, a su vez, permiten desarrollar técnicas ya establecidas, así como abordar y plantear nuevas cuestiones, (Chevallard *et al.*, 1997). Esta primera modelización hace referencia a una constitución estática o estructural de la actividad matemática.

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas aparecen como medios para la construcción de OM en la escuela; ambos procesos están incluidos dentro de un proyecto común que esta teoría denomina el *proceso de estudio de las matemáticas* (Chevallard *et al.*, 1997). Este proceso es modelizado a través de la teoría de los momentos didácticos. Esta segunda modelización hace referencia al aspecto dinámico o funcional de la actividad matemática, que puede ser descrita a través de seis momentos. Los momentos se distribuyen de forma dispersa a lo largo del proceso de estudio, pueden aparecer más de una vez en dicho proceso, e incluso pueden coexistir entre ellos. Estos momentos son: momento del primer encuentro, exploratorio, del trabajo de la técnica, tecnológico-teórico, de la institucionalización y de la evaluación.

A pesar de la relación intrincada que existe entre lo matemático y lo didáctico, parece razonable que el análisis de la actividad matemática empiece precisamente por el análisis de las OM que emergen de esta actividad (Chevallard, 2004). Así,

en nuestra investigación analizamos las organizaciones matemáticas, tales como éstas han sido propuestas en los actuales programas de estudio del primer ciclo básico. Este análisis curricular ha permitido identificar las *tareas matemáticas* asociadas a los aprendizajes esperados, indicadores y actividades genéricas propuestas. Asimismo, se ha podido identificar las condiciones de realización de las tareas que, realizadas bajo dichas condiciones, promoverán que los alumnos alcancen dichos aprendizajes.

Cada organización matemática es el resultado de un proceso de estudio, realizado en el seno de una institución determinada. Dicha institución impone restricciones específicas para la realización del estudio; una estructura particular y unas condiciones de realización determinadas. Este segundo tipo de análisis, que aborda la dimensión fáctica, es realizado mediante las nociones de praxeología didáctica, tanto del profesor como del alumno, la teoría de los momentos didácticos y el contrato didáctico.

La noción de praxeología didáctica del profesor nos permite describir su actividad docente en términos de su componente práctica (el “saber-hacer” o praxis) y su componente teórica y justificadora (el “saber” o logos). Podemos distinguir, a su vez, dos niveles de análisis de dicha práctica. El primero se centra en estudiar los tipos de tareas y técnicas didácticas que utiliza el profesor para organizar y dirigir el proceso de estudio de una OM específica en una institución de enseñanza determinada. Al lado de las técnicas didácticas, se sitúan, en un segundo nivel, las tecnologías y elementos teóricos que permiten al profesor describir, justificar, organizar y dirigir su práctica. Análogamente, la noción de praxeología didáctica del alumno nos permite describir su actividad en términos de su componente práctica y su componente teórica.

Realizar el estudio de una OM forma parte de un proyecto común entre profesor y alumnos, que es establecido dentro del marco más amplio de una institución de enseñanza específica. En el desarrollo y evolución de dicho proceso se van estableciendo, a través de un proceso de negociación más o menos implícito entre los participantes de dicho proyecto, las normas que van a regir el funcionamiento y

desarrollo del estudio. Se van negociando y estableciendo las cláusulas del contrato didáctico que adjudican y distribuyen las responsabilidades tanto al profesor como a los alumnos (Brousseau, 1990). Estas reglas delimitan qué cosas se pueden hacer durante el estudio de una OM determinada y cuáles no están permitidas. Así, cuando existe un proceder más o menos generalizado en los estudiantes, es probable que dicho comportamiento obedezca a ciertas normas del contrato didáctico, o a las transgresiones de éstas, las que han sido designadas por Guy Brousseau como rupturas de contrato.

Se constata que el contrato didáctico está influenciado por las restricciones que la institución de enseñanza le impone. La práctica del profesor se encuentra sometida a todo tipo de imposiciones institucionales que gobiernan los aspectos generales que afectan el entorno del estudio, es decir, los aspectos no específicos del contenido matemático en estudio, y que constituyen lo que Chevallard ha denominado contrato escolar (Chevallard, et al, 1997). Estas imposiciones institucionales ejercen igualmente fuertes influencias sobre la práctica del alumno.

La didáctica de las matemáticas utiliza, en sus esfuerzos de modelización, un enfoque sistémico; considera el sistema didáctico formado por tres polos: el profesor, el alumno y el saber, y estudia las interacciones y fenómenos que se producen entre el profesor y el alumno, o un grupo de alumnos, a propósito de la transmisión de un saber matemático. Puesto que se trata de un proyecto social de aprendizaje, la acción de enseñar es intencionada, y está sujeta a las opciones culturales que realiza la institución escolar³.

Lo que va a definir al alumno y al profesor como tales, es el proyecto del sistema didáctico, que consiste en pasar de un estado inicial a un estado final en relación con el saber. Las posiciones del alumno y el profesor son claramente asimétricas en el sistema didáctico, ya que en el estado inicial el profesor mantiene una relación privilegiada con el saber, en tanto que el alumno, si bien mantiene relación con el saber antes de la enseñanza, ésta es poco adecuada. En el estado final, el profesor desaparece y el alumno mantiene, de forma autónoma, una

³ Se utiliza la palabra "escolar" en un sentido amplio, incluyendo en él todos los niveles educativos, desde la enseñanza básica hasta la enseñanza universitaria.

relación adecuada con el saber. Por ello, Brousseau afirma que el sistema didáctico contiene, desde el principio, el proyecto de su propia extinción.

5.3 Hacia el Modelo de Competencias Matemáticas de la investigación

Recordemos aquí la definición que propone PISA sobre competencia matemática.

Competencia matemática es una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.

(OCDE, 2006)

Esta definición, que rescata el espíritu esencial de competencia, es amplia y general y, además, no alude a cómo se podría desarrollar la competencia. Hemos acordado utilizarla para referirnos a una noción general de “la competencia matemática”, y que usaremos como sinónimo de Alfabetización Matemática.

En definitiva el significado que se atribuye en la versión inglesa de PISA a las competencias, es la que nosotros coincidimos. Las ocho competencias, y su agrupación en tres niveles de complejidad cognitiva, se pueden interpretar como *procesos matemáticos*.

Nos parece más acertado identificar la noción de *proceso* con *competencia matemática específica*. De esta manera, es *el dominio de los procesos el que permite que la persona se desarrolle competentemente*. De esta forma, la alfabetización matemática se logra mediante el desarrollo de competencias matemáticas. Algunos de estos procesos, que se asemejan a las competencias propuestas por Niss, son:

- La capacidad para *resolver problemas* (aplicar conocimientos matemáticos, utilizar o crear modelos, utilizar diversas destrezas y estrategias, o crear procedimientos no conocidos de antemano).

- La capacidad para representar (evocar representaciones, traducir entre ellas, elegir entre varias según la situación).
- La capacidad para razonar y Argumentar (formular conjeturas matemáticas, desarrollar y evaluar argumentos, elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y demostración).

Algunas descripciones de los tres procesos mencionados son extraídas de *Los Estándares* de la NCTM (2003). Esta propuesta de describir un currículo en términos de proceso, representa algo único y nuevo. No hay indicios de propuestas curriculares de esta magnitud que describan el aula en términos de procesos. Para cada una de las cuatro etapas educativas (Pre-K-2; 3-5; 6-8; 9-12) se describe cómo debería darse y cuál es el papel del profesor en el desarrollo del proceso. No obstante, no hay un apartado que relacione los estándares de contenido con los estándares de procesos. Para nosotros no cruzar los dos tipos de estándares constituye una limitación, puesto que una planificación de una unidad didáctica debería suponer la organización de la actividad que se propondrá a los alumnos en función de los procesos que ella ponga en funcionamiento.

Retornando a PISA, su enfoque funcional considera prioritario el desarrollo de ciertos procesos cognitivos y capacidades en las fases de matematización. Las expectativas de aprendizaje se centran en delimitar esos procesos y capacidades de los estudiantes para enfrentarse con problemas matemáticos en contextos variados.

En síntesis, estos trabajos plantean que la competencia matemática es saber matemáticas y saber hacer cosas con ellas. Si bien estamos de acuerdo con esta filosofía, en nuestro modelo consideraremos además aspectos que orienten sobre cómo se pueden desarrollar dichos procesos.

5.4 El Modelo de Competencia

En este proyecto se postula que un enfoque desde la perspectiva de competencias matemáticas, aplicado al currículo chileno, podría realizar una contribución significativa. Nos propusimos construir un instrumento de planificación y evaluación para el profesor, que considerara las competencias matemáticas. Presentamos aquí las ideas clave del modelo de competencia matemática construido en la investigación, el que resulta ser acorde con nuestra visión epistemológica y, al mismo tiempo, apropiado para los objetivos de la investigación.

Luego de la revisión exhaustiva realizada sobre los distintos enfoques e iniciativas construidas en torno a competencia matemática, hemos optado por construir un modelo de competencia que se basa tanto en la propuesta realizada por PISA como en los Estándares de la NCTM. Valoramos de ambos enfoques la forma en que hacen hincapié al aspecto *funcional* de los conocimientos y la exigencia irrenunciable de que dicho conocimiento sea utilizado en el estudio y resolución de problemas cercanos a la vida de los estudiantes. El enfoque de PISA nos pareció que no se ajustaba del todo a los propósitos de nuestra investigación ya que, además de interesarnos en los aspectos evaluativos de las competencias, esto es cómo poner de manifiesto el grado de desarrollo que tienen los estudiantes de determinadas competencias, también nos proponemos poner de manifiesto cómo, por medio de qué acciones, pueden ser desarrolladas. Por otra parte, el enfoque utilizado por los Estándares se ajusta sustantivamente a nuestros propósitos, ya que hacen énfasis en los *procesos matemáticos* o competencias matemáticas. Sin embargo, no articula de manera explícita los *procesos* con los contenidos matemáticos.

Consideramos que los procesos matemáticos deben tener un papel más destacado, por ello hay que establecer una estructura o estrategia articuladora entre las expectativas de aprendizaje- objetivos específicos- y las competencias.

A partir de los antecedentes, rescatamos algunas ideas ya explicadas, que servirán para detallar los principios que sustentan la noción de competencia matemática.

- Proponemos como punto de partida que la competencia matemática, entendida como *Alfabetización Matemática*, se desarrolla por medio de los *procesos matemáticos*.
- La preocupación por desarrollar procesos matemáticos en la enseñanza de las matemáticas no es nueva; en efecto, se puede hacer una extensa lista de procesos definidos como matemáticos (clasificar, analizar, resolver, conjeturar, razonar, visualizar, calcular, etc.) para realizar tareas tanto de planificación como de evaluación.
- Existen una extensa evidencia de publicaciones, y/o marcos curriculares que hubiesen abordado un camino similar de caracterizar competencias entendido como procesos. Entre algunas que ya han sido nombradas en este estudio se encuentran: PISA/OCDE (2003, 2006) que ha mantenido la utilización de las ocho competencias como parte de su marco teórico; Marcos curriculares que han adoptado procesos matemáticos para estructurar el currículo: Canadá (Ministerio de Educación de Ontario, 2005), Comunidad Autónoma de Catalunya (DOGC, 2007); Principios y Estándares para la Educación Matemática propuestos por la NCTM (2000).

Para identificar los *procesos matemáticos* que caracterizan la actividad matemática escolar chilena, discutimos cuáles serían las competencias que nos permitirían alcanzar nuestros propósitos, en particular organizar el currículo.

A partir de principalmente *Los Estándares NCTM* y *PISA*, acordamos elegir y optar por *procesos matemáticos nucleares* que denominamos **competencias organizadoras del currículo**. Estas competencias para ser organizadoras tenían que cumplir cuatro requisitos:

1. Integraran una serie de procesos matemáticos específicos que aludieran a una competencia nuclear.
2. No estén siempre presentes en toda actividad matemática, es decir que no sean transversales y, por tanto, permitieran discriminar y organizar las actividades matemáticas en función de las competencias que desarrollan.
3. Fueran significativas para la actividad matemática escolar.
4. Finalmente, consideradas en su conjunto, recubrieran la actividad matemática.

Así por ejemplo, los procesos de conjeturar, sintetizar, razonar, demostrar, argumentar y comunicar; bajo estos cuatro requisitos, son parte de la competencia organizadora del currículo que denominamos *Razonar y argumentar*. Del mismo modo, descifrar, interpretar, manipular, calcular y comunicar, forman parte de la competencia *Manipulación de expresiones matemáticas*.

En definitiva, hemos establecido cuatro competencias que consideramos como el modelo de la actividad matemática escolar. El cuadro 2 muestra la caracterización, en términos de los *procesos matemáticos* que componen cada una de las competencias⁴.

⁴ La descripción de las cuatro competencias, aparece en el apartado de Metodología

Cuadro 2: Caracterización de las competencias matemáticas

Competencia	Procesos asociados
Resolución de problemas	Entender el problema; modelizar; desarrollar y/o adaptar estrategias para resolver problemas; aplicar estrategias para resolver el problema; interpretar la respuesta en el contexto del problema; formular problemas.
Representación	Entender y utilizar las relaciones entre diversas representaciones de la misma entidad, escoger y traducir representaciones en otras, usar representaciones para interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos (construcción del modelo intermedio).
Razonamiento y Argumentación	Formular e investigar conjeturas matemáticas a partir de regularidades; sintetizar, sistematizar y generalizar conjeturas matemáticas; elegir y utilizar varios tipos de razonamientos y/o demostraciones; desarrollar y evaluar argumentos; comunicar su pensamiento matemático.
Manipulación de expresiones matemáticas	Descifrar e interpretar expresiones matemáticas y/o geométricas; usar y/o manipular expresiones matemáticas; calcular y/o cuantificar; comunicar la manipulación de expresiones y cálculos.

5.4.1 Relación entre las Tareas y Competencias Matemáticas

Adaptando las ideas de Rico y Lupiáñez (2008) que relacionan los objetivos y las competencias; asimismo, nuestro marco se estructura en base a las *tareas matemáticas* y *competencias matemáticas*. Las tareas y competencias matemáticas poseen características comunes en el sentido de que ambos expresan lo que espera que logren, desarrollen y utilicen los estudiantes. Expresan una petición de mejora y desarrollo, demandan un incremento de la riqueza cognitiva de los estudiantes. Tareas y competencias se basan en conocimientos, procesos y acciones.

Pero, por otra parte, están las características que los distinguen:

- Las tareas tienen tanto un carácter específico relativo a un contenido así como un conjunto de acciones sobre un contenido matemático concreto; las

competencias, en cambio, integran y aplican diversos conocimientos, movilizan una mayor riqueza cognitiva del estudiante, incluyendo actitudes, y se pone en juego abordar tareas complejas en situaciones complejas.

- Las tareas matemáticas tienen un ámbito de verificación a corto plazo, mientras que las competencias expresan expectativas de aprendizaje a largo plazo, que se desarrollan paulatinamente a lo largo de todo un periodo de formación.

La relación entre tareas y competencias tiene una implicación de cara a la actuación del profesor cuando planifica sus clases. Nuevamente adaptamos la propuesta de Rico y Lupiáñez (2008) para señalar de qué manera implica al profesorado planificar por competencias:

- Permite establecer una relación entre el currículo global de todo nivel educativo con el nivel local relativo a un tema específico. Partiendo de directrices generales sobre las competencias que se expresan en el currículo general, su comprensión se pone de manifiesto en el aprendizaje de temas concretos.
- Se seleccionan cuáles tareas nucleares deben desarrollar los estudiantes de un nivel para alcanzar un tema concreto y al mismo tiempo se realiza la descripción de tareas específicas. Los temas matemáticos se concretan en una serie de acciones que se espera que los estudiantes dominen al finalizar el aprendizaje de una unidad didáctica. Asimismo, se describe en qué medida cada una de estas tareas contribuye a cada una de las competencias matemáticas.
- Por último, los profesores disponen de criterios para estudiar, seleccionar y diseñar tareas sobre las que trabajarán los estudiantes relativos al tema concreto que se planifica.

Otro punto a resaltar es que las competencias orientan el diseño y selección de nuevas tareas, dado que expresan prioridades y expectativas de aprendizaje para las matemáticas. El desarrollo de competencias como Argumentar y Representar

necesita de tareas que movilicen en los estudiantes determinadas capacidades, como por ejemplo, justificar la utilidad de los procedimientos empleados para alcanzar unos determinados resultados o relacionar diferentes representaciones.

6. Metodología

Entre las acciones realizadas para cumplir con los objetivos de esta investigación hemos analizado el currículo en base a tareas matemáticas, utilizando las herramientas proporcionadas por el Enfoque Epistemológico en Didáctica de las Matemáticas (Brousseau, 1990; Chevallard, 1999). Así, hemos identificado parte de las organizaciones matemáticas del currículo vigente en NB1 que componen los ejes Números, Operaciones y Resolución de Problemas en lo que a Números y Operaciones se refiere. Paralelamente, hemos analizado las competencias propuestas por Niss y utilizadas en PISA (OCDE, 2006; Niss 2002), y los procesos impulsados en la propuesta curricular de la NCTM (Principios y Estándares para la Educación Matemática, 2003). Los “estándares de procesos” tienen similares características que las competencias. En efecto, se manifiesta una similitud entre los descriptores de los estándares respecto a las competencias.

Los insumos principales para cumplir con los objetivos de esta investigación se organizan en tres grandes categorías. La primera, relacionada con el análisis del currículo en base a tareas matemáticas. La segunda categoría, relacionada con el análisis de las competencias matemáticas propuestas por Niss y utilizadas por PISA, y con el análisis de la propuesta curricular de la NCTM. La tercera, relacionada con la recolección de evidencia para la validación de la interpretación del currículo a partir del modelo de competencia. Recordemos aquí que nuestro objetivo general de investigación consiste en caracterizar las tareas matemáticas de los programas de estudio de matemática de NB1 en términos de competencias matemáticas y niveles de complejidad. Como producto de esta investigación se pretende construir el instrumento **matriz de competencias**. A continuación detallamos los procesos de investigación y análisis llevados a cabo para el cumplimiento de los objetivos de esta investigación y que forman parte de la metodología usada en este proyecto.

6.1 Construcción del Modelo de Competencias Matemáticas de la investigación

Para precisar la definición de las competencias que se utilizaron en la investigación, se consideraron como base los siguientes antecedentes:

- El análisis de las ocho competencias propuestas por Niss (2002) y usadas por PISA (OCDE, 2003) en función de los procesos que involucran dichas competencias y los niveles de complejidad que se pueden establecer en ellas.
- De la misma forma analizamos, en función de los procesos matemáticos y niveles de complejidad, los Estándares propuestos por la NCTM (2003), estudiando en cada etapa tanto estándares de contenido como estándares de proceso.
- Complementamos los resultados de ambos análisis comparando las competencias de PISA y los estándares de proceso de la NCTM con otros currículos basados en competencias, Currículo de Canadá Ministerio de Educación de Ontario, 2005), Comunidad Autónoma de Catalunya (DOGC, 2007).

Dado que el propósito de nuestra investigación era caracterizar el currículo chileno en función de las competencias matemáticas, consideramos necesario seleccionar de las ocho competencias definidas por Niss, y de los cinco estándares propuestos por la NCTM, un conjunto de competencias, que designamos *competencias organizadoras del currículo*. Esta elección se realizó siguiendo unos criterios acordes con el objetivo de nuestro trabajo.

Así, hemos llegado a definir unas *competencias organizadoras del currículo*, que corresponden a aquellas que: permiten articular el currículo; los procesos que las componen tienen alta significancia para las diversas actividades matemáticas; no están presentes en toda actividad matemática y por tanto permiten discriminar los procesos que desarrolla una actividad matemática determinada; y consideradas en

su conjunto, recubren toda la actividad matemática. Así, determinamos cuatro *competencias organizadoras del currículo*⁵.

