5 Prácticas

Incluye
Guía
de desarrollo
profesional

para orquestar discusiones productivas en Matemáticas

Margaret S. Smith
Mary Kay Stein

NCTM
NATIONAL COUNCIL OF
TEACHERS OF MATHEMATICS

CORWIN

Prácticas

5 para orquestar discusiones productivas en Matemáticas

Incluye
Guía
de desarrollo
profesional

Margaret S. Smith
University of Pittsburgh
Pittsburgh, Pennsylvania

Mary Kay Stein
University of Pittsburgh
Pittsburgh, Pennsylvania

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS

CORWIN
A SAGE Company

CIAEM

CRESUR
Centro Regional
de Formación Docente
e Investigación Educativa

Smith, Margaret Schwan.
5 Prácticas para orquestar discusiones productivas en matemáticas / Margaret S. Smith, Mary Kay Stein.
pp. 112 cm. 17.5 × 25.2
Incluye referencias bibliográficas.
ISBN: 978-0-87353-677-6

1. Comunicación en matemáticas. 2. Matemáticas-Estudio y enseñanza. I. Stein, Mary Kay. II. t. III. t.: Cinco prácticas para orquestar discusiones productivas en matemáticas.

Dewey 510.71 LC QA41.4

Título original: 5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions

Publicado originalmente por The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
1906 Association Drive, Reston, VA 20191–1502
(703) 620-9840; (800) 235-7566; www.nctm.org
Décima impresión, 2014

De esta edición

1906 Association Drive, Reston, VA 20191–1502
(703) 620-9840; (800) 235-7566; www.nctm.org

Primera edición en español, 2016

Coordinación general de la traducción: Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Coordinación editorial: María Guadalupe Ambriz Rivera
Coordinación de diseño y formación: Inés P. Barrera
Traductor: Demetrio Garmendia Guerrero
Revisión técnica: Francisco Rojas Sateler y Patrick (Rick) Scott

El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) es la voz pública de apoyo para los maestros, este organismo busca asegurar una formación matemática equitativa y de la más alta calidad para todos los estudiantes mediante una visión de liderazgo, desarrollo profesional e investigación.

Impreso en México

Contenido

Prefacio

En esta obra presentamos y analizamos un marco teórico dirigido a implementar discusiones matemáticamente productivas que están enraizadas en el pensamiento del estudiante. El marco teórico identifica un conjunto de prácticas instruccionales que ayudarán a los maestros a lograr objetivos de aprendizaje de alto desempeño mediante la utilización del trabajo del estudiante como punto de partida para las discusiones, en las cuales emerjan ideas matemáticas importantes, se muestren las contradicciones y se desarrolle y consolide lo ya comprendido. La premisa subyacente en este libro es que la identificación y el empleo de un conjunto codificado de prácticas pueden hacer accesibles y manejables, para un mayor número de maestros, los enfoques de la enseñanza de las matemáticas centrados en el estudiante. Al proporcionar a los maestros una guía de las prácticas que pueden llevar a cabo –antes de las discusiones que involucran a todos en el aula y durante las mismas–, estas prácticas ayudan a los maestros a orquestar de una forma más eficaz las discusiones que sirven como réplica tanto a los estudiantes como a la disciplina.

A lo largo de la obra ejemplificamos las prácticas en aulas reales, con las cuales nos hemos familiarizado gracias a la investigación o a la práctica profesional (es decir, a través de los maestros con quienes hemos trabajado en iniciativas de desarrollo profesional). En particular, hacemos un uso significativo de dos lecciones en el salón de clases: los casos de Dulce Domínguez y de Nicolás Barrios. El primer caso se presenta en el capítulo 3, como vehículo para la investigación de las cinco prácticas en acción, y vuelve a examinarse en capítulos subsecuentes conforme éstas se exploran con mayor profundidad. El caso de Nicolás Barrios se analiza con profundidad en los capítulos 4 y 5, a la vez que se examinan con detalle las cinco prácticas, y después se hace referencia nuevamente a este caso en capítulos posteriores, en la medida en que se tienen en consideración asuntos más amplios.

De acuerdo con la investigación que establece la importancia de la construcción del propio conocimiento por parte de los estudiantes (Bransford, Brown y Cocking, 2000), hemos diseñado esta obra para alentar el compromiso activo de los lectores. Para este propósito incluimos las secciones tituladas “Actividad de involucramiento” que sugieren formas en las cuales el lector puede involucrarse con herramientas específicas de la práctica en el aula (por ejemplo, narraciones de enseñanza en el aula, transcripciones de interacciones en el aula, tareas de enseñanza, ejemplos de trabajos de los estudiantes). Más que una lectura pasiva del libro, se exhorta a los lectores a que tomen en serio nuestras sugerencias y hagan una pausa en la lectura, a fin de apropiarse de la información en las formas que se proponen. En la media en que la información se procese de manera activa, será más profunda la comprensión de los lectores, a la vez que mejorará su habilidad para tener acceso y utilizar el conocimiento de modo flexible en su propia vida profesional. Además, al final de los capítulos 4, 5, 6 y 7 proporcionamos sugerencias (tituladas “¡Intente esto!”) que tienen que ver con la forma en que un maestro puede implantar las ideas del capítulo en su propia aula.

Aunque el principal objetivo del libro se centra en el modelo de las cinco prácticas (capítulos 1, 3, 4 y 5), también explora temas que apoyan la capacidad de los docentes para orquestar discusiones productivas en el aula. De manera específica, el capítulo 2 hace énfasis en la necesidad de establecer objetivos claros de lo que los estudiantes aprenderán como resultado de la enseñanza, así como en identificar una tarea matemática que resulte consistente con dichos objetivos de aprendizaje, antes de involucrarse con las cinco prácticas. El capítulo 6 se centra de forma concreta en los tipos de preguntas que los docentes pueden plantear con el objeto de desafiar el pensamiento del estudiante, así como en las acciones que los maestros pueden llevar a cabo a fin de promover la participación de los estudiantes en las discusiones que involucran a todo el grupo. El capítulo 7 contextualiza dentro del sistema escolar el modelo de las cinco prácticas con el propósito de facilitar una discusión dentro del marco de la preparación de una clase y además presenta una herramienta para la planificación global de la misma, en la que están incluidas las cinco prácticas. El libro concluye con el capítulo 8, en donde se analizan formas en las que los docentes pueden trabajar con sus colegas, asesores pedagógicos y líderes escolares a fin de garantizar que cuentan con el tiempo, los materiales y el acceso al conjunto de conocimientos que requieren para aprender a orquestar discusiones productivas.

Prefacio CIAEM

Para una exitosa construcción de los aprendizajes hay condiciones que debe tener la interrelación entre estudiantes y profesores y también aquella entre los mismos estudiantes: estos últimos deben sentir que de alguna manera su acción y su pensamiento son parte constitutiva importante de la lección, cómplices activos; y en eso precisamente fallan los esquemas tradicionales de las lecciones unidireccionales (del docente hacia los estudiantes), o aquellas en que el punto de partida no es un objeto complejo, demandante e interesante sino uno trivial y aburrido. No apoya tampoco esa expectativa el empezar una clase con un pedazo de teoría para ir mecánicamente hacia el ejemplo y la práctica rutinaria.

¿Pero basta esa "complicidad" para lograr una lección exitosa? No es suficiente, pues la acción estudiantil en sí misma se puede desviar hacia territorios inadecuados que pueden conspirar contra los propósitos a desarrollar en el aula. Es necesario entonces pedir algo más: que la acción de aula se inscriba dentro de fronteras definidas para lograr los objetivos educativos, que normalmente son establecidos por el currículo escolar. Debe existir una acción del docente que logre a la vez, de manera armoniosa, el empoderamiento adecuado del estudiante y el objetivo curricular de aprendizaje. A la altura del desarrollo de la Educación Matemática que tenemos en el mundo, sabemos que este tipo de propósitos debe poder realizarse usando los múltiples resultados de la investigación y de la experiencia práctica. Es decir: el docente debe poder contar dentro de su universo mental con los recursos educativos necesarios para el desarrollo de la clase que podemos valorar como exitosa (elementos aportados por su formación inicial o su desarrollo profesional).

¿Qué significa esto? Entre otras cosas y con fuerza: permitir al docente realizar una preparación cuidadosa de la lección que logre anticipar, hasta donde sea posible, su desenvolvimiento. ¿Comportamiento estudiantil? ¿Diversidad de estrategias? ¿Errores? ¿Momentos álgidos? La selección del problema o la situación inicial es aquí crucial, y puede determinar en gran medida el decurso de la lección; pero también es muy importante lo que se haga en ese desarrollo y luego en la clausura que institucionalice los saberes construidos a partir de la acción del aula.

Es este tipo de asuntos el que esta obra aborda a partir de situaciones específicas, señalando el potencial de las mismas, así como las acciones que el docente puede seguir para lograr la lección exitosa. Este libro posee un poderosa vocación metodológica.

Para el *Comité Interamericano de Educación Matemática* ha sido un honor haber gestionado y conducido la traducción al español de *Cinco prácticas*, una magnífica y sintética obra publicada por el *National Council of Teachers of Mathematics*. Es la segunda oportunidad en un tiempo muy reciente que concertamos traducciones al español de obras publicadas por esta emblemática institución de los Estados Unidos. Esta publicación expresa la relación estrecha y la amistad que han existido durante muchos años entre el NCTM y el CIAEM, pero sobre todo manifiesta una alianza estratégica que podrá proporcionar muchos más frutos para las comunidades educativas donde actúan ambas organizaciones.

Es interesante que la perspectiva intelectual que nutre esta publicación, que el NCTM ha acuñado con los términos "de los principios a la acción", es una poderosa condensación teórica que subraya una particular acción de aula: fuertemente planificada, que invoca desafíos intelectuales para el estudiante a la vez que satisfacción y complicidad intelectuales, una conducción docente inteligente durante la lección y una asociación estrecha con los propósitos educativos de aprendizaje (establecidos por un currículo oficial o mediante un marco orientador de principios curriculares). Es una visión que convoca similitudes con el "estudio de la lección" desarrollado en otras latitudes. Es grato mencionar, por otra parte, que esta perspectiva es similar a la que introduje en el diseño del currículo de las matemáticas escolares (grados 1-12) de mi país, Costa Rica, aprobado en mayo del 2012, y cuya implementación también he dirigido desde entonces; una experiencia que constituye la reforma curricular más importante de ese país en décadas y es probablemente una de las más atrevidas e innovadoras reformas educativas en América Latina.

Estoy seguro que esta publicación brindará un recurso muy valioso para la comunidad hispanoparlante de la Educación Matemática.

Ángel Ruiz
Presidente del *Comité Interamericano de Educación Matemática*
Vicepresidente de la *International Commission on Mathematical Instruction*

San José, Costa Rica
24 de Junio 2016.

Introducción

Conforme transcurre la segunda década del siglo XXI, se clarifica una cuestión: nuestro país requiere trabajadores con alta capacitación que puedan afrontar problemas complejos. Los días en los que bastaba contar con habilidades básicas para conseguir trabajos bien remunerados y lograr un nivel de vida aceptable, ya no existen más. En concreto, se necesitan individuos que puedan pensar, razonar y comprometerse de manera eficaz con la resolución de problemas cuantitativos.

Las prácticas educativas vigentes en la mayoría de los salones de clase no preparan a los estudiantes para estas nuevas exigencias. Las investigaciones en Estados Unidos han evidenciado que a sus estudiantes no se les exige de manera habitual que se involucren con el pensamiento conceptual o con la resolución de problemas complejos (Stigler y Hiebert, 1999). La mayor parte del trabajo escolar consiste en tareas que contienen "problemas", para cuya solución se les ha enseñado a los estudiantes un método preferido. El estudiante no requiere mucho "razonamiento" para resolverlos pues bastan la memoria y la aplicación directa de habilidades previamente aprendidas. Es un error esperar que los estudiantes aprendan a afrontar los retos confusos y desestructurados del mundo actual, si se les obliga a sentarse silenciosamente en filas, completar tareas que exigen habilidades básicas e involucrarse en "discusiones" conducidas por el docente en las que basta realizar preguntas y respuestas exactas, basadas en hechos concretos.

¿Qué tipo de experiencias de aprendizaje *preparará* a los estudiantes para las exigencias del siglo XXI? *La investigación nos indica que el conocimiento y las habilidades complejas se aprenden mediante la interacción social* (Vygotsky, 1978; Lave y Wenger, 1991). Aprendemos por medio de un proceso de construcción de conocimiento que nos exige manipular y refinar activamente información para después integrarla a nuestros saberes previos. La interacción social nos ofrece la oportunidad de compartir nuestras ideas con los demás participando así en la construcción conjunta de conocimiento. En la clase de Matemáticas, las discusiones de alta calidad ayudan a los estudiantes en su aprendizaje de esta materia, pues así aprenden a comunicar sus ideas, su pensamiento, a fin de guiarlo en direcciones matemáticamente significativas, y también les facilitan evaluar sus ideas matemáticas, así como las de los demás. Éstas son las características fundamentales de lo que significa ser "matemáticamente letrado".

Crear oportunidades basadas en discusiones para el aprendizaje del estudiante requerirá que muchos maestros experimenten un proceso de aprendizaje diferente. En primer lugar, necesitarán aprender la forma de seleccionar y proponer en sus aulas tareas educativas cognitivamente desafiantes, en vista de que éstas proporcionarán la materia prima de valiosas discusiones. Sin embargo, a lo largo de los años la mayoría de los libros de texto han suministrado a los maestros una ininterrumpida lista rutinaria de tareas procedimentales, a partir de las cuales es muy difícil, si no imposible, organizar una discusión atractiva.

En segundo lugar, los docentes deben aprender la manera de apoyar a sus estudiantes, conforme éstos se dedican a tareas cognitivamente desafiantes y analizan sus soluciones. Sabemos, con base en nuestra investigación previa, que una vez que se presentan tareas de alto nivel en el aula, muchos docentes enfrentan dificultades para sostener la exigencia cognitiva de estas tareas en la medida en que los estudiantes se involucran en ellas (Stein, Grover y Henningsen, 1996). A menudo los estudiantes terminan pensando y razonando a un nivel inferior, en comparación con el nivel que la tarea requiere. Una de las razones de que esto suceda estriba en las dificultades que los maestros tienen para orquestar discusiones que utilicen de modo productivo las ideas y estrategias generadas por los estudiantes como respuesta a las tareas de alto nivel.

Una tarea educativa de alto nivel se desarrolla en tres fases. Comienza con la propuesta de un problema matemático por parte del docente, la cual involucra ideas matemáticas importantes y puede resolverse de diversas formas. Durante la “fase de lanzamiento”, el maestro presenta a los estudiantes el problema, las herramientas que están disponibles para que se trabaje en el mismo, y se plantea la naturaleza de los productos que se espera creen los estudiantes. Después de esta etapa, sigue la “fase de exploración”, en donde los estudiantes trabajan con el problema, a menudo discutiendo en parejas o en pequeños grupos. Conforme lo abordan, se les anima a que lo resuelvan de cualquier forma que tenga sentido para ellos y que expliquen su enfoque a los demás miembros de la clase. Luego, la lección concluye con una discusión grupal y un resumen de varios de los enfoques generados por los estudiantes para la resolución del problema. Durante esta fase de “discusión y resumen”, se muestran los diversos enfoques al problema y se presentan a toda la clase para que se discutan.

¿Por qué resulta tan difícil orquestar estas discusiones de final de clase? La investigación nos indica que los estudiantes aprenden cuando se les alienta a convertirse en autores de sus propias ideas y cuando se les responsabiliza por su razonamiento y comprensión de las ideas clave (Engle y Conant, 2002). En la práctica, llevar a cabo ambas cosas de manera simultánea es en extremo difícil. Por su naturaleza, las tareas de alto nivel no inducen a los estudiantes a resolverlas de la misma forma. Más bien, los docentes pueden y deben esperar ser testigos de una variedad de enfoques (tanto correctos como incorrectos) para resolver la tarea durante la fase de discusión en la lección. En teoría, esto resulta benéfico porque los estudiantes están siendo “autores” (o están en el proceso) de sus propias estrategias de resolver un problema.

El desafío reside en que los docentes deben compaginar los muchos y desiguales enfoques que los estudiantes producen como respuesta a las tareas de alto nivel, con la meta de aprendizaje de la lección. Es obligación de los maestros canalizar a los estudiantes colectivamente hacia el desarrollo –y hacerlos responsables del mismo– de un conjunto de ideas y de procesos centrales para la disciplina; ideas y procesos que son ampliamente aceptados como valiosos e importantes para las matemáticas y necesarios para el futuro aprendizaje escolar de esta disciplina. Si el docente fracasa en esto, la balanza se inclina demasiado hacia el estudiante, de modo que las discusiones del aula se desarticularán de los saberes esperados de la asignatura.

Lo importante es conservar el equilibrio. Si se hace demasiado énfasis en la responsabilidad del docente, puede socavarse tanto la seguridad del estudiante como su capacidad de dar sentido a lo que aprende y además pudiera fomentarse de manera involuntaria una creciente dependencia respecto de la guía del maestro. Los estudiantes captan el mensaje de inmediato, con frecuencia a partir de señales sutiles, de que “saber Matemáticas” significa utilizar sólo aquellas estrategias que el docente o el libro de texto han validado; consecuentemente, aprenden a no usar o no confiar en su razonamiento. Por otra parte, centrarse en la conducción del estudiante propicia discusiones dispersas en el aula.

¿Exitoso o superficial? Discusión en la clase de David Canales

En resumen, el papel del docente en las discusiones resulta crucial. Sin una guía experta, las discusiones en la clase de matemáticas pueden, por un lado, propiciar que el maestro se adueñe de la clase y brinde una “cátedra”, y por el otro que los estudiantes ofrezcan una serie de demostraciones inconexas del tipo “mostrar y hablar”, y en conjunto aporten muy poco a las ideas matemáticas que constituyen la meta de la clase. Considérese, por ejemplo, el siguiente caso (tomado de Stein y colegas, [2008]) en donde se presenta a David Canales, un profesor de cuarto grado.

ACTIVIDAD DE INVOLUCRAMIENTO 0.1

Conforme lea el caso de David Canales, identifique los momentos en que los estudiantes son autores de sus ideas y enfoques, así como aquellos en los que se responsabilice a los estudiantes de su aprendizaje de la disciplina.

Hojas y orugas: el caso de David Canales

Los estudiantes de la clase de cuarto año del profesor Canales resuelven el siguiente problema: "Los estudiantes de cuarto grado necesitan cinco hojas diarias para alimentar a sus 2 orugas. ¿Cuántas hojas necesitarían los estudiantes cada día si tuvieran 12 orugas?" El profesor Canales comenta a sus estudiantes que pueden resolver el problema de la forma que deseen, pero remarca que es necesario que expliquen la forma en que lleguen a la respuesta y decir por qué, en efecto, es correcta.

Conforme los estudiantes trabajan en parejas resolviendo el problema, el profesor Canales camina alrededor del salón, asegurándose de que todos estén concentrados en la tarea y avancen en su resolución. El profesor Canales se muestra contento al ver que los estudiantes utilizan diferentes estrategias para abordar el problema: elaboración de tablas, dibujos de esquemas y, en algunos casos, explicaciones por escrito.

Después de un tiempo, el docente nota que dos parejas de estudiantes obtuvieron respuestas erróneas (véase la figura 0.1).

Respuesta: 60	Respuesta: 15 orugas
5 hojas + 12 orugas 60 hojas para las orugas	Agregaron 10 orugas, así que añadí 10 hojas.

Figura 0.1. Respuestas de Daniel y Marcos (izquierda) y Mónica y Carla (derecha)

El profesor Canales no está preocupado por las respuestas erróneas ya que considera que una vez que se presenten diversas estrategias de solución correctas, los estudiantes mencionados se percatarán de lo que hicieron mal y en el futuro utilizarán otros procedimientos para resolver problemas similares.

Cuando la mayoría de los estudiantes termina, el profesor Canales los reune para analizar el problema. Comienza la discusión solicitando que algunos voluntarios compartan sus soluciones y estrategias; en este momento se asegura de que quienes aplicaron una estrategia errónea no sean quienes pasen al frente. En el transcurso de los siguientes 15 minutos se presentan por iniciativa propia Carina y después Jaime, José, Marely, Martín y Juanita quienes muestran sus soluciones (véase la figura 0.2). Durante las presentaciones, el profesor Canales hace preguntas a cada estudiante para que aclaren y argumenten sus respuestas. Al término de la clase dice a sus estudiantes que el problema puede resolverse de muchas formas y que a partir de entonces, cuando deban resolver una situación semejante, podrán elegir la forma que más les agrade, en vista de que con cada estrategia se obtiene la misma respuesta.

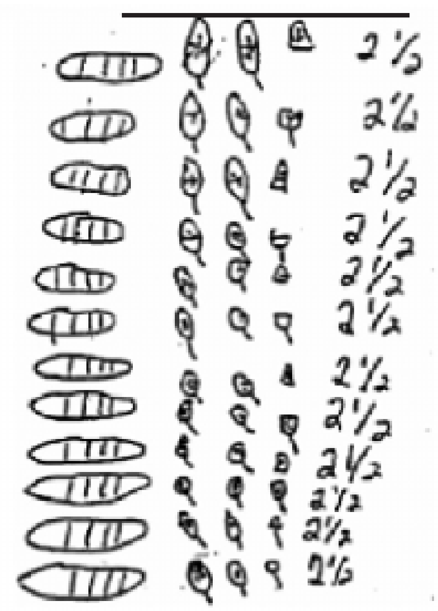
Trabajo de Juanita

Respuesta: 30

Si cada una de las orugas necesita 2 ½ hojas al día, entonces se multiplica 2 ½ × 12 = 30.

Trabajo de Carina

Respuesta: 30



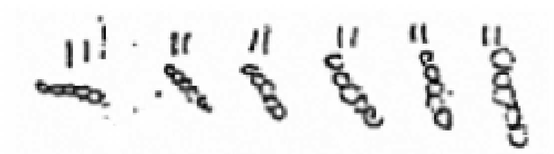
Trabajo de José

Respuesta: 30 hojas

Hojas	5	10	15	20	25	30
orugas	2	4	6	8	10	12

Trabajo de Martín

Respuesta: 30 hojas



Trabajo de Jaime

Respuesta: 30

si para dos orugas necesitamos 5 hojas, solo cuentas de 2 en 2 hasta que llegas a la mitad de 12. el número es 6, por lo que multiplicas 5 x 6, que es igual a 30.

Trabajo de Marely

Respuesta: 30

# de orugas	# de hojas
2	5
2	5
2	5
2	5
2	5
+2	+5
12	30

Figura 0.2. Soluciones compartidas por los estudiantes del grupo del profesor Canales.

Análisis del caso de David Canales

Alguien podría considerar como ejemplar la clase del profesor Canales. En efecto, el profesor Canales llevó a cabo muchas cosas bien, lo cual incluye que haya dejado a los estudiantes construir su propia manera de resolver esta tarea cognitivamente desafiante y que haya destacado la importancia de que los estudiantes fuesen capaces de explicar su razonamiento matemático. Los estudiantes, por su parte, trabajaron con sus compañeros y compartieron sus soluciones y estrategias; al parecer se respetaron sus ideas. Todos los estudiantes tuvieron la oportunidad de ser los "autores" de su conocimiento matemático.

No obstante, una mirada crítica hace evidente que la secuencia que se siguió para exponer los diferentes trabajos no contribuyó a la construcción de ideas matemáticas importantes. El meollo de la discusión parecía ser "mientras más formas haya de resolver el problema, mejor", pero de hecho el profesor Canales hizo responsable a cada estudiante de conocer sólo una manera de resolver el problema. Además, a pesar de que el profesor Canales observó a los estudiantes mientras trabajaban, al parecer no utilizó este tiempo para evaluar lo que entendían respecto del razonamiento proporcional ni para seleccionar un trabajo particular de los estudiantes con la finalidad de mostrarlo en la discusión grupal. Es más, no se informó de manera alguna si para los dos pares de estudiantes que obtuvieron una respuesta errónea (Daniel-Marcos y Mónica-Carla) fueron de ayuda las presentaciones de las estrategias correctas de sus compañeros. ¿Identificarían el error de su razonamiento?

De hecho, sostenemos que gran parte de la discusión dada en la clase del profesor Canales fue del tipo "mostrar y hablar", en donde los estudiantes que obtuvieron las respuestas correctas compartieron en su oportunidad sus estrategias de solución. El docente no depuró las ideas matemáticas que cada estrategia ayudaba a ilustrar, tampoco hizo ningún intento por destacar esas ideas. Además, no estableció conexiones entre los diferentes métodos de solución ni los vinculó con métodos importantes de la disciplina o con ideas matemáticas. Por último, no prestó atención a sopesar cuál de las estrategias podría ser más útil, eficiente y exacta en determinadas circunstancias sino que todas se consideraron igual de eficaces.

Resumiendo, asignar a los estudiantes tareas cognitivamente desafiantes con las cuales se involucren y luego conducir una discusión del tipo "mostrar y hablar" no es garantía de que toda la clase progrese matemáticamente hablando. Es más, este tipo de práctica dentro del aula ha sido criticada por crear ambientes en los cuales casi la totalidad del control de la agenda matemática se les cede a los estudiantes. Algunos docentes interpretaron mal la petición de respetar el pensamiento y el razonamiento de los estudiantes, tomándola como un llamado a una suspensión total de moldear la calidad del pensamiento matemático del estudiante por parte del docente. La falta de una orientación sobre lo que los docentes *podrían* efectuar a fin de fomentar un pensamiento y razonamiento matemáticos rigurosos propició que muchos profesores pensaran que deberían evitar indicar cualquier cosa a sus estudiantes.

Una crítica parecida, dirigida hacia las clases basadas en la indagación, tiene que ver con la naturaleza fragmentada y a menudo incoherente de las etapas de discusión y resumen de la lección. En estas fases de "mostrar y hablar", tal y como se ejemplifica en la clase de David Canales, la presentación de un estudiante podría seguir a otra, teniendo escasos comentarios por parte del docente (o del estudiante) sin que haya ninguna intervención que haga conexiones entre los métodos o que los vincule con métodos y conceptos de la materia ampliamente compartidos. La discusión no brindó alguna razón matemática, o de otra índole, para que los estudiantes necesariamente escuchasen o intentaran comprender los métodos de sus compañeros de clase. Como lo ejemplifica el comentario del profesor Canales al final de la clase, los estudiantes simplemente "pueden escoger el método que más les guste". Este tipo de situación ha propiciado un dilema que cada vez se reconoce más y que tiene que ver con los enfoques de la enseñanza basados en “indagar y descubrir”: el reto de armonizar el desarrollo de las ideas, por parte de los estudiantes, con las ideas de la asignatura, que los estudiantes a final de cuentas son responsables de conocer.

En resumen, David Canales no hizo mucho por fomentar el rigor matemático. ¿Cómo pudo haber apoyado con mayor ímpetu la rigurosidad de los estudiantes sin menoscabar la autoridad de éstos? La cuestión más importante que pudiera haber efectuado, hubiera sido tener un conjunto de metas claras de lo que él quería que los estudiantes aprendieran en la clase. Sin un objetivo de aprendizaje en mente, las diversas soluciones que se presentaron, aunque fueron correctas en su mayoría, estuvieron desperdigadas en el “panorama matemático”. Empero, si por ejemplo hubiera enfocado el objetivo de aprendizaje a garantizar que todos los estudiantes reconocieran que la relación entre las orugas y las hojas es multiplicativa y no aditiva, habría podido supervisar efectivamente la labor de los estudiantes. ¿Qué trabajo mostraba particularmente bien la relación multiplicativa? ¿Los trabajos de los estudiantes incluían ejemplos de las distintas maneras de ilustrar esta relación, ejemplos que pudieran vincularse con estrategias matemáticas ya sabidas (ejemplificación, razón unitaria, incremento de valores)? Esta evaluación del trabajo de los estudiantes hubiera permitido al docente reflexionar mejor en torno a la elección de los estudiantes que presentarían su trabajo durante la fase de discusión. Incluso, hubiese deseado que se presentaran las soluciones incorrectas (las aditivas), de modo que los estudiantes pudiesen reconocer el razonamiento erróneo subyacente en las mismas. Si el profesor Canales hubiera seleccionado las estrategias adecuadas habría estado en condiciones de encauzar la discusión hacia una conclusión matemáticamente satisfactoria.

Conclusión

El caso de David Canales ejemplifica la necesidad de contar con una guía que moldee las discusiones del aula y que maximice su potencial respecto de ampliar el pensamiento de los estudiantes y de enlazarlo con ideas matemáticas importantes. Los capítulos que siguen brindan esta guía para la elaboración de un marco teórico útil, basado en cinco prácticas educativas con dos fines; orquestar discusiones productivas en el aula, y gestionarlas.

CAPÍTULO

1

Introducción a las cinco prácticas

A muchos docentes les atemoriza un enfoque pedagógico construido con base en el pensamiento del estudiante. Otros se preocupan por abarcar el contenido y se preguntan: "¿Cómo puedo asegurarme de que los estudiantes aprenderán lo que yo soy responsable de enseñar si no cubro de principio a fin el material y les proporciono todo lo que necesitan saber?" Algunos otros profesores, que probablemente ya estén convencidos de la importancia del pensamiento del estudiante, tal vez les inquiete, no obstante, su capacidad para diagnosticar sobre la marcha el pensamiento de los estudiantes y brindarles inmediatamente respuestas que los encaucen hacia la comprensión matemática correcta.

Los docentes tienen razón cuando se percatan de que este tipo de enseñanza es exigente. Requiere tener conocimiento del contenido matemático relevante, del pensamiento del estudiante sobre el contenido, así como de sutiles "acciones" pedagógicas que el profesor debe llevar a cabo con el objeto de canalizar las discusiones hacia direcciones fructíferas; además se debe contar con la habilidad de aplicar con rapidez todo lo anterior en circunstancias específicas. Aún así, hemos visto que muchos docentes aprenden a enseñar de esta forma, con la ayuda de las cinco prácticas.

Concebimos a éstas como una hábil improvisación. Las prácticas que hemos identificado tienen el propósito de hacer que la educación enfocada en el estudiante sea más fácil de llevar a cabo, al aminorar el grado de improvisación que el docente requiere durante una discusión. En lugar de centrarse en dar respuestas instantáneas a las contribuciones de los estudiantes, las prácticas subrayan la importancia de la planificación. Mediante ésta, los docentes pueden anticipar los probables aportes de los estudiantes, preparar las respuestas que pudiesen ofrecerles y tomar decisiones concernientes con la forma de estructurar las presentaciones de los estudiantes, con el objeto de favorecer la organización matemática de la clase. Ahora procederemos a brindar una explicación de las cinco prácticas.

Las cinco prácticas

Éstas se diseñaron para auxiliar a los docentes en sus respuestas para propiciar la comprensión matemática de los estudiantes, a fin de que la clase en su conjunto progrese, al proporcionarles cierto control sobre lo que probablemente suceda en la discusión y al brindarles más tiempo para tomar decisiones educativas, trasladando hacia la fase de planificación de la clase una parte de la toma de decisiones. Las cinco prácticas son:

1. **Anticipar** las posibles respuestas del estudiante a las tareas matemáticas desafiantes.
2. **Monitorear** las respuestas reales de los estudiantes a las tareas (cuando las resuelven en parejas o en pequeños grupos).
3. **Seleccionar** a determinados estudiantes para que presenten su trabajo matemático durante la discusión grupal.
4. **Secuenciar** las respuestas de los estudiantes que se mostrarán en un orden específico.
5. **Conectar** las distintas respuestas de los estudiantes y vincularlas con ideas matemáticas clave.

Cada práctica se describe con más detalle en las siguientes secciones y se ejemplifican señalando lo que el profesor Canales *pudiera haber llevado a cabo* en la lección de las hojas y las orugas (presentada en la introducción), a fin de canalizar el pensamiento del estudiante de una manera más hábil hacia la meta de reconocer que la relación entre las orugas y las hojas es multiplicativa y no aditiva.

Anticipación

La primera práctica consiste en hacer un esfuerzo para prever de manera activa la forma en que los estudiantes pudieran abordar matemáticamente la tarea o tareas educativas en las que estarán trabajando. Esto involucra mucho más que sólo evaluar si determinada tarea tiene el nivel adecuado de dificultad o si resulta lo suficientemente interesante para los estudiantes, y además va más allá de considerar si ellos obtienen o no la respuesta "correcta".

Anticipar las respuestas de los estudiantes implica desarrollar las expectativas tenidas en cuenta sobre la manera en que los estudiantes interpretarán matemáticamente un problema sobre las posibles estrategias, correctas e incorrectas, que emplearán para resolverlo y cómo dichas estrategias e interpretaciones pudieran relacionarse con conceptos, representaciones, procedimientos y prácticas matemáticas que al docente le gustaría que sus estudiantes aprendiesen.

La anticipación requiere que los profesores resuelvan el problema de tantas maneras como puedan. Algunos docentes descubren que resulta útil tanto abordar la tarea junto con otros colegas, a fin de ampliar lo que ellos pudieran individualmente estar pensando, como revisar las respuestas que pudiesen estar disponibles (por ejemplo, a través del trabajo elaborado por los estudiantes el año anterior, mediante las respuestas y las tareas publicadas en materiales suplementarios) y además consultar los trabajos de investigación sobre el aprendizaje de los estudiantes concerniente con las ideas matemáticas involucradas en la tarea. Por ejemplo, la investigación sugiere que los estudiantes suelen utilizar estrategias aditivas (como en la respuesta de Mónica y Carla, mostrada en la figura 0.1) para resolver tareas semejantes a la de las hojas y las orugas, en donde se establece una relación multiplicativa entre las cantidades (Hart, 1981; Heller *et al.*, 1989; Kaput y West, 1994). Anticipar este enfoque antes de la lección hubiera permitido al profesor Canales reconocerlo en el momento que sus estudiantes lo utilizaron, a fin de que meditara cuidadosamente las acciones que debería realizar para que ellos también se percataran (por ejemplo, el tipo de preguntas que plantearía a los estudiantes con el objeto de que se dieran cuenta de la naturaleza multiplicativa de la relación entre las orugas y las hojas o cómo sacar a colación la respuesta durante la discusión, de modo que todos los estudiantes pudieran saber por qué no sería la adición un método válido).

Además, si el profesor Canales hubiera resuelto con antelación el problema de tantas maneras como le fuese posible, hubiera descubierto que había al menos dos estrategias distintas para obtener la respuesta correcta (el valor unitario y el factor de escala) y que cada una de ellas podría expresarse mediante distintas representaciones (dibujos, tablas y explicaciones por escrito).

Monitoreo

Monitorear las respuestas de los estudiantes involucra poner especial atención, mientras realizan la tarea, a su pensamiento matemático y a sus estrategias de solución. Por lo general, los docentes hacen esto al caminar por el aula mientras los estudiantes trabajan, ya sea de manera individual o en pequeños grupos. Observar cuidadosamente lo que están haciendo los estudiantes mientras trabajan, posibilita que los docentes utilicen sus observaciones para decidir en qué y en quién enfocarse en la discusión posterior (Lampert, 2001).

Una manera de facilitarle al docente el proceso de monitoreo consiste en elaborar, antes de la lección, una lista de soluciones que éste anticipa que los estudiantes generarán, misma que le ayudará a lograr sus metas matemáticas de la lección. La lista para la tarea de las orugas y las hojas, como la mostrada en la primera columna de la figura 1.1, puede auxiliarle a dar seguimiento de qué estudiantes o grupos generan determinadas soluciones o a quién o quiénes se les ocurrieron las ideas que él desea asegurar que se retengan durante la discusión grupal. La celda “Otra”, de la primera columna, ofrece al profesor la oportunidad de registrar las ideas que *no* previó.

Estrategia	¿Quién y qué?	Orden
Valor unitario Encontrar el número de hojas que come una oruga (2.5) y multiplicarlo por 12, o sumar la cantidad que come una oruga 12 veces.	Juanita: multiplicó 12 x 2.5 (las rayas representan orugas). Carina: sumó doce veces 2.5 (dibujos de orugas y hojas).	
Factor de escala Descubrir que el número de orugas (12) es igual a tener 6 veces la cantidad original (2), así que el número de hojas (30) debe ser 6 veces la cantidad original (5).	Jaime: descripción narrativa	
Incremento constante Incrementar el número de hojas y de orugas sumando continuamente 5 a las hojas y 2 a las orugas, hasta alcanzar la cantidad deseada de orugas.	José: una tabla que registra incrementos de 2 y de 5 en las hojas y orugas.	
Estrategia aditiva Percatarse de que el número de orugas se ha incrementado en 10 (2 + 10 = 12), así que la cantidad de hojas debe también aumentar en 10 veces (5 + 10 = 15).	Mónica y Karla.	
Otra Aumentar cantidades haciendo conjuntos de 2 hojas y 5 orugas.	Martín: dibujo. Marely: tabla.	

Figura 1.1. Tabla para monitorear el trabajo de los estudiantes en la tarea de las hojas y las orugas.

Como se analizó en la introducción, la lección del profesor Canales ofreció poca evidencia, si acaso, de un monitoreo activo. Aunque el profesor Canales sabía quién obtuvo las respuestas correctas y quién no, así como la variedad de estrategias utilizadas, la elección de estudiantes que hizo para que presentaran sus trabajos al final de la clase, sugiere que no monitoreó el potencial específico de aprendizaje matemático disponible en todas las respuestas. Lo que el profesor Canales pudo haber llevado a cabo, mientras los estudiantes trabajaban en la tarea, se muestra en la segunda columna de la figura 1.1.

Empero, resulta importante destacar que el monitoreo implica más que sólo observar y escuchar a los estudiantes. Durante ese tiempo, el docente también ha de plantear preguntas y hacer manifiesto el pensamiento de los estudiantes, ayudarlos a que lo clarifiquen, asegurarse de que todos los miembros del equipo estén comprometidos con la actividad y apremiar a los estudiantes a que tengan en cuenta aspectos de la tarea que requieren su atención. Muchas de estas preguntas pueden plantearse antes de la clase, con base en las soluciones que se prevean. Por ejemplo, si el profesor Canales hubiera anticipado que un estudiante utilizaría un enfoque de valor unitario (las respuestas de Juanita y Carina, véase la figura 1.1), razonando a partir del hecho de que el número de hojas que comía una oruga era 2.5, entonces pudiera haber tenido preparada una pregunta, por ejemplo para Carina, concerniente con la manera en que ella obtuvo el número 2.5 y cómo es que supo que debía multiplicarlo por 12. Plantear preguntas a un estudiante o a un grupo de estudiantes, mientras están abordando la tarea, les brinda la oportunidad de pulir o revisar su estrategia antes de la puesta en común; asimismo, ofrece al docente pistas de lo que el estudiante está entendiendo del problema y de las ideas matemáticas implícitas en el mismo.

Selección

Una vez hecha la labor de monitoreo de las estrategias de los estudiantes disponibles para la clase, el docente elige a estudiantes específicos para que compartan su trabajo con el resto de los estudiantes a fin de ahondar, al inicio del análisis, en conceptos matemáticos particulares, lo cual ofrece al profesor mayor control sobre la discusión (Lampert, 2001). La selección de determinados estudiantes, junto con sus soluciones, estará sujeta a la meta matemática de la lección y a la evaluación del profesor respecto de lo que aporte cada contribución a esa meta. Por tanto, el docente selecciona a ciertos estudiantes para la presentación, con base en el contenido matemático de sus respuestas.

Una forma usual de efectuar la "selección" es pedir, conforme se va dando la discusión, a estudiantes específicos (o grupos de estudiantes) que presenten su trabajo. De manera alternativa, el docente pudiera decirles a sus estudiantes, antes de la discusión, que habrán de presentar su trabajo. En una forma combinada, el profesor podría solicitar voluntarios y luego seleccionar a un determinado estudiante del que sepa que es uno de los que tiene una idea particularmente útil para compartirla con la clase. Al pedir voluntarios, para luego elegirlos en forma estratégica, el docente muestra aprecio por las contribuciones espontáneas de ellos y al mismo tiempo conserva el control de las ideas que se presentarán públicamente.

Si se retoma el ejemplo de las hojas y las orugas y se observan las estrategias compartidas, notamos que Carina y Juanita tienen estrategias similares, en las que emplearon la idea del valor unitario (es decir, calcular el número de hojas necesarias para una oruga). En vista de lo cual, no se obtendría conocimiento matemático adicional al compartir ambas estrategias. De hecho, si el profesor Canales hubiese querido que sus estudiantes se percataran de la naturaleza multiplicativa de la relación, quizá hubiera escogido a Juanita, ya que su enfoque claramente utilizó la multiplicación.

Asimismo, quizá hubiese sido fructífero compartir la solución de Mónica y Carla (figura 0.1) y compararla con la de Marely (figura 0.2). Aunque ambos enfoques se valieron de la adición, Mónica y Carla sumaron equivocadamente el mismo número (10) a las hojas y a las orugas. En tanto que Marely sumó 5 hojas por cada 2 orugas, lo cual muestra que comprendió que esta razón (5 por cada 2) debería mantenerse constante.