Cada una de estas cuatro competencias fue caracterizada en función de los *procesos matemáticos* que se ponen en juego cuando un estudiante desarrolla una tarea matemática con ciertas condiciones didácticas de realización. Esta determinación de caracterizar las competencias matemáticas a partir de los procesos tiene como supuesto que la realización de estos procesos en forma gradual y sistemática permitirá desarrollar las capacidades de un estudiante. La necesidad de caracterizar estos procesos por grado de complejidad nos llevó a buscar aspectos propios del proceso y de la actividad matemática que cuando se modifican requieren del estudiante un mayor esfuerzo cognitivo. Esta característica la encontramos presente en las condiciones didácticas de realización de la tarea matemática, y es en este aspecto en que nos fijamos para determinar el grado de complejidad cognitiva que se pone de manifiesto en un determinado proceso matemático al desarrollar cierta tarea matemática. El grado de complejidad cognitiva que supone a los estudiantes desarrollar dichos procesos, los hemos caracterizado en tres niveles utilizando la misma terminología impulsada por PISA (2006):

- **Reproducción:** esta categoría se refiere al desarrollo de procesos matemáticos que implican esencialmente la *reproducción* del conocimiento estudiado.
- **Conexión:** esta categoría se refiere al desarrollo de procesos matemáticos que en general se apoyan sobre procesos de reproducción, conduciendo a situaciones de solución de problemas que ya no son de mera rutina, e implican la *conexión* de conocimientos para resolver problemas.
- **Reflexión:** esta categoría se refiere al desarrollo de procesos matemáticos que incluyen un elemento de *reflexión* por parte del estudiante sobre los procesos necesarios o empleados para resolver un problema. Estos procesos relacionan las capacidades de los alumnos para planificar

⁵ Las cuatro competencias organizadoras del currículo se desarrollan en el marco teórico.

estrategias de resolución y aplicarlas en escenarios de problema que contienen más elementos y son más complejos (originales, inusuales) que los procesos de conexión.

La siguiente *Tabla de Competencias Organizadoras del Currículo* identifica los procesos que integran cada competencia y describe, en términos generales, su significado:

Competencia: Resolución de Problemas	
Proceso	Descripción del proceso
Entender el problema	Corresponde a la atribución de significado al enunciado, entender el contexto en el que se sitúa el problema.
Modelizar	Abarca los elementos de la construcción de un modelo: identificar el modelo, construir un modelo, reflexionar sobre el modelo.
Desarrollar y/ o adaptar estrategias para resolver problemas	Corresponde a la identificación y/o construcción de una(s) estrategia(s) para abordar el problema: heurísticas, de razonamientos, casos particulares, etc.
Aplicar la estrategia para resolver el problema	Corresponde a la aplicación de la estrategia adoptada.
Interpretar la respuesta en contexto del problema	Una vez aplicada la estrategia y obtenida una respuesta, interpretar el resultado en términos del contexto del problema y responder la(s) pregunta(s) planteada en su enunciado.
Formular problemas	Corresponde a la formulación de un problema dadas algunas condiciones. (A partir de unos datos, crear una situación problemática, etc.)

Para ilustrar la movilización de cada proceso de la competencia resolución de problemas, analizaremos un problema y su desarrollo para encontrar la solución:

Problema:

“Para una fiesta de cumpleaños se necesita traer un gorro para cada uno de los invitados, sin que sobre ni falte ninguno”.

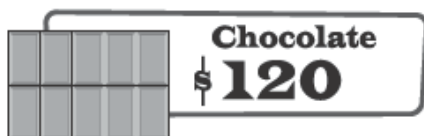
Los niños cuentan con una lámina que muestra la cantidad de invitados a la fiesta, estos se presentan agrupados de 5. Al otro extremo de la sala, se encuentran los gorros, los niños deben traerlos en un solo viaje y con la restricción que no pueden llevar la lámina con los invitados al lugar donde se encuentran los gorros.

- **Entender el problema:** en este caso consiste en que los niños identifiquen que la lámina muestra los invitados a la fiesta, para los cuales deben traer un gorro, en un solo viaje, sin dejar a ningún invitado sin gorro y sin que algún invitado tenga más de un gorro. Por otra parte, los niños deben considerar que no pueden disponer de la lámina y los gorros simultáneamente.
- **Modelizar:** consiste en identificar que el *conteo* es el modelo que permitirá traer un gorro a cada uno de los invitados a la fiesta, sin que sobre ni falte ninguno.
- **Desarrollar y/ o adaptar estrategias para resolver problemas:** consiste en buscar una estrategia que permita realizar el conteo de forma eficaz, en este caso, los niños deben decidir desarrollar y/o adaptar una de al menos tres estrategias, por ejemplo, decidir contar los invitados de 1 en 1, decidir contar los invitados de 5 en 5 basándose en la disposición espacial en que vienen presentados los invitados, o decidir juntar dos grupos de 5 para contar los invitados de 10 en 10.
- **Aplicar la estrategia para resolver el problema:** corresponde al conteo de los invitados a la fiesta utilizando la estrategia seleccionada en el proceso anterior, con el fin de establecer la cantidad de gorros que se necesita traer. Posteriormente, deben seleccionar una cantidad de gorros igual al cardinal encontrado.
- **Interpretar la respuesta en contexto del problema:** consiste en poner los gorros sobre los invitados ilustrados en la lámina y establecer si alcanzaron los gorros, sin que sobrara ninguno, en este caso la tarea se realizó exitosamente. En caso de que sobren o falten gorros, deben establecer que la estrategia escogida no fue la correcta o se equivocaron al desarrollarla.

- **Formular problemas:** por ejemplo, la siguiente situación plantea que los niños formulen la pregunta a una situación aditiva dada.

Problema:

“Considera los precios de los siguientes productos y responde la pregunta”



Si alguien realizó la operación: $120 + 150 = 270$. ¿Qué quería saber?

Competencia: Representación	
Procesos	Caracterización de los procesos
Entender y utilizar las relaciones entre diversas representaciones de la misma entidad	Considera entender y utilizar diferentes representaciones que pueden darse a una misma entidad matemática (o modelo).
Escoger y traducir representaciones en otras	Traducir una representación de una entidad matemática en otra representación de la misma entidad.
Usar representaciones para interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos (construcción de modelo intermedio)	Atribuirle un significado a las representaciones y utilizarlas dentro de un contexto (fenómenos físicos, sociales y matemáticos) para interpretar datos.

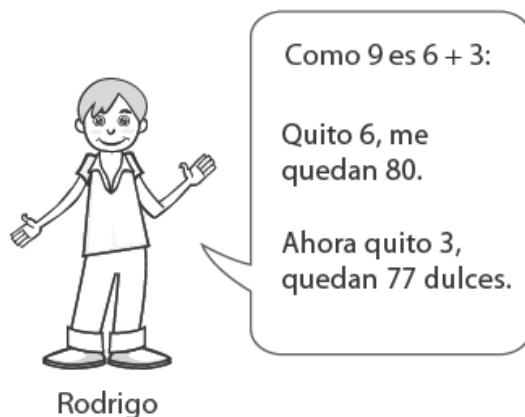
Para ilustrar la movilización de cada proceso de la competencia representación, presentaremos una actividad para cada uno de los procesos que la componen:

- **Entender y utilizar las relaciones entre diversas representaciones de la misma entidad:** por ejemplo en la siguiente situación, los niños deben entender que un número se puede escribir como la suma de otros dos.

Escribe tres números que sumen 453.

$$\boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = \boxed{453}$$

- **Escoger y traducir representaciones en otras:** por ejemplo, para resolver el siguiente problema: *Tengo 86 dulces y regalo 9, ¿cuántos dulces me quedan?*
Un niño, podría resolverlo como aparece en la siguiente ilustración:



Entonces el sustraendo 9, lo traduce a la representación $6 + 3$, que en este caso, es la más conveniente para realizar el cálculo.

- **Usar representaciones para interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos (construcción de modelo intermedio):** por ejemplo, para la siguiente situación, la utilización de una representación gráfica o esquema, permite relacionar los datos con la incógnita:

Problema:

“En una caja hay 220 libros de matemática, si hay 40 libros más de matemática que de lenguaje, ¿cuántos libros de lenguaje hay?”



Competencia: Razonamiento y argumentación	
Procesos	Caracterización de los procesos
Formular, investigar conjeturas matemáticas a partir de regularidades.	Formular e investigar conjeturas matemáticas que se construyen a propósito de ciertos datos provenientes de una situación intra o extra matemática.
Sintetizar, sistematizar y generalizar conjeturas matemáticas	Considera la identificación de una expresión o modelo que exprese una conjetura, por ejemplo la generalización de una propiedad matemática. También se refiere a la capacidad de sintetizar los aspectos relevantes de un tema matemático, rescatando las ideas nucleares.
Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y demostración	Justificar y evaluar los procedimientos utilizados recurriendo a propiedades y a la lógica matemática. Frente a un mismo ente matemático utilizar distintos tipos de razonamiento para comprenderlo y/o para demostrarlo.
Desarrollar y evaluar argumentos	Considera desarrollar una estructura argumentativa en el razonamiento, respecto a uno mismo o a los demás. Evalúa los elementos de un proceso de prueba: evidencia, justificaciones, demostraciones.
Comunicar su pensamiento matemático	Explicar tanto de forma oral como escrita un razonamiento usado.

Para ilustrar la movilización de cada proceso de la competencia razonamiento y argumentación, presentaremos una actividad para cada uno de los procesos que la componen:

- **Formular, investigar conjeturas matemáticas a partir de regularidades:** por ejemplo, un profesor pregunta a sus estudiantes *¿cuántas pelotas hay?* La colección de pelotas se encuentra presentada en una hilera. A continuación, las mismas pelotas las desordena quedando dispuestas en forma aleatoria y realiza la misma pregunta, *¿cuántas pelotas hay?*. Luego organiza las pelotas de forma circular, y vuelve a hacer la misma pregunta.

Así, se espera que los niños realicen un conteo para responder la pregunta planteada por el profesor, sin embargo, luego de dos o tres veces que han cuantificado la colección de pelotas, se espera que establezcan una regularidad. Es decir, que señalan con sus propias palabras que para esa colección, no importa la disposición de los objetos, el cardinal se mantiene si no se agregan ni quitan objetos. Luego, continúan probando si dicha regularidad se cumple al realizar la misma actividad con otras colecciones.

- **Sintetizar, sistematizar y generalizar conjeturas matemáticas:** siguiendo con el ejemplo anterior, una vez que los niños han investigado y han probado con distintas colecciones, que el cardinal se mantiene aunque cambie la disposición espacial de sus objetos, generalizan sus conjeturas a través del principio de conservación de la cantidad.
- **Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y demostración:** por ejemplo, un profesor plantea el siguiente problema a sus estudiantes:

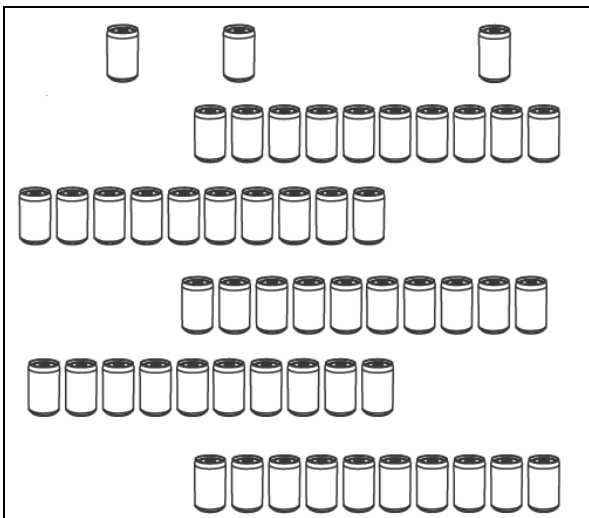
Problema:

“Alfredo tiene 57 lápices de colores, regala 9 lápices a su hermana, ¿cuántos lápices le quedan?”. El profesor pide a los estudiantes que busquen dos formas de resolver el cálculo y que comprueben que el resultado obtenido en ambos casos es correcto.

- **Desarrollar y evaluar argumentos:** por ejemplo, un profesor plantea el siguiente problema a sus estudiantes:

Problema:

Un profesor dibuja en la pizarra la siguiente colección de latas de bebidas:



Luego señala: *“para resolver el siguiente problema un niño contó todas las latas de 1 en 1 (ejemplifica la acción desarrollada por el estudiante), y otro niño contó todas las latas de 10 en 10 y luego contó las sueltas (ejemplifica la acción desarrollada por el estudiante), luego pregunta: ¿de qué forma es más conveniente contar?, ¿por qué?”*

- **Comunicar su pensamiento matemático:** por ejemplo, en el caso anterior, la verbalización por parte de los niños de la elección del procedimiento más eficaz y su justificación, movilizan la comunicación de su pensamiento matemático.

Competencia: Cálculo y Manipulación de expresiones	
Procesos	Caracterización de los procesos
Descifrar e interpretar expresiones matemáticas y/o geométricas	Considera dar sentido a una expresión matemática o geométrica en un contexto determinado.
Usar y/o manipular expresiones matemáticas	Considera la manipulación de las diferentes expresiones matemáticas, siguiendo las leyes de estructura matemática a la que pertenece.
Calcular y/o cuantificar	Referido al cálculo: desarrollo de las operaciones, aplicación de una técnica, etc.
Comunicar la manipulación de expresiones y cálculos	Describir de forma oral o escrita lo que se ha hecho al desarrollar un procedimiento o los cálculos llevados a cabo.

Para ilustrar la movilización de cada proceso de la competencia manipulación de expresiones matemáticas, presentaremos una actividad para cada uno de los procesos que la componen:

- **Descifrar e interpretar expresiones matemáticas y/o geométricas:** por ejemplo, la siguiente situación.

Problema:

“Marca con una X el número mayor”

67

76

- **Usar y/o manipular expresiones matemáticas:** por ejemplo, en la siguiente situación los niños deben manipular expresiones numéricas, a través de la completación de una secuencia.

Problema:

“Completa la secuencia de números. Esta secuencia va de 2 en 2”

291 295 297

- **Calcular y/o cuantificar:** por ejemplo, en el desarrollo del siguiente cálculo:

$$340 + 60 =$$


- **Comunicar la manipulación de expresiones y cálculos:** por ejemplo, en el caso anterior, la explicitación del procedimiento utilizado para resolver el cálculo moviliza dicho proceso.

Caracterización de los programas de estudios en NB1 en función de tareas matemáticas:

A partir de un análisis del currículo de NB1 y siguiendo el itinerario de investigación de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999), se identificaron de los actuales programas de estudio las tareas matemáticas presentes en los ejes Números, Operaciones y Resolución de Problemas en lo que a Números y Operaciones se refiere. A partir del análisis de los Contenidos Mínimos Obligatorios, los Aprendizajes Esperados y los Indicadores de Logro, hemos identificado tareas matemáticas genéricas en NB1. Luego, para cada tarea genérica hemos identificado un conjunto de tareas específicas con sus respectivas condiciones de realización. Cabe señalar que fue necesario también analizar las orientaciones didácticas para el docente y las actividades genéricas, ya que es en estos apartados donde se dan sugerencias a los profesores que ponen de manifiesto la intencionalidad didáctica respecto al tipo de actividad matemática que se espera que los estudiantes desarrollen en el aula. En dichos apartados encontramos evidencia sobre tareas tales como justificar, reflexionar, explicar, razonar entre otras, que no aparecen explícitamente referidas en los aprendizajes esperados.

De esta forma, identificamos una serie de tareas matemáticas específicas secuenciadas progresivamente con criterios didácticos, que orientan al profesor en las acciones concretas que deben realizar los niños para alcanzar un determinado

aprendizaje esperado bajo ciertas condiciones de realización. Estas tareas se agruparon en tareas genéricas, caracterizando así los ejes antes mencionados en cada semestre, y su evolución entre los dos niveles del subciclo. El proceso de definición de tareas específicas y tareas genéricas es dialéctico, puesto que para definir una tarea específica se requiere tener como referencia cuál es su grado de generalidad y viceversa.

Especificaciones sobre la terminología utilizada en la definición de las tareas matemáticas:

Problemas de composición, cambio y comparación:

- Un problema aditivo es de **composición** si la acción que se describe en el enunciado del problema es juntar/separar. En este tipo de problemas, hay una colección de objetos que se separa en dos colecciones, o hay dos colecciones cuyos objetos se juntan en una sola colección.
- Un problema aditivo es de **cambio** si la acción que se describe en el enunciado del problema es agregar/quitar. En este tipo de problemas existe una colección inicial que se transforma como resultado de un cambio aditivo (se agregan o quitan objetos) y se obtiene una nueva colección.
- Un problema es de **comparación** si la acción que se describe en el enunciado del problema es una comparación por diferencia.

Problemas directos e inversos:

- Un problema es **directo** cuando la acción presente en el enunciado coincide con la operación que debe efectuarse para resolverlo.
- Un problema es **inverso** cuando la acción presente en el enunciado no coincide con la operación que debe efectuarse para resolverlo.

Problemas simples y combinados:

- Un problema aditivo es **simple** cuando hay que realizar sólo una operación para resolverlo.
- Un problema aditivo es **combinado** cuando hay que realizar más de una operación para resolverlo.

6.2 Construcción del instrumento matriz de competencias

Para construir el instrumento **matriz de competencias** consideramos tanto la tabla de *competencias organizadoras del currículo* como la caracterización de los programas de estudio de NB1 en función de *tareas matemáticas genéricas y específicas*. La **matriz de competencias** establece el cruce entre las *competencias matemáticas* y las *tareas matemáticas* que caracterizan el currículo actual de NB1 en los ejes Números, Operaciones y Resolución de Problemas en lo que a Números y Operaciones se refiere.

La metodología seguida para construir dicha matriz consistió en establecer un cruce entre las tareas matemáticas específicas y la *Tabla de Competencias Organizadoras del Currículo*. Para cada tarea matemática específica con sus respectivas condiciones de realización, se identificaron las competencias que moviliza el estudiante al desarrollarla. Esta caracterización se realizó principalmente a través del análisis de las condiciones de realización de la tarea y el tipo de actividad matemática que desarrolla el estudiante al llevar a cabo dicha tarea. De esta forma, en una primera instancia se establece cuál es la competencia que principalmente se pone en juego al desarrollar dicha tarea matemática, ya que si bien una tarea matemática pone en juego el desarrollo de varias o todas las competencias simultáneamente, siempre una de ellas es **predominante**. Luego se identificaron, para cada tarea, cuáles son los procesos, tanto de la competencia predominante como de otras competencias, que se ponen en funcionamiento y en qué nivel de complejidad cognitiva (reproducción, conexión o reflexión). Este análisis se realizó por cada curso, semestre y eje de contenido de NB1 considerado en la investigación. Del conjunto de matrices se obtuvo la **“matriz de competencias matemáticas”**.

Así, la **matriz de competencias** se compone por: las competencias matemáticas y sus respectivos procesos, el aprendizaje esperado del semestre asociado a la tarea matemática en análisis, y las condiciones didácticas de realización de dicha tarea. La Figura muestra un esquema de cómo se estructura el instrumento:

Curso y Semestre			
APRENDIZAJE ESPERADO	TAREA MATEMÁTICA	Condiciones Didácticas	Condiciones Didácticas
COMPETENCIAS	Resolución de Problemas		
	Representación		
	Razonamiento y argumentación		
	Cálculo y Manipulación de expresiones		

Tal como hemos señalado en párrafos anteriores, son dichas tareas específicas las que se cruzan con los procesos matemáticos para generar la matriz. Cabe señalar que para identificar cuál es la competencia que predominantemente moviliza una tarea matemática concreta, hemos marcado la celda de la condición didáctica del color de la competencia matemática predominante. En el ejemplo de la figura 1, la competencia predominante es cálculo y manipulación de expresiones matemáticas ya que las condiciones de realización aparecen marcadas con el color de dicha competencia. Asimismo, en este ejemplo aparecen otros procesos movilizados –señalados con uno o varios asteriscos–, que no son constitutivos de la competencia predominante.