Secuenciación

Después de haber seleccionado estudiantes específicos para que presenten su trabajo, el docente puede tomar decisiones sobre la secuencia de éstos. Al hacer elecciones adecuadas sobre el orden en el que se compartirá el trabajo de sus estudiantes, los maestros pueden maximizar las oportunidades de lograr sus metas matemáticas para la discusión. Por ejemplo, tal vez el docente querría que se presentara primero la estrategia que la mayoría empleó, antes que la utilizada sólo por unos pocos estudiantes, con el objeto de validar el trabajo efectuado por la mayoría y para hacer accesible el comienzo de la discusión a tantos estudiantes como se pueda. En forma alternativa, quizá el docente quiera comenzar con una estrategia que fuese más concreta (que utilice dibujos o materiales concretos) y luego pasar a otras que sean más abstractas (que usen el Álgebra). Este enfoque (ir de lo concreto a lo simbólico) resulta útil para validar enfoques menos complejos y permite establecer conexiones entre ellos. Si hubiera una equivocación común subyacente en una estrategia utilizada por algunos estudiantes, tal vez el docente desee analizarla primero, a fin de que todos los estudiantes superen ese concepto erróneo y así poder trabajar en el desarrollo de formas más eficaces de resolver el problema. Por último, probablemente el docente quisiese vincular o contrastar consecutivamente estrategias, con el objeto de que sea más fácil para todos compararlas. De nuevo, durante la planificación el profesor puede tener en mente posibles maneras de secuenciar las respuestas anticipadas para destacar las ideas matemáticas que constituyen la clave de la lección. De este modo, las respuestas que no se anticiparon pudieran insertarse en la secuencia, conforme el docente toma las decisiones definitivas respecto a lo que se presentará.

Se requiere llevar a cabo un mayor trabajo de investigación para comparar el valor de los diversos métodos de secuenciación; no obstante, deseamos subrayar en estos momentos que se pueden utilizar secuencias determinadas para avanzar hacia metas específicas de la lección. Retomando el ejemplo de las hojas y las orugas, señalamos una secuencia que se pudiera haber utilizado: Martín (incremento constante agrupando conjuntos-dibujo), José (incremento constante-tabla), Juanita (valor unitario-dibujo/explicación por escrito) y Jaime (factor de escala-explicación por escrito).

Este orden comienza con la representación menos compleja (un dibujo) de la estrategia más simple (incremento constante agrupando conjuntos) para finalizar con la estrategia más compleja (factor de escala), lo cual constituye una secuencia que pudiese ayudar a lograr la meta de accesibilidad. Además, al contener una misma estrategia (incremento constante) dos representaciones distintas (dibujo y tabla), los estudiantes tendrían oportunidad de desarrollar conocimientos más profundos sobre cómo concebir este problema en términos del incremento constante.

Conexión

Finalmente, el docente ayuda a los estudiantes a establecer conexiones entre sus soluciones y las de sus compañeros, así como con las ideas matemáticas clave de la lección. El profesor puede auxiliar a sus estudiantes a establecer juicios sobre las consecuencias de la aplicación de distintos enfoques a la gama de problemas que pueden resolverse(juicios por ejemplo sobre la precisión y la eficiencia para resolverlos), así como a reconocer con mayor facilidad los tipos de modelos matemáticos. Más que tener discusiones matemáticas que sean presentaciones aisladas de distintas maneras para resolver un problema particular, la meta es contar con representaciones de los estudiantes construidas con base en las anteriores, a fin de desarrollar sólidas ideas matemáticas.

Retomando la clase del profesor Canales, supongamos que la secuencia de las presentaciones de los estudiantes hubiera sido: Martín, José, Juanita y Jaime, como se analizó arriba. Los estudiantes quizá hubiesen podido comparar las respuestas de José y Juanita para identificar en qué lugar se aprecia la razón unitaria de ella (2.5 hojas por cada oruga) en la tabla de él, que es el factor por el que se debe multiplicar la cantidad de orugas a fin de obtener el total de hojas. Los estudiantes podrían haber podido también comparar la explicación de Jaime con el trabajo de Martín y José a fin de observar si el factor de escala 6 puede apreciarse tanto en la tabla como en los dibujos.

Es importante observar que las cinco prácticas se construyen con base en las otras. El monitoreo resulta menos atemorizante si el docente tiene tiempo de anticipar las formas en que los estudiantes pudiesen resolver la tarea. Si bien un docente no puede tener el 100% de certeza sobre cómo responderán los estudiantes un problema antes de la lección, se pueden anticipar muchas soluciones y por consiguiente éstas se reconocerán con facilidad durante el monitoreo. Un profesor que ya haya pensado en las cuestiones matemáticas representadas por tales soluciones, puede concentrarse en dar sentido matemático a aquellas soluciones que no se anticiparon. Las prácticas de seleccionar, secuenciar y conectar se fundamentan a su vez en un monitoreo eficaz, el cual generará la materia prima para la discusión basada en el pensamiento del estudiante, e incluso apuntará con firmeza hacia la meta matemática de la lección.

Conclusión

El objetivo de las cinco prácticas consiste en brindar a los docentes un mayor control en la pedagogía centrada en el estudiante. Lo cual se lleva cabo permitiendo al maestro gestionar el contenido que se analizará y la forma en que esto se efectuará. Mediante una cuidadosa planificación, el grado de improvisación que el docente requiera "en el preciso momento" se mantiene al mínimo. En consecuencia, los profesores quedan en libertad para escuchar y dar sentido a las estrategias que afloran y para planificar a conciencia las conexiones entre los diferentes modos de resolver problemas. Todo lo anterior da como resultado discusiones más coherentes, y aún así centradas en el estudiante.

En el siguiente capítulo exploramos un primer paso fundamental para la puesta en marcha de las cinco prácticas: el establecimiento de las metas de aprendizaje y la identificación de las tareas propicias. Si bien esta labor no constituye una de las cinco prácticas, es el fundamento sobre las cuales éstas se erigen. Acto seguido, en los capítulos 3, 4 y 5 analizamos a profundidad las cinco prácticas y ofrecemos ejemplos adicionales que muestran cómo son éstas cuando se llevan a cabo y la manera en que pueden propiciar discusiones más productivas.

CAPÍTULO

2

Preparación para las cinco prácticas: establecimiento de las metas y selección de tareas

Con el objeto de asegurar que una discusión sea productiva, los docentes deben tener claro cuáles son las metas de aprendizaje a cumplir en la lección y seleccionar una tarea que ayude a los estudiantes a lograrlas. En el presente capítulo, analizamos estos dos componentes de la planificación para la enseñanza con el propósito de examinar el modo en que brindan una base crítica para las discusiones eficaces.

Establecimiento de las metas para la enseñanza

Especificar las metas matemáticas de la lección constituye un punto de inicio crítico para la planificación y la enseñanza de la materia. De hecho, varios docentes con los que hemos colaborado afirman que determinar la meta matemática de la lección debería ser la "práctica 0", sugiriendo que esto constituye los cimientos sobre los cuales se erigen las cinco prácticas. Estamos de acuerdo en que el establecimiento de la meta para la lección es ciertamente una práctica previa, debe realizarse antes de ejecutar las cinco prácticas. La clave consiste en precisar una meta que identifique con claridad lo que los estudiantes han de conocer y comprender respecto de las Matemáticas, como resultado de su involucramiento con una lección particular.

ACTIVIDAD DE INVOLUCRAMIENTO 2.1

En la figura 2.1 se muestran tres enunciados de metas para una lección sobre el teorema de Pitágoras. Revíselos y tenga en cuenta las siguientes preguntas:

- ¿En qué se parecen y en qué son diferentes los enunciados de las metas?
- ¿Qué tanto importan las diferencias en los enunciados de las metas?

Por ejemplo, considérese la lección del teorema de Pitágoras para estudiantes de octavo año[1]. Su meta podría establecerse de formas distintas que reflejen diversos grados de generalidad, como se muestra en la tabla de la

[1] N.T. En el sistema escolar estadounidense el octavo año corresponde a jóvenes entre los 13 y 14 años.

figura 2.1. Las metas A y B señalan sencillamente lo que los estudiantes aprenderán (meta A) y lo que harán (meta B), aunque no ofrece ningún indicio de la comprensión matemática que desarrollarán durante la lección. Es poco probable que la meta A o la B proporcionen orientación al docente para seleccionar actividades de aprendizaje que desarrollen en los estudiantes la comprensión de la base conceptual del teorema o que guíen y moldeen dicha comprensión durante la lección.

Meta A: Los estudiantes aprenderán el teorema de Pitágoras ($c^2 = a^2 + b^2$).
Meta B: Los estudiantes serán capaces de utilizar el teorema de Pitágoras ($c^2 = a^2 + b^2$) para resolver una serie de problemas del tipo "valor faltante".
Meta C: Los estudiantes reconocerán que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados trazados en los catetos y conjeturarán que $c^2 = a^2 + b^2$.

Figura 2.1. Tres formulaciones distintas de metas para la lección del teorema de Pitágoras.

Por el contrario, la meta C establece de modo explícito la relación matemática que es la esencia del teorema pitagórico: "El área del cuadrado trazado en la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos en los catetos". La especificidad de esta meta ofrece al docente un nítido objetivo de aprendizaje que puede orientar la selección de actividades y el empleo de las cinco prácticas analizadas en el capítulo 1. Hiebert y sus colegas (2007, p. 51) sostienen que este nivel de especificidad es fundamental para una enseñanza eficaz:

> Sin metas de aprendizaje explícitas, resulta difícil conocer lo que se consideraría evidencia de aprendizaje de los estudiantes, la forma en que dicho aprendizaje puede relacionarse con actividades de aprendizaje particulares y cómo reexaminar la enseñanza con el objeto de facilitar el aprendizaje de los estudiantes de un modo más eficaz. La formulación de metas de aprendizaje claras y explicitas sienta las bases para todo lo demás.

Considérese ahora una vez más la lección impartida por David Canales, analizada en la introducción y en el capítulo 1. Sin una meta clara sobre lo que los estudiantes deberían aprender en la lección, no fue posible destacar en la discusión alguna idea o relación matemática clave. Esta falla plantea cuestionamientos relacionados con lo que los estudiantes aprendieron y a la forma como el profesor Canales pudo evaluar su aprendizaje. Por el contrario, supóngase que la meta de la lección hubiese sido que los estudiantes reconocieran que la relación entre las orugas y las hojas era multiplicativa y no aditiva; o sea que se requiere aumentar las hojas y las orugas a una tasa constante (a cada 2 orugas le corresponden cinco hojas; para cada oruga se tiene 2.5 hojas). Esta meta hubiera proporcionado un claro objetivo para la discusión, lo cual hubiese ayudado al docente a decidir qué soluciones destacar y qué preguntas plantear alrededor de éstas.

ACTIVIDAD DE INVOLUCRAMIENTO 2.2

Considere una lección que haya enseñado recientemente y en la que la meta de aprendizaje no estaba explícita.

- Vuelva a escribir la meta de aprendizaje de manera que sea explícita la idea matemática que usted quisiera que aprendieran sus estudiantes.
- ¿Cómo influiría en la forma en que planificase o enseñara la lección su formulación de una meta más explícita?

Tener claridad sobre las ideas matemáticas que serán el objeto de aprendizaje puede ser desafiante. Los docentes suelen concebir las lecciones en función de las actividades que solicitarán a sus estudiantes llevar a cabo, más que en lo que éstos llegarán a aprender y a entender de Matemáticas como resultado de haberse involucrado en la lección. Los libros de texto empleados en los cursos de didáctica de las Matemáticas orientados a los practicantes[2] o profesores en formación pueden ser recursos valiosos que auxilien a los docentes para desarrollar las metas de aprendizaje enfatizando las ideas matemáticas que se aprenderán. Por ejemplo en el libro *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (Van De Walle, Karp y Bay-Williams, 2010), los autores identifican un conjunto de grandes ideas para el contenido de cada capítulo, explican cómo se desarrolla la comprensión de éstas y proponen tareas que puedan ayudar a los estudiantes a desarrollar su comprensión. Además, las ediciones dirigidas a los maestros de algunos libros de texto para los niveles de preescolar a secundaria (K-12) ofrecen un apoyo similar. Por ejemplo, en la obra *Connected Mathematics* (Lappan *et al*, 2010), los autores brindan una lista de las grandes ideas de cada unidad y enuncian con claridad la manera en que cada investigación contribuye al desarrollo de las ideas identificadas.

Selección de la tarea apropiada

Diferentes tareas ofrecen diversas oportunidades para el aprendizaje del estudiante. Las tareas en que se pide a los estudiantes desempeñar de modo habitual un procedimiento memorizado propician una oportunidad para su pensamiento; las tareas que exigen un compromiso conceptual y que alientan a los estudiantes a realizar conexiones les brindan otro tipo de oportunidades para su pensamiento. Considérense dos versiones de una tarea, como se muestra en la figura 2.2.

Tarea A	Tarea B
ELABORACIÓN DE CONJETURAS. Completa la conjetura con base en el patrón que observas en los casos específicos. **29. Conjetura:** La suma de cualquier pareja de números impares es ______. $1 + 1 = 2$ $7 + 11 = 18$ $1 + 3 = 4$ $13 + 19 = 32$ $3 + 5 = 8$ $201 + 305 = 506$ **30. Conjetura:** El producto de cualquier pareja de números impares es ______. $1 \times 1 = 1$ $7 \times 11 = 77$ $1 \times 3 = 3$ $13 \times 19 = 247$ $3 \times 5 = 15$ $201 \times 305 = 61{,}305$ (Tomado de Larson, Boswell y Stiff, [2004, p. 7]).	**Para los problemas 29 y 30 completa la conjetura con base en el patrón que observas en los ejemplos. Luego explica por qué la conjetura siempre es verdadera o da un ejemplo en el cual no lo sea.** **29. Conjetura:** La suma de cualquier pareja de números impares es ______. $1 + 1 = 2$ $7 + 11 = 18$ $1 + 3 = 4$ $13 + 19 = 32$ $3 + 5 = 8$ $201 + 305 = 506$ **30. Conjetura:** El producto de cualquier pareja de números impares es ______. $1 \times 1 = 1$ $7 \times 11 = 77$ $1 \times 3 = 3$ $13 \times 19 = 247$ $3 \times 5 = 15$ $201 \times 305 = 61{,}305$

Figura 2.2. Dos versiones de la tarea de los números impares.

[2] N.T. En inglés *preservice teachers*, lo cual equivale al concepto de *practicante*; es decir, una persona que está estudiando para ser maestro.

Aunque las tareas A y B son muy parecidas a primera vista (ambas piden a los estudiantes que hagan una conjetura sobre los números impares con base en ejemplos empíricos), son muy distintas en términos del nivel de pensamiento que exigen a los estudiantes. En la tarea A éstos sólo requieren observar que todas las respuestas son pares (para la adición) e impares (en la multiplicación), para después completar la conjetura en la forma debida. La tarea no les exige que deduzcan por qué un modelo particular funciona en la forma en que lo hace. Requiere un mínimo de pensamiento y razonamiento. En consecuencia, la tarea A podría considerarse de baja exigencia. En la tarea B se les pide a los estudiantes que expliquen por qué resulta verdadera la conjetura. En otras palabras, necesitan justificar por qué es válida para el conjunto de ejemplos. La tarea de explicar por qué una conjetura siempre es verdadera apremia a los estudiantes a profundizar en las Matemáticas subyacentes en el modelo observado. Consecuentemente, la tarea B puede considerarse de alto nivel ya que no hay una forma preestablecida de resolverla, lo cual exige que los estudiantes reflexionen sobre lo que conocen acerca de los números impares y la forma de utilizar dicho conocimiento a fin de crear una explicación razonable.

La *Guía para el análisis de tareas* (Smith y Stein, 1998) [*Task Analysis Guide*], que se muestra en la figura 2.3, ofrece una lista general de características para las tareas matemáticas de bajo (columna izquierda) y alto nivel (columna derecha), por lo que se puede emplear en el análisis del potencial de las tareas a fin de respaldar el razonamiento y el pensamiento de los estudiantes. La Guía pretende auxiliar a los maestros en equiparar las tareas con sus objetivos concernientes al aprendizaje del estudiante.

Exigencias de bajo nivel	**Exigencias de alto nivel**
Memorización • Implican reproducir o llevar a cabo hechos, reglas, fórmulas o definiciones ya aprendidos. • No pueden resolverse mediante procedimientos debido a que éstos no existen o porque el tiempo asignado para resolver la tarea es muy breve para utilizar un procedimiento. • No son ambiguas. Este tipo de tareas implica una reproducción exacta del material previamente visto, y lo que habrá de reproducirse se establece de manera clara y directa. • No tienen vinculación con los conceptos o con el significado que subyacen en los hechos, reglas, fórmulas o definiciones que se están aprendiendo o reproduciendo.	Procedimientos con conexiones • Centran la atención del estudiante en el empleo de procedimientos, con el fin de desarrollar niveles más profundos de comprensión respecto de las ideas y conceptos matemáticos. • Sugieren de modo explícito o implícito los caminos a seguir, mismos que son vagos procedimientos generales que se vinculan estrechamente con las ideas conceptuales subyacentes, a diferencia de los rígidos algoritmos que son opacos respecto de los conceptos implícitos. • Suelen representarse de múltiples formas, como diagramas visuales, materiales manipulables, símbolos y situaciones problemáticas. Hacer conexiones entre las diversas representaciones ayuda a elaborar el significado. • Exigen cierto grado de esfuerzo cognitivo. Aunque puedan seguirse procedimientos generales, esto no se hace irreflexivamente. Los estudiantes han de involucrarse con las ideas conceptuales que subyacen en los procedimientos a fin de completar la tarea con éxito, lo cual desarrolla la comprensión.

Exigencias de bajo nivel	Exigencias de alto nivel
Procedimientos sin conexiones • Son algorítmicas. Utiliza el procedimiento que se menciona específicamente o que resulta evidente de anteriores instrucciones, experiencias o ubicación de la tarea. • Exigen una demanda cognitiva limitada para su exitosa realización. Hay poca ambigüedad sobre lo que se necesita hacer y sobre cómo llevarlo a cabo. • No tienen conexión con los conceptos o significados que subyacen en el procedimiento que se usará. • Se centran en producir respuestas correctas en vez de desarrollar la comprensión matemática. • No requieren explicaciones o éstas sólo se centran en la descripción del procedimiento utilizado.	Construcción de las Matemáticas • Requiere pensamiento no algorítmico y complejo: la tarea, sus instrucciones o un ejemplo resuelto no sugieren explícitamente caminos o enfoques predecibles o estudiados. • Exige que los estudiantes exploren y comprendan la naturaleza de los conceptos, procesos o relaciones matemáticas. • Requiere un automonitoreo o una autorregulación de los propios procesos cognitivos. • Conmina a que los estudiantes tengan acceso a conocimientos y experiencias relevantes y que hagan un uso apropiado de éstos al estar trabajando en la tarea. • Requiere que los estudiantes analicen la tarea y que examinen activamente las restricciones de ésta que quizá limiten las posibles estrategias de solución y las soluciones mismas. • Demanda un esfuerzo cognitivo considerable y quizá conlleve un nivel de ansiedad para el estudiante, debido a la naturaleza impredecible del proceso de solución requerido.

Nota: Estas características de las tareas matemáticas de enseñanza se derivan de los trabajos de Doyle (1988) sobre las tareas académicas y de Resnick (1987) sobre habilidades de pensamiento de alto nivel, así como del examen y la categorización de cientos de tareas utilizadas en las aulas QUASAR (Stein, Grover y Henningsen, 1996; Stein, Lane y Silver, 1996).

Figura 2.3. *Guía para el análisis de tareas* (tomada de Smith y Stein, [1998]).

ACTIVIDAD DE INVOLUCRAMIENTO 2.3

Utilice la *Guía de análisis de tareas* para examinar las que usted ha propuesto en alguna de sus clases durante las últimas semanas.

- ¿En qué medida brindó oportunidades a sus estudiantes de involucrarse con tareas de alto nivel?
- ¿Puede identificar en sus libros de texto las tareas que brindarían oportunidades adicionales a los estudiantes para pensar y razonar (los procesos que están en la columna derecha de la *Guía de análisis de tareas*)?

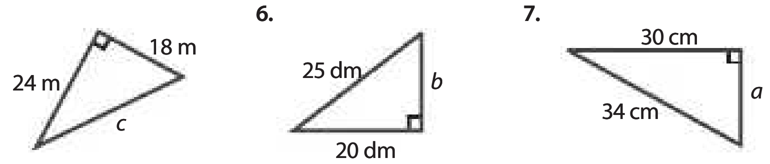
Resulta fundamental que la tarea seleccionada por un docente esté en concordancia con las metas de la lección. Considérense las metas y las tareas correspondientes de la figura 2.4. Si, por ejemplo, la meta de la lección consiste en que los estudiantes utilicen el teorema de Pitágoras para determinar el valor de a, b o c (meta B de la figura 2.4), entonces un conjunto de ejercicios procedimentales (columna derecha de la tabla), mediante los cuales los estudiantes calculen los valores faltantes a, b o c, sustituyendo los valores dados en la fórmula, tiene el potencial de alcanzar la meta. Empero, si la meta para los estudiantes es que reconozcan que el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos en los catetos y conjeturen que $c^2 = a^2 + b^2$ (meta C de la figura 2.4), entonces se necesitaría una tarea distinta.

<table>
<tr><th>Meta</th><th>Tarea</th></tr>
<tr><td>B: Los estudiantes serán capaces de utilizar el teorema de Pitágoras ($c^2 = a^2 + b^2$) para calcular a, b o c.</td><td>

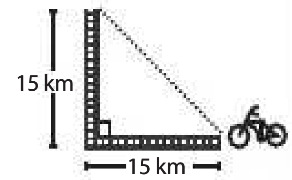
Tarea B

Véase el ejemplo 1. | Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular las medidas faltantes.

5. 6. 7.



Véase el ejemplo 2. | 8. Jaime recorre 15 km hacia el oeste en su bicicleta. Después gira hacia el norte otros 15 km y se detiene para descansar. ¿Qué tan lejos está Jaime de su punto de partida, al momento de detenerse para descansar? Redondea tu resultado al décimo más cercano.



(Tomado de Bennett *et al.*, [2007, p. 558])

</td></tr>
<tr><td>C: Los estudiantes reconocerán que el área del cuadrado trazado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos en los catetos y conjeturarán que $c^2 = a^2 + b^2$.</td><td>

Tarea C

A. Copia la tabla de abajo. Para cada renglón de la tabla:

- Traza en una hoja cuadriculada un triángulo rectángulo con las longitudes de los catetos dados.
- Traza un cuadrado en cada lado del triángulo.
- Calcula las áreas de los cuadrados y registra los resultados en la tabla.

<table>
<tr><th>Longitud del cateto 1 (unidades)</th><th>Longitud del cateto 2 (unidades)</th><th>Área del cuadrado del cateto 1 (unidades cuadradas)</th><th>Área del cuadrado del cateto 2 (unidades cuadradas)</th><th>Área del cuadrado de la hipotenusa (unidades cuadradas)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

B. Recuerda que una **conjetura** es tu mejor suposición respecto de una relación matemática. Suele ser una generalización de un modelo que crees que puede ser válido, pero que aún no tienes la seguridad de que sea verdadera.

Para cada triángulo, busca una relación de las áreas de los tres cuadrados. Haz una conjetura sobre las áreas de los cuadrados dibujados en los catetos de cualquier triángulo rectángulo.

C. Traza un triángulo rectángulo cuya longitud de sus catetos difieran de los dados en la tabla. Utiliza ese triángulo para probar tu conjetura del punto B.

(Tomado de Lappan *et al.* [2010, p. 32])

</td></tr>
</table>

Figura 2.4. Tareas que se compaginan con las metas de aprendizaje.

La tarea B es del tipo *procedimientos sin conexiones* (véase el cuadrante inferior izquierdo de la *Guía para el análisis de tareas*, en la figura 2.3), que requiere la aplicación de un procedimiento conocido. Resulta importante observar que si bien la pregunta 8 de la tarea B es un problema enunciado con palabras (a menudo considerada de alto nivel debido a que esos tipos de problemas son difíciles para los estudiantes), el dibujo que se proporciona y la referencia a un ejemplo convierten a esta tarea en algo no más complejo que un ejercicio procedimental.

Por el contrario, la meta C requiere una tarea que ofrece a los estudiantes la oportunidad de explorar la relación entre los cuadrados trazados en los catetos de un triángulo rectángulo. La tarea C de la figura 2.4 brinda esa oportunidad. Al dibujar los triángulos rectángulos con sus catetos de diferentes medidas, trazar cuadrados en sus lados y calcular y registrar las áreas, los estudiantes pueden buscar patrones en los datos que han recopilado y formular una conjetura sobre la relación entre las áreas de los cuadrados que han construido. La tarea C quizá se considere del tipo *procedimientos con conexiones* (véase el cuadrante superior derecho de la *Guía para el análisis de tareas* en la figura 2.3), en vista de que se les muestra a los estudiantes un procedimiento general para resolver el problema (dibujar triángulos rectángulos, trazar cuadrados en los lados del triángulo, calcular su área, registrar los datos en la tabla), pero ellos deben analizar los datos de la tabla y determinar la relación entre las áreas de los cuadrados. Mediante este proceso, los estudiantes se ubican en una posición que les permite ver la conexión entre la fórmula y el significado subyacente.

Otra consideración importante, al seleccionar una tarea, es en qué medida ésta permite la participación de estudiantes que cuentan con un acervo de conocimientos y experiencia previos. Esto resulta un factor crucial para asegurar la equidad en el aula. Por ejemplo, si una tarea implica que los estudiantes tengan que hacer o explorar algo (ejemplo, la tarea C de la figura 2.4), aquellos que cuenten con los recursos apropiados (por ejemplo, papel cuadriculado o geoplanos) podrán tener un punto de apoyo que los conduzca hacia la solución, lo cual podría servir como un punto de inicio para la conversación. Empero, si en una tarea se le pide al estudiante resolver un conjunto de ejercicios que requieren la aplicación de una regla particular (por ejemplo, la tarea B de la figura 2.4) y éste la desconoce (digamos $c^2 = a^2 + b^2$), entonces no le queda otro recurso (no puede hacer otra cosa) más que solicitar ayuda del profesor o simplemente desentenderse por completo de la actividad.

ACTIVIDAD DE INVOLUCRAMIENTO 2.4

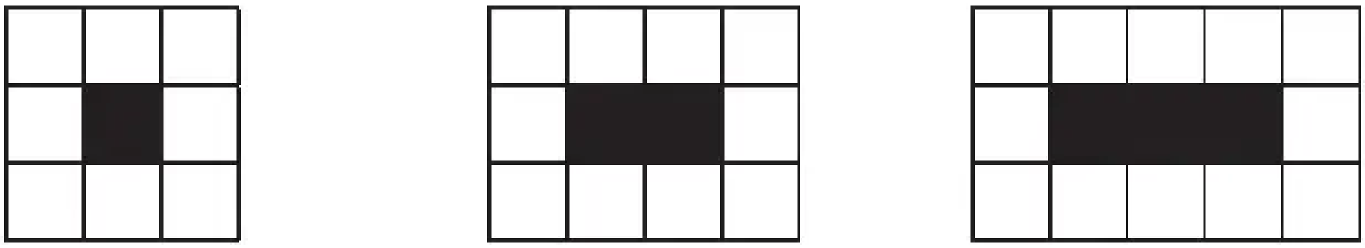
La figura 2.5 muestra la tarea “Embaldosado de un patio”. Vea cuántas expresiones matemáticas distintas, pero equivalentes, puede encontrar en la parte *d*.

La equidad también puede lograrse cuando a los estudiantes se les asignan tareas que pueden resolverse o representarse de distintas formas. Por ejemplo, la figura 2.5 muestra la tarea “Embaldosado de un patio”, que podría clasificarse como una del tipo *construcción de las Matemáticas* (véase el cuadrante inferior derecho de la *Guía para el análisis de tareas*, en la figura 2.3). Los estudiantes pueden trabajar en esta tarea de distintas maneras, por ejemplo, diseñando otros patios con azulejos de dos colores, trazando algunos más en papel cuadriculado y contando el número de azulejos que lo rodean, así como elaborando una tabla donde se consigne el número de patio y su correspondiente cantidad de azulejos, con el objeto de dilucidar patrones, o sólo atendiendo el modelo recursivo “+2”. Por consiguiente, es probable que todos los estudiantes puedan *participar* en la tarea (es decir, llevar a cabo algo matemático). Como lo notaron Smith, Hillen y Catania (2007, p. 40), compenetrarse con una tarea representa el punto de partida para el trabajo del maestro:

> Una vez que un estudiante logre una posición firme en la resolución de la tarea, el docente entonces estará en la situación tanto de plantear preguntas para evaluar lo que aquél está comprendiendo respecto de las relaciones en la tarea, como de impelerlo a ir más allá del punto de partida.

Embaldosado de un patio

Alfredo Gómez está diseñando patios; cada uno tiene un jardín en el área central que Alfredo representa con cuadritos negros; alrededor de cada jardín dispone cuadritos blancos que representan los azulejos que lo rodean. Los dibujos de abajo muestran tres patios pequeños y sus diferentes diseños.



Patio 1 **Patio 2** **Patio 3**

a. Traza los patios 4 y 5. ¿Cuántos cuadritos blancos tendrá el patio 4?, ¿cuántos el 5?
b. Concibe algunas ideas sobre los patios que puedan ayudarte a describir patios más grandes.
c. Describe un método para calcular el número total de azulejos blancos necesarios para el patio 50 (sin dibujarlo).
d. Escribe una expresión matemática que pueda utilizarse para calcular el número de azulejos blancos requeridos para cualquier patio. Explica la manera en que tu regla se relaciona con las representaciones visuales de los patios.
e. Escribe una regla distinta que pueda emplearse para determinar el número de azulejos blancos necesarios para cualquier patio. Explica cómo tu regla se relaciona con las representaciones visuales de los patios.

Figura 2.5. Tarea "Embaldosado de un patio" (adaptada de Cuevas y Yeatts [2005, pp. 18-22]).

Ahora, si la tarea sólo exigiera a los estudiantes escribir una expresión matemática (parte *d* de la figura 2.5), los que tuviesen problemas para utilizar notación simbólica se empantanarían y el docente tendría pocos elementos para saber lo que ellos pueden lograr y qué es lo que obstaculiza su comprensión. En vista de que la tarea apoya el trabajo de los estudiantes mediante el dibujo de patios con pocos azulejos, a fin de que hagan observaciones sobre éstos, y de que calculen el número de azulejos del borde para un patio tan grande que no pueda trazarse o construirse, los estudiantes pueden concentrarse en la descripción de la relación entre el número de azulejos exteriores y el que le corresponde al patio, antes de hacer la representación simbólica del modelo. En consecuencia, ellos pueden demostrar que son capaces de identificar y describir las relaciones mediante palabras, lo cual representa un primer paso esencial en el proceso de escribir una regla con símbolos.

Conclusión

A fin de lograr una discusión matemática productiva, los docentes primero deben establecer una meta clara y específica concerniente a los aspectos matemáticos que los estudiantes han de aprender y, acto seguido, seleccionar una tarea matemática de alto nivel (es decir, aquella que satisfaga los criterios especificados en la columna derecha de la *Guía para el análisis de tareas* de la figura 2.3). Esto no quiere decir que todas las tareas seleccionadas y utilizadas en el aula deban ser de alto nivel, sino más bien que es difícil que se den discusiones productivas que resalten ideas matemáticas clave, si la tarea en la cual los estudiantes están trabajando exige un limitado pensamiento y razonamiento.

En el siguiente capítulo analizaremos un episodio de enseñanza en el que una maestra de octavo grado utiliza la tarea del embaldosado de patios como base para una lección sobre funciones lineales. A través de esta exploración, consideraremos la concordancia de las metas que la docente establece como aprendizaje del estudiante con la tarea seleccionada y determinaremos el grado en que se valió de las cinco prácticas para facilitar las oportunidades de aprendizaje durante la lección.

CAPÍTULO 3

Investigación de las cinco prácticas en acción

En el capítulo 1 presentamos las cinco prácticas para orquestar una discusión productiva y consideramos cómo *hubiese* sido la clase de David Canales si se hubiera comprometido con estas prácticas y cómo la utilización de las mismas por anticipado y durante la lección *hubiera* tenido un impacto en las oportunidades de aprendizaje matemático de los estudiantes. En este capítulo analizamos la enseñanza de Dulce Domínguez, una docente de octavo grado que durante varios años ha tratado de mejorar la calidad de las discusiones en su aula.

Las cinco prácticas en el caso de Dulce Domínguez

El ejemplo que sigue (Embaldosado de un patio: el caso de Dulce Domínguez), ofrece una oportunidad para sopesar en qué medida, al parecer, la docente se ha involucrado en alguna o en todas las prácticas antes o durante la lección presentada, así como las formas en que el uso de las mismas pudo haber contribuido a las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes. (Este caso, escrito por Smith, Hillen y Catania [2007], se basa en la observación de una clase del tercer autor).

ACTIVIDAD DE INVOLUCRAMIENTO 3.1

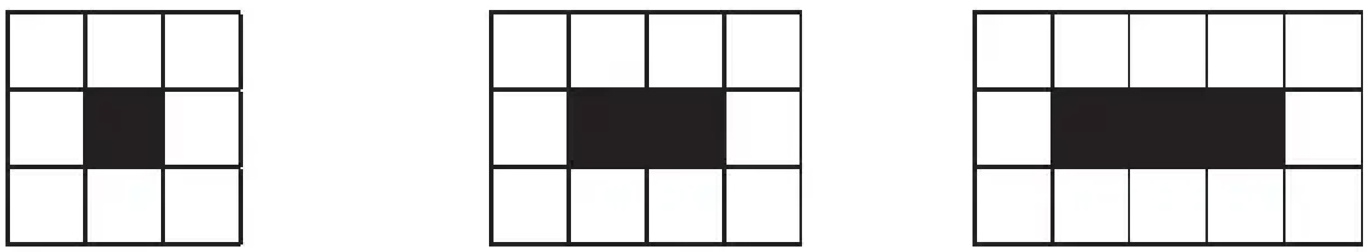
Lea el ejemplo “Embaldosado de un patio: el caso de Dulce Domínguez” e identifique los momentos de la lección en los que la profesora Domínguez aparece comprometida con las cinco prácticas. Utilice los números de líneas para ayudarse a dar seguimiento de las partes en las que crea que la profesora haya utilizado cada práctica.

Embaldosado de un patio: el caso de Dulce Domínguez

A principios del año escolar, la docente estaba trabajando en una unidad sobre funciones con sus estudiantes de octavo grado y decidió involucrarlos en la resolución de la tarea “Embaldosado de un patio” (mostrada antes en la figura 2.3, pero que se ofrece de nuevo como la figura 3.1 para comodidad del lector). Como resultado de esta lección, ella quería que sus estudiantes entendiesen tres ideas matemáticas: (1) que las funciones lineales crecen a una razón constante, (2) que existen distintas formas, aunque equivalentes, de escribir una expresión algebraica explícita que define la relación entre dos variables y (3) que la razón de cambio de una función lineal puede expresarse mediante formas de representación diversas, como: la diferencia sucesiva en una tabla de valores (x,y), en la que los valores de x se incrementen en una unidad; como el valor m en la ecuación $y = mx + b$, y como la pendiente en la gráfica de la función.

Embaldosado de un patio

Alfredo Gómez está diseñando patios; cada uno tiene un jardín en el área central que Alfredo representa con cuadritos negros; alrededor de cada jardín dispone cuadritos blancos que representan los azulejos que lo rodean. Los dibujos de abajo muestran tres patios pequeños y sus diferentes diseños.



Patio 1 **Patio 2** **Patio 3**

a. Traza los patios 4 y 5. ¿Cuántos cuadritos blancos tendrá el patio 4?, ¿cuántos el 5?
b. Concibe algunas ideas sobre los patios que puedan ayudarte a describir patios más grandes.
c. Describe un método para calcular el número total de azulejos blancos necesarios para el patio 50 (sin dibujarlo).
d. Escribe una expresión matemática que pueda utilizarse para calcular el número de azulejos blancos requeridos para cualquier patio. Explica la manera en que tu regla se relaciona con las representaciones visuales de los patios.
e. Escribe una regla distinta que pueda emplearse para determinar el número de azulejos blancos necesarios para cualquier patio. Explica cómo tu regla se relaciona con las representaciones visuales de los patios.

Figura 3.1. Tarea "Embaldosado de un patio" (adaptada de Cuevas y Yeatts [2005, pp. 18-22]).

Además del hecho de que la tarea ofrecía un contexto para explorar las ideas matemáticas que la profesora Domínguez había considerado como los objetivos, aquella tenía un aspecto que encontró particularmente atractivo: todos los estudiantes, sin importar sus conocimientos o experiencias previos, podrían abordar la tarea. Cada uno de ellos sería capaz de construir o trazar los dos patios siguientes (parte *a*) y hacer algunas observaciones sobre los mismos (parte *b*). Aunque determinar el número de azulejos blancos (los bordes) del patio 50 (parte *c*) representaría un reto mayor, los estudiantes podrían elaborar una tabla y buscar patrones numéricos o "ver" una de las muchas relaciones entre los azulejos blancos y negros en el diagrama mismo.

La profesora Domínguez comenzó la lección pidiendo que un estudiante leyera en voz alta la tarea y asegurándose de que todos comprendiesen lo que se estaba pidiendo en el problema. Les indicó que dispondrían de 5 minutos para una "reflexión personal" y para empezar a trabajar en el problema de manera individual; asimismo, les recordó que se valieran de cualesquiera materiales (azulejos, papel cuadriculado, colores, calculadoras) que estaban en sus mesas. Después podrían compartir sus ideas respecto de la tarea con otros miembros de su grupo y trabajar conjuntamente para obtener la solución.

Conforme trabajaban en la tarea, primero por su propia cuenta y luego en colaboración con sus compañeros, la profesora Domínguez caminaba alrededor de los grupos, tomando nota de los distintos enfoques que estaban utilizando, planteando preguntas aclaratorias y apremiándolos a que pensaran “cómo serían” los patios más grandes y cómo los imaginarían, sin dibujarlos o construirlos. Observó que si bien todos los grupos pudieron responder las partes *a* y *b*, a unos pocos estudiantes, como Jaime, les costaba trabajo describir el patio 50 y otros más estaban teniendo dificultades para expresar con símbolos las expresiones matemáticas de la parte *d*. Gracias a las preguntas que les planteó a los estudiantes durante el trabajo en pequeños grupos, habían progresado un poco, por lo que decidió que siguiesen trabajando en las descripciones verbales y las convirtieran en reglas expresadas simbólicamente a fin de que las pudieran plantear en la discusión grupal.

Después de dejarlos trabajar durante 15 minutos en pequeños grupos, la profesora Domínguez decidió que le pediría primero a Berenice presentar la estrategia de su equipo para la parte *d*. Varios grupos utilizaron el mismo enfoque, pero habían pasado varios días desde que Berenice contribuyó a la discusión grupal de manera decisiva, así que la profesora Domínguez deseaba que esta tímida alumna tuviera la oportunidad de demostrar sus habilidades. Cuando Berenice se dirigía al proyector que está al frente del salón, la profesora Domínguez le dio unos plumones de distintos colores y uno de los acetatos[31] que la docente había preparado antes, en el cual se mostraban los tres primeros patios. De esta manera, Berenice podría explicar fácilmente lo que hizo y el modo en que se relacionaba con el dibujo, sin tener necesidad de trazar todos los patios. Se entabló el siguiente diálogo entre Berenice y la maestra Domínguez:

Berenice: Multiplicas por 2 y sumas 6.

Profesora Domínguez: ¿*Qué* multiplicas por 2?

Berenice: Los azulejos negros.

Profesora Domínguez: Escríbelo en alguna parte. Multiplicas los azulejos negros por 2 y luego sumas 6. ¿Puedes ejemplificarlo en el diagrama?, ¿dónde se aprecia eso en el dibujo? ¿Dónde se ve eso, la multiplicación por 2? Puedes escribir sobre el acetato.

Berenice: [*Demuestra su método en el dibujo del patio 1*] Aquí está uno, así que un azulejo multiplicado por 2 es igual a 2, más 6, es igual a 8, así que hay 8 azulejos.

Profesora Domínguez: Muy bien, sumaste 6. ¿De dónde obtienes que la constante es igual a 6?

Berenice: Hay 3 de cada lado.