Los niveles de complejidad cognitiva descritos como reproducción, conexión y reflexión se identifican en las celdas de cruce a partir de la siguiente nomenclatura:

Simbología	Descripción del nivel de complejidad cognitivo
★	La tarea matemática con esas condiciones didácticas es de reproducción.
★★	La tarea matemática con esas condiciones didácticas es de conexión.
★★★	La tarea matemática con esas condiciones didácticas es de reflexión.

6.3 Metodología de validación del instrumento *matriz de competencias*

6.3.1 Juicio de Expertos

Para validar la *Matriz de Competencias Matemáticas* se estableció un juicio de expertos, cuya función fue valorar de qué manera el instrumento cumple con los propósitos que se le atribuyen. Estos expertos dispusieron de los antecedentes teóricos y metodológicos desarrollados en esta investigación para construir el instrumento ***matriz de competencias***. Una vez realizado este análisis, cada experto se reunió con el equipo de investigadores para discutir las observaciones que los jueces tenían del instrumento desarrollado en esta investigación.

Para seleccionar los expertos que realizaron el análisis de validación de la ***matriz de competencias*** consideramos los siguientes aspectos:

- Profesionales que no formen parte del equipo investigador.
- Profesionales que se desempeñan en investigación y/o desarrollo en educación matemática, con experiencia en Primer Ciclo Básico.
- Profesionales que tengan experiencia en el uso de competencias matemáticas como docentes o en el ámbito de la investigación.

Se consideró así la participación de tres personas vinculadas al área de la educación matemática que entregaron aportes a la matriz desde su perfil profesional y trayectoria en esta área. El análisis de dichos profesionales se enmarcó en tres dimensiones:

- i) *La completitud y pertinencia de las cuatro competencias que componen el modelo de competencias:* del que se espera evaluar si las cuatro competencias que componen el modelo de competencias propuesto por este equipo recubren todas las dimensiones de la actividad matemática que realizan los niños (completitud) y si es que cada una de ellas corresponde o no a una dimensión de la actividad matemática (pertinencia).
- ii) *La estructura de la matriz:* se trata de evaluar si los componentes de la matriz (tareas matemáticas y condiciones didácticas) recubren todos los objetivos fundamentales transversales y contenidos mínimos obligatorios. La caracterización del currículo a través de las tareas matemáticas, es la modelización de la actividad matemática curricular en términos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico TAD (Chevallard, 1999). En esta matriz se han enfatizado dos componentes: tareas matemáticas y condiciones de realización.
- iii) *La asociación entre competencias y tareas matemáticas:* Se trata de evaluar tanto el cruce de las tareas matemáticas específicas con los procesos y competencias, como el nivel de complejidad cognitiva asignado a cada proceso.

6.3.2 Cuestionarios para alumnos de NB1

Se aplicaron cuestionarios a 360 niños provenientes de 4 escuelas subvencionadas y particular de la región metropolitana, de cada escuela participó al menos un 1º y un 2º básico en la aplicación del cuestionario, obteniéndose así una muestra de 174 niños de 1º básico y 177 niños de 2º básico, dicho proceso estuvo a cargo de un integrante del equipo investigador que asistió a la escuela a aplicar el instrumento.

El propósito de la aplicación de estos cuestionarios, era poder establecer relaciones entre las competencias propuestas en el modelo construido en esta investigación, y validar los niveles de complejidad cognitiva asignados a los procesos que movilizan las tareas nucleares de cada nivel.

6.3.2.1 Metodología usada para la elaboración de los instrumentos:

La elaboración de los cuestionarios para los alumnos se basó principalmente en el instrumento ***matriz de competencias***. De dicha matriz se extrajeron tareas que cumplieran con las siguientes condiciones:

- Preguntas factibles de ser evaluadas a través de una prueba escrita. Este criterio se consideró ya que no todas las tareas podían ser evaluadas mediante una prueba escrita, por el bajo dominio de la escritura que poseen los niños de 1° y 2° básico; en particular las tareas en donde debían argumentar o justificar un procedimiento.
- Preguntas que evaluaran aspectos nucleares de los programas de estudio de NB1, en particular aprendizajes nucleares de los ejes números, operaciones y resolución de problemas en lo que a números y operaciones se refiere.
- Preguntas asociadas a tareas matemáticas que tuvieran más de una condición didáctica y con más de un nivel de complejidad cognitiva. Este aspecto se consideró por la necesidad de verificar la inclusión de dichos niveles, es decir verificar el supuesto que un alumno que contesta bien un ítem de conexión también contesta bien un ítem de reproducción asociado a la misma tarea matemática.
- Para elaborar las preguntas se consideró también la necesidad de recubrir las 4 competencias definidas en el modelo propuesto por esta investigación.

6.3.2.2 Metodología para el análisis de los resultados de la aplicación de los cuestionarios

Para efectuar el análisis de los cuestionarios se llevaron a cabo dos procedimientos, el primero nos permitirá establecer inclusión entre las competencias y procesos definidos en la matriz de competencias. Mientras que el segundo nos permitirá recoger evidencia para validar los grados de complejidad cognitiva expuestos en el instrumento matriz de competencias. A continuación describiremos los procedimientos llevados a cabo para efectuar ambos análisis:

A. Proceso de análisis para establecer inclusión entre las competencias

Para realizar este análisis, se efectuaron comparaciones entre los comportamientos de las respuestas de los niños expresado en porcentajes, ante una misma tarea matemática realizada bajo distintas condiciones de realización, esto es, frente a una misma tarea matemática que fue evaluada bajo dos o más condiciones, se consideró el porcentaje de niños que contestó bien el ítem que evaluaba la tarea con la condición de menor nivel de complejidad cognitiva con el porcentaje de niños que contestó bien el ítem que evaluaba la tarea con la condición de mayor nivel de complejidad cognitiva, la diferencia aceptada es mayor a un 10%. Esta diferencia se contrastó con el porcentaje de niños que contestaba correctamente el ítem de mayor complejidad y erróneamente el ítem que evaluaba la condición didáctica de menor grado de complejidad. Dicho porcentaje debe ser inferior al 10%, según el test de Wald que compara proporciones o porcentajes. Dicho porcentaje verificaba nuestros supuestos, ya que si era menor al 10%, podríamos afirmar que la mayoría de los niños que contesta bien la pregunta de mayor grado de complejidad cognitiva también contesta bien la pregunta de menor grado de complejidad cognitiva.

B. Proceso de análisis de la recolección de evidencia para validar los niveles de complejidad cognitiva asignados en la matriz

Para efectuar este análisis seguimos el modelo que implementa la prueba Timms para validar los ítems, esto es, consideramos *tres grupos* de estudiantes según los porcentajes de logro obtenidos en esta evaluación y según la distribución de los resultados. Los grupos se establecieron en relación a la *media* de los resultados de todos los alumnos que contestaron el cuestionario (1º y 2º básico). Así, el **primer grupo** está formado por los estudiantes que en *promedio obtienen un resultado menor que la media en aproximadamente una desviación estándar*; el **segundo grupo** está formado por los estudiantes que obtuvieron un *porcentaje de logro alrededor de la media* y el **tercer grupo** está formado por los estudiantes que obtuvieron *un porcentaje de logro superior a la media en aproximadamente una desviación estándar*. Como la distribución de los resultados de una evaluación de aprendizaje no es simétrica, para tener un *n* equipotente en los tres grupos y, además, resguardar que el primer y tercer grupo estuvieran en promedio a la misma distancia de la *media* de los resultados, no se consideraron todos los estudiantes para definir los grupos. Los grupos conformados en 1º básico y 2º básico se definieron de la siguiente manera:

1º básico

Grupo 1: estudiantes que obtuvieron un porcentaje de logro mayor al 55% y menor al 65%; este grupo quedó conformado por 32 estudiantes.

Grupo 2: estudiantes que obtuvieron un porcentaje de logro mayor al 72% y menor al 80%; este grupo quedó conformado por 30 estudiantes.

Grupo 3: estudiantes que obtuvieron un porcentaje de logro mayor al 87% y menor al 95%; este grupo quedó conformado por 37 estudiantes.

2º básico

Grupo 1: estudiantes que obtuvieron un porcentaje de logro mayor al 47% y menor al 65%; este grupo quedó conformado por 34 estudiantes.

Grupo 2: estudiantes que obtuvieron un porcentaje de logro mayor al 59% y menor al 69%; este grupo quedó conformado por 32 estudiantes.

Grupo 3: estudiantes que obtuvieron un porcentaje de logro mayor al 78% y menor al 87%; este grupo quedó conformado por 27 estudiantes.

Para validar el grado de complejidad de la matriz, estos grupos se relacionaron con los niveles de complejidad cognitiva usados en esta investigación (*reproducción, conexión y reflexión*). Así, la mayoría de los estudiantes del primer grupo debe ser capaz de contestar correctamente las preguntas que evalúan tareas matemáticas en un nivel de *reproducción*, y no deberían contestar correctamente las preguntas que evalúan tareas matemáticas en un nivel de *conexión* y *reflexión*. Del mismo modo, la mayoría de los estudiantes que forma parte del grupo 2, debe ser capaz de responder correctamente las preguntas que evalúan tareas matemáticas a un nivel de *reproducción* y *conexión*, y no deberían contestar correctamente las preguntas que evalúan tareas matemáticas en un nivel de *reflexión*. Del mismo modo, los estudiantes que forman parte del grupo 3, deben ser capaces de responder correctamente las preguntas que evalúan tareas matemáticas en un nivel de *reproducción* y *conexión*, y también debieran ser capaces de responder correctamente las preguntas que evalúan tareas matemáticas en un nivel de *reflexión*.

A partir de lo anterior, hemos establecido los siguientes parámetros para validar los grados de complejidad cognitiva en la matriz:

Reproducción: para determinar que una tarea matemática específica corresponde a este nivel, más de 2/3 de los estudiantes del grupo 1 (66% de los estudiantes) debe haber contestado bien la pregunta que evalúa la tarea. Además,

el porcentaje de estudiantes del grupo 2 y 3 que contesta correctamente esta pregunta debe ser superior al porcentaje de estudiantes del grupo 1 que la responde correctamente.

Conexión: para determinar que una tarea matemática específica corresponde a este nivel, más de $2/3$ de los estudiantes del grupo 2 (66% de los estudiantes) debe haber contestado bien la pregunta que evalúa la tarea. Además, el porcentaje de estudiantes del grupo 3 que contesta correctamente la pregunta debe ser superior al porcentaje de estudiantes del grupo 2 que la responde correctamente y, por otra parte, el porcentaje de estudiantes del grupo 1 que respondió bien la pregunta, debe ser inferior al porcentaje de estudiantes del grupo 2 que respondió bien la pregunta.

Reflexión: para determinar que una tarea matemática específica corresponde a este nivel, más de $2/3$ de los estudiantes del grupo 3 (66% de los estudiantes) debe haber contestado bien la pregunta que evalúa la tarea. Además, el porcentaje de estudiantes del grupo 1 y 2 que contesta correctamente la pregunta debe ser inferior al porcentaje de estudiantes del grupo 3 que respondió bien la pregunta. En los casos que el porcentaje de estudiantes del grupo 3 que contestó bien la pregunta sea inferior al 66%, y la diferencia entre el porcentaje de estudiantes del grupo 2 y 3 que contestan bien la pregunta es superior al 20%, se considerará como un nivel de complejidad cognitiva *por sobre la reflexión*.

En aquellas preguntas cuyos resultados no correspondan a alguno de los casos anteriormente descritos, se procederá a realizar un análisis de manera particular de dicha pregunta con el fin de poder establecer si el resultado se debe a una formulación poco pertinente de la pregunta, o bien si los estudiantes no han estado expuestos a la enseñanza del tema involucrado en la pregunta, u otras situaciones.

6.3.3 Focus Group y Entrevista Semiestructurada

Para validar el instrumento matriz de competencias se realizaron dos instancias de recopilación de información respecto a la utilidad y accesibilidad de la matriz de competencias para los profesores de enseñanza básica. Las instancias realizadas son: un Focus Group y una entrevista semiestructurada a profesores de NB1 que hayan salido evaluados el 2007 en las diferentes categorías que establece la evaluación docente (básico, competente, destacado). Indagamos qué significado le atribuyen a la Matriz de Competencias y de qué manera les podría contribuir para secuenciar y gestionar las actividades de aprendizaje, así como para organizar las evaluaciones de estos aprendizajes.

6.3.3.1 Focus Group

En esta instancia de validación del instrumento matriz de competencias que hemos propuesto en esta investigación, es la realización de un focus group con 18 profesores de NB1 que hayan salido evaluados el 2007 en las diferentes categorías que establece la evaluación docente (básico, competente, destacado). Hemos considerado además, que en este focus group participen profesores consultores de la estrategia LEM, que tienen conocimiento del currículo y trabajan directamente con los profesores de primer ciclo básico, por lo que conocen el tipo de trabajo que se realiza en este nivel. Por esta razón, estos profesores aportaron con observaciones que ayudaron a mejorar el instrumento matriz de competencias.

Para realizar el Focus Group se hizo entrega, con dos semanas de anticipación, de un CD que contenía la matriz de competencias y un documento que incluía las definiciones de las competencias y procesos matemáticos que sustenta el modelo propuesto, y sobre la manipulación del instrumento. Así, cada participante del Focus Group revisó en detalle la matriz de competencia y pudo participar con propiedad de la discusión que se generó en esta instancia.

Entre las preguntas conductoras de la discusión, podemos destacar las siguientes:

- ¿Qué relación ve usted en las competencias?, ¿alguna es necesaria para desarrollar la otra?
- ¿Tienen todas las competencias el mismo grado de transversalidad?
- ¿Le parece que están todas las competencias que requiere la actividad matemática?, ¿le falta alguna, le sobra alguna?
- ¿Le parece que las matrices contribuyen o son un aporte a la tarea docente?
- ¿Le fue difícil comprender las matrices?, ¿qué le parece el formato?
- En general, ¿le parece adecuado el nivel de complejidad señalado en la matriz para los distintos procesos?
- ¿Qué actividad propondría a sus estudiantes para desarrollar el razonamiento y argumentación?, ¿y la representación?
- ¿Qué tipo de dispositivo o taller de capacitación sería importante desarrollar con los profesores de aula para que utilicen la matriz?
- ¿Qué criterios usa usted para planificar o diseñar una secuencia de actividades para trabajar con sus alumnos?
- ¿Qué dificultades observa usted en los profesores de aula cuando diseñan actividades a partir del currículo?
- ¿Qué herramientas ayudan a los profesores para realizar una adecuada gestión del currículo?

6.3.3.1 Entrevista Semiestructurada

En esta instancia de validación de la matriz, se entrevistó a 10 de los profesores de NB1 que participaron en el Focus Group, escogidos en forma aleatoria, con el fin de indagar en profundidad aspectos esenciales de la utilidad, accesibilidad y estructura didáctica de la matriz de competencias. Estas entrevistas fueron

realizadas de forma individual por un integrante del equipo investigador. A continuación se detallan las preguntas realizadas en dicha entrevista:

- ¿Cree usted que la competencia resolución de problemas debería ser marcada frente a todas las tareas matemáticas propuestas en las matrices?
- ¿Cree usted que la competencia razonamiento y argumentación debería ser marcada frente a todas las tareas matemáticas propuestas en las matrices?
- ¿Cree usted que la modelización debería considerarse como una competencia, y no ser sólo un proceso de la resolución de problemas?
- ¿Agregaría usted el proceso comunicación en la competencia resolución de problemas?
- ¿Agregaría usted el proceso comunicación en la competencia representación?
- ¿Considera usted que las competencias matemáticas definidas en la matriz recubren toda la actividad matemática que realizan los niños y niñas de NB1?
- ¿Cree usted que las tareas matemáticas definidas en la matriz son claras y pertinentes al aprendizaje esperado respectivo?
- ¿Considera usted que la matriz de competencias muestra con claridad las competencias que movilizan los niños cuando desarrollan las tareas matemáticas?
- ¿Cree usted que la matriz muestra con claridad los niveles de complejidad cognitiva frente a un determinado proceso y/o tarea matemática?
- ¿Considera que el diseño de entrada a la matriz de competencias de NB1 es claro y pertinente para los profesores de aula?
- ¿Cómo le resultó la navegación por el instrumento matriz de competencias en NB1?

- ¿Cree que este instrumento es un aporte para los profesores a la hora de planificar una unidad didáctica o una evaluación?

7. Resultados de la investigación y su relación con los objetivos planteados

A continuación se presentan los resultados del trabajo obtenido y su relación con el logro de los objetivos específicos de la investigación.

7.1. En relación al logro del objetivo específico 1 y construcción de un Modelo de Competencia

En relación al *objetivo específico 1*, cuyo abordaje constituye la **fase 1** de la investigación, estudiamos y analizamos las ocho competencias matemáticas caracterizadas por Mogen Niss (1999; 2002) y usadas en PISA. Al mismo tiempo estudiamos las competencias propuestas por diversos autores, tanto en proyectos como en publicaciones y marcos curriculares. Sin embargo, nos encontramos con que el desarrollo de marcos teóricos sobre competencias así como de modelos asociados a ellas que permitan construir curriculum basados en competencias, está todavía en una etapa incipiente a nivel mundial. No existe consenso entre las distintas posturas para construir curriculum basados en competencias, tal como se observa en los curriculum de los países de la Comunidad Europea (Garragori, 2007). Al no encontrar ninguna propuesta sobre competencias que se pudiera adecuar a los requerimientos de nuestro proyecto, no pudimos basarnos en una propuesta de competencias matemáticas ya elaborada, tal y como lo habíamos previsto. Por ello, tuvimos que construir un modelo de competencias matemáticas que nos permitiera realizar nuestra investigación. Este requerimiento implicó que el desarrollo de la fase 2 y de las siguientes fases se desplazarán temporalmente en el cronograma. Este aplazamiento hacía inviable poder alcanzar todos los objetivos de la investigación en términos de su cobertura, tal como se tenían previstos inicialmente en el proyecto para los subciclos NB1 y NB2, en los plazos de desarrollo del proyecto. En consecuencia, para lograr todos los objetivos del proyecto, decidimos desarrollar las cuatro fases de la investigación solo en NB1. Esta decisión no afectó a las contribuciones de la investigación puesto que la

metodología e instrumentos de análisis elaborados, son extendibles a otros niveles educativos, en particular a NB2.

De esta forma, luego de establecer una relación entre el marco propuesto por PISA y los restantes marcos, optamos por describir las competencias en términos de **procesos matemáticos**, tal como lo realiza PISA. Dado que en los Estándares Norteamericanos propuestos por la NCTM (2000) de igual forma organizan su propuesta alrededor de cinco *estándares de procesos*, descritos como ejes articuladores del curriculum, decidimos relacionar esta propuesta curricular con el marco de PISA. Y, a la luz de otras referencias (Abrantes, 2000; de Lange, 1999; Ministerio de Educación de Ontario, 2005; DOGC, 2007; Lupiañez, 2006; Rico 2007) elaboramos nuestro propio modelo que, además de estructurar las competencias en términos de *procesos*, caracteriza la actividad matemática escolar por medio de **cuatro competencias articuladoras del currículo**. Estas son: *resolución de problemas; representación; razonamiento y argumentación; y manipulación de expresiones matemáticas*⁶. Este modelo se concretiza en las denominadas **Tablas de Competencias Organizadoras del Currículo**, las que se estructuran en función de los procesos que integran estas competencias y la descripción de dichos procesos⁷.

Respecto a la elección de las competencias del modelo, nos llevó gran parte del tiempo del proyecto optar por las competencias que serían articuladoras del currículo. En una primera instancia se incorporó como competencia *Modelización*, la que fue caracterizada del mismo modo que las mencionadas. La complejidad que se evidenció fue su semejanza con la competencia de *Resolución de problemas*, dado que varios de los procesos que conformaban la competencia de Modelización eran prácticamente idénticos a los procesos de Resolución de problemas. Además, no se veía una necesidad en NB1 de caracterizar procesos de modelización, sino que más bien dichos procesos emergen más explícitamente al final de la básica, siendo cada vez más importantes ya al final de la educación

⁶ Estas cuatro competencias aparecen identificadas en el apartado 3 del Marco Teórico.

⁷ La descripción detallada de la estructura de cada Tabla de Competencias Organizadoras del Currículo se encuentra en el apartado 5 de Metodología.

media. Por estas dos razones se decidió extraer la modelización como una competencia, e incorporarla como un proceso a la competencia de Resolución de problemas.

La determinación de los *procesos* que conforman cada competencia también supuso alta complejidad. Los más sencillo fueron los de la competencia de *Manipular expresiones matemáticas*, dado que se adaptaron muy semejantemente a la competencia correspondiente de PISA (OCDE, 2003). En cambio, los procesos de la competencia de *Razonamiento y argumentación* y los procesos de *Representación* implicaron un desarrollo mayor. Estos se elaboraron a partir de la caracterización de los estándares de procesos (NCTM, 2003) Razonamiento y demostración y Representar. El cambio del término de demostrar por argumentar en nuestro estudio se justifica por dos razones: por un lado, no siempre todo proceso de validación de los conocimientos por parte de los estudiantes supone una demostración formal; interesa fomentar en los estudiantes la actitud de fundamentar el trabajo que han realizado. Hay que señalar que la argumentación en la clase de matemáticas no ha jugado un papel muy destacado curricularmente. De hecho, en los actuales programas según nuestros análisis, hay muy pocos aprendizajes esperados relacionados con desarrollar la competencia de argumentar. Por otra, en primer ciclo básico no se espera que los estudiantes logren realizar demostraciones, sino más bien, se espera que los estudiantes justifiquen sus conjeturas, procedimientos y resultados.

En cuanto a la Competencia de Representación, la hemos considerado en el sentido de representaciones simbólicas, más allá de representaciones estrictamente mentales. Como se trata de distinguir grados de desarrollo de esta competencia en los estudiantes, no consideramos que el hecho de escribir un resultado numérico, en el contexto por ejemplo de resolver un problema, fomente el desarrollo de la competencia representación, ya que si así fuera, esta competencia aparecería siempre movilizada por cualquier tarea de este ciclo que pertenezca al ámbito de los números y operaciones, y de ese modo todos los niños tendrían desarrollada esta competencia. No obstante, por tratarse de un aprendizaje complejo para los niños que se inician en el trabajo aritmético,

consideramos la tarea de leer y escribir números como de representación para niños de este ciclo.

En cuanto a la categorización de las ocho competencias de Niss propuesta como parte de este primer objetivo, los análisis teóricos realizados no fueron suficientes para determinarla. Con la aplicación de un cuestionario a alumnos, construido con este propósito, obtuvimos evidencia que nos permitió establecer relaciones entre las competencias del modelo construido.

7.2. En relación al logro del objetivo específico 2

En relación al *objetivo específico 2*, hemos identificado las *tareas matemáticas* de los programas de estudios de 1º y 2º básico en los Ejes de Números, Operaciones y Resolución de Problemas en lo que a Números y Operaciones se refiere. Para ello, hemos identificado las *tareas matemáticas nucleares* en cada semestre y sus respectivas *variables didácticas* o *condiciones de realización*. Dichas variables permiten establecer la evolución de las tareas a lo largo del ciclo, el grado de complejidad de la tarea, así como su desglose en conjuntos de *tareas específicas*. La visión progresiva de dichas tareas, a través de los distintos niveles del primer ciclo, se pone de manifiesto en las Matrices de Competencias.

Con este análisis hemos encontrado, además, que en los programas de estos cursos existen escasas tareas relacionadas con la argumentación, con la descripción y explicación de los procedimientos utilizados, y con el contraste entre distintos procedimientos y la elección del más eficaz. Asimismo, hemos detectado, en relación a algunos aprendizajes esperados de los programas, escasez de articulación y ausencia de tareas matemáticas relevantes para alcanzarlos. Esto pone de manifiesto la pertinencia y necesidad del ajuste curricular en marcha. Por ello, para elaborar las Matrices de Competencia, hemos considerado un marco más amplio en el que explicitamos distinciones que estaban implícitas en las sugerencias didácticas de los programas y, en algunos casos, incorporamos tareas matemáticas necesarias para el logro de los aprendizajes que no estaban consideradas.

7.3 En relación al logro del objetivo específico 3

En relación al *objetivo específico 3* cuyo abordaje constituye la **fase 3** de la investigación, hemos elaborado las Matrices de Competencias de NB1 en los Ejes de Números, Operaciones y Resolución de Problemas en lo que a Números y Operaciones se refiere. Estas matrices se obtienen a partir del cruce de las *tareas matemáticas* y las *competencias organizadoras del currículum*. El propósito de dichas matrices era establecer las competencias matemáticas que predominantemente se ponen en juego al desarrollar una determinada tarea matemática, especificando los *procesos* asociados a dichas competencias y sus respectivos niveles de complejidad⁸. La validación de este instrumento se realizó por medio de jueces expertos, a través de un focus group desarrollado con profesores de aula de primero ciclo básico y mediante la aplicación de un cuestionario a 360 alumnos de NB1.

A continuación presentamos los **resultados** obtenidos en cada instancia de validación:

7.3.1 Resultados juicio de expertos

Dos jueces manifestaron cierta inquietud con respecto a la transversalidad de dos de las competencias que se han considerado como organizadoras del currículum; dichas competencia son Resolución de Problemas y Razonamiento y argumentación.

Efectivamente la competencia de Resolución de Problemas puede ser entendida como transversal, si es que se considera por problema “cualquier tarea matemática”, ya sea que se resuelve por primera vez sin conocer a priori una estrategia para resolverlo, o cuando ya se sabe cómo resolverla y simplemente se aplica una técnica conocida.

En la formulación de las competencias se consideró como tareas matemáticas que movilizan la competencia de resolución de problemas, aquellas que el

⁸ La descripción detallada de la estructura de cada Matriz de Indicadores de Competencias se encuentra en el apartado 5 de Metodología.

procedimiento para su resolución no es evidente para el estudiante. Distintas investigaciones han puesto de manifiesto que una gran mayoría de estudiantes chilenos muestran niveles de logro muy bajos a la hora de resolver problemas (no rutinarios), en que deben reflexionar, utilizar y/o relacionar más de un conocimiento matemático para resolverlo. Y, asimismo, muestran niveles de logro de los estudiantes significativamente mayores frente a tareas de cálculos. Por ese motivo, es que tomamos la decisión de distinguir la resolución de problemas como una competencia organizadora del currículum. Por tanto, la competencia de Resolución de Problemas considerada en nuestro modelo se refiere a la resolución de problemas cuya estrategia de solución no es conocida por los estudiantes.

Igualmente, si se considera el Razonar como sinónimo de pensar, es evidente que la competencia de razonamiento y argumentación sería una competencia transversal, porque para poder resolver cualquier tarea matemática con éxito, se necesita pensar. Sin embargo, en la formulación de las competencias de nuestro modelo, hemos considerado la competencia de razonamiento y argumentación como la expresión (ya sea en forma oral o escrita) del razonamiento o argumentación, entendiendo a su vez que el hecho de ir explicitando y argumentando (aunque sea a uno mismo) los pasos que se van dando al resolver una determinada tarea matemática, es un medio para desarrollar dicha competencia.

Después de analizadas las opiniones de los jueces que fueron comunicadas a través de un informe escrito, se realizó una conversación con ellos para obtener una visión clara de sus consideraciones, así como para aclarar algunos aspectos. La inquietud sobre la transversalidad de las dos competencias más arriba discutidas se resolvió; ambos jueces estuvieron de acuerdo en considerarlas como tales, esto es, como competencias organizadoras del currículum, dado el sentido en que son utilizadas en el modelo.

Siguiendo una sugerencia hecha por uno de los jueces sobre el proceso: “formular, investigar conjeturas matemáticas”, se modificó la redacción del mismo por “establecer y formular conjeturas matemáticas”.

Otra inquietud planteada por un juez fue la de por qué modelizar no era considerado como una competencia por sí misma, sino como un proceso dentro de la resolución de problemas.

Al inicio de la formulación de las competencias se consideró Modelizar como una competencia; sin embargo hemos visto que en NB1 no se encuentran presentes tareas que movilicen dicha competencia, más bien la modelización se presenta principalmente al servicio de la competencia de resolución de problemas. No obstante, en 2º ciclo y con mayor razón en Enseñanza Media consideramos que Modelizar debe distinguirse como una competencia organizadora del currículum.

Otra de las sugerencias hechas por uno de los jueces, fue la de incluir el proceso de comunicación en la competencia de resolución de problemas. Como antecedente, podemos mencionar que tanto PISA como los estándares del NCTM consideran la comunicación como una competencia. Inicialmente, se consideró la comunicación como un proceso presente dentro de todas las competencias, y por tanto resultaba ser un proceso transversal que no nos permitía discriminar; sin embargo, dado que nuestro propósito fue el de identificar aquellos procesos particulares asociados al desarrollo de cada competencia, se decidió dejar el proceso de Comunicación sólo en Razonamiento y argumentación y en Manipulación de expresiones matemáticas. Dada la importancia que tiene, dentro de la actividad matemática, el desarrollo de argumentos con el propósito principal de explicitar a terceros tanto los procedimientos desarrollados como los razonamientos utilizados para resolver un determinado problema y/o cálculo, se optó por mantener el proceso de comunicación en dichas competencias, otorgándole el sentido anteriormente descrito, más allá de la simple intención de registrar ya sea oral o escrita los procedimientos desarrollados. En otros términos, no consideraremos que un alumno ha desarrollado la competencia de comunicar simplemente porque presenta o “comunica” sus resultados de forma escrita sistemáticamente.

Dadas las observaciones planteadas por uno de los jueces, referidas al amplio significado del término representación, consideramos oportuno explicitar qué es lo que se ha considerado como la competencia que lleva dicho nombre.

Entendemos por la competencia de representar la capacidad de utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico que incluye ser capaz de decodificar dicho lenguaje y entender sus relaciones con el lenguaje natural; traducir desde el lenguaje natural al simbólico, ser capaz de interrelacionar distintas representaciones y escoger diferentes formas de representación de acuerdo con el contexto, la situación y el propósito.

De ese modo, la competencia de Representación surge como una herramienta heurística al servicio de la comprensión y desarrollo del lenguaje matemático, y que se refiere a representaciones simbólicas y no mentales.

Considerando las sugerencias hechas por otros jueces se modificó la redacción de la competencia “Cálculo y manipulación de expresiones matemáticas”, por “Manipulación de expresiones matemáticas”, dejando como un proceso de esa misma competencia, el cálculo. También se modificó la redacción del proceso “calcular y/o cuantificar” por “calcular y/o contar”, por el hecho de considerar mucho más global el cuantificar que el calcular. De esta manera, el contar queda limitado a un proceso más particular.

Los jueces opinaron que en general las tareas matemáticas cubren la totalidad de los OF y CMO propuestos por los programas de estudio dentro de los ejes considerados en el proyecto.

Otro aspecto sugerido a partir del análisis de la completitud de las tareas matemáticas, es el de revisar algunos aprendizajes esperados en relación con las tareas propuestas. Dicha sugerencia se considerará en la revisión final de las matrices de competencias.

Por otro lado, opinaron que las competencias consideradas junto con sus respectivos procesos, recubren toda la actividad matemática generada a partir de las tareas matemáticas consideradas.

Otra sugerencia que fue muy bien acogida tiene relación con la navegabilidad del instrumento (matrices de competencias). Todos los jueces opinaron que era difícil la lectura de dichas matrices y que, por lo tanto, era poco probable que los profesores lo adopten en sus prácticas docentes. Por este motivo, se decidió diseñar el instrumento en un formato digital on-line que facilita la navegación, tanto

entre las distintas tareas matemáticas vinculadas a un mismo aprendizaje esperado del programa, como entre las tareas matemáticas que movilizan una misma competencia. A su vez, se generó una base de datos con toda la información del instrumento, lo que permite su actualización y la incorporación de nuevas tareas.

Con respecto a opiniones y consideraciones puntuales realizadas por los jueces referentes a algunos cruces propuestos entre tareas matemáticas con sus respectivas condiciones y procesos que movilizan, éstas serán consideradas en el proceso de revisión y ajuste final del instrumento.

Para estudiar la viabilidad del instrumento, es decir para indagar cómo contribuye para analizar y comprender el comportamiento de los estudiantes, se construyó un cuestionario que fue aplicado a 360 alumnos.

7.3.2 Resultados de la aplicación del cuestionario a alumnos

La aplicación del cuestionario a alumnos nos permitió establecer relaciones entre las competencias matemáticas del modelo, y relaciones de inclusividad entre los distintos niveles de complejidad cognitivos de los procesos involucrados. De igual forma, nos permitió indagar relaciones entre las propuestas teóricas sobre los niveles de complejidad y lo que empíricamente sucede en una muestra de estudiantes. Tal como mostraremos a continuación, en la mayoría de los ítems del cuestionario se obtuvo gran concordancia entre nuestras hipótesis y los datos empíricamente recogidos.

7.3.2.1 Análisis por tarea matemática considerando la inclusión entre los niveles de complejidad, determinados por las condiciones didácticas

1º Básico

	Condición didáctica 1		Condición didáctica 2	
Tarea matemática: Resuelven problemas en que producen colecciones de hasta 100 objetos.	Pregunta 2: Dado un cardinal		Pregunta 6: Dada una colección agrupada de 10	
Competencia matemática: Resolución de problemas	reproducción		reflexión	
Porcentaje de niños que responde correctamente un ítem y erróneamente el otro ítem,	51,7%	N=90	2,9%	N=5
Porcentaje de alumnos que responde correctamente el ítem,	86%	N=150	37,4%	N=65

Para esta tarea, observamos que el grado de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias coincide con el demostrado por el comportamiento de la muestra. De los resultados se desprende que un 86% de la muestra contesta correctamente la tarea más simple, mientras que solo un 37,4% contesta bien el ítem que evalúa la condición más compleja. A partir de estos resultados se valida la hipótesis de inclusividad de los grados de complejidad cognitiva usados en esta investigación, ya que un niño que es capaz de responder la segunda pregunta (reflexión) también responde correctamente la primera pregunta (reproducción), exceptuando un 2,9% que tiene un comportamiento no esperado.

	Condición didáctica 1				Condición didáctica 2			
Tarea matemática: calculan mentalmente adiciones y sustracciones en un ámbito del 0 al 100	Pregunta 11 a y 11c: Suma de combinaciones aditivas básicas y las restas correspondientes,				Pregunta 11b y 11d: Suma de un múltiplo de 10 más un dígito y las restas correspondientes,			
Competencia matemática: Manipulación de expresiones matemáticas	reproducción				reproducción			
	suma		resta		suma		resta	
Porcentaje de niños que responde correctamente un ítem y erróneamente el otro ítem.	29,7%	N=51	5,8%	N=10	26,2%	N=44	0%	0
Porcentaje de alumnos que responde correctamente el ítem.	86%	N=148	62,2%	N=107	94,6%	N=159	68,5%	N=115

En esta tarea el grado de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias coincide con el logrado por el comportamiento de la muestra. De los resultados se concluye efectivamente que ambas tareas tienen un comportamiento similar con un alto porcentaje de alumnos que contesta correctamente la suma que es la condición más simple mientras que al cambiar la condición y preguntar por la resta en ambos casos este porcentaje baja. Con estos resultados concluimos que frente a una misma tarea con una misma condición didáctica, los niños presentan mayores dificultades para resolver las restas que se deducen de una combinación aditiva básica o una descomposición canónica, que para resolver la suma recíproca.

	Condición didáctica 1		Condición didáctica 2	
Tarea matemática: Resuelven problemas aditivos simples utilizando las combinaciones aditivas básicas y su extensión a los múltiplos de 10 y sus restas correspondientes,	Pregunta 13a: Problemas de cambio y composición directo,		Pregunta 13b: Problemas de cambio inverso,	
Competencia matemática: Resolución de problemas	reproducción		conexión	
Porcentaje de niños que responde correctamente un ítem y erróneamente el otro ítem,	42%	N=71	5,9%	N=10
Porcentaje de alumnos que responde correctamente el ítem,	73,4%	N=124	37,3%	N=63

Como se muestra en la tabla el grado de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias coincide con el comportamiento de la muestra. Se observa que un 73,4% de la muestra contesta correctamente la tarea más simple, mientras que solo un 37,3% contesta bien el ítem que evalúa la condición más compleja. Con estos resultados se valida la hipótesis de inclusividad de los grados de complejidad cognitiva usados en esta investigación, ya que un niño que es capaz de responder la segunda pregunta (conexión), en general, responderá también correctamente la primera pregunta (reproducción), exceptuando un 5,9% que tiene un comportamiento no esperado.

2º básico

	Condición didáctica 1		Condición didáctica 2	
Tarea matemática: ordenan números entre 0 y 1000,	Pregunta 5a: tres números con los mismos dígitos en distintas posiciones		Pregunta 5b: más de tres números con los mismos dígitos en distintas posiciones.	
Competencia matemática: Resolución de problemas	conexión		reflexión	
Porcentaje de niños que responde correctamente un ítem y erróneamente el otro ítem,	1,2%	N=2	1,2%	N=2
Porcentaje de alumnos que responde correctamente el ítem,	62,1%	N=105	69,8%	N=118

En esta tarea, observamos que el grado de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias no coincide con el comportamiento de la muestra. Concluimos, de los resultados que un 62,1% de la muestra contesta correctamente la tarea, que según nuestra hipótesis, era más simples, mientras que un 69,8% contesta bien el ítem que evalúa, según nuestra hipótesis, la segunda condición. A partir de estos resultados se contrasta la hipótesis de complejidad cognitiva expuesta en la matriz de competencia, observamos que en ambos casos el nivel de complejidad es el mismo, es decir, la cantidad de números a ordenar, cuando son 3 y 4, no es una variable que discrimine el nivel de complejidad de una tarea. Por tanto, ambas condiciones están en un nivel de conexión para los estudiantes.