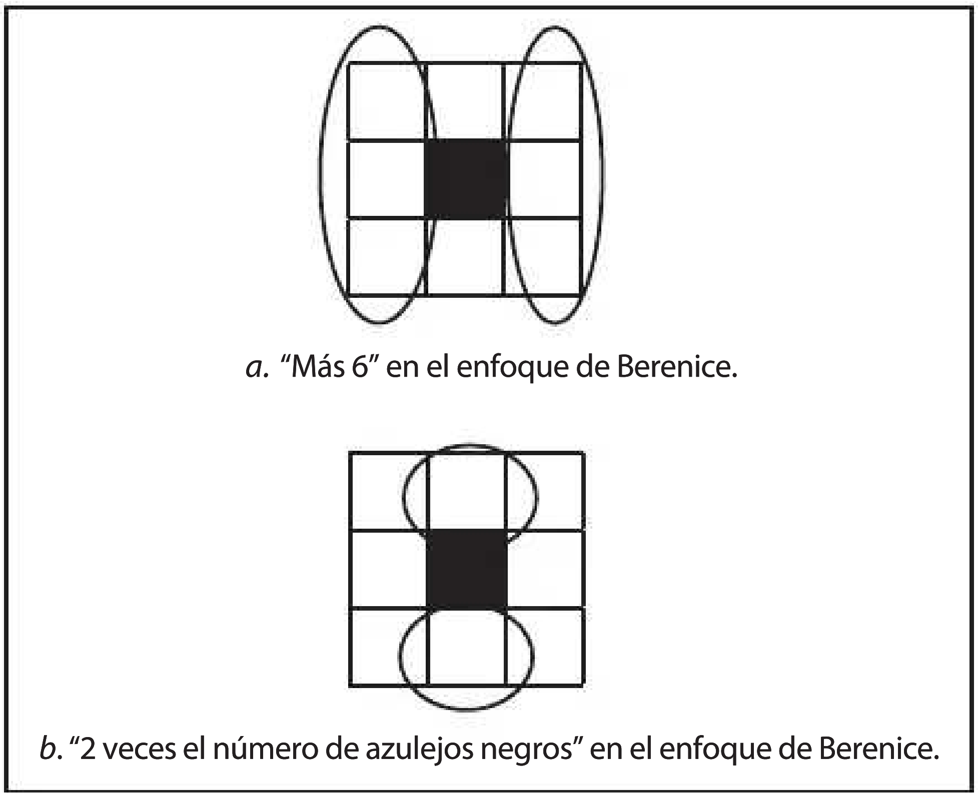
Profesora Domínguez: Enciérralos en un círculo.

Berenice: [*Dibuja los círculos alrededor de los azulejos, en cada lado del patio 1, como se muestra en la figura 3.2a*].

Profesora Domínguez: Uno y dos, ¿dónde está el dos? Los dos 1, ¿dónde están?

Berenice: Aquí y allá [*señala el azulejo de en medio de los tres azulejos de arriba y de los tres de abajo correspondientes al patio 1, como se muestra en la figura 3.2b*].

[31] En algunos países este material se conoce también como mica o transparencia.



a. "Más 6" en el enfoque de Berenice.

b. "2 veces el número de azulejos negros" en el enfoque de Berenice.

Figura 3.2. El enfoque de Berenice para el patio 1.

Después de la presentación de Berenice, la docente conminó a los estudiantes a expresar simbólicamente el modo de percibir el patrón de Berenice como $b = 2n + 6$, donde b representa el número de azulejos blancos y n el de azulejos negros. Simón comentó que el número de estos últimos es igual al número del patio, por consiguiente no importaba si utilizaran n (para los azulejos negros) o p (para el número de patio). La docente le pidió a Simón que escribiese la generalización para el número de azulejos en la hoja de rotafolio[42] que estaba colgando sobre el pizarrón, de manera que todos pudiesen estar enterados de las distintas maneras de obtener el número total de azulejos blancos de cualquier patio.

La profesora Domínguez después pidió a sus estudiantes que propusieran un segundo método. Algunos voluntarios presentaron su trabajo y luego de una rápida verificación de las notas que elaboró cuando monitoreaba el trabajo que se hacía en pequeños grupos, la docente seleccionó a Fátima como la siguiente. En un nuevo acetato, explicó su enfoque para el caso del patio 1 [que se muestra en la figura 3.3]: "Me fijé en el número de azulejos negros y le sumé dos [véase el paso 1 de la figura 3.3]. Haces dos veces lo mismo para tener los de arriba y abajo [véase el paso 2 de la figura 3.3]. Luego sumé 2" [véase el paso 3 de la figura 3.3.]

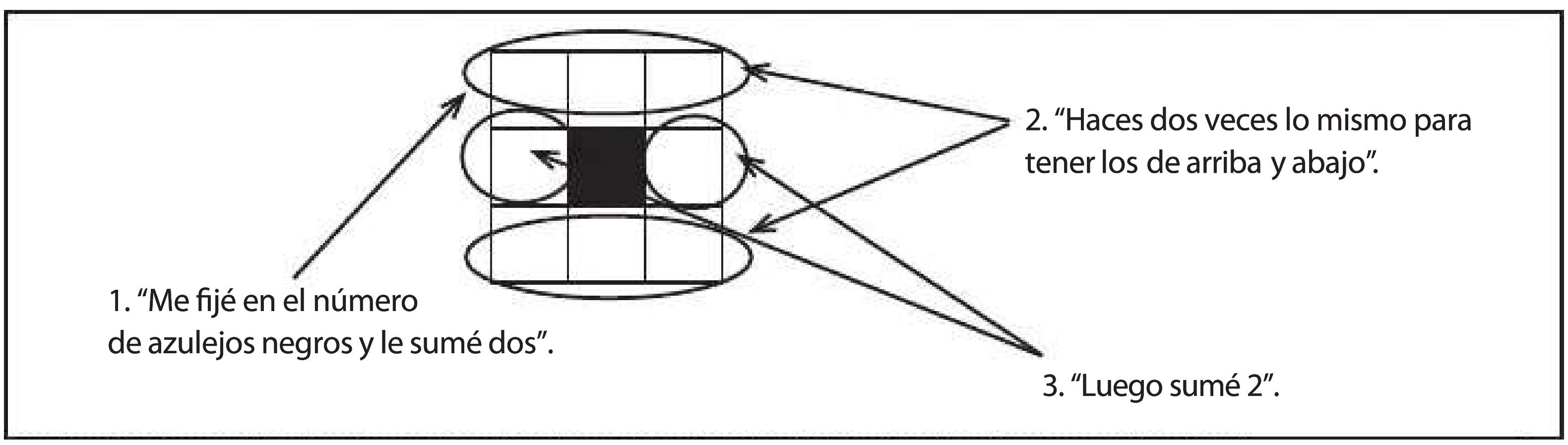


Figura 3.3. Explicación de Fátima sobre su enfoque para el patio 1.

[42] Este material también se conoce como papelógrafo en algunos países.

Cuando Fátima terminó su explicación, la profesora Domínguez comentó: “Muy bien, pero no creo que todos hayan entendido eso. ¿Alguien tiene una pregunta para Fátima?” Pedro fue el primero en levantar la mano y la profesora Domínguez animó a Fátima a que le respondiera. Pedro preguntó: “¿Cómo se te ocurrió la última suma de 2?” Ella aclaró: “Por estos dos de aquí [señalando los azulejos blancos a la izquierda y a la derecha del azulejo negro en el patio 1], porque son los dos azulejos restantes que todavía no se habían sumado”.

A continuación, la maestra Domínguez preguntó a la clase en su conjunto cómo se podría escribir una ecuación para el enfoque de Fátima. Daniel contestó voluntariamente que su equipo había abordado el problema de la misma forma que Fátima y que habían llegado a la ecuación $b = 2(n + 2) + 2$. Atendiendo la petición de la docente, Daniel se dirigió al frente del salón para explicar, mediante el dibujo del patio 3, por qué dicha ecuación funcionaba. Aclaró: “El número de azulejos negros (o el número del patio) más 2, siempre te darán las hileras de arriba y de abajo y además siempre tendrás un azulejo a cada lado, lo cual te hace sumar 2.” La profesora Domínguez le pidió a Daniel que añadiera la ecuación en la lista del rotafolio.

La docente le preguntó después a Demetrio si quería compartir su enfoque. El tiempo se agotaba y ella quería asegurarse de que el enfoque de este estudiante se conociera por todos, porque se centró en calcular el área total de la región rectangular (el patio más el jardín) para después restar el área del jardín y porque resultaba distinto de los otros enfoques y tenía el potencial de convertirse en una estrategia útil para la resolución de problemas que los estudiantes afrontarían a futuro. La maestra entabló con Demetrio el siguiente diálogo:

Demetrio: Bueno, como Daniel estaba diciendo, siempre habrá dos azulejos más abajo [en la fila].

Profesora Domínguez: Dibújalo [le da a Demetrio un acetato].

Demetrio: [*Dibuja y explica*] Siempre se tendrán dos azulejos más aquí abajo [*paso 1 de la figura 3.4*] que los que haya aquí. Así supe que habría 52 azulejos abajo, en el patio 50, porque hay 50 azulejos negros. Y luego multipliqué 52 por 3, estos tres [*señalándolos*], porque siempre habrá 3 al lado [*paso 2 de la figura 3.4*], sin importar qué patio sea; por lo que tuve 156. Lo que te da el área; luego se restan los azulejos negros [*paso 3 de la figura 3.4*], así que se restan 50 y te da 106.

Profesora Domínguez: ¡Vaya!, eso fue muy creativo. Calculó todos los azulejos de la figura y luego restó el área de en medio. ¡Bien!, me gusta.

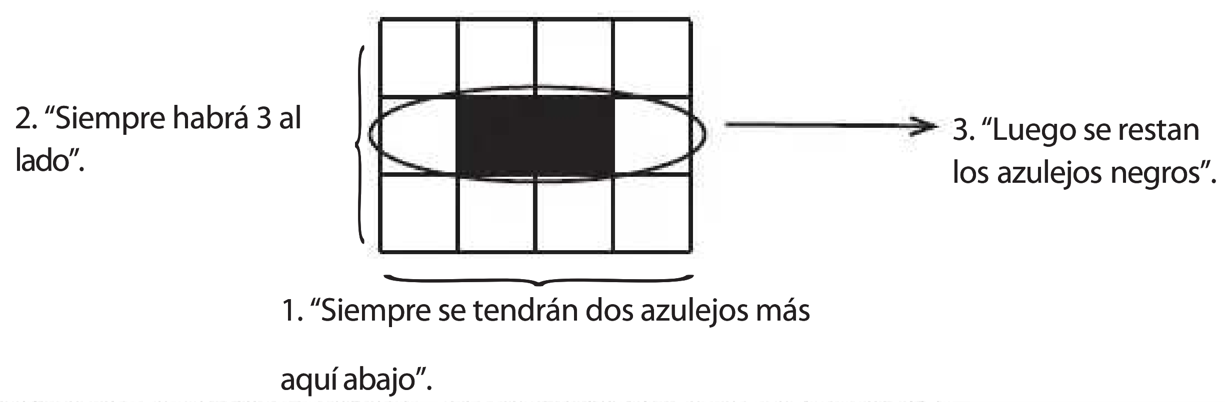


Figura 3.4. Explicación de Demetrio sobre su enfoque para el patio 2.

Después la docente preguntó cómo podría escribirse la regla de Demetrio mediante símbolos. Fernanda dijo que podría ser $b = 3(n + 2) - n$. El rostro de Jaime expresaba sorpresa, así que la profesora Domínguez le dijo si tenía alguna pregunta para Fernanda. Jaime preguntó: "¿Por qué multiplicaste por 3? Todos los demás multiplicaron por 2". Fernanda respondió: "Demetrio está utilizando las 3 hileras del patio, así que tiene tres hileras de $p + 2$, no dos como Fátima. Pero luego tienes que restar el área negra, porque no forma parte del patio". Jaime comentó: "Así que multiplicas por 3 y restas, pero Fátima multiplica por 2 y suma. Ya entendí".

La profesora Domínguez deseaba enfáticamente que los estudiantes consideraran la tabla que Tere había hecho cuando comenzó el problema. Pensó que esta representación, que incluía los primeros 10 patios, ayudaría a que los estudiantes se percatasen que el número de azulejos blancos se incrementaba en 2, mientras que el número de patios aumentaba 1 (es decir, que la razón de cambio era 2), una idea que hasta el momento no había surgido de ninguna de las representaciones. Así que la maestra pensó en pedir a los estudiantes que mostraran en dónde se veía este "+2" en el dibujo y en la ecuación. Quería asegurarse de que se diesen cuenta de la conexión entre el dibujo, la tabla y la ecuación. Además quería que predijeran cómo sería la gráfica y la razón de esto; y a final de cuentas la trazaran. Pero estaba consciente de que todo este trabajo no podría hacerse en los 5 minutos restantes de la clase. En vez de eso, decidió que la clase del día siguiente comenzase con un análisis de la tabla y de la gráfica.

La profesora Domínguez decidió emplear el escaso tiempo restante para retomar la lista de ecuaciones que los estudiantes habían generado durante la discusión, a la cual Fernanda añadió la última ecuación. Dirigió la atención de los estudiantes a la lista que estaba colgando en frente del aula [mostrada en la figura 3.5] e hizo la siguiente observación: "Obtuvimos tres distintas formas de encontrar el total de azulejos blanco de cualquier patio. ¿Son todas correctas?" Luego pidió a sus estudiantes que aprovecharan los pocos minutos restantes en discutir esta cuestión al interior de sus equipos. La tarea para hacer en casa consistió en dar una respuesta por escrito a esta pregunta y justificar su conclusión.

$b = 2n + 6$	(Berenice y el grupo)
$b = 2(n + 2) + 2$	(Fátima y Daniel)
$b = 3(n + 2) - n$	(Demetrio y Fernanda)

En cada ecuación n es el número de azulejos negros (o se puede utilizar p para denotar el número de patio) y b es el número de azulejos blancos en el patio.

Figura 3.5. Lista de expresiones matemáticas para determinar el número de azulejos blancos de cualquier patio.

Análisis del caso de Dulce Domínguez

Aunque podríamos identificar muchos aspectos de la labor de enseñanza de la profesora Domínguez en el aula que quizá contribuyeron a que sus estudiantes tuvieran oportunidades para aprender Matemáticas, centraremos nuestra atención de manera específica al uso que hizo de las cinco prácticas. En capítulos subsiguientes analizaremos un conjunto más amplio de acciones que, en combinación con las cinco prácticas, ayudan al éxito de la lección. Comenzamos teniendo en cuenta estas prácticas y si existe evidencia de que el docente se comprometió con alguna o con todas. Luego observamos cómo la utilización de las prácticas por parte de la profesora Domínguez quizá haya mejorado las oportunidades de aprendizaje de sus estudiantes.

Evidencia de las cinco prácticas

Como se señaló en el capítulo 2, la definición clara y precisa de las metas matemáticas de la lección y la selección de una tarea que se equipare con éstas constituyen el fundamento sobre el cual las cinco prácticas se erigen. Por consiguiente, la identificación por parte de Dulce de las tres ideas matemáticas que deseaba que sus estudiantes aprendieran (líneas 5-10) y su selección de la tarea que tenía el potencial para lograr esas metas (figura 3.1 y líneas 11-14) le posibilitó el uso del modelo de las cinco prácticas de una forma eficaz.

Anticipación

En vista de que el ejemplo se enfoca sobre todo a lo que pasó *durante* un episodio de la clase, tenemos un conocimiento limitado de la planificación que la profesora Domínguez llevó a cabo antes de la lección y en qué medida anticipó algunas soluciones específicas de la tarea. No obstante, el hecho de que ella quería que sus estudiantes supieran que la razón de cambio de una función lineal puede ponerse de relieve mediante distintas formas de representación sugiere que tuvo en mente la posibilidad de que la tarea se resolviera utilizando una tabla, una ecuación y una gráfica (líneas 7-10). Además, la decisión de la profesora Dulce respecto de comenzar la clase posterior analizando la tabla y la gráfica revela que consideró estos enfoques, así como su utilidad para completar la meta de la lección. También podríamos argumentar que la meta de Dulce de que sus estudiantes reconocieran que existen diferentes formas, aunque equivalentes, para escribir una expresión matemática explícita que defina la relación entre las dos variables (líneas 5-7), sugiere que quizá haya tenido en mente diferentes reglas para relacionar los azulejos blancos y negros antes de que siquiera ingresara al aula.

Monitoreo

La profesora Domínguez hizo una labor de monitoreo mientras los estudiantes trabajaban de manera individual y en pequeños grupos (líneas 27-37). A través de este monitoreo pudo determinar los enfoques que algunos estudiantes en particular estaban utilizando (líneas 28-34), planteó preguntas para ayudar a que los estudiantes avanzaran en la tarea (líneas 34-35) e identificó lo que les estaba causando problemas (líneas 31-34). Su labor de monitoreo del trabajo de los estudiantes le proporcionó la información que necesitaba sobre el pensamiento matemático de ellos, con el objeto de modificar su clase a fin de satisfacer las necesidades de sus estudiantes y de tomar decisiones respecto de las estrategias y soluciones en las que debería concentrarse durante la discusión. En particular, algunos estudiantes estaban teniendo problemas para vincular las descripciones verbales con las reglas expresadas simbólicamente; en consecuencia, la docente decidió trabajar en este asunto de la traducción con todo el grupo (líneas 35-37).

Selección

Al consultar las notas que había hecho durante el proceso de monitoreo (líneas 27-37) la maestra Domínguez supo quiénes habían generado soluciones particulares. Proveída con esta información, decidió que ciertos estudiantes en particular (Berenice, Fátima y Demetrio) presentaran sus enfoques de la tarea, los cuales darían como resultado distintas expresiones algebraicas y por consiguiente suministrarían a los estudiantes experiencias adicionales que les permitirían transitar entre la notación verbal y la simbólica. Además, resolvió que sus estudiantes tuvieran en cuenta la tabla que Tere elaboró (líneas 126-137), a fin de que pudieran percatarse de que la tasa de cambio era +2 (es decir, que el número de azulejos blancos se incrementaba en 2, mientras que el número de patio aumentaba en 1). Esto haría que resaltara la tasa de cambio constante, lo cual constituía una de sus metas de aprendizaje para la lección (líneas 4-5).

Secuenciación

La maestra Domínguez seleccionó a Berenice para que fuera la primera en presentar su trabajo, pues su estrategia había sido utilizada por varios grupos y por tanto era probable que otros estudiantes del aula pudieran relacionarse fácilmente con dicha estrategia (líneas 38-40). Además, quería que Berenice tuviese la oportunidad de participar pública y activamente en la clase (líneas 40-41), pues varios días antes ella ya había contribuido. Al seleccionar a Berenice, la profesora Domínguez pudo hacer énfasis en una estrategia común y asegurarse de que estaba proporcionando a los estudiantes oportunidades equitativas para demostrar su competencia.

Aunque pudiese parecer que la docente eligió, de entre varios voluntarios, a Fátima como la segunda que presentaría su trabajo (líneas 78-79), el hecho de que la profesora Domínguez pidiera un segundo método después de consultar sus notas y antes de seleccionarla (75-77) revela que la selección fue estratégica: la profesora Domínguez estaba viendo quién entre los voluntarios había generado la estrategia que deseaba se presentase. La que presentó Fátima fue una segunda opción razonable, en vista de que era semejante a la primera respecto de que contaba sólo los azulejos blancos y utilizaba la idea de que se contaban dos grupos de azulejos (Berenice contó dos grupos: uno del lado derecho y otro del izquierdo; Fátima contó dos grupos: uno abajo y otro arriba).

La docente escogió a Demetrio como el tercero (línea 96) porque utilizó un enfoque que era diferente de los otros que se habían visto hasta ese momento, ya que se centraba en determinar el área de toda la región rectangular y luego restar el área de los azulejos negros, a fin de calcular la de los azulejos blancos. Así que la estrategia era distinta de las otras dos pues de inicio contaba todos los azulejos, tres grupos en vez de dos y se valía de la sustracción en vez de la adición. Podríamos concluir que el grupo no utilizó ampliamente esta estrategia, por lo que se presentaron otras estrategias para que validaran primero el pensamiento de la mayoría de los estudiantes y dejarles abierto un enfoque alternativo para su consideración. Además, al ofrecerles esta estrategia se les dio acceso a los estudiantes a un enfoque que podría serles útil para futuras tareas (líneas 102-103).

La decisión de Dulce de presentar tres soluciones, siendo todas descripciones verbales de la relación entre azulejos blancos y negros que se evidenció en el diagrama, parece razonable dado el hecho de que los estudiantes tuvieron problemas para transitar de las descripciones verbales a las expresiones simbólicas reglas explícitas. Con el trabajo de transición de las palabras o descripciones verbales a los símbolos, llevado en forma grupal, se proveyó a los estudiantes un apoyo adicional para representar cantidades en forma abstracta, una habilidad que será fundamental conforme progresen en su estudio de las funciones.

Además de las estrategias verbales o visuales descritas por Berenice, Fátima y Demetrio, la docente también planificó que se analizara la tabla que había hecho Tere. Dulce trató de utilizar la tabla para destacar la tasa de cambio (la razón entre el incremento del número de patio y el aumento de los azulejos blancos) y vincular esto con el diagrama y la ecuación.

Conexión

Gracias a las preguntas que la profesora Domínguez planteó durante la discusión y las formas en las que apremió a los estudiantes a que clarificaran lo que habían llevado a cabo y a justificarlo, los ayudó a vincular esto con las ideas matemáticas que eran el objeto de la lección de la docente. De manera particular, la profesora Dulce señaló que deseaba que sus estudiantes fueran capaces de reconocer que: (1) las funciones lineales aumentan a una razón constante, (2) que existen distintas maneras, pero equivalentes, de escribir una expresión simbólica explícita que defina la relación entre dos variables y (3) que la tasa de cambio de una función lineal puede señalarse a través de diferentes formas de representación.

Aunque los estudiantes tuvieron problemas para escribir por su propia cuenta expresiones simbólicas explícitas (meta 2), la profesora Domínguez los conminó a que tradujeran las descripciones verbales dadas por Berenice, Fátima y Demetrio a reglas expresadas con símbolos después de cada presentación (líneas 67-69; 89-90; 118-120). Al utilizar como punto de partida las descripciones verbales de los estudiantes, apoyadas por los diagramas, la docente pudo ayudar a los estudiantes a lograr una de sus metas de aprendizaje para la lección.

Además, a lo largo de toda la lección la profesora Dulce utilizó el trabajo hecho por los estudiantes para subrayar las relaciones entre las distintas representaciones (meta 3). Durante cada una de éstas la profesora Domínguez alentó a sus estudiantes a que vincularan la descripción verbal con el diagrama a través de la utilización de los dibujos de los patios que les proporcionó, y a continuación con las reglas expresadas mediante símbolos, tal y como se describió antes.

A pesar de que la docente no hizo conexiones explícitas en la clase entre las soluciones de sus estudiantes, su análisis de la tabla de Tere al día siguiente pondría al grupo en posición de relacionar el “+2” de la tabla (la diferencia sucesiva en el número de azulejos blancos para cada patio adicional) con la descripción verbal de Berenice y la ecuación correspondiente, así como con el patrón de crecimiento para esta función (meta 1). Asimismo, la pregunta de Jaime a Fernanda (líneas 120-121) brindó una oportunidad a los estudiantes para que vincularan los enfoques utilizados por Demetrio y Fátima. Por último, la tarea para hacer en casa que se dejó al final de la clase constituyó un reto para los estudiantes a fin de que reflexionaran por qué eran correctos tres enfoques diferentes, a pesar de que parecieran muy distintos. Esta tarea podría dar pie para la noción de que las tres ecuaciones son equivalentes a $b = 2n + 6$, que producen un resultado idéntico cuando se les da los mismos valores y que pueden relacionarse visualmente con el diagrama de los patios.

Cómo relacionar las cinco prácticas con las oportunidades de aprendizaje

¿La utilización de las prácticas por parte de Dulce Domínguez contribuye al aprendizaje de sus estudiantes? Si bien carecemos de evidencia directa de lo que cada estudiante de su clase aprendió, observamos a un grupo de estudiantes que al parecer están comprometidos con el proceso de aprendizaje. A lo largo del desarrollo de la lección, la docente involucró realmente a ocho distintos estudiantes. La profesora. Domínguez indicó repetidamente las ideas centrales relacionadas con las metas de aprendizaje de las lecciones (la expresión de reglas explícitas y la relación de las representaciones), conforme guiaba a la clase en la discusión profunda de tres distintas soluciones. La pregunta final, que dejó como tarea para la casa (líneas 141-145), brindó a todos los estudiantes la oportunidad de dar sentido a lo que aconteció durante la clase y que efectuaran conexiones que ofrecieran a la docente indicios de su pensamiento. Aunque la idea de una tasa de cambio constante (meta 1) y la de que ésta se manifiesta de modo diferente a través de las representaciones (meta 3) no se señalaron de manera explícita, el trabajo realizado preparó a la docente y a sus estudiantes para explorar dichas ideas en lecciones subsecuentes.

Las cinco prácticas brindaron a la docente un enfoque sistemático para conjeturar lo que sus estudiantes podrían hacer con la tarea y cómo podría utilizar el pensamiento de ellos para lograr las metas que estableció. Si bien analizamos las prácticas en acción (lo que la profesora llevó a cabo durante la lección), afirmamos que para realizar lo que hizo durante la misma, debió pensar todo eso *antes* de que la clase comenzara. En los siguientes capítulos exploraremos cómo involucrarse en una planificación de esta naturaleza.

Conclusión

Dulce Domínguez evitó una sesión del estilo "mostrar y decir", en la que las soluciones se presentan de manera sucesiva, sin mucho ritmo o razón, oscureciendo con frecuencia la idea central de la lección. Al considerar con meticulosidad la línea narrativa de su clase (lo que matemáticamente deseaba obtener y la manera en la que distintas estrategias y representaciones le ayudarían a lograrlo), pudo cuestionar a sus estudiantes con destreza y ubicarlos en una posición que les permitiera alcanzar puntos clave. Así que, con su grupo siempre bajo su firme control, la docente pudo construir poco a poco el trabajo realizado por sus estudiantes y guiarlos con esmero en una dirección matemáticamente firme.

En contraste, considérese el ejemplo de las hojas y las orugas analizado en la introducción y en el capítulo 1. Si bien los estudiantes de la clase del profesor Canales utilizaron una gama de enfoques interesante, lo que se suponía que aprenderían a partir de la secuencia de presentaciones no resultó claro, salvo que "el problema podía resolverse de muchas formas distintas". Los estudiantes no recibieron de esta experiencia un mensaje matemáticamente nítido.

Como observamos en el capítulo 1, las cinco prácticas se construyen una sobre otra, trabajando de modo concertado para apoyar la orquestación de una discusión productiva. La información obtenida gracias a la aplicación de una práctica es la que permite al maestro ubicarse para que se pueda involucrar en la siguiente práctica. Por ejemplo, uno no puede seleccionar qué soluciones se presentarán, si no es consciente de lo que los estudiantes han producido (se necesita monitorear para poder llevar a cabo la selección y secuenciación); no se pueden hacer conexiones entre las estrategias y la meta de aprendizaje matemático de la lección, si primero no se seleccionan y se da una secuencia a las estrategias de modo que ayuden a lograr el objetivo que uno se propone. En los dos siguientes capítulos exploramos las cinco prácticas con mayor profundidad, basándonos en las descripciones del capítulo 1.

CAPÍTULO

4 Comienzo: anticipación de las respuestas de los estudiantes y monitoreo de su trabajo

Una vez que los docentes establecen su meta educativa e identifican una tarea apropiada en la que los estudiantes trabajarán (como se analizó en el capítulo 2), están listos para empezar a trabajar en las cinco prácticas. En este capítulo analizamos las primeras dos: anticipación y monitoreo; además tenemos en mente lo que los maestros pueden efectuar antes y durante una lección, a fin de que se alisten para hacer un uso productivo de las respuestas de los estudiantes. Examinando detenidamente la forma en que un docente se involucra en las dos primeras prácticas, podemos mostrar el modo en que la utilización de las mismas, *antes* y *durante* una lección, puede preparar el terreno para que se tenga una discusión productiva al concluir la clase. Al analizar cada una de tales prácticas, primero las describimos y luego presentamos parte de un caso de un docente de educación secundaria, Nicolás Barrios, para después concluir con un análisis de su utilización de la práctica. (Se adaptaron secciones de este ejemplo de lección de la obra de Bill y Jamar [2010], tomado con autorización de la Universidad de Pittsburgh).

Anticipación

La anticipación implica considerar de manera meticulosa: (1) las estrategias que probablemente utilicen los estudiantes para abordar o resolver una tarea matemática desafiante (es decir, una de alto nivel), (2) la manera en que se responderá al trabajo que probablemente produzcan, y (3) cuáles estrategias de los estudiantes posiblemente sean las más útiles para guiar los aspectos matemáticos que se aprenderán. Utilizaremos el ejemplo "Planes tarifarios: el caso de Nicolás Barrios (Parte 1-Anticipación)", para ilustrar estos tres puntos.

ACTIVIDAD DE INVOLUCRAMIENTO 4.1

La figura 4.1 muestra la tarea "Planes tarifarios".

- Resuelva la tarea de tantas maneras como pueda y considere otros enfoques que crea que utilizarán los estudiantes para resolverla.
- Identifique los errores o conceptos erróneos que esperaría que surgieran mientras los estudiantes trabajan en esta tarea.

Planes tarifarios: el caso de Nicolás Barrios (Parte 1-Anticipación)

Nicolás Barrios comienza a trabajar con sus estudiantes de Álgebra I de noveno grado (estudiantes de 14 a 15 años) en la resolución de sistemas de ecuaciones. Para la lección que está actualmente planificando, desea que sus estudiantes: (1) reconozcan que existe un punto de intersección en la gráfica de dos ecuaciones lineales únicas no paralelas, el cual representa el lugar donde dos funciones tienen los mismos valores para *x* y para *y*; (2) que comprendan que las dos funciones "cambian de posición" en el punto de intersección, con lo cual la que estaba "arriba" antes del punto de intersección (llamadas más costosas en el contexto de las tarifas), se ubica "abajo" después de dicho punto (llamadas más baratas en el contexto de las tarifas), pues la función con la tasa de cambio menor a final de cuentas será la función que se acerque más al eje *x*; y (3) que relacionen las tablas, las gráficas, las ecuaciones y el contexto, identificando la pendiente y la intersección con el eje *y* en cada representación.

Para esta lección, Nicolás decidió utilizar la tarea "Planes tarifarios", que se muestra en la figura 4.1, pues proporcionaba un contexto, que podría interesar a los estudiantes (pues al parecer pasan muchísimo tiempo en sus teléfonos celulares) para explorar los sistemas de ecuaciones y por tanto les podría ayudar (¡eso esperaba!) a darle sentido a lo que significa el punto de intersección. Quiso asegurarse de que sus estudiantes tuviesen una clara idea del significado de la solución, de manera gráfica y contextual, antes de presentar realmente los procedimientos para determinar la solución de un sistema (por ejemplo, el de sustitución y el de eliminación).

La compañía A de larga distancia cobra una renta básica de \$50 mensuales más 4 centavos por minuto que se utilice el teléfono; la renta básica de la compañía B es de sólo \$20 al mes, pero carga 10 centavos por el minuto utilizado. ¿Cuánto tiempo necesitarías utilizar mensualmente el teléfono con el plan de la compañía A para que pudieses ahorrar dinero? (Achieve 2002, p.149).

Figura 4.1. Tarea "Planes tarifarios".

Nicolás comenzó a planificar la lección previendo la forma en que los estudiantes resolverían la tarea. Su primer paso fue resolver él mismo el problema usando métodos no procedimentales, en vista de que éstos serían a los que tendrían acceso sus estudiantes. Consideró que los tres enfoques generales, mostrados en la figura 4.2, serían cursos razonables de acción que aquéllos seguirían.

Soluciones posibles

Hacer una tabla

Tabla A

Número minutos	Costo A	Costo B	
0	50.00	20.00	
10	50.40	30.00	
20	50.80	40.00	
30	60.20	50.00	
40	60.60	60.00	
50	70.00	70.00	El mismo costo para los mismos minutos.
60	70.40	80.00	

Ya que A es más que B en 40, es igual en 50 y menos en 60, A debe convertirse en una mejor opción a partir de los 51 minutos.

Tabla B

Número de minutos	Costo A	Costo B	
0	5.00	2.00	
20	5.80	4.00	
40	6.60	6.00	A es mayor
60	7.40	8.00	A es menor
80	8.20	10.00	
100	9.00	12.00	
120	9.80	14.00	

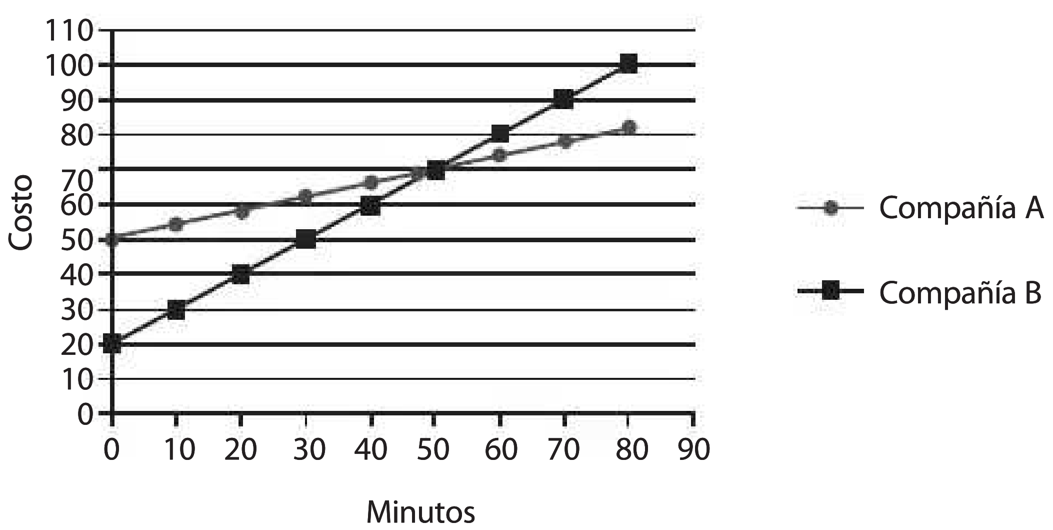
Debido a que A es más que B en 40 y menos en 60, el punto de intersección debe darse en algún lugar entre 40 y 60. Si las grafico, encuentro que el punto de intersección está en 50. Así que A es mejor opción a partir de 51 minutos.

Escribir unas ecuaciones

$y = 0.04x + 50$ (Compañía A)
$y = 0.10x + 20$ (Compañía B)

Cuando ingreso las dos ecuaciones en la calculadora graficadora, veo que el punto de intersección debe estar en 50 minutos. Por lo tanto, A se convierte en la opción más barata a partir del minuto 51.

Trazar una gráfica



Puedes hacer una gráfica a partir de una tabla de valores, sustituyendo los dos valores de x en la ecuación y calculado los valores correspondientes de y, o ingresando la tabla o la ecuación a la calculadora graficadora. Sin importar qué enfoque utilices, observarás que las rectas se intersecan en (50,7), así que el plan A comienza a ser una mejor opción a partir del minuto 51.

Figura 4.2. Posibles soluciones de Nicolás Barrios.

Nicolás predijo que muchos de sus estudiantes harían tablas, pero estaba consciente de que no todos utilizarían incrementos de 10 minutos, como lo hizo para la tabla A (figura 4.2). Si utilizaban intervalos de 20 minutos, como en la tabla B de la figura, u otros incrementos que no fueran factores de 50, sabía que no se percatarían de inmediato que ambos planes tenían el mismo costo para 50 minutos. Si ese fuera el caso, decidiría que sus estudiantes se fijasen en las filas de la tabla (es decir, los de 40 y 60 minutos de la tabla B), en donde los dos planes cambiaban de posición relativa (ejemplo, el plan A es más caro para 40 minutos, pero más barato para 60 minutos, como se señala mediante las dos filas sombreadas en la tabla B de la figura 4.2), aunque esperaría que pudiesen explicar lo que está pasando y el por qué; además, estaría a la expectativa de que pudieran predecir cómo sería la gráfica de las dos ecuaciones. Luego les pediría que la trazaran para confirmar si coincidía con sus predicciones y los ayudaría a contestar la pregunta. También pensó que los estudiantes quizá no comenzaran sus tablas con el valor 0, en cuyo caso les preguntaría lo que significaba tener 0 minutos de uso y cuál sería su costo. Creía que lo anterior era importante, ya que para este problema el valor de 0 minutos corresponde al valor de x en la intersección del eje y, y determina el valor de b cuando se sustituye en la ecuación de la forma $y = mx + b$.

El docente pensaba que sus estudiantes se confundirían con diversos aspectos de la tarea, por lo que quería asegurarse de que estaba preparado para abordarlos cuando surgieran. Por ejemplo, creyó que algunos de ellos escribirían 4 centavos como .4 o 4. en vez de .04.[51] Para este caso, pensó en preguntarles cómo escribirían la cantidad 50 pesos con 4 centavos utilizando la notación monetaria y que la compararan con lo que habían escrito. No quiso que estos detalles se convirtieran en distractores, pero si calculaban el costo con los valores equivocados, nunca iban a comprender el punto central de la lección. También se preguntó si los estudiantes se confundirían con el costo por minuto y la renta mensual, lo cual propiciaría tener una ecuación incorrecta para la compañía A: $C = 4 + 50m$. En este caso, pensó en preguntarles qué representaban 4 y 5 en el problema, qué valor variaba y cuál no cambiaba cuando se utilizaban más minutos, cuál sería el costo de 10 minutos de acuerdo con su ecuación y si eso tenía sentido. Aunque deseaba que sus estudiantes se percataran por sí mismos de sus errores, también quería estar preparado con algunas preguntas que los orientaran en la dirección correcta.

El profesor Barrios quería estar seguro de que cuando terminara la lección, hubiera llevado a cabo lo que se había propuesto hacer (es decir, que los estudiantes reconocieran que el punto de intersección es donde las dos funciones tienen los mismos valores x y y, que comprendieran que las dos funciones "cambian posiciones" en el punto de intersección y que relacionaran las distintas representaciones), así que para lograr lo anterior, estaba consciente de que necesitaba tener preparadas para la discusión las versiones correctas de cada una de las tres representaciones: tablas, gráficas y ecuaciones. Ya que deseaba conducir la discusión alrededor del trabajo que los estudiantes generaran, si fuese posible. Nicolás decidió dar un seguimiento meticuloso de lo que hiciesen, al mismo tiempo que los observaba e interactuaba con ellos mientras trabajaban en la tarea en pequeños equipos. A fin de facilitar este proceso generó una tabla (figura 4.3) en la que registró en sus filas las estrategias que esperaba ver de los estudiantes (así como una fila para lo imprevisto) y en las columnas registró qué hacía cada cual durante la lección (es decir, qué estudiantes o

[51] En ciertos países hispanohablantes se evita que los estudiantes ignoren la parte entera, cuando ésta es 0. Asimismo, se usa la coma (,) como separador entre parte entera y parte decimal, reservándose el punto (.) para la separación de las cifras cada tres lugares posicionales (ej.: 3.425,76).

equipos estaban usando determinadas estrategias). Asimismo, la tabla incluyó una tercera columna nombrada “Orden”, que utilizaría más tarde, en relación con las dos siguientes prácticas: selección y secuenciación. Nicolás creyó que la tabla le ayudaría a planificar la discusión.

Estrategia	Quién y qué	Orden
Tabla		
Gráfica		
Ecuación		
Otra		

Figura 4.3. Tabla para monitorear el trabajo de los estudiantes en la tarea “Planes tarifarios”.

ACTIVIDAD DE INVOLUCRAMIENTO 4.2

Compare su respuesta a la actividad de involucramiento 4.1 con las soluciones y los errores potenciales de los estudiantes que Nicolás Barrios previó.

Análisis de la anticipación en el caso de Nicolás Barrios

En el caso de Nicolás Barrios, observamos un profesor que se involucró a fondo en la planificación de una lección que iba a impartir a sus estudiantes de la clase de Álgebra correspondiente al noveno grado. Su planificación comenzó con la identificación de metas claras para el aprendizaje del estudiante (líneas 3-11) y la selección de una tarea que tuviera el potencial de ayudar a sus estudiantes a lograr dichas metas (líneas 13-17). Una vez que determinó lo que haría y el por qué, Nicolás dirigió su atención a anticipar lo que probablemente sucedería mientras ellos trabajaban en la tarea y se afanó por apoyar sus esfuerzos. Ahora consideremos los tres aspectos de la anticipación analizados al inicio del capítulo y atestigüemos el involucramiento del maestro Barrios en cada componente de esta práctica.

Anticipación de lo que los estudiantes harán

El profesor Barrios tomó en cuenta los enfoques que sus estudiantes probablemente utilizarían, como se muestra en la figura 4.2, e identificó aspectos de la tarea que podrían constituir un reto para ellos. Por ejemplo, supuso que algunos estudiantes podrían:

- tener problemas para encontrar el punto de intersección en la tabla, si el número de minutos se incrementara por una cantidad que no fuese factor de 50 (líneas 30-32);
- comenzar la tabla con una cantidad de minutos distinta de cero (líneas 35-40);
- tener dificultades de notación (líneas 43-44); o
- confundir lo que varía con lo que no cambia (líneas 58-59).

Resulta claro que Nicolás hizo más que sólo listar los enfoques que los estudiantes utilizarían (por ejemplo, hacer una tabla, trazar una gráfica, formular una ecuación), ya que realmente usó esas estrategias para resolver el problema. Al "involucrarse con el problema", pudo considerar los retos que los estudiantes enfrentarían y lo que podría hacer al respecto.

Si bien Nicolás quizá no haya previsto todo lo que los estudiantes harían, es probable que anticipara mucho de lo que pasaría cuando se involucraran con esta tarea. Su trabajo de preparación lo ayudó a darle sentido a lo que observaría, permitiéndole considerar con toda libertad y de manera más profunda aquello que pudiese surgir y que no anticipó.