	Condición didáctica 1		Condición didáctica 2	
Tarea matemática: resuelven problemas aditivos en un ámbito hasta 1000	Pregunta 10a: problemas de composición y de cambio directos		Pregunta 10b: problemas de composición y cambio inversos	
Competencia matemática: Resolución de problemas	reproducción		Conexión	
Porcentaje de niños que responde correctamente un ítem y erróneamente el otro ítem,	17,4%	N=30	4,1%	N=7
Porcentaje de alumnos que responde correctamente el ítem,	68,6%	N=118	57,6%	N=99

Los datos nos muestran que el grado de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias coincide con el comportamiento de la muestra. De los resultados se extrae que un 68,6% de la muestra contesta correctamente la tarea con la condición más simple, mientras que un 57,6% contesta bien el ítem que evalúa la segunda condición. Si bien la diferencia de porcentajes de alumnos que contesta bien un ítem respecto del otro no varía sustancialmente, al considerar el porcentaje de alumnos que contesta bien solo uno de los ítems, podemos afirmar que la inclusión de la complejidad cognitiva en esta tarea se cumple, ya que solo un 4,1% de los alumnos fue capaz de contestar correctamente el ítem que evaluaba la condición 2 y errar en el ítem que valuaba la condición 1, es decir, la mayoría de los alumnos que contesta bien el ítem con el grado de complejidad mayor (conexión) también contesta bien el ítem con el grado de complejidad menor (reproducción), no así recíprocamente.

	Condición didáctica 1		Condición didáctica 2	
Tarea matemática: Formulan problemas a partir de sumas y/o restas dadas	Pregunta 14a: problemas de composición y de cambio,		Pregunta 14b: problemas de comparación,	
Competencia matemática: razonamiento y argumentación	reproducción		Conexión	
Porcentaje de niños que responde correctamente un ítem y erróneamente el otro ítem,	37,3%	N=60	1,32%	N=2
Porcentaje de alumnos que responde correctamente el ítem,	46%	N=76	10,35%	N=18

De la tabla, se aprecia que el grado de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias coincide con el comportamiento de la muestra. En los resultados se observa que un 46% de la muestra contesta correctamente la tarea con la condición más simple, mientras que solo un 10,35% contesta bien el ítem que evalúa la segunda condición. Observamos una diferencia notable entre ambos porcentajes, lo que afirma que la inclusión de la complejidad cognitiva en esta tarea se cumple, esto se complementa con el hecho que solo 2 alumnos contestaron correctamente el ítem que evaluaba la condición 2 y erraron en el ítem que valuaba la condición 1, es decir, la mayoría de los alumnos que contesta bien el ítem que evaluaba la condición más compleja, también contesta bien el ítem que evalúa la condición más simple, no así recíprocamente.

7.3.2.2 Análisis por tarea matemática considerando la inclusión entre las competencias matemáticas

1º básico

Competencia matemática	Manipulación de expresiones matemáticas		Resolución de problemas	
Tarea matemática	Calculan mentalmente adiciones y sustracciones en un ámbito del 0 al 100		Resuelven problemas aditivos simples utilizando las combinaciones aditivas básicas y su extensión a los múltiplos de 10 y sus restas correspondientes,	
Pregunta	11d: Suma de un múltiplo de 10 más un dígito y las restas correspondientes		13a: Problemas de cambio y composición directo,	
Porcentaje de niños que responde correctamente un ítem y erróneamente el otro ítem,	14,4%	N=24	19,2%	N=32
Porcentaje de alumnos que responde correctamente el ítem,	68,3%	N=114	73,1%	N=122

De los resultados obtenidos podemos señalar que no hay una diferencia entre el desarrollo de un cálculo y la resolución del problema. Atribuimos estos resultados al tipo de problema que se está evaluando en el ítem, que corresponde a un problema simple y directo, en contraste con el cálculo que presenta números sin contexto. El problema parece ayudar más a los niños a efectuar la operación.

Competencia matemática	Manipulación de expresiones matemáticas		Resolución de problemas	
Tarea matemática	calculan mentalmente adiciones y sustracciones en un ámbito del 0 al 100		Resuelven problemas aditivos simples utilizando las combinaciones aditivas básicas y su extensión a los múltiplos de 10 y sus restas correspondientes,	
Pregunta	11a: Suma de combinaciones aditivas básicas y las restas correspondientes,		13b: Problemas de cambio inversos,	
Porcentaje de niños que responde correctamente un ítem y erróneamente el otro ítem,	48%	N=83	0,6%	N=1
Porcentaje de alumnos que responde correctamente el ítem,	85,9%	N=146	37,6%	N=64

A diferencia de los resultados obtenidos anteriormente, en este caso en que comparamos la competencia asociada al cálculo y la de resolución de problemas, un alto porcentaje de los niños contesta correctamente el cálculo pero no es capaz de resolver el problema. La razón de estos resultados tan disímiles los atribuimos al tipo de problemas, en este caso el problema corresponde a uno simple e inverso, que para resolverlo no solo es suficiente saber calcular, ya que es necesario contar con una estrategia para inferir la operación que resuelve dicho problema.

2º básico

Competencia matemática	Manipulación de expresiones matemáticas		Resolución de problemas	
Tarea matemática	Cuantifican colecciones que tienen entre 0 y 1,000 objetos		Resuelven problemas en que producen colecciones de hasta 1,000 objetos	
Pregunta	3: colecciones agrupadas de a 10 y/o de a 100 objetos, y objetos sueltos		2: dado un cardinal	
Porcentaje de niños que responde correctamente un ítem y erróneamente el otro ítem,	16%	N=27	6,5%	N=11
Porcentaje de alumnos que responde correctamente el ítem,	85,8%	N=145	75,7%	N=128

Considerando los datos que se exponen en la tabla, podemos decir que en relación a la cuantificación, la gran mayoría de los niños que es capaz de producir una colección dado un cardinal, tarea que moviliza la resolución de problemas; además es capaz de cuantificar una colección, tarea que moviliza la manipulación de expresiones matemáticas. Sin embargo no se puede establecer que los niños que son capaces de cuantificar también son capaces de producir una colección, ya que quienes contestan bien solo la pregunta 2 corresponden a un 6,5% de la muestra.

Competencia matemática	Manipulación de expresiones matemáticas		Resolución de problemas	
Tarea matemática	Calculan en forma escrita sumas y restas		Resuelven problemas aditivos de composición, cambio y comparación,	
Pregunta	11a: por descomposición aditiva canónica,		10a: problema directo	
Porcentaje de niños que responde correctamente un ítem y erróneamente el otro ítem,	10,4%	N=18	13,3%	N=23
Porcentaje de alumnos que responde correctamente el ítem,	72,8%	N=126	67,6%	N=117

Observamos en los resultados obtenidos que no hay una diferencia sustancial entre la manipulación de expresiones matemáticas y la resolución del problema. Es importante mencionar que el problema aditivo que estamos considerando en esta comparación es simple y directo, y los datos son números de dos cifras. Por otra parte el cálculo considerado en esta comparación corresponde a la suma de un número de tres cifras con un número de dos cifras, por tanto creemos que los resultados obtenidos se deben al tipo de problema que está siendo contrastado con el cálculo y no se puede afirmar que ambas competencias sean equivalentes

Competencia matemática	Manipulación de expresiones matemáticas		Resolución de problemas	
Tarea matemática	Calculan en forma escrita sumas y restas		Resuelven problemas aditivos de composición, cambio y comparación.	
Pregunta	11c: por descomposición aditiva canónica,		10c: problema de comparación	
Porcentaje de niños que responde correctamente un ítem y erróneamente el otro ítem,	20,2%	N=34	8,3%	N=14
Porcentaje de alumnos que responde correctamente el ítem,	67,3%	N=113	51,2%	N=86

A diferencia de lo observado en la tabla anterior, podemos señalar que un 67,3% de los niños resuelve bien el cálculo de una resta, mientras que un 51,2% de los niños resuelve bien un problema de comparación en que tienen que restar. Si consideramos que el 8,3% de los niños contesta bien el ítem del problema de comparación y no es capaz de resolver el cálculo, entonces podemos concluir que la mayoría de los niños que resuelve correctamente el problema también desarrolla correctamente el cálculo.

Competencia matemática	Razonamiento y argumentación		Resolución de problemas	
Tarea matemática	Formulan problemas a partir de sumas y/o restas dadas		Resuelven problemas aditivos de composición, cambio y comparación,	
Pregunta	14a: problema de composición,		10a: problema de composición directo	
Porcentaje de niños que responde correctamente un ítem y erróneamente el otro ítem,	5,6%	N=9	32,5%	N=52
Porcentaje de alumnos que responde correctamente el ítem,	46,9%	N=75	68,1%	N=109

Competencia matemática	Razonamiento y argumentación		Resolución de problemas	
Tarea matemática	Formulan problemas a partir de sumas y/o restas dadas		Resuelven problemas aditivos de composición, cambio y comparación,	
Pregunta	14b: problema de comparación,		10c: problema de comparación directo	
Porcentaje de niños que responde correctamente un ítem y erróneamente el otro ítem,	0,7%	N=1	39,5%	N=58
Porcentaje de alumnos que responde correctamente el ítem,	11,6%	N=17	51%	N=75

Con los datos extraídos de la primera tabla, podemos señalar que un 68,1% de los niños resuelve bien el problema de composición, mientras que un 46,9% de los niños es capaz de relacionar información gráfica y una operación dada para formular la pregunta de un problema de composición directo. Considerando que solo un 5,6% de los niños responde correctamente la pregunta 14a y no responde correctamente la pregunta 10a, podemos establecer que los niños que son capaces de relacionar datos y una operación para formular una pregunta de un problema de composición serán capaces de resolver un problema aditivo de este tipo y no recíprocamente. De la misma forma en la segunda tabla se aprecia que los niños que son capaces de formular la pregunta a una situación de comparación, también resuelven este tipo de problema, sin embargo en este caso la diferencia es considerablemente más amplia, y arroja que la resolución de problemas de comparación es de gran dificultad para los niños.

Conclusiones sobre el análisis de los cuestionarios en función de las relaciones de inclusión entre las competencias:

En relación a la manipulación de expresiones matemáticas y la resolución de problemas podemos señalar que los niños de NB1 que son competentes en la resolución de problemas, también son competentes en la manipulación de expresiones matemáticas. Sin embargo, aquellos niños que son competentes en la manipulación de expresiones matemáticas no necesariamente serán capaces de resolver un problema aditivo. Esta afirmación no es válida cuando se trata de un problema simple y directo, ya que en este caso no se observan diferencias en los resultados de los niños que resuelven correctamente ambas tareas, tanto la que moviliza la competencia de manipulación de expresiones matemáticas como la que moviliza la resolución de problemas. Por lo anterior consideramos importante que los profesores de las escuelas cuenten con distinciones didácticas para estudiar con sus alumnos distintos tipos de problemas: directos e inversos, de composición, cambio y comparación, rutinarios e interesantes, ya que en general se estudian problemas simples, directos y rutinarios.

De los resultados obtenidos con la aplicación de los cuestionarios a los niños de 2º básico, también se puede deducir que los niños que son capaces de formular una pregunta dado una operación e información gráfica, tarea matemática que moviliza la competencia razonamiento y argumentación, son capaces también de resolver un problema del mismo tipo, sin embargo no se puede validar la relación recíproca. A través de los cuestionarios escritos aplicados a los alumnos, no se pueden establecer otras conclusiones con respecto a la competencia razonamiento y argumentación, ya que el tipo de tareas que movilizan dicha competencia en este nivel, no se pueden desarrollar de manera escrita.

Resultados obtenidos por competencia matemática

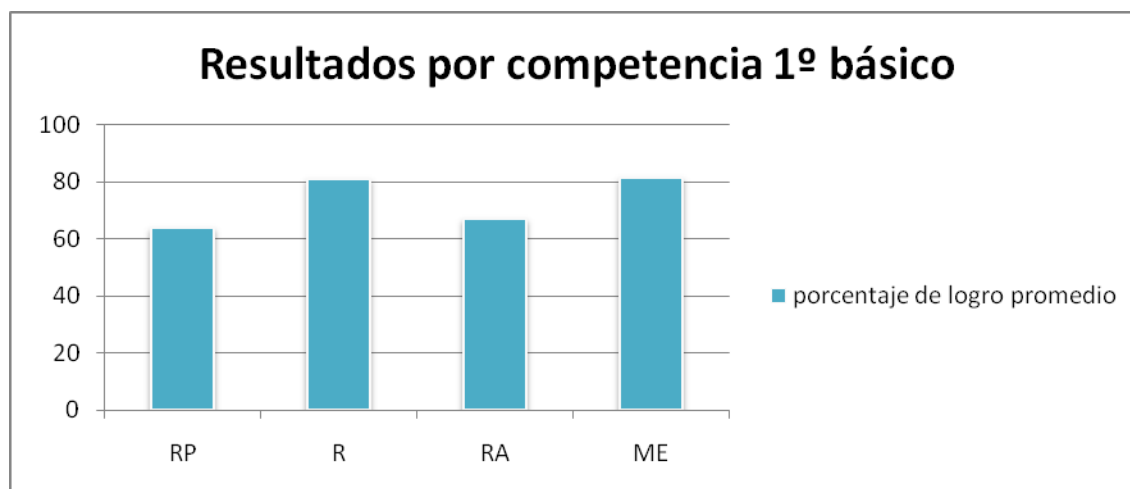
Tanto en 1º como en 2º básico el cuestionario diseñado para los alumnos incluía preguntas que abarcaron las cuatro competencias definidas en el modelo propuesto por esta investigación. Analizaremos los porcentajes de logro promedio de toda la muestra en cada grupo de preguntas relacionadas con una competencia, esto nos nutrirá de información que nos permitirá establecer qué competencias son las que los alumnos de NB1 tienen más desarrolladas.

1º básico

La siguiente tabla muestra los resultados promedio obtenidos para cada competencia por los alumnos de 1º básico que participaron de la aplicación del cuestionario.

Competencia matemática	Nº de Alumnos	Puntaje Mínimo	Puntaje Máximo	Media	Desviación Estándar
Resolución de problemas (RP)	174	10,00	100,00	64,08	22,05
Representación (R)	174	25,00	100,00	80,85	20,16
Razonamiento y argumentación (RA)	174	0,00	100,00	67,07	24,85
Manipulación de expresiones matemáticas (ME)	174	12,50	100,00	81,47	18,89

El siguiente gráfico muestra los porcentajes de logro promedio obtenidos por los estudiantes de 1º básico frente a cada competencia matemática:



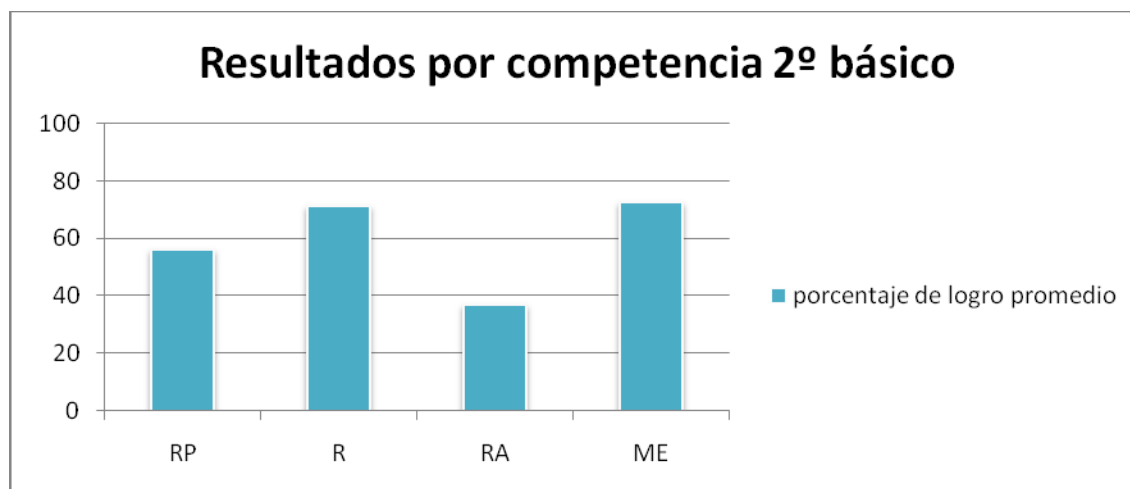
Tal como se aprecia en el gráfico, la competencia matemática manipulación de expresiones matemáticas es la que obtuvo el mayor porcentaje de logro entre las competencias definidas en el modelo propuesto por esta investigación. Del mismo modo, se observa que representación obtiene un porcentaje de logro similar a manipulación de expresiones matemáticas, por tanto se puede señalar que los niños de 1º básico son mayoritariamente más competentes en la manipulación de expresiones y la representación. Por otra parte las competencias que obtuvieron menor porcentaje de logro fueron razonamiento y argumentación, y resolución de problemas.

2º básico

La siguiente tabla muestra los resultados promedio obtenidos para cada competencia por los alumnos de 2º básico que participaron de la aplicación del cuestionario:

Competencia matemática	Nº de Alumnos	Puntaje Mínimo	Puntaje Máximo	Media	Desviación Estándar
Resolución de problemas (RP)	177	0,00	100,00	55,93	24,59
Representación (R)	177	0,00	100,00	71,11	23,9
Razonamiento y argumentación (RA)	177	,00	100,00	36,77	24,93
Manipulación de expresiones matemáticas (ME)	177	0,00	100,00	72,63	20,18

El siguiente gráfico muestra los porcentajes de logro promedio obtenidos por los estudiantes de 2º básico frente a cada competencia matemática evaluada:



La competencia razonamiento y argumentación es la que obtuvo el porcentaje de logro promedio más bajo entre los estudiantes, no alcanzando el 40% de logro, en contraste con la competencia manipulación de expresiones matemáticas que al igual que en 1º básico obtiene el mayor porcentaje de logro promedio. A partir de estos resultados podemos señalar que los niños de 2º básico son competentes en la manipulación de expresiones y la representación, y en general no muestran ser competentes en razonamiento y argumentación.

7.3.2.3 Análisis de los resultados por tarea matemática para validar los niveles de complejidad cognitiva asignados en la matriz

1º Básico: *Eje Números*

Tarea matemática: Miden longitudes de hasta 100 unidades de medida.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Utilizando pasos, cuartas, etc.	Resolución de problemas	Reflexión

Resultados por grupo en la pregunta 1:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
46,88%	60%	97,3%

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De la tabla se puede concluir que: como el porcentaje de estudiantes que respondió correctamente la pregunta en el grupo 3 es mayor a un 66%, y hay una considerable diferencia con el porcentaje de alumnos del grupo 2 (que no alcanza el 66%), existe evidencia suficiente para afirmar que el grado de complejidad cognitiva es de *reflexión*, validando de esta forma el grado de complejidad cognitivo establecido en la matriz para los estudiantes de la muestra.

Tarea matemática: Resuelven problemas en que producen colecciones de hasta 100 objetos.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Dado un cardinal.	Resolución de problemas	Reproducción

Resultados por grupo en la pregunta 2:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
87,5%	93,33%	91,89%

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos presentados en la tabla, podemos concluir que: como el porcentaje de alumnos que contesta correctamente esta pregunta en el grupo 1 es mayor a un 66%, y el porcentaje de alumnos que la contesta correctamente en el grupo 2 y 3 es superior al del grupo 1, existe evidencia suficiente para afirmar que el grado de complejidad cognitiva es de *reproducción*, validando de esta forma el grado de complejidad cognitivo establecido en la matriz para los estudiantes de la muestra.

Tarea matemática: Resuelven problemas en que producen colecciones de hasta 100 objetos.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Dada una colección agrupada de a 10.	Resolución de problemas	Reflexión

Resultados por grupos en la pregunta 6:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
28,13%	25,67%	67,57%

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos presentados en la tabla, podemos establecer que: como el porcentaje de estudiantes del grupo 3 que contesta correctamente la pregunta es mayor al 66% y el porcentaje de los grupos 1 y 2 es inferior al porcentaje del grupo 3, existe evidencia suficiente para afirmar que el grado de complejidad cognitiva es de

reflexión, validando de esta forma el grado de complejidad cognitivo establecido en la matriz para los estudiantes de la muestra.

Tarea matemática: Contrastan procedimientos de conteo y seleccionan el más eficaz, expresados en forma oral y/o escrita

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Colecciones agrupadas de a 10 y objetos no agrupados	Razonamiento y argumentación.	Reflexión

Resultados por grupo en la pregunta 14:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
53,33%	58,62%	94,59%

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos de la tabla se puede concluir que: como el porcentaje estudiantes del grupo 3 que contestan correctamente la pregunta es mayor a un 66%, y el porcentaje de estudiantes del grupo 1 y 2 que responden bien la pregunta es inferior al porcentaje del grupo 3, existe evidencia suficiente para afirmar que el grado de complejidad cognitiva es de *reflexión*, validando de esta forma el grado de complejidad cognitivo establecido en la matriz para los estudiantes de la muestra.

Tarea matemática: Comparan números entre 0 y 100.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Números de dos cifras formados por los mismos dígitos, pero en distintas posiciones.	Cálculo y manipulación de expresiones matemáticas.	Conexión

Resultados por grupo en la pregunta 3:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
90,32	96,55	100

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos de la tabla, podemos establecer que: como el porcentaje de estudiantes del grupo 1 que contesta correctamente la pregunta es mayor a un 66%, y el porcentaje de estudiantes del grupo 2 y 3 que contesta bien la pregunta es mayor al porcentaje de estudiantes del grupo 1, esta tarea es de *reproducción*. De esta forma, no hay evidencia en este grupo de estudiantes para validar el grado de complejidad cognitiva que se asignó en la matriz.

Tarea matemática: Comparan colecciones de hasta 100 objetos.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Una colección agrupada de 10 con objetos sueltos con un cardinal dado.	Cálculo y manipulación de expresiones matemáticas.	Conexión

Resultados por grupo en la pregunta 4:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
65,63	100	97,3

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos de la tabla se puede establecer que: como el porcentaje de estudiantes que contesta correctamente la pregunta en el grupo 1 es al límite del 66%, y el porcentaje de estudiantes de los grupos 2 y 3 que contesta bien la pregunta es mayor que el porcentaje de estudiantes del grupo 1, esta tarea es de reproducción. De esta forma, no hay evidencia en este grupo de estudiantes para validar el grado de complejidad cognitiva que se asignó en la matriz.

Tarea matemática: intercalan un número entre dos números del 0 al 100.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Los números dados tienen una diferencia menor que 5 y tienen decenas distintas	Resolución de problemas.	Conexión

Resultados por grupo en la pregunta 5:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
64,06	81,67	100

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos de la tabla se puede establecer que, ya que el porcentaje de estudiantes del grupo 1 que contestó correctamente la pregunta es menor a un 66%, y el porcentaje de estudiantes que contestó bien la pregunta en el grupo 2 y 3 es mayor a un 66%, existe evidencia suficiente para afirmar que el grado de complejidad cognitiva es de *conexión*, validando de esta forma el grado de complejidad cognitivo establecido en la matriz para los estudiantes de la muestra.

Tarea matemática: componen y descomponen aditivamente en dos sumandos números del 0 al 100.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Sin material concreto	Representación	Conexión

Resultados por grupo en la pregunta 8:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
78,13	91,5	99

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos de la tabla se puede establecer que, ya que el porcentaje de estudiantes del grupo 1 que contestó correctamente la pregunta es mayor a un 66%, y el porcentaje de estudiantes que contestó bien la pregunta en los grupos 2 y 3 es mayor al porcentaje de estudiantes del grupo 1, existe evidencia suficiente para afirmar que el grado de complejidad cognitiva es de *reproducción*. De esta forma, no hay evidencia en este grupo de estudiantes para validar el grado de complejidad cognitiva que se asignó en la matriz.

Tarea matemática: estiman el cardinal de una colección en un ámbito hasta 100.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Colección disponible y dados posibles cardinales.	Resolución de problemas	Conexión

Resultados por grupos en la pregunta 9:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
85,94	83,33	100

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos de la tabla podemos establecer que esta tarea es de *reproducción*, ya que el porcentaje de estudiantes del grupo 1 que contestó correctamente la pregunta es mayor a un 66%. De esta forma, no hay evidencia en este grupo de estudiantes para validar el grado de complejidad cognitiva que se asignó en la matriz.

Tarea matemática: estiman el cardinal de una colección en un ámbito hasta 100.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Colección no disponible y dada una colección disponible de referencia.	Resolución de problemas	Reflexión

Resultados por grupo en la pregunta 10:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
28,13	46,67	59,46

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos de la tabla no podemos establecer claramente el nivel de complejidad cognitiva de la tarea, puesto que el porcentaje de estudiantes del grupo 3 que contestaron correctamente la pregunta es inferior al 66% y la diferencia entre el porcentaje de estudiantes de los grupos 2 y 3 que contestaron correctamente la pregunta es inferior al 20%. Estos resultados se pueden explicar, porque la estimación del cardinal de una colección es un tipo de trabajo matemático que, a

pesar de estar considerado en el curriculum, no se estudia habitualmente en las escuelas.

Eje Operaciones

Tarea matemática: calculan mentalmente adiciones y sustracciones en un ámbito del 0 al 100.

Para esta tarea construimos un ítem con cuatro cálculos a desarrollar. Dichos cálculos corresponden a dos condiciones de la tarea:

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Suma de un múltiplo de 10 más un dígito y las restas correspondientes.	Manipulación de expresiones matemáticas	Reproducción

Resultados por grupo en la pregunta **11b**:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
96,88	100	100

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

Tal como se aprecia en la tabla, el porcentaje de estudiantes del grupo 1 que contesta correctamente la pregunta es mayor a un 66%, en el resto de los grupos es igual al 100%. Por tanto hay evidencia suficiente para establecer que el grado de complejidad cognitiva de la tarea es *reproducción*, validándose el grado de complejidad cognitivo establecido en la matriz para los estudiantes de la muestra.

Tarea matemática: calculan mentalmente adiciones y sustracciones en un ámbito del 0 al 100.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Suma de un múltiplo de 10 más un dígito y las restas correspondientes.	Manipulación de expresiones matemáticas	Reproducción

Resultados por grupo en la pregunta **11d**:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
56,67	80	94,59

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos de la tabla se puede establecer que esta tarea es de *conexión*, ya que el porcentaje de estudiantes del grupo 2 que contesta correctamente la pregunta es mayor a un 66%, y el porcentaje de estudiantes del grupo 1 es menor al porcentaje de estudiantes del grupo 2 y éste, a su vez, es menor que el porcentaje del grupo 3. De esta forma, no hay evidencia en este grupo de estudiantes para validar el grado de complejidad cognitiva que se asignó en la matriz.

Tarea matemática: calculan mentalmente adiciones y sustracciones en un ámbito del 0 al 100.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Suma de combinaciones aditivas básicas y las restas correspondientes.	Manipulación de expresiones matemáticas	Reproducción

Resultados por grupos en la pregunta **11a**:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
71,88	96,67	100

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos de la tabla podemos señalar que hay evidencia suficiente para validar el grado de complejidad de reproducción que fue asignado en la matriz para esta

tarea. En efecto, el porcentaje de estudiantes del grupo 1 que contesta correctamente la pregunta es mayor a un 66% y el porcentaje de estudiantes de los grupos 2 y 3 que contestan correctamente la pregunta es mayor al porcentaje de estudiantes del grupo 1.

Tarea matemática: calculan mentalmente adiciones y sustracciones en un ámbito del 0 al 100.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Suma de combinaciones aditivas básicas y las restas correspondientes.	Manipulación de expresiones matemáticas	Reproducción

Resultados por grupo en la pregunta 11c:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
59,38	80	86,49

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De la tabla se puede concluir que como el porcentaje de estudiantes del grupo 1 que contesta correctamente la pregunta es inferior al 66% y el porcentaje del grupo 2 que contesta correctamente la pregunta es superior al 66%, este ítem tienen un grado de complejidad cognitiva de *conexión*. De esta forma, no hay evidencia en este grupo de estudiantes para validar el grado de complejidad cognitiva que se asignó en la matriz.

Tarea matemática: determinan y escriben la operación matemática (adición o sustracción) que permite anticipar el resultado de acciones en diferentes contextos en un ámbito del 0 al 100.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
En contextos que involucra la acción de agregar/quitar	Resolución de problemas	Conexión

Resultados por grupo en la pregunta **12a**:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
48,15	66,67	94,59

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

Tal como se aprecia en la tabla, este ítem lo contestó correctamente más de un 66% de los estudiantes del grupo 2, al mismo tiempo el porcentaje de estudiantes del grupo 1 que lo contestó correctamente no supera el 50%; por tanto podemos señalar que este ítem es de *conexión*. De esta forma, hay evidencia en este grupo de estudiantes para validar el grado de complejidad cognitiva que se asignó en la matriz.

Tarea matemática: determinan y escriben la operación matemática (adición o sustracción) que permite anticipar el resultado de acciones en diferentes contextos en un ámbito del 0 al 100.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
En contextos que involucra la acción de avanzar/retroceder	Resolución de problemas	Conexión

Resultados por grupo en la pregunta **12b**:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
73,33	93,33	100

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

Como se aprecia en la tabla, el porcentaje de estudiantes del grupo 1 que contesta correctamente este ítem es superior al 66%, lo mismo ocurre con el grupo 2 y grupo 3, que superan dicho porcentaje, llegando a presentar el grupo 3 un 100% de estudiantes que lo contesta correctamente. En conclusión podemos señalar que este ítem es de *reproducción* y, con ello, no hay evidencia en este grupo de estudiantes para validar el grado de complejidad cognitiva que se asignó en la matriz.

Tarea matemática: resuelven problemas aditivos simples usando las combinaciones aditivas básicas y su extensión a los múltiplos de 10 y sus restas correspondientes.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Problemas directos	Resolución de problemas	Conexión

Resultados por grupo en la pregunta **13a**:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
50	86,67	94,59

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos de la tabla podemos extraer evidencia suficiente para señalar que el grado de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias se valida, ya que según los datos este ítem es de *conexión*. Lo anterior se sustenta en el hecho que en el grupo 1 solo un 50% de los estudiantes fue capaz de responder correctamente la pregunta, al mismo tiempo, más de un 66% de los estudiantes del grupo 2 la contestó correctamente, lo mismo ocurre con el grupo 3.

Tarea matemática: resuelven problemas aditivos simples usando las combinaciones aditivas básicas y su extensión a los múltiplos de 10 y sus restas correspondientes.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Problemas inversos	Resolución de problemas	Reflexión

Resultados por grupos en la pregunta **13b**:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
9,38	33,33	75,68

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

Los datos de la tabla establecen que esta pregunta es de *reflexión*, ya que tanto en el grupo 1 como el grupo 2 menos de un 50% de los estudiantes es capaz de responder correctamente la pregunta, y en el grupo 3 dicho porcentaje es mayor al

66%. De esta forma, hay evidencia en este grupo de estudiantes para validar el grado de complejidad cognitiva que se asignó en la matriz.

2º Básico: Eje Números

Tarea matemática: completan secuencias numéricas que siguen un criterio aditivo dado.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Del 0 al 1.000	Manipulación de expresiones matemáticas.	Conexión

Resultados por grupos en la pregunta 1:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
71,32	84,38	87,96

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

Según los datos de la tabla, esta tarea tiene un grado de complejidad cognitiva de *reproducción*, por tanto no hay evidencia suficiente en este grupo de estudiantes para validar el grado de complejidad cognitiva que se asignó en la matriz. Esta afirmación se sustenta en el hecho que más de un 66% de los estudiantes del grupo 1 logro contestar correctamente el ítem, y porcentajes superiores, se observan en el grupo 2 y grupo 3.

Tarea matemática: Resuelven problemas en que producen colecciones de hasta 1.000 objetos.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Dado un cardinal y una condición de producción	Resolución de problemas.	Conexión

Resultados por grupos en la pregunta 2:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
53,13	70,31	100

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

En este caso la pregunta, según los datos de la tabla, tiene un grado de complejidad cognitiva de conexión, por tanto existe evidencia en este grupo de estudiantes para validar el grado de complejidad cognitiva que se asignó en la matriz. Esta afirmación se sustenta en el hecho que más de un 66% de los estudiantes del grupo 2 logró contestar correctamente la pregunta, al mismo tiempo el porcentaje de estudiantes del grupo 1 que lograron contestar correctamente la pregunta es menor que el porcentaje del grupo 2, y éste a su vez es menor que el porcentaje de estudiantes del grupo 3.

Tarea matemática: cuantifican colecciones en un ámbito del 0 al 1000.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Colecciones agrupadas de 100, 10 y 1, ámbito mayor que 500.	Manipulación de expresiones matemáticas	Reproducción

Resultados por grupos en la pregunta 3:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
79,41	84,38	100

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

En este caso, por los datos presentados en la tabla, hay evidencia para validar el grado de complejidad cognitiva de *reproducción* asignado en la matriz, ya que más de un 66% de los estudiantes del grupo 1 contesta correctamente el ítem, aumentando dicho porcentaje en el resto de los grupos.

Tarea matemática: comparan dos números en un ámbito del 0 al 1000.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
De la misma centena, y los mismos dígitos en la decena y unidad pero en distintas posiciones.	Manipulación de expresiones matemáticas	Reproducción

Resultados por grupos en la pregunta 4:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
93,94	100	100

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

Según los datos de la tabla, hay evidencia para validar el grado de complejidad cognitiva de *reproducción* asignado en la matriz a esta tarea, ya que un 93% de los estudiantes del grupo 1 logró contestar correctamente la pregunta, y en el resto de los grupos el 100% de los estudiantes logra contestarla correctamente.

Tarea matemática: ordenan números entre 0 y 1000.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Tres números con los mismos dígitos en distintas posiciones.	Manipulación de expresiones matemáticas	Reproducción

Resultados por grupos en la pregunta **5a**:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
67,65	75	92,59

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

Según los datos de la tabla, hay evidencia para validar el grado de complejidad cognitiva de *reproducción* asignado en la matriz a esta tarea, ya que más de un 66% de los estudiantes del grupo 1 logra contestar correctamente la pregunta, aumentando dicho porcentaje en el resto de los grupos.

Tarea matemática: ordenan números entre 0 y 1000.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Más de tres números con los mismos dígitos en distintas posiciones.	Manipulación de expresiones matemáticas	Conexión

Resultados por grupos en la pregunta **5b**:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
75	82,03	99,07

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos de la tabla podemos establecer que el nivel de complejidad cognitiva de esta tarea es de *reproducción*, ya que más de un 66% de los estudiantes del grupo 1 logra contestar correctamente la pregunta y, al mismo tiempo, el resto de

los grupos supera dicho porcentaje. Por tanto, no hay evidencia suficiente en los estudiantes de la muestra para validar el nivel de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias.

Tarea matemática: intercalan un número entre dos números del 0 al 1000.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Los números dados tienen una diferencia menor que 5 y tienen igual centena y decenas distintas	Resolución de problemas	Conexión

Resultados por grupos en la pregunta 6:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
66,67	84,38	81,48

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

Según los datos de la tabla el grado de complejidad cognitivo demandado por esta pregunta es de *reproducción*, ya que más de un 66% de los estudiantes del grupo 1 logra contestar correctamente el ítem y, el resto de los grupos supera dicho porcentaje. Por tanto, no hay evidencia suficiente para validar el nivel de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias. Llama la atención, sin embargo, que el porcentaje de estudiantes del grupo 3 que contesta correctamente la pregunta es menor que el porcentaje de estudiantes del grupo 2 que la contesta correctamente. Este hecho se puede explicar porque, por una parte, es una tarea poco estudiada en las salas de clases. Por otra parte, la diferencia entre los números dados es tres, por lo que este ítem tenía dos posibles respuestas correctas. Es muy probable que los estudiantes del grupo 1 y grupo 2 escribieran como respuesta el sucesor del primer número, sin percatarse de esta doble posibilidad. Mientras que, es muy posible que los estudiantes del grupo 3, reconocieran estas dos posibles respuestas, y por ello tuvieran más dificultades para decidir aquel número que satisfacía lo solicitado.

Tarea matemática: componen y descomponen canónicamente números de 3 cifras.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Sin material concreto	Representación	Reproducción

Resultados por grupos en la pregunta 7a:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
96,97	93,75	96,3

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

Dado que, en los tres grupos de estudiantes, más de un 90% de ellos logra responder este ítem correctamente, existe evidencia para establecer que esta tarea es de *reproducción* y, por tanto, se valida el nivel de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias. El hecho que esta pregunta sea contestada en igual porcentaje por los tres grupos de estudiantes se puede explicar porque, según nuestras investigaciones de campo y la evidencia recogida por el Mineduc, se trata de una tarea que se trabaja con frecuencia en las clases.

Tarea matemática: componen y descomponen canónicamente números de 3 cifras.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Sin material concreto	Representación	Reproducción

Resultados por grupos en la pregunta:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
94,12	96,88	100

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

Dado que, en los tres grupos de estudiantes, más de un 90% de ellos logra responder este ítem correctamente, existe evidencia para establecer que esta tarea es de *reproducción* y, por tanto, se valida el nivel de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias. El hecho que esta pregunta sea

contestada en igual porcentaje por los tres grupos de estudiantes se puede explicar porque, según nuestras investigaciones de campo y la evidencia recogida por el Mineduc, se trata de una tarea que se trabaja con frecuencia en las clases.

Tarea matemática: Estiman medidas en un ámbito del 0 al 1000.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Medidas de longitud, en metros y centímetros.	Resolución de problemas	Conexión

Resultados por grupos en la pregunta **8a**:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
18,75	18,75	66,67

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

Según los datos de la tabla el grado de complejidad cognitivo demandado por esta pregunta es de *reflexión*, ya que más de un 66% de los estudiantes del grupo 3 logra contestar correctamente el ítem y, el resto de los grupos no supera dicho porcentaje. Por tanto, no hay evidencia suficiente para validar el nivel de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias.

Tarea matemática: Estiman el cardinal de una colección en un ámbito hasta 1.000

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Colección no disponibles y dada una colección disponible de referencia	Resolución de problemas	Reflexión

Resultados por grupos en la pregunta **8b**:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
26,67	34,38	48,15

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos de la tabla no podemos establecer claramente el nivel de complejidad cognitiva de la tarea, puesto que el porcentaje de estudiantes del grupo 3 que

contestaron correctamente la pregunta es inferior al 66% y la diferencia entre el porcentaje de estudiantes de los grupos 2 y 3 que contestaron correctamente la pregunta es inferior al 20%. Estos resultados se pueden explicar, porque la estimación del cardinal de una colección es un tipo de trabajo matemático que, a pesar de estar considerado en el curriculum, no se estudia habitualmente en las escuelas.

Tarea matemática: comparan un cardinal con una colección en un ámbito del 0 al 1000.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Colección agrupada de 100, 10 y 1, igual cantidad de centenas.	Manipulación de expresiones matemáticas.	Conexión

Resultados por grupos en la pregunta 9:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
97,06	93,75	100

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

Como todos los grupos tienen más de un 90% de estudiantes que contesta correctamente el ítem, podemos señalar que esta tarea es de *reproducción*. Por lo tanto, no hay evidencia suficiente para validar el nivel de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias.

Eje Operaciones

Tarea matemática: resuelven problemas aditivos de composición, cambio y comparación explicitando el modelo matemático.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
directos	Resolución de problemas	Reproducción

Resultados por grupos en la pregunta **10a**:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
60,61	79,69	100

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

En este caso el grupo 1 no alcanza a tener un 66% de estudiantes que conteste correctamente el ítem. Por otra parte, el grupo 2 tiene un porcentaje de alumnos mayor al 66% que contestan correctamente la pregunta y, a su vez, el grupo 3 tiene un 100% de alumnos que contesta correctamente la pregunta. Por tanto, podemos señalar que esta tarea es de *conexión*, es decir, no hay evidencia suficiente para validar el nivel de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias.