Planeación de la forma de responder a los enfoques de los estudiantes

Además de prever el modo en que los estudiantes resolverían la tarea, Nicolás también tuvo en cuenta la manera en que respondería a lo que ellos estaban llevando a cabo. Esto resultó ser un componente básico de su proceso de planificación, pues le dio tiempo para pensar (lejos del aula y de su turbulento ritmo) en las acciones que debiera tomar y las preguntas que habría de plantear para impulsar a sus estudiantes hacia las metas de aprendizaje, sin indicarles qué hacer y cómo llevarlo a cabo. De manera específica, pensó en cómo podría ayudar a: encontrar el punto de intersección a los estudiantes que hicieron una tabla con incrementos de 20 minutos (líneas 26-32), a los que no incluyeron el valor 0 en sus tablas (líneas 37-40), a los que tuvieron problemas para escribir 4 centavos (líneas 42-43), o a los que en el problema confundieron la tasa constante con la tasa de cambio (líneas 49-55).

A pesar de que ciertamente no fue exhaustiva la lista de preguntas que Nicolás podría plantear a sus estudiantes conforme abordaban el problema, tener en cuenta con anticipación algunas preguntas específicas, significó que no necesitaría desarrollarlas todas en el acto, lo cual le suministró más tiempo para pensar cuál sería el momento apropiado para plantear una pregunta específica a fin de vincular lo que en realidad estaban haciendo los estudiantes con los aspectos matemáticos que quería que aprendieran. En vista de que las preguntas están vinculadas con el contexto en el que se plantean, es fundamental hacer una pregunta que se conecte con los temas que efectivamente se están abordando. Plantear preguntas justo en "el preciso momento" resulta muy complicado para un docente que está viéndoselas con las necesidades de un aula repleta de estudiantes que requieren distintos tipos y niveles de asistencia.

Cuando los docentes se sienten abrumados por las necesidades y frustraciones de sus estudiantes, les resulta sencillo superarlas con sólo decirles qué hacer, cuando un curso alternativo de acción no viene de inmediato a la mente.

Identificación de las respuestas que abordan objetivos matemáticos

Después de anticipar lo que sus estudiantes realizarían y la manera en que respondería a alguno de los enfoques que hayan asumido, Nicolás decidió que durante la discusión era importante hacer referencia a una tabla, a una ecuación y a una gráfica (líneas 60-65) para lograr las metas de aprendizaje. En particular, la tabla y la gráfica ayudarían a los estudiantes a comprender que existía un punto de intersección (meta 1); la gráfica los auxiliaría a investigar lo que sucede a las funciones antes y después del punto de intersección y el por qué (meta 2); además, al trabajar con todas las representaciones les permitiría hacer conexiones entre éstas y a identificar la manera en que la pendiente y la intersección con el eje *y* se manifiestan en cada una (meta 3).

A fin de dar seguimiento a lo que los estudiantes efectivamente están haciendo durante la clase, Nicolás decidió elaborar una tabla (figura 4.3). Ésta sirve para llevar un registro que puede emplearse para una variedad de propósitos. Al ofrecer una relación de quién está haciendo qué, la tabla puede ayudar al docente a mantenerse informado de los enfoques que surgen durante la clase y también puede servir como fuente de datos para efectuar juicios sobre quién compartirá qué durante la discusión. La tabla también puede servir más allá del día de la lección, ayudando al docente a recordar cómo pensaban sus estudiantes en esa clase respecto de ideas específicas y a quiénes se escogió para compartir su trabajo con sus compañeros en un día en particular. Asimismo, proporciona un registro histórico de lo que pasó en la lección, lo que puede ayudar al docente a perfeccionarla la siguiente vez que la enseñe.

Monitoreo

Es el proceso de poner atención al pensamiento de los estudiantes durante la lección real, conforme trabajan de manera individual o colectiva en una tarea particular. Esto implica no sólo escuchar lo que dicen y observar lo que hacen, sino dar un seguimiento a los enfoques que están utilizando, identificar aquéllos que pueden ayudar más tarde a que la discusión matemática progrese en la lección y plantear preguntas que auxilien a los estudiantes a progresar en la resolución de la tarea. Esas preguntas debieran incluir a las que hagan retomar el camino a los estudiantes cuando estén siguiendo un sendero improductivo o inexacto, o que alienten a los que van por buen camino a pensar con mayor profundidad respecto de por qué las cosas se comportan como lo hacen. Ahora retomaremos el caso de Nicolás Barrios, en tanto que monitorea el trabajo de sus estudiantes en un esfuerzo por apoyar su aprendizaje y su involucramiento en la tarea, con el objeto de prepararse para la discusión final de la clase.

ACTIVIDAD DE INVOLUCRAMIENTO 4.3

La segunda parte del caso de Nicolás Barrios se centra en la práctica de monitoreo. Conforme lea la parte 2:

- identifique las acciones específicas que Nicolás lleva a cabo para apoyar el aprendizaje de sus estudiantes, y
- piense en qué forma los datos que Nicolás recopiló en su tabla (véase la figura 4.4) pudieran serle de utilidad mientras ayuda a sus estudiantes y prepara la discusión final de la clase.

Planes tarifarios: el caso de Nicolás Barrios (Parte 2-Monitoreo)

Después de presentar a sus estudiantes la tarea y asegurarse de que comprendieron lo que necesitan realizar, Nicolás los puso a trabajar en ella en equipos de cuatro. Decidió que cada equipo creara un cartel que incluyera su respuesta a la pregunta (es decir, ¿qué tanto tiempo tendrías que hablar por teléfono al mes para que ahorraras dinero al suscribirte a la Compañía A?), así como todo el trabajo que realizaron para obtener la respuesta. Ya que los carteles se exhibirían uno al lado del otro, esto facilitaría que se viesen las distintas soluciones y representaciones durante la discusión grupal, posibilitando así las comparaciones entre distintos enfoques.

Equipado con su herramienta de monitoreo –la tabla mostrada en la figura 4.3– el maestro Barrios escuchó las conversaciones que se daban en los equipos. Planteó preguntas conforme se necesitaba, a fin de que los estudiantes continuaran en la senda correcta o para apremiarlos a que dieran sentido a lo que estaban haciendo, mientras estaba atento a quién llevaba a cabo determinada tarea. Por ejemplo, cuando Nicolás se acercó al equipo 2, observó que los estudiantes habían elaborado una tabla que comenzaba con 0 minutos y luego se incrementaba en intervalos de 10 minutos hasta llegar a los 60; de hecho, creyó que esa tabla se parecía a la de él (véase la tabla de la figura 4.2). Cuando les preguntó a los estudiantes qué habían concluido de la tabla, respondieron que los planes A y B tendrían el mismo costo para el minuto 50. Les recordó que necesitaban conjeturar en qué condiciones ahorrarían dinero suscribiéndose a la Compañía A y les preguntó cómo podría ayudarles la tabla. Después de unos segundos de silencio, Camila contestó que si para 50 minutos ambas compañías eran iguales, entonces para 51 minutos el plan A costaría $70.04, el B $70.10 y que el plan A nunca más volvería a alcanzar al plan B. A continuación Nicolás preguntó al equipo si podían al menos bosquejar cómo se imaginaban que sería la gráfica, sin que trazaran todos los puntos.

En contraste, cuando Nicolás se acercó al equipo 6, observó que los estudiantes habían utilizado una ecuación errónea ($C = .4m + 50$) para generar una tabla de valores que mostraba el costo con incrementos de 5 minutos. Por supuesto, los costos eran mucho más altos que lo que deberían ser. Éste fue un error de notación que él había previsto, así que entabló una conversación con el grupo con la esperanza de que esto les ayudara a darse cuenta y corrigieran el problema.

Profesor Barrios: Dime lo que significa cada cosa en la ecuación.

David: Pueees, digamos que queremos calcular 30 minutos para la Compañía A. Yo puse…yo puse 30 minutos por .4 más $50.00.

Profesor Barrios: Bien, ¿y qué obtuviste?

David: Pues obtuve $170.00.

Profesor Barrios: Muy bien.

Tania: Entonces 4 representa los centavos por minuto.

Profesor Barrios: Bueno.

Tania: Así, pueeees… cada minuto cuesta 4 centavos. Entonces, pueeees… seguimos sumando los 4 centavos más 50, porque esa es, pueees… la tarifa, pueees… el punto inicial.

Profesor Barrios: Muy bien, entiendo lo que estás diciendo. Lo único que me confunde un poco es la forma en que escribieron 4 centavos en notación monetaria.

David: .4.

Tania: Sí.

Leticia: .04.

Profesor Barrios: ¿Es .4 o .04? Porque ahí hay una gran diferencia. Cuando expresas cuatro centavos en notación monetaria, ¿cómo lo escribes? Digamos que quisieras escribir cinco pesos y cuatro centavos, ¿cómo lo expresarías?

Guillermo: 5.04.

Profesor Barrios: Por tanto, cuando tecleaste cuatro centavos en tu calculadora, ¿qué escribiste?

David: .4.

Profesor Barrios: ¿Y qué debieron haber puesto?

Leticia: .04.

Profesor Barrios: Muy bien. Con .04 ustedes están en lo correcto; sólo necesitan corregir la tabla. Así que deberían cambiar eso un poco [*señalando los valores de la tabla*]. ¿De acuerdo? Ahora calculen 30 minutos con .04 y díganme qué obtienen.

David: $60.20. ¡Ah! [*observando que el costo inicial que el equipo había calculado para 30 minutos era de $170.00*].

Profesor Barrios: Muy bien, $60.20. Mhhhh…

En ese momento, Nicolás dejó al equipo y los estudiantes continuaron ajustando los valores de su tabla para que reflejaran el cambio de ecuación, de $C = .4m + 50$ a $C = .04m + 50$.

Si bien Nicolás anticipó mucho de lo que ocurrió, los estudiantes hicieron cuatro cosas que no tuvo en cuenta. En primer lugar, el equipo 1 comenzó utilizando incrementos de 1 minuto en su tabla. Cuando Nicolás llegó al equipo, habían calculado hasta el minuto 15 y se estaban convenciendo de que el costo del plan B nunca alcanzaría al del A (en otras palabras, B siempre sería una mejor opción que A). Consideró que unas cuantas preguntas sencillas (¿necesitan ir de 1 en 1?, ¿sólo hablan por teléfono 1 minuto?) los motivarían a considerar otras alternativas hasta que finalmente decidiesen utilizar intervalos de 20 minutos.

En segundo lugar, el equipo 4 hizo una tabla exacta utilizando incrementos de 10 minutos, pero en una gráfica terminó colocando los minutos en el eje *y*, y los costos en el *x*. Nicolás empezó diciendo a los estudiantes que los matemáticos suelen utilizar el eje *x* para la variable independiente y el *y* para la dependiente, luego les preguntó si el costo dependía del número de minutos, o éste dependía del costo. Dado que la asignación de los ejes para las variables es una convención que no está sujeta a discusión, creyó que primero debería indicarles el lugar donde va cada variable, pero luego dejó que decidieran qué variable era cuál. Después de un breve debate, los miembros del equipo estuvieron de acuerdo en que el costo dependía del número de minutos que alguien utilizara el teléfono. Esto propició que trazaran una nueva gráfica en donde se colocaba a la variable independiente (el número de minutos) sobre el eje *x* y a la dependiente (el costo) sobre el eje *y*.

En tercer lugar, el equipo 3 (Darío, Andrés, Yolanda y Cristina) estaban teniendo problemas para avanzar con la tarea. Cuando Nicolás se acercó y les preguntó qué estaban haciendo, explicaron que trataban de calcular cuántos minutos usarían en un mes; enseguida Nicolás tuvo el siguiente intercambio de opiniones:

Profesor Barrios: Puede ser cualquier cantidad de minutos, ¿cierto? ¿No utilizan su teléfono tanto como quieren?

Darío: Sí, pero hay un cierto límite. Depende… pues en algunos planes puedes tener cierta cantidad de minutos.

Andrés: Pueeees… o pagas; si te pasas de una cierta cantidad de minutos tienes que pagar más. Eso es lo que estamos tratando de calcular.

Profesor Barrios: Muy bien. El problema sólo les pide determinar a partir de qué punto la Compañía A sería mejor opción que la B. ¿Qué tal si hablamos del plan de la Compañía A, digamos, por un minuto? ¿Saben cuánto me costaría si hablara a través de la Compañía A? ¿Cuánto sería…?

Yolanda: Bueno, sería \$50.04.

Profesor Barrios: ¿Por qué sería \$50.04?

Yolanda: Porque son 4 minutos por…Digo, son 4 centavos por minuto.

Profesor Barrios: Bien. ¿Y si hablé 2 minutos en el plan de la Compañía A?

Cristina: ¡Ah!, pues son \$50.08.

Profesor Barrios: De acuerdo. Ahora hablaré un minuto con el plan de la Compañía B, ¿qué pasa si hablé un minuto y tengo mi celular con el plan de la Compañía B?

Darío: ¡Fácil!, \$20.10.

Profesor Barrios: Está bien, \$20.10, ¿y si hablé dos minutos?

Andrés: Bueno…. \$20.20.

Profesor Barrios: Bien, \$20.20. ¿Cuál de las dos compañías de las que hemos estado viendo hasta ahora es mejor opción? ¿Preferirían la Compañía A o la B?

Cristina: La Compañía B.

Profesor Barrios: Pero la pregunta es en qué momento la Compañía A va a ser mejor opción.

Yolanda: Bueno, lo será después de la intersección, ¿verdad?

Cristina: Si es que hay intersección.

Darío: Probablemente vayan a intersecarse en el tiempo… esteee, si trazamos la gráfica tal vez las veamos intersecarse.

En ese momento, Nicolás les dijo que estaban en la dirección correcta y que ahora tendrían que conjeturar si había un punto de intersección, y en tal caso cuál sería y si la forma de encontrarlo les ayudaría a obtener la respuesta. Su experiencia con el equipo 3 le hizo percatarse de que los planes telefónicos que en la realidad estaban a disposición de los estudiantes eran más complejos que los dos que había propuesto para que los trabajaran, y que quizá el conocimiento que tenían de la realidad los obstaculizaba, más que ayudarlos. Decidió tomar nota de lo anterior, para que pudiera pensar cómo plantear en el futuro la tarea, de tal manera que se evitasen esos problemas.

En cuarto lugar, conforme los estudiantes fueron terminando sus carteles, Nicolás observó que los equipos 4 y 6 determinaron que el plan A sería más barato a partir de los 50 minutos, en vez de los 51, lo cual notó al monitorear la tabla. No obstante que había discutido lo anterior en forma explícita con el equipo 2, no había planteado a otros equipos preguntas específicas al respecto. Sin embargo, esto no le preocupó y pensó que una discusión en torno a cuál debiera ser la respuesta y el por qué, constituiría una buena manera de iniciar la lección.

Al término de 30 minutos, Nicolás había terminado de completar la tabla de monitoreo, como se muestra en la figura 4.4. Estaba contento porque se dio cuenta de que los equipos emplearon una combinación de tablas, gráficas y ecuaciones, y que –con excepción de las cuatro situaciones previamente analizadas– había llevado a cabo un buen trabajo al anticipar lo que ocurriría. Aprovisionado con los datos que recopiló, Nicolás creyó que ahora ya podía determinar las soluciones a las que quería enfocarse durante la discusión.

Análisis del monitoreo en el caso de Nicolás Barrios

En la segunda parte del caso de Nicolás Barrios, observamos a un docente que puso una atención meticulosa a lo que los estudiantes estaban realizando durante la lección, como un esfuerzo para documentar lo que hicieron, apoyarlos en su trabajo y planificar una discusión final productiva. Pero, ¿qué es lo que realmente hizo Nicolás?

Estrategia	Quién y qué	Orden
Tabla	El equipo 1 comenzó con incrementos de 1, pero luego desistió y utilizó aumentos de 20. Los equipos 2, 3 y 4 usaron incrementos de 10.	
Gráfica	El equipo 1 empleó una calculadora para hacer una gráfica a partir de su tabla. El equipo 2 trazó un esbozo de la gráfica pero no colocó los puntos. Los equipos 3 y 4 trazaron una gráfica a partir de su tabla.	
Ecuación	El equipo 5 formuló una ecuación y luego trazó una gráfica utilizando los valores 0 y 100 para los minutos. El equipo 6 comenzó formulando una ecuación y la usó para elaborar una tabla de valores con incrementos de 5.	
Otra	El equipo 3 tuvo dificultades para comprender el contexto del problema. El equipo 4 cambió los ejes en su primera gráfica. El equipo 6 tuvo una confusión con la notación y al principio utilizó .4 en vez de .04.	

Grupo 1: Teresa, Natalia, Héctor, Carla
Grupo 2: Camila, Joel, Lili, Roberto
Grupo 3: Darío, Andrés, Yolanda, Cristina
Grupo 4: María, Jazmín, Ricardo, César (50 minutos)
Grupo 5: Jaime, Tomás, Carolina, Mercedes
Grupo 6: Leticia, David, Tania, Guillermo (50 minutos)

Figura 4.4. Tabla completa de Nicolás Barrios para monitorear el trabajo de los estudiantes en la tarea "Planes tarifarios".

En primer lugar, recopiló datos de lo que los equipos efectuaban, destacando las representaciones que utilizaban y las dificultades iniciales que habían experimentado, como se muestra en la figura 4.4. Los datos hicieron evidente tanto las similitudes de las representaciones usadas por los equipos para resolver la tarea (por ejemplo, cinco de los seis equipos elaboraron tablas; cinco de los seis equipos trazaron gráficas) como las diferencias en el modo de hacer las representaciones (por ejemplo, el equipo 1 utilizó calculadoras para trazar una gráfica a partir de su tabla; el 2 hizo un bosquejo de la gráfica pero no ubicó los puntos; el 5 elaboró una gráfica utilizando en su ecuación los valores 0 y 100 para los minutos). Estos datos proporcionaron una clara perspectiva de "dónde se ubica la clase" y ayudará a Nicolás a determinar las soluciones que se compartirán y en qué orden (las dos siguientes prácticas). Como Lampert (2001, p. 140) lo sintetiza: "Si observo y escucho durante el trabajo independiente de los pequeños equipos, entonces puedo usar mis observaciones para decidir en *qué* y en *quién* enfocarme" durante la discusión grupal o puesta en común.

En segundo lugar, Nicolás desempeñó un papel activo para apoyar a los estudiantes a fin de que alcanzaran las metas de la lección, auxiliando a corregir el rumbo a aquellos que estaban teniendo problemas (por ejemplo, al equipo 6, líneas 96-137; al 4, líneas 146-157; al 3, líneas 158-194). Al mismo tiempo, alentó a los estudiantes que estaban en el camino correcto a que reflexionaran con mayor profundidad respecto de lo que estaba realizando y el significado que eso tenía (por ejemplo, equipo 2, líneas 85-95; equipo 1, líneas 139-145). Las acciones de Nicolás Barrios presentan un claro contraste con las de David Canales, a quien conocimos en la introducción con el ejemplo de las hojas y las orugas. Mientras que el profesor Canales observó a los estudiantes, pero no hizo mucho para entender el origen de la confusión de ellos o de la naturaleza de su pensamiento, Nicolás Barrios, al cuestionar a sus estudiantes en la forma en que lo hizo, aprendió mucho sobre el pensamiento de aquéllos. Esa información le ayudará a planificar las siguientes sesiones de clase, incluyendo la discusión final de la misma aunque no limitándose a ésta.

Conclusión

La anticipación y el monitoreo son pasos que resultan fundamentales para los docentes que desean hacer un uso productivo del pensamiento del estudiante durante la lección. Anticipando primero una enorme gama de acciones que el estudiante pudiera llevar a cabo (y al identificar cuáles de ésas pudieran ser matemáticamente útiles para lograr las metas de aprendizaje la lección), un profesor se ubica en una mejor posición para reconocer y comprender lo que los estudiantes realmente están haciendo. Los docentes que se han involucrado con este tipo de anticipación y predicción pueden luego utilizar su comprensión del trabajo de los estudiantes para tomar decisiones sobre la enseñanza que hagan progresar la comprensión matemática de la clase en su conjunto. Si bien un docente no puede anticipar todo lo que quizá ocurra en el aula cuando un grupo específico de estudiantes se involucra con una tarea particular, cualquier cosa que el profesor prevea antes de la lección le será útil para darle sentido al pensamiento de los estudiantes durante la misma. Como atestiguamos en el caso de Nicolás Barrios, éste tuvo que tomar pocas decisiones “en el momento”, debido a que predijo mucho de lo que iba a suceder. Pero habiendo enseñado la lección una vez, Nicolás ahora posee una mejor idea sobre la manera en que responderán los estudiantes y la próxima vez que aborde esa lección, estará en una mucho mejor posición para apoyar el aprendizaje.