Tarea matemática: resuelven problemas aditivos de composición, cambio y comparación explicitando el modelo matemático.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Directos	Resolución de problemas	Conexión

Resultados por grupos en la pregunta **10c**:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
22,58	57,81	87,04

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

Según los datos de la tabla, el grado de complejidad cognitivo demandado por esta pregunta es de *reflexión*, ya que más de un 66% de los estudiantes del grupo 3 logra contestar correctamente el ítem y, el porcentaje de estudiantes del grupo 2 que contesta correctamente no supera dicho porcentaje. Asimismo, el porcentaje de alumnos que contestan correctamente en el grupo 1, no supera el porcentaje de alumnos del grupo 2. Por tanto, no hay evidencia suficiente para validar el nivel de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias.

Tarea matemática: resuelven problemas aditivos de composición, cambio y comparación explicitando el modelo matemático.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
inversos	Resolución de problemas	Conexión

Resultados por grupos en la pregunta **10b**:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
33,33	76,56	94,44

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos de la tabla, se puede establecer que el grado de complejidad cognitiva demandado por esta pregunta es de *conexión*, ya que más de un 66% de los estudiantes del grupo 2 logra contestar correctamente la pregunta y, a su vez, el porcentaje de estudiantes del grupo 1 que contesta correctamente esta pregunta no supera dicho porcentaje. Asimismo, el porcentaje de alumnos que contestan correctamente en el grupo 3, es superior al 90%. Por tanto, hay evidencia para validar el nivel de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias.

Tarea matemática: calculan sumas y restas en un ámbito del 0 al 1000.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Por descomposición aditiva canónica	Manipulación de expresiones	Reproducción

Resultados por grupos en la pregunta **11a**:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
63,24	80,65	96,3

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos de la tabla podemos establecer que el grado de complejidad cognitiva de la tarea es *conexión*, ya que más de un 66% de los estudiantes del grupo 2 logra responder correctamente la pregunta, y al mismo tiempo, en el grupo 1 no

alcanzan el 66%. Por tanto no hay evidencia suficiente en este grupo de estudiantes para validar el grado de complejidad cognitiva asignado en la matriz.

Tarea matemática : calculan sumas y restas en un ámbito del 0 al 1000.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Por descomposición aditiva canónica	Manipulación de expresiones	Reproducción

Resultados por grupos en la pregunta 11c:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
42,65	83,87	88,89

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

Según los datos de la tabla esta tarea es de conexión, ya que el grupo 1 tienen menos de un 50% de estudiantes que logra responderla correctamente, y a su vez, el grupo 2 supera el 66%. Por tanto no hay evidencia suficiente en este grupo de estudiantes para validar el grado de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias.

Tarea matemática: calculan sumas y restas en un ámbito del 0 al 1000.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Por descomposición aditiva del sustraendo	Manipulación de expresiones	Reproducción

Resultados por grupos en la pregunta 11b:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
14,71	25	76,92

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

Tal como se aprecia en la tabla, solo en el grupo 3 hubo más de un 66% de estudiantes que logró contestar correctamente esta pregunta, en el resto de los grupos no hay más de un 50% de estudiantes que conteste bien, siendo así una tarea de *reflexión*. Por tanto no hay evidencia suficiente en este grupo de

estudiantes para validar el grado de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias.

Este resultado se puede explicar por los números involucrados en el cálculo, esto es, el minuendo y el sustraendo son números con una diferencia menor que 5, siendo el sobreconteo a partir del sustraendo la técnica más eficaz. Sin embargo, las técnicas no convencionales para resolver cálculos aditivos no son estudiadas con frecuencia en la sala de clases, y el uso del algoritmo tradicional se dificulta en este tipo de cálculos, lo que lleva a los estudiantes a resolver erróneamente la sustracción.

Tarea matemática: calculan sumas y restas en un ámbito del 0 al 1000.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Por descomposición aditiva del sustraendo	Manipulación de expresiones	Reproducción

Resultados por grupos en la pregunta 11d:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
18,75	16,67	62,96

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

En este caso también, solo en el grupo 3 hubo más de un 60% de estudiantes que logró contestar correctamente esta pregunta, el resto de los grupos no alcanza el 20% de estudiantes que contesta bien el ítem, por tanto esta tarea es de *reflexión*. Por tanto no hay evidencia suficiente en este grupo de estudiantes para validar el grado de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias.

Este resultado se puede explicar por los números involucrados en el cálculo, esto es, las unidades del minuendo son menores que las del sustraendo, siendo la descomposición aditiva del sustraendo la técnica más eficaz. Sin embargo, las técnicas no convencionales para resolver cálculos aditivos no son estudiadas con frecuencia en la sala de clases, y el uso del algoritmo tradicional se dificulta en este tipo de cálculos, lo que lleva a los estudiantes a resolver erróneamente la sustracción.

Tarea matemática: estiman el resultado de adiciones y sustracciones redondeando los números correspondientes.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Cuando ninguno de los términos es múltiplo de 10 o de 100.	Resolución de problemas	Conexión

Resultados por grupos en la pregunta 12:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
21,88	43,75	44,44

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos de la tabla no podemos establecer claramente el nivel de complejidad cognitiva de la tarea, puesto que el porcentaje de estudiantes del grupo 3 que contestaron correctamente la pregunta es inferior al 66% y la diferencia entre el porcentaje de estudiantes de los grupos 2 y 3 que contestaron correctamente la pregunta es inferior al 20%. Estos resultados se pueden explicar, porque la estimación del resultado de adiciones y sustracciones es un tipo de trabajo matemático que, a pesar de estar considerado en el curriculum, no se estudia habitualmente en las escuelas.

Tarea matemática: formulan problemas a partir de sumas y/o restas.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
En un ámbito del 10 al 100	Resolución de problemas	Conexión

Resultados por grupos en la pregunta 13:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
42,19	60,94	85,19

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

Tal como se aprecia en la tabla, solo en el grupo 3 hubo más de un 66% de estudiantes que logró contestar correctamente esta pregunta y, a su vez, en el grupo 2 hay menos de un 66% de estudiantes que la contesta correctamente, siendo así una tarea de *reflexión*. Por tanto no hay evidencia suficiente en este

grupo de estudiantes para validar el grado de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias.

Tarea matemática: formulan preguntas a partir de una operación y datos.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Problema de composición	Razonamiento y argumentación	Reflexión

Resultados por grupos en la pregunta **14a**:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
20	17,24	88,89

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos de la tabla se puede establecer que, solo en el grupo 3 hubo más de un 66% de estudiantes que logró contestar correctamente esta pregunta, siendo así esta tarea de *reflexión*. Por tanto hay evidencia en este grupo de estudiantes para validar el grado de complejidad cognitiva asignado en la matriz de competencias.

Tarea matemática: formulan preguntas a partir de una operación y datos.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Problema de comparación	Razonamiento y argumentación	Reflexión

Resultados por grupos en la pregunta **14b**:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
6,9	7,41	16

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos de la tabla no podemos establecer claramente el nivel de complejidad cognitiva de la tarea, puesto que el porcentaje de estudiantes del grupo 3 que contestaron correctamente la pregunta es inferior al 20% y la diferencia entre el porcentaje de estudiantes de los grupos 2 y 3 que contestaron correctamente la pregunta es inferior al 10%. Estos resultados se pueden explicar, porque la tarea de formular una pregunta dados los datos y la operación, se estudia con poca

frecuencia en la sala de clases, más aún si la operación es una sustracción que modela una comparación por diferencia entre los datos dados, como es este caso.

Tarea matemática: contrastan procedimientos para sumar y/o restar.

Condición didáctica	Competencia predominante	Nivel de complejidad
Resta de un número de dos cifras con un número de una cifra.	Razonamiento y argumentación	Reflexión

Resultados por grupos en la pregunta 15:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
46,88	73,33	44,44

()Los valores corresponden a los porcentajes de estudiantes que en cada grupo contestaron correctamente la pregunta.*

De los datos extraídos de la tabla, podemos establecer que de la muestra de estudiantes que rindió la prueba, al responder esta pregunta mostró un comportamiento errático, puesto que en el grupo 1 y 2 hay un mayor porcentaje de estudiantes que responde bien el ítem que en el grupo 3. Este comportamiento es atípico en relación al comportamiento observado en el resto de la prueba.

Lo anterior se puede explicar, porque la evaluación de la tarea “contrastan procedimientos” se hace compleja en niños de NB1, ya que no tienen bien desarrollada la habilidad de comunicación escrita. Así, en la elaboración de esta prueba se hizo un esfuerzo por evaluar igualmente dicha tarea, tratando de encontrar una pregunta que sin importar el dominio de la habilidad para comunicarse en forma escrita, pudiese responderla. Sin embargo, no se logró dicho objetivo con esta pregunta.

7.4 En relación al logro del objetivo específico 4

En relación al logro del *objetivo específico 4* que constituye la **fase 4** y última de la investigación, se realizó un Focus Group con 18 profesores de NB1 y una entrevista semiestructurada a 10 de estos mismos profesores, que permitieran determinar la inteligibilidad de las Matrices, tanto en términos de formato como del lenguaje utilizado para describir las distintas categorías. Se trataba de recoger información relevante para adecuarlas de tal forma que los profesores pudieran utilizarlas de manera fluida y eficaz. Asimismo, en base a la opinión de los jueces solicitada sobre estos mismos aspectos, tal como señalamos más arriba, se decidió diseñar el instrumento en un formato digital on-line que facilitara la lectura y “navegación”, tanto entre las distintas tareas matemáticas vinculadas a un mismo aprendizaje esperado del programa, como entre las tareas matemáticas que movilizan una misma competencia. A su vez, se generó una base de datos con toda la información del instrumento, lo que permite su actualización y la incorporación de nuevas tareas.

7.4.1 Resultados del Focus Group con profesores de aula de primer ciclo

El propósito del Focus Group fue poder indagar en los docentes participantes qué significado le atribuyen a la Matriz de Competencias y de qué manera les podría contribuir para secuenciar y gestionar las actividades de aprendizaje, así como para organizar las evaluaciones de estos aprendizajes. Para ello se les facilitó a un grupo de 18 profesores, la matriz de competencias, ya elaborada en formato digital, para que la revisaran y opinaran en función de: el significado que le atribuyen a las competencias y tareas matemáticas definidas en la matriz, su contribución a la tarea docente, su accesibilidad para la lectura del instrumento. Con respecto al significado que le atribuyen los propios profesores a las competencias y tareas matemáticas definidas en el instrumento, podemos señalar que en general se refirieron a la competencia de razonamiento y argumentación, señalando que siempre al desarrollar una tarea matemática, los niños debían

pensar y razonar. Sin duda esto es efectivo, sin embargo, hemos considerado dicha competencia en aquellas tareas que principalmente la movilizan, por ejemplo la tarea relativa al contraste de procedimientos, ya que si la consideráramos en todas las tareas matemáticas, dicha competencia no discriminaría entre las tareas y por tanto no cumpliría con una de las características esenciales de nuestro modelo. También los profesores señalaron que es importante que en todo proceso de enseñanza haya resolución de problemas, por tanto valoraron el hecho que la matriz distinguiera las tareas que principalmente movilizan dicha competencia. Sobre el nivel de complejidad asignado a los procesos matemáticos (en relación con las tareas), en general los profesores manifestaron estar de acuerdo que el grado de complejidad cognitiva asignada, era el que correspondía en los diferentes casos expuestos en la matriz.

Con respecto a las tareas matemáticas, podemos señalar que fue el aspecto que más valoraron los profesores, señalando que es un gran aporte para los docentes que hacen clases en NB1, ya que las tareas entregan distinciones a través de las variables didácticas que permiten tener herramientas para planificar el trabajo diario con los estudiantes. Además establecieron, que el hecho que las tareas se caracterizaran a través de las competencias y procesos matemáticos, permitía además mejorar los procesos de evaluación que se generan luego de la implementación de una unidad didáctica. Sin embargo, los profesores también señalaron que era necesario incorporar ejemplos de actividades que permiten desarrollar las tareas mencionadas en la matriz, especialmente de aquellas tareas específicas que son poco trabajadas en el aula, para que realmente los docentes pudiesen desarrollar dichas tareas matemáticas con sus estudiantes. Lo anterior sustentado en el hecho que muchos profesores no tienen las competencias matemáticas y didácticas para diseñar actividades acordes a las tareas matemáticas planteadas en la matriz.

Tal como lo hemos mencionado en párrafos anteriores, con respecto a la contribución de este instrumento a la labor docente, esta matriz fue muy bien valorada por los profesores que la revisaron, señalando principalmente que el desglose de tareas matemáticas permitía que los profesores tuviesen una mirada

acabada del currículum, en función de las tareas matemáticas que es necesario desarrollar para alcanzar un aprendizaje esperado. También señalaron, que este instrumento, permite a los docentes cubrir toda la actividad matemática que deben desarrollar con sus estudiantes en un determinado semestre de NB1, aspecto que generalmente es débil en la implementación curricular en el aula, pues hay tareas matemáticas que no son trabajadas en la sala de clases y por ende competencias que no se desarrollan en los estudiantes.

Con respecto a la accesibilidad y lectura del instrumento, recibimos varias observaciones, entre ellas podemos señalar que se hace necesario incluir botones que permitan volver atrás en la navegación desde cualquier ventana de la matriz. Por otra parte, consideraron importante generar una presentación PowerPoint o video que explicara visualmente el uso del instrumento, ya que no era directa la comprensión de la estructura de navegación, y además, no todos los profesores tienen las competencias tics necesarias para revisar un instrumento de estas características. Señalaron además que sería importante incluir un documento explicativo de algunos conceptos que se mencionan en la matriz, por ejemplo: tipos de problemas del campo aditivo, tareas matemáticas, procesos matemáticos, competencias matemáticas, etc.

7.4.2 Resultados de la Entrevista Semiestructurada realizada a profesores de aula de primer ciclo

Esta entrevista se realizó a 10 de los profesores que participaron del focus group. En forma individual, los profesores entrevistados respondieron preguntas específicas para indagar con mayor profundidad aspectos tratados en el focus Group sobre el significado que le atribuyen a las competencias y tareas matemáticas definidas en la matriz, su contribución a la tarea docente, y su accesibilidad para la lectura del instrumento.

Con respecto a la transversalidad de las competencias se preguntó a los entrevistados si consideraban que la competencia *resolución de problemas y razonamiento y argumentación* debían ser marcadas frente a todas las tareas matemáticas propuestas en las matrices. En general señalaron que sí, y

argumentaban su respuesta diciendo que, siempre cuando se desarrolla una actividad matemática se debe *“pensar”* y *“ocupar al menos un proceso de la resolución de problemas”*. Frente a la pregunta sobre modelización que indagaba su opinión sobre si este proceso debía considerarse como una competencia por sí sola, la mayoría de los profesores no tenía claridad del significado de la modelización. Al explicarles de qué trataba este proceso, hubo discrepancias en las opiniones de los entrevistados, ya que 4 de ellos señalaron que no debía considerarse como una competencia por sí sola y 5 de ellos señalaron que sí.

Durante la entrevista, también se recogió información sobre la opinión de los profesores respecto del proceso de comunicación y su inclusión en las competencias resolución de problemas y representación. En general los profesores entrevistados manifestaron en sus respuestas que consideraban importante la comunicación en el desarrollo de procesos de estudio matemático y por tanto valoraron que la matriz especificara tareas matemáticas asociadas a *“enunciar procedimientos”*, por lo que no consideraron necesario incluir el proceso de comunicación en las competencias antes mencionadas.

Todos los profesores coincidieron que las competencias matemáticas definidas en el modelo diseñado en esta investigación recubren toda la actividad matemática, agregando además que este modelo les permitió tener distinciones sobre las competencias matemáticas que se pueden desarrollar con diferentes actividades. Al mismo tiempo, al preguntarles sobre la pertinencia de las tareas matemáticas en relación al aprendizaje esperado, todos los profesores entrevistados señalaron que dichas tareas eran claras y pertinentes. Cabe señalar que este aspecto fue uno de los más valorados por los docentes, ya que señalaron que les entrega distinciones didácticas y concretas para diseñar su trabajo diario, entre las opiniones recogidas en la entrevista están: *“es un aporte para los profesores, es aterrizado y sirve como herramienta para el trabajo diario”*; *“los aprendizajes esperados que vienen en los programas son amplios y difíciles de aterrizar al trabajo diario, al tener una secuencia de tareas matemáticas, podemos tener información sobre qué actividades plantear para alcanzar esos aprendizajes”*; *“la secuencia de tareas matemáticas es muy buena, ya que viene dada según su*

complejidad, y eso no ocurre con las actividades genéricas planteadas en el currículo”.

Todos los profesores que opinaron que el instrumento matriz de competencias muestra claramente los niveles de complejidad cognitiva frente a un determinado proceso y/o tarea matemática, agregan además que la notación de *estrellas* es fácil de entender, pero se necesita un menú explicativo que esté siempre presente en la matriz de competencias, para releer la definición de los niveles de complejidad cognitiva las veces que sea necesario y así no tener que recurrir al documento. Sin embargo, con respecto a si la matriz muestra con claridad la competencia que se moviliza cuando los niños desarrollan alguna tarea matemática, hubo 3 profesores que señalaron que el marcar procesos de otras competencias (distinta a la predominante) podía confundir al lector. En este mismo sentido, debemos señalar que el resto de los profesores entrevistados valoró que en la matriz se identificara, desde su punto de vista, claramente la competencia que desarrollaran los niños al realizar las tareas matemáticas propuestas y su nivel de complejidad cognitiva.

En relación al diseño de entrada de la matriz de competencia y su navegación, la mayoría de los profesores estaba conforme con la estructura, y manifestaron que era fácil su navegación; sin embargo dos de los docentes entrevistados consideraron que era necesario hacer algunas modificaciones para facilitar el uso del instrumento. Una de las sugerencias era incluir un botón en el instrumento que permitiera volver al inicio desde cualquier parte de la navegación de la matriz; dicha sugerencia fue incluida en el instrumento final. Así mismo, se sugirió dar un ejemplo explicativo para cada uno de los procesos de las cuatro competencias matemáticas del modelo; dicha sugerencia se incluirá en la versión final de la matriz, que contará con un botón de ayuda.

Respecto del aporte del instrumento en la planificación y evaluación de procesos de estudio que deben efectuar los profesores de NB1, todos los profesores coinciden que esta matriz es una herramienta útil y beneficiosa para el trabajo docente, porque además de darles distinciones respecto a las competencias que se movilizan al desarrollar una determinada actividad matemática, les da

distinciones claras y concretas respecto de las tareas y actividades que deben desarrollar los niños para alcanzar un aprendizaje esperado determinado. La mayoría de los profesores reconoció tener dificultades para planificar y gestionar procesos de enseñanza matemático; que además condujeran al logro de aprendizajes matemáticos del currículo. Explican que la formación que recibieron como profesores no les proporcionó suficientes herramientas en este sentido; la mayoría de ellos explica, a su vez, que sus experiencias como estudiantes de la básica y de la media en matemática eran en general muy negativas. En este contexto expresan que les es muy difícil lograr diseñar y gestionar un tipo de proceso de enseñanza aprendizaje que no vivieron, y para lo cual no recibieron suficiente formación. De esta forma valoran muy positivamente este instrumento, no solo porque hace una contribución en este sentido, sino que además por la forma en que lo hace. La mayoría de ellos usa expresiones del tipo: clara, secuenciada y significativa.

8. Conclusiones

Como resultado del trabajo de investigación realizado, hemos obtenido las siguientes conclusiones:

- De la fase 1 de la investigación, y a la luz de la revisión bibliográfica, hemos concluido que no existe un consenso a nivel mundial sobre la noción de competencia matemática. Si bien es posible encontrar ciertos aspectos comunes entre las distintas visiones, unas las tratan como sinónimos de habilidades, otras las conciben como resultantes de un proceso de aprendizaje, tal como ocurre en la versión castellana de PISA en términos de alfabetización matemática (OCDE 2003), mientras que otras conciben las competencias matemáticas desde un punto de vista del cómo se desarrollan a través de procesos (NCTM, 2000). Esta última visión es la que más se ajusta a los propósitos de nuestra investigación.
- No hemos encontrado modelos explícitos para la construcción de un curriculum basado en competencias. Existen curriculum basados en competencias, pero estos son divergentes en estructura, ya que en algunos casos las competencias generales son transversales a todos los subsectores del currículo, mientras que en otros son específicas para cada subsector y otros que integran competencias transversales y específicas de cada una de las áreas disciplinarias.
- En este sentido, una de las contribuciones de nuestro trabajo es la construcción de un modelo de competencias matemáticas orientado al desarrollo de las mismas, y no únicamente orientado hacia la evaluación de competencias, tal como lo hace el equipo OCDE / PISA.
- Una de las principales contribuciones de nuestro trabajo consiste en explicitar la relación entre aprendizaje matemático y competencia matemática. Mientras que aprendizaje matemático evoca el logro de determinados propósitos académicos o curriculares, la competencia matemática evoca la exigencia

irrenunciable de que dicho aprendizaje sea aplicable a la resolución de problemas reales, cercanos a la vida de los estudiantes, dados en contextos determinados. Claro está que existe el riesgo de pragmatizar en exceso la noción de competencia al considerarla como la sola aplicación de conocimientos sin necesariamente tener una comprensión profunda de dicho conocimiento. Este riesgo está controlado en nuestro modelo, puesto que la definición misma que hemos utilizado de competencia matemática excluye la posibilidad de que el conocimiento sea utilizado de forma rutinaria y sin sentido. En efecto, las competencias son entendidas como aspectos de la actividad matemática considerada como una actividad de estudio de campos de problemas, intra o extra matemáticos. Estas competencias en su conjunto recubren toda la actividad matemática y, a través de los *procesos matemáticos* que las definen, frente a una tarea determinada siempre es posible identificar aquella competencia que predominantemente se moviliza al abordarla y ejecutarla, así como también, el nivel de complejidad cognitiva asociado. Por ello decimos que las competencias matemáticas, así definidas, son organizadoras del currículo.

- La noción de competencia en matemáticas evoca un mayor énfasis en la funcionalidad de los conocimientos matemáticos, y fundamenta el desarrollo de procesos a largo plazo, queremos resaltar el aspecto temporal entre las tareas y competencias, las tareas cambian a lo largo de la matemática escolar, pero los procesos se mantienen. Desarrollar contenidos y procesos matemáticos desarrolla la **cultura matemática**.
- Hemos puesto de manifiesto que es posible *explicitar la relación* entre los conocimientos matemáticos (ejes temáticos) y las competencias matemáticas (aprendizajes matemáticos) que se movilizan al desarrollar una actividad que requiere de estos conocimientos. Frente a cada tarea matemática asociada a los aprendizajes esperados de los programas de primer ciclo básico, hemos identificado la competencia matemática predominante que se pone en juego y sus respectivos procesos, así como los procesos de otras competencias y los niveles de complejidad respectivos. En concreto, se han relacionado los Ejes

de Número, Operaciones y Resolución de problemas con las cuatro competencias articuladoras del curriculum establecidas en nuestro modelo (*resolución de problemas, razonamiento y argumentación, representación, y manipulación de expresiones matemáticas*), determinando a su vez el nivel de complejidad cognitiva de los procesos implicados.

- Del análisis curricular de los programas de primer ciclo básico en el subsector de matemáticas, podemos concluir que parte importante de los aprendizajes esperados con sus respectivos indicadores, así como parte importante de las actividades genéricas sugeridas, movilizan principalmente la competencia referida a la manipulación de expresiones matemáticas, y por lo general, lo hacen al nivel de reproducción y/o conexión, casi nunca al nivel de reflexión. Con menor frecuencia que esta competencia aparece movilizada la competencia de representación. Y, lo que es aun más importante de señalar es que, hay escasos aprendizajes que movilizan explícitamente la competencia de resolución de problemas, y en menor cantidad todavía aprendizajes que movilicen la competencia de razonamiento y argumentación. Si bien los programas de 1º ciclo enfatizan la necesidad de que los niños resuelvan problemas, la estrategia de diseño curricular de levantar el eje de resolución de problemas que solo evoca los contenidos de los ejes temáticos sin precisar los tipos de problemas y sus niveles de complejidad, ha traído como consecuencia una desnaturalización de la actividad matemática, separando el estudio de los contenidos matemáticos, de la resolución de problemas asociados. Es importante señalar que, la mayoría de las tareas que aparecen incluidas en las matrices relacionadas con la argumentación, son añadidas por nuestra investigación con el propósito de construir un instrumento más completo que permita a los profesores contar con mayores distinciones para realizar su tarea de enseñanza. Esta conclusión puede servir como criterio para explicar otros fenómenos, tales como, los magros resultados obtenidos por la mayoría de los alumnos de 4º básico en la prueba SIMCE. En efecto, según SIMCE, los niños y niñas de 4º básico tienen serias dificultades para resolver problemas aritméticos y no así para realizar cálculos.

- Asimismo, en relación a los aprendizajes esperados de los programas, hemos detectado falta de articulación entre algunos de ellos, vacíos importantes en términos matemáticos y didácticos, y ausencia de tareas matemáticas relevantes para alcanzar algunos de dichos aprendizajes. Esto pone de manifiesto la pertinencia y necesidad del ajuste curricular en marcha.
- Con respecto a la relación entre competencias, específicamente entre las competencias de manipulación de expresiones matemáticas y la resolución de problemas podemos señalar que los niños de NB1 que son competentes en la resolución de problemas, también son competentes en la manipulación de expresiones matemáticas. Sin embargo, aquellos niños que son competentes en la manipulación de expresiones matemáticas no necesariamente son capaces de resolver un problema aditivo. Esto último no se da cuando se trata de un problema simple y directo, ya que en este caso no se observan diferencias en los resultados de los niños que resuelven correctamente ambas tareas, tanto la que moviliza la competencia de manipulación de expresiones matemáticas como la que moviliza la resolución de problemas. Pero, cuando se trata de un problema aditivo inverso o de comparación por diferencia, que son de mayor dificultad, los niños que son competentes en la manipulación de expresiones no necesariamente son capaces de resolverlos. Por lo anterior consideramos importante que los profesores de las escuelas cuenten con distinciones didácticas para estudiar con sus alumnos distintos tipos de problemas: directos e inversos, de composición, cambio y comparación, rutinarios e interesantes, ya que en general se estudian problemas simples, directos y rutinarios.
- De los resultados obtenidos con la aplicación de los cuestionarios a los niños de 2º básico, también se puede deducir que los niños que son capaces de formular una pregunta dado una operación e información gráfica, tarea matemática que moviliza la competencia razonamiento y argumentación, son capaces también de resolver un problema del mismo tipo, sin embargo no se puede validar la relación recíproca. A través de los cuestionarios escritos aplicados a los alumnos, no se pueden establecer otras conclusiones con

respecto a la competencia razonamiento y argumentación, ya que es difícil de evaluar de forma escrita el tipo de tareas que moviliza dicha competencia a niños de estas edades, que están aprendiendo a escribir.

- El análisis de los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario nos permitió constatar que efectivamente existe inclusividad entre los niveles de complejidad cognitiva definidos, estos es, reproducción, conexión y reflexión. Así, todos los niños que contestan correctamente preguntas del nivel de reflexión también contestan correctamente preguntas de reproducción, pero no todos los niños que contestan correctamente preguntas de reproducción, contestan correctamente preguntas de reflexión. Lo mismo ocurre con el nivel de conexión.
- Del análisis de los resultados de la aplicación de los cuestionarios, se puede establecer que en 1º Básico en el eje números, se obtuvo evidencia suficiente para validar el nivel de complejidad cognitiva asignado en la matriz del 60% de las tareas evaluadas. Por otra parte, en el eje de operaciones, se obtuvo evidencia suficiente para validar el nivel de complejidad cognitiva asignado en la matriz del 62,5% de las tareas evaluadas. Con esto, se tiene que, a través de este análisis y para este grupo de estudiantes, se validó el nivel de complejidad del 61,1% de las tareas evaluadas en el cuestionario de este nivel.
- Del mismo modo, como en el punto anterior, en 2º Básico, podemos señalar que en el eje números, para un 58,3% de las tareas evaluadas en el cuestionario se obtuvo evidencia suficiente para validar el nivel de complejidad asignado en la matriz de competencias. Así también, en el eje operaciones, se obtuvo evidencia suficiente para validar el nivel de complejidad cognitivo asignado en la matriz de competencias, en sólo el 25% de las tareas evaluadas en este eje. Con esto, se tiene que, a través de este análisis y para este grupo de estudiantes, se validó el nivel de complejidad del 41% de las tareas evaluadas en el cuestionario de este nivel.

- A partir de la realización del Focus Group y los resultados de la entrevista semiestructurada, podemos concluir que, el instrumento matriz de competencias es muy bien valorado por los docentes de aula que se desempeñan en NB1. Dicho instrumento es considerado como una herramienta de apoyo en los procesos de planificación que deben llevar a cabo los docentes, especialmente la caracterización de los aprendizajes esperados en términos de las tareas matemáticas, y la secuencia de las tareas en función de las variables didácticas. Se destaca entre sus atributos la concreción de los aprendizajes esperados a través de las tareas matemáticas, puesto que permite tener claridad de las actividades a proponer a los estudiantes para alcanzar un determinado aprendizaje. También se valora la explicitación de los niveles de complejidad en la matriz de competencias, pues permite desarrollar un trabajo matemático más completo que abarque todos los niveles de complejidad cognitiva.
- A partir del trabajo realizado por este equipo de investigación y de la información obtenida en las distintas instancias, podemos concluir que para la utilización óptima del instrumento por parte de la escuela, en particular de los docentes, se hace necesario un trabajo de capacitación que profundice en conocimientos matemáticos y didácticos en NB1, Ya que son los mismos profesores los que manifiestan requerir herramientas para obtener un mayor provecho de la matriz de competencias.
- A modo de proyección del trabajo y a través de las opiniones recogidas, se concluye que, se hace necesario extender el trabajo de investigación realizado a los otros dos cursos del 1º ciclo básico en la matriz, así como adaptar este modelo para poder incluir el 2º ciclo básico. También, en una nueva etapa de este trabajo, en la búsqueda de convertirlo en una herramienta de planificación eficaz, sería importante incluir ejemplos de actividades concretas para las distintas tareas matemáticas asociadas a un determinado proceso matemático, y a un determinado nivel de complejidad cognitiva. De contar con los recursos, sería óptimo poder acompañar dichos ejemplos con videos de clases.

- Otra proyección del trabajo de investigación sería poder recoger mayor evidencia con respecto a los cuestionarios, esto se logra mediante la aplicación de los cuestionarios a una muestra mayor de estudiantes y de mayor heterogeneidad, que considere las variables: nivel socioeconómico, nivel académico, ubicación geográfica, educación de los padres, entre otras.

9. Recomendaciones para las políticas públicas

- Dada la creciente preocupación por los magros resultados obtenidos por la mayoría de niños y niñas de 4º básico de escuelas subvencionadas del país en la prueba SIMCE de matemática y, en función de nuestros análisis sobre el currículum de primer ciclo básico en el subsector de matemáticas en los ejes de números, operaciones y resolución de problemas, podemos sugerir que se incorporen al currículum aprendizajes que permitan desarrollar por parte de niños y niñas las **competencias de resolución de problemas** y la de **razonamiento y argumentación**. Creemos que, considerar la resolución de problemas como un eje separado de números y operaciones ha generado importantes distorsiones dentro del profesorado, quienes en su mayoría, interpretando “literalmente” esta señal de los programas, consideran que es posible que niños y niñas aprendan los conocimientos matemáticos básicos de la aritmética sin resolver problemas. De esta forma la resolución de problemas es entendida como la ocasión para “aplicar” los conocimientos matemáticos previamente “aprendidos”, y no como la posibilidad única de construirlos con real significado. Por ello, nuestra sugerencia comporta también la utilización de una organización distinta de los aprendizajes esperados dentro del currículum.
- Asimismo, sugerimos asegurarse que dichos aprendizajes impulsen el desarrollo de las dos competencias prácticamente ausentes en el currículum (Resolución de problemas y Razonamiento y argumentación), y de las otras dos competencias restantes (Representación y Manipulación de expresiones matemáticas), también en los niveles de **reflexión**. Si bien el nivel de reproducción es igualmente importante para que niños y niñas avancen en su aprendizaje de manera segura y progresiva, el paso hacia la conexión y reflexión es absolutamente necesario si pretendemos formar a personas que razonen, hagan opciones intelectuales fundamentadas y que en definitiva sean matemáticamente competentes.

- Esta propuesta, da pie para reflexionar sobre la importancia que tienen los procesos en la actividad matemática escolar, la estructura del currículo de matemáticas, en términos de ejes, promueve principalmente el desarrollo de contenido, si bien contempla un eje de resolución de problemas, los múltiples procesos que se desarrollan no son caracterizados. En esta investigación se han levantado cimientos para proponer una nueva organización curricular, que contemple una explicitación de los procesos en términos de competencia.
- Además, creemos indispensable que, paralelamente a este proceso de modificación de los programas de matemática de básica en la dirección antes señalada, se debería levantar una estrategia que permitiera difundir entre el profesorado estas importantes modificaciones de carácter curricular y, por sobre todo, las ideas y principios que están detrás de ellas y que permiten justificar su inclusión en la práctica cotidiana de aula. Para ello se debiesen elaborar dispositivos, ya sea en forma de documentos o cursos de capacitación, orientados a que los profesores dispongan de herramientas para distinguir las competencias, y sus respectivos niveles de complejidad, implicados en la realización de determinadas tareas matemáticas. Asimismo, estos dispositivos deberían promover que los profesores manejen herramientas para diseñar tareas y actividades que movilicen las cuatro competencias articuladoras del curriculum, y en los distintos niveles de complejidad. En este sentido creemos que las matrices construidas en este proyecto Fonide constituyen un importante avance en esta dirección.
- Siguiendo un hallazgo importante de nuestra investigación, estos dispositivos orientados hacia los profesores resultan ser de vital importancia para mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas en nuestro país. En efecto, tal como hemos mostrado en nuestra investigación, y convergente con los resultados de varias investigaciones en didáctica de las matemáticas, la mayoría de los alumnos que son competentes en la resolución de problemas por lo general son también competentes para manipular expresiones matemáticas, pero al revés por lo general no es cierto. El que los alumnos manejen competentemente expresiones matemáticas no garantiza que sean

competentes en la resolución de problemas. Ahora bien, tal como pudimos poner de manifiesto con la aplicación del cuestionario, esta última afirmación no es válida cuando se trata de problemas simples y directos que son los más habituales en las escuelas de nuestro país. En conclusión, consideramos importante que los profesores de las escuelas cuenten con distinciones didácticas para planificar el estudio y aprendizaje de distintos tipos de problemas de variada complejidad (directos e inversos, de composición, cambio y comparación, rutinarios e interesantes) y, en función de ello, puedan establecer una secuencia didáctica y una gestión que asegure que los niños desarrollen esta importante competencia de manera progresiva y en todos sus niveles de complejidad.

BIBLIOGRAFÍA

- Abrantes, P. (1994). O trabalho de projecto e a relação dos alunos como a Matemática. A experiência do projecto MAT₇₈₉. *Tesis doctoral*. Universidad de Lisboa.
- Abrantes, P. (2001), Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics*, 47, pp. 125-143.
- Barbé, J., Espinoza, L. (2005), Aportes de la Didáctica de las Matemáticas a los desafíos de la enseñanza: el caso de la Estrategia de Asesoría a la escuela en la Implementación curricular LEM, en el sector de Educación Matemática, *I Congreso de Teoría Antropológica de lo didáctico*, España.
- Bosch, M.; Espinoza, L.; Gascón, J. (2003), El profesor como director de procesos de estudios. Análisis de praxeologías didácticas espontáneas, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 23, Nº1 pp.79-136.
- Brousseau, G. (1990), Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), pp. 308-336.
- Brousseau, G., et al. (1994), *Concours externe de Recrutement des Professeurs d'Ecole. Annales 1993*. Publicaciones del LADIST, Université de Bourdeaux.
- Chevallard, Y. (1985), *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, Buenos Aires, Aique. (La traducción es de 1997).
- Chevallard, Y. (1997), Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 17-54.
- Chevallard, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), pp. 221-265.
- Chevallard, Y. (2004), Vers une didactique de la codisciplinariété. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire, *Intervención en el Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'informatique*, Grenoble, Université Joseph Fourier, Francia.
- Curriculo Nacional do Ensino Básico (2001). *Competêncis Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educaçao Básica.
- De Lange, J. (1999), *Framework for classroom assessment in mathematics*, National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Espinoza, L.; Barbé, J. (2004), La Matemática en la Educación Básica y Media: Un análisis de discontinuidades entre ambos niveles educativos, *Revista Chilena de Educación Matemática*, 1, pp.77-90.

- Espinoza, L., Barbé, J., Bosch, M., Gascón, J. (2005), Didactic Restrictions on the Teaching of Limits of Functions at Secondary School, *Educational Studies in Mathematics*, N° 59, pp. 235-268.
- Espinoza, L., Barbé, J., Gálvez, G. (2009), Fenómenos didácticos vinculados a la Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Básica: el caso de la Aritmética Escolar, *Estudios Pedagógicos*, (en prensa).
- Garagorri, X., (2007), Propuestas curriculares basadas en competencias en el ámbito europeo. *Aula de Innovación Educativa*. Núm. 161.
- Lupiáñez, J. L.; Rico, L. (2006), Análisis didáctico y formación inicial de profesores: organización de competencias y capacidades de los escolares en el caso de los números decimales. *Indivisa: Boletín de estudios e investigación*, 4, pp. 47-58.
- Ministerio de Educación (2007), Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática Mapa de Progreso de Números y Operaciones. Descargado el jueves 4 de octubre de 2007 de: <http://www.curriculum-mineduc.cl/curriculum/mapas-de-progreso/>
- Ministerio de Educación de Ontario (2005). *The Ontario Curriculum in Secondary Mathematics*. Descargado el 23/03/2006 de: <http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/secondary/math.html>.
- Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Gonzalez, E.J., & Chrostowski, S.J. (2004), *Findings From IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades; Appendix E*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- National Council of Teachers of Mathematics, (2003), Principios y Estándares para la Educación Matemática, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, España (traducción al castellano de la versión original: Principles and standards for school mathematics, 2000)
- Niss, M. (1999), Competencies and Subject Description, *Uddanneise*, 9, pp. 21-29.
- Niss, M. (2002), Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish kom project (Proyecto KOM: The national academies). Descargado el 25 de octubre 2007 <http://www7.nationalacademies.org/mseb/mathematicalcompetenciesandthelearningofmathematics.pdf>.
- OCDE (2003), Marcos teóricos de PISA 2003 Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas. Paris: OCDE.

- OCDE (2006), PISA marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura. España: Santillana.
- Rico, L. (2007), La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), pp. 47-66.
- Rico, L., Lupiáñez, J. (2008), *Competencia matemática desde una perspectiva curricular*. España: Alianza Editorial.
- Zabala, A.; Arnau, L. (2007). *Cómo aprender y enseñar competencias*. Barcelona: Graó.