En el caso de Nicolás Barrios observamos a un docente que, como resultado de su labor de anticipación y monitoreo, está listo para orquestar una discusión sobre la tarea “Planes tarifarios” que construya sobre la base del pensamiento de los estudiantes. En el siguiente capítulo, continuamos nuestro análisis de las cinco prácticas, enfocándonos en la selección, secuenciación y conexión; al hacer lo anterior, retomamos el ejemplo de Nicolás Barrios, con el objeto de observar la forma en que la discusión grupal se desarrolla.

¡INTENTE ESTO!

Seleccione una tarea de alto nivel que tenga el potencial para ayudar a los estudiantes a lograr una meta de aprendizaje que haya identificado. De manera individual, o en colaboración con uno o más colegas, realice lo siguiente:

- Anticipe todas las formas en que es probable que los estudiantes resuelvan la tarea, así como los errores que pudieran cometer.
- Tenga en mente las preguntas que usted pudiese plantear sobre estos enfoques y que ayudasen a los estudiantes a progresar en la tarea.
- Elabore una tabla de monitoreo que pueda utilizar como registro durante la lección.

CAPÍTULO

5

Establecimiento del rumbo de la discusión: selección, secuenciación y conexión de las respuestas de los estudiantes

Una vez que los docentes terminen el trabajo de monitoreo –prestar atención a lo que los estudiantes están haciendo y diciendo mientras trabajan en la tarea; proporcionar orientación cuando se requiera y dar seguimiento de quién está haciendo determinadas cosas– están listos para tomar decisiones concernientes al rumbo que tomará la discusión. Resulta fundamental para este proceso de toma de decisiones tener conciencia de las ideas matemáticas clave que los docentes desean que sus estudiantes aprendan (como se analizó en el capítulo 2) y de lo que éstos actualmente conocen y entienden en relación con tales ideas (como se evidencia en los datos recopilados mediante la herramienta de monitoreo, analizada en el capítulo 4). A continuación, los profesores deben *seleccionar* en qué ideas y en qué estudiantes se enfocarán a fin de progresar en la comprensión matemática el entendimiento matemático del grupo; después han de *secuenciar* las soluciones de tal manera que suministren un guión coherente y preciso para la lección. Por último, tienen que determinar el modo en que *conecten* entre sí esos diversos enfoques y con las ideas matemáticas que constituyen el núcleo de la lección.

En este capítulo retomamos el caso de Nicolás Barrios, pero ahora centrándonos en las partes 3 y 4, a fin de considerar la manera en que Nicolás utilizó los datos que recopiló durante la fase de monitoreo de la lección con el objeto de tomar decisiones concernientes con la selección, secuenciación y conexión de las respuestas de los estudiantes. Al considerar estas tres prácticas, primero analizamos juntas la tercera y la cuarta (selección y secuenciación) y luego nos ocupamos de la quinta (conexión). En cada uno de nuestros análisis, comenzamos describiendo la o las prácticas bajo consideración, para después presentar la sección pertinente del caso de Nicolás Barrios, y luego analizamos más adelante la utilización que hizo el docente de la práctica o prácticas.

Selección y secuenciación

La selección es un proceso que consiste en determinar en cuáles ideas (el *qué*) y en qué estudiantes (el *quién*) se enfocará el docente durante la discusión. Representa una decisión crucial, en vista de que determina las ideas que los estudiantes tendrán oportunidad de desarrollar, y a final de cuentas, de aprender. La selección puede considerarse como un acto para determinar expresa y deliberadamente las Matemáticas a la que tendrán acceso los estudiantes al construir su comprensión matemática, más allá de lo que puedan tener en mente de manera individual o en pequeños grupos.

Seleccionar es una labor básica, pues proporciona al docente el control de lo que discutirá toda la clase, asegurando que los aspectos matemáticos, que son la esencia, estén en verdad discutiéndose. Hemos llegado a pensar que la pregunta: ¿Quién quiere ser el siguiente?" es la invitación más valiente o las más ingenua que puede plantearse en el aula. Al solicitar voluntarios para la presentación, los docentes ceden el control de la conversación dejándolos a ellos –y a sus estudiantes– a merced del estudiante a quien colocaron en el centro del escenario. Aunque esto pueda dar buen resultado (quizá lo que el estudiante presente sea entendible y se relacione con la lección), las contribuciones de los estudiantes que no se filtraron, posiblemente sean difíciles de seguir o conduzcan la conversación por una dirección improductiva.

Por ejemplo, en un aula de segundo grado que observamos hace algunos años, los estudiantes estaban aprendiendo a contar de dos en dos y trataban de determinar el número de manos que habría en un aula con 12 estudiantes. Cuando después del periodo de exploración en pequeños equipos el grupo se juntó de nuevo, la docente preguntó a varios de ellos si ya habían obtenido una respuesta y cómo habían llegado a ella. Después de que dos estudiantes compartieron voluntariamente sus soluciones (24) y su proceso de pensamiento correcto para obtenerlas, la docente solicitó otro voluntario. Éste dijo que calculó 23 manos; es obvio que la maestra no esperaba esto. Si bien procedió a plantearle varias preguntas al estudiante, no pudo entender su razonamiento o señalar con precisión en dónde radicaba el error. El estudiante inadvertidamente interrumpió el flujo de la discusión, dejando anonadados tanto a la docente como al grupo. Aunque ella necesitaba explorar y corregir el pensamiento que había conducido a esta solución, no resultó productivo hacerlo enfrente de toda la clase, sin contar con una reflexión previa. En vez de eso, la docente debería haber hablado con el estudiante en privado al final de la clase o antes de la siguiente.

Aunque la labor de selección se refiere en primer lugar y sobre todo a *qué* aspectos matemáticos habrá que subrayar, también tiene que ver con *quién* habrá de hacerlo. Por ejemplo, en la clase del profesor Canales, dos estudiantes (Juanita y Carina) utilizaron la estrategia de la razón unitaria para resolver la tarea de las hojas y las orugas mostrada en la figura 0.2. Si el profesor Canales decide que es una estrategia sólida que quiere que sus estudiantes comprendan (el *qué*), entonces habrá de determinar a qué estudiante le solicitará presentarla (el *quién*). Al tomar esa decisión, quizá desee tener en cuenta al estudiante que no ha presentado recientemente su trabajo, dándole la oportunidad de pasar al frente del aula. Llevando a cabo lo anterior, el docente puede asegurarse de que *todos* los estudiantes tengan la oportunidad de concebirse como autores de ideas matemáticas y de demostrar su competencia. Una revisión periódica de las tablas de monitoreo completadas en anteriores lecciones suministraría un registro de los estudiantes que han compartido su trabajo recientemente.

La secuenciación es el proceso de determinar el orden en el que los estudiantes presentarán sus soluciones. La clave consiste en ordenar el trabajo de tal manera que los aspectos matemáticos sean accesibles para todos los estudiantes y que se construya un hilo narrativo matemáticamente coherente. Por ejemplo, si Demetrio, un estudiante que ha estado trabajando en la tarea "Embaldosado de un patio" hubiese sido el primero que presentara su solución (véase la figura 3.4), en lugar de ser el último, quizá para algunos estudiantes hubiese constituido un reto entenderla, debido a que su enfoque –a diferencia de los otros– se centró en restar los azulejos negros (que representaban el jardín central) que no se incluían en los azulejos de los bordes, en vez de sólo sumar los azulejos exteriores. En lugar de eso, la profesora

Domínguez eligió a Berenice para que fuese la primera porque su estrategia había sido utilizada por varios estudiantes y por consiguiente, razonó la profesora, sería más accesible para el grupo.

Si bien presentar primero la estrategia más utilizada es un enfoque para dar secuencia a las soluciones, quizá no siempre sea la manera óptima de proceder. Por ejemplo, si surge un concepto erróneo durante la elaboración de una tarea, el docente tal vez desee comenzar la discusión abordándolo directamente. De hecho, en una tarea como la de "Comparación de pizzas" mostrada en la figura 5.1, tal vez sea especialmente importante que las soluciones incorrectas se analicen, en vista de que el propósito principal de esta tarea consiste en ayudar a los estudiantes a comprender que el tamaño de la porción representada mediante una fracción depende del tamaño de la pieza completa (entero) de donde se toma la porción. En consecuencia, resultaría fundamental para ellos discutir la solución 4 y comprender por qué no es correcta. De igual forma, en la clase del profesor Canales, analizar primero la solución de Mónica y Carla para la tarea de las hojas y las orugas (véase la figura 0.1) hubiera representado una oportunidad para toda la clase de discutir por qué sumar 10 no conserva la relación entre las hojas y las orugas, lo cual es una equivocación común.

Tarea "Comparación de pizzas"

Meta	Ayudar a los estudiantes a entender que la fracción sólo nos indica la relación entre la parte y el entero y no sobre el tamaño del todo o de las partes (Adaptado de Van de Walle [2004, p. 254].)
Tarea	Piensa detalladamente la siguiente pregunta. Escribe una respuesta completa. Puedes utilizar dibujos, palabras o números para explicar tu respuesta. Asegúrate de mostrar a todos tu trabajo. José comió ½ de una pizza. Lilia comió ½ de otra pizza. José dijo que comió más pizza que Lilia, pero ella aseguró que ambos comieron la misma cantidad. Utiliza palabras y dibujos para mostrar que José podría estar en lo correcto.

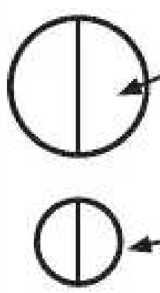
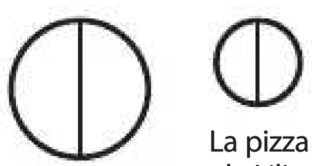
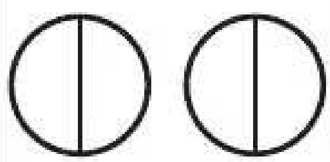
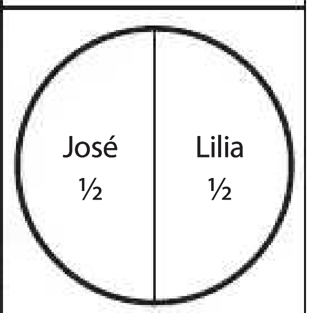
José está en lo correcto 1	**José está en lo correcto 2**	**José está en lo correcto 3**	**José está equivocado 4**	**José está equivocado 5**
La pizza de José es más grande que la de Lilia (Dibujo)	La pizza de José es más grande que la de Lilia (Palabras)	La pizza de José es más grande que la de Lilia (Palabras + dibujo)	½ siempre es igual a ½	José y Lilia compartieron la pizza
 La pizza de José La pizza de Lilia	*José quizá tenga razón porque la pizza que comió podría ser más grande que la de Llilia.*	*José tal vez tenga razón porque su pizza podría ser más grande que la de Lilia.*  La pizza de José La pizza de Lilia	*Comieron la misma cantidad porque ambos tenían ½.*  La pizza de José La pizza de Lilia	 José ½ Lilia ½ *Lilia comió la misma cantidad que José.*

Figura 5.1. Metas y posibles soluciones para la tarea "Comparación de pizzas".

Otra alternativa para el docente es que los estudiantes presenten estrategias que vayan de lo concreto a lo abstracto. Considérese la siguiente tarea: explica por qué la suma de cualesquiera dos números impares siempre es par (una versión de esta tarea se muestra en la figura 5.2). Al presentar las soluciones para esta tarea, posiblemente el docente desee comenzar con una representación concreta de números pares e impares (figura 5.2a), pasar a un argumento más lógico dado en forma narrativa (figura 5.2b) y concluir con una demostración algebraica (figura 5.2c). Esta secuencia podría imbuir a todos los estudiantes en la discusión, ya que la representación concreta sería accesible para todos ellos y además cada estrategia sucesiva podría estar meticulosamente vinculada a las anteriores, de modo que los estudiantes pudieran percatarse a final de cuentas de la manera en que la solución algebraica se relaciona con los enfoques menos abstractos.

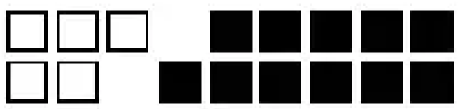
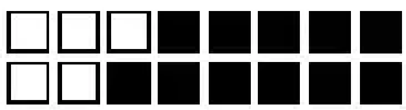
a. Modelo concreto	**b. Argumento lógico**	**c. Prueba algebraica**
Si tomo los números 5 y 11 y organizo las fichas como se ve, se puede tener el modelo. 5 + 11  Puedes darte cuenta de que cuando pones los conjuntos de cuadrados uno al lado de otro (sumas los números), las dos fichas extra formarán un par, así que la respuesta siempre es par. Esto se debe a que cualesquiera dos números impares siempre tendrán una ficha extra, y las dos fichas extra siempre formarán un par, para cualquier conjunto de números impares. 16 	Un número impar = [un] número par + 1; es decir: 9 = 8 + 1. Así que cuando sumas dos números impares, estás sumando un número par + un número par + 1 + 1, por lo que tienes un número par. Esto se debe a que ya antes probaste que un número par + un número par = un número par. Por lo tanto, ya que un número impar = un número par + 1, si tu sumas dos de éstos, tienes un número par + 2, el cual también es un número par.	Si a y b son enteros impares, entonces a y b pueden escribirse como $a = 2m + 1$ y $b = 2n + 1$, donde m y n son otros números enteros. Si $a = 2m + 1$ y $b = 2n + 1$, entonces $a + b = 2m + 2n + 2$. Si $a + b = 2m + 2n + 2$, entonces $a + b = 2(m + n + 1)$. Si $a + b = 2(m + n + 1)$, entonces $a + b$ es un entero par.

Figura 5.2. Soluciones posibles a la tarea "Impar + impar = par".

Ahora volvamos al caso de Nicolás Barrios, retomándolo esta vez en el momento en que está en proceso de planificación del *qué* y del *quién* para la discusión grupal por parte con sus estudiantes sobre la tarea "Planes tarifarios".

ACTIVIDAD DE INVOLUCRAMIENTO 5.1

- Revise la tabla de monitoreo del trabajo de los estudiantes de Nicolás Barrios, que se muestra en la figura 4.4.
- Dadas las metas de Nicolás Barrios para la lección (véase "El caso de Nicolás Barrios – Parte 1, en el capítulo 4, líneas 3-11), determine tanto las soluciones (o partes de ellas) que usted quisiera que los estudiantes las compartieran y como el orden en que las presentarán durante la discusión de la lección, a fin de lograr las metas establecidas.

Planes tarifarios: el caso de Nicolás Barrios
(Parte 3 – Selección y secuenciación)

Aprovisionado con los datos que había recopilado durante el monitoreo del trabajo de sus estudiantes, ahora Nicolás estaba listo para tomar decisiones concernientes con la discusión. Desde el inicio de la lección sabía que necesitaría contar con una tabla, una gráfica y disponer de una ecuación a fin de lograr sus metas para la lección (líneas 3-11 de la parte 1), así que la verdadera pregunta era: ¿qué tabla, gráfica y ecuación necesitaría y en qué orden debieran presentarse? Como Nicolás lo señalara en su momento, en la tercera columna de la tabla que utilizó para monitorear a sus estudiantes (mostrada en la figura 5.3), decidió comenzar con las tablas que habían realizado los equipos 3 y 1, pasar al bosquejo de la gráfica que había trazado el equipo 2 y concluir con la ecuación que formuló el equipo 5.

Estrategia	Quién y qué	Orden
Tabla	El equipo 1 comenzó con incrementos de 1, pero luego desistió y utilizó aumentos de 20. Los equipos 2, 3 y 4 usaron incrementos de 10.	Segundo (Teresa) Primero (Darío)
Gráfica	El equipo 1 empleó una calculadora para hacer una gráfica a partir de su tabla. El equipo 2 trazó un esbozo de la gráfica pero no colocó los puntos. Los equipos 3 y 4 trazaron una gráfica a partir de su tabla.	Tercero (Lili)
Ecuación	El equipo 5 formuló una ecuación y luego trazó una gráfica utilizando los valores 0 y 100 para los minutos. El equipo 6 comenzó formulando una ecuación y la usó para elaborar una tabla de valores con incrementos de 5.	Cuarto (Tomás)
Otra	El equipo 3 tuvo dificultades para comprender el contexto del problema. El equipo 4 cambió los ejes en su primera gráfica. El equipo 6 tuvo una confusión con la notación y al principio utilizó .4 en vez de .04.	

Equipo 1: Teresa, Natalia, Héctor, Carla
Equipo 2: Camila, Joel, Lili, Roberto
Equipo 3: Darío, Andrés, Yolanda, Cristina
Equipo 4: María, Jazmín, Ricardo, César (50 minutos)
Equipo 5: Jaime, Tomás, Carolina, Mercedes
Equipo 6: Leticia, David, Tania, Guillermo (50 minutos)

Figura 5.3. Tabla completa de Nicolás Barrios para el monitoreo del trabajo de los estudiantes en la tarea “Planes tarifarios”.

Nicolás Barrios decidió iniciar la discusión explorando si la respuesta a la pregunta “¿Qué tanto tiempo tendrías que hablar por teléfono al mes para que ahorraras dinero al suscribirte a la Compañía A?” era 50 o 51 minutos, en vista de que dos grupos pensaban que la respuesta era 50 minutos (incorrecta) y cuatro creían que era 51 minutos (correcta). Así que planificó pasar a una discusión sobre las tablas, pues cinco de seis grupos elaboraron una tabla, por lo que fue la representación que más se utilizó. Determinó analizar tanto una tabla con incrementos de 10 minutos –ya que la utilización de los intervalos de 10 minutos representó el enfoque más utilizado y además la tabla resultante mostraba nítidamente el punto de intersección– como una tabla con incrementos de 20 minutos porque en ésta no se observaba el punto de intersección.

Así, eso esperaba él, se iniciaría la discusión sobre lo que sabemos o desconocemos sobre las funciones con base en la tabla y qué más se necesitaría llevar a cabo para responder la pregunta.

Aunque varios equipos trazaron algunos puntos y los conectaron para hacer gráficas, Nicolás Barrios se dispuso a enfocarse en el bosquejo de la gráfica realizada por el equipo 2. Y más que dejar que los miembros de ese equipo explicaran lo que habían llevado a cabo y el por qué, resolvió que preguntaría a toda la clase cómo es que el equipo 2 sabía que la gráfica iba a ser de esa forma. Esto centraría la atención de los estudiantes en la pregunta concerniente con la forma en que la tabla brinda "claves" para la gráfica y estimularía su pensamiento respecto de la manera en que las funciones se comportan (es decir, las funciones tienen que ser lineales pues poseen una tasa de cambio constante; deben tener un punto de intersección porque comparten un punto y comienzan en el eje *y*, lo cual representa la renta mensual). Al obligar a la clase a que reflexionara sobre estas cuestiones, en vez de escuchar cómo lo hizo el equipo 2, Nicolás pudo involucrar a más estudiantes en dilucidar cómo podrían resolverlo. Después pensó en comprobar con el equipo 2 y vería si lo que describían los otros estudiantes reflejaban lo que en verdad hicieron.

Resolvió finalizar con la ecuación formulada por el equipo 5, pues fue uno de los dos equipos que obtuvo una ecuación y el único que no elaboró una tabla de valores. Quería que la clase considerara por qué los miembros del equipo utilizaron sólo dos puntos para trazar sus gráficas y si este enfoque era válido o no lo era. También deseaba que todos tuvieran en mente la forma en que la pendiente y la intersección con el eje *y* –que constituían dos características clave de la ecuación– eran visibles en la tabla y en la gráfica.

Una vez que Nicolás hubiese resuelto qué equipos se presentarían, necesitaba elegir al estudiante que hablara en su nombre. Si bien algunas veces el equipo en su totalidad se encargaba de la presentación, a menudo esta estrategia daba como resultado que un estudiante acaparara la palabra y que los otros quedaran relegados en segundo plano. Revisó la conformación de los equipos que ya tenía en la mira e identificó a los presentadores que no habían tenido oportunidad de compartir su trabajo en la última semana (lo cual se muestra en la columna 3 de su tabla de monitoreo, de la figura 5.3). Los equipos supusieron que a cualquiera podría pedírsele ser el presentador, así que cada estudiante del equipo necesitaba comprender en grado suficiente el trabajo que el equipo había llevado a cabo, a fin de discutirlo en frente de la clase. Nicolás se percató que esta suposición también le ayudaba a que todos los estudiantes fuesen responsables de participar en las discusiones habidas en los grupos pequeños.

Análisis de la selección y secuenciación en el caso de Nicolás Barrios

En la parte 3 del caso, observamos a un docente que consideró detalladamente la manera de utilizar el trabajo elaborado por sus estudiantes como base para la discusión grupal. Quiso analizar el significado del punto de intersección, el comportamiento de las funciones antes y después de dicho punto y la manera en que las tres representaciones de las funciones (tabla, gráfica y ecuación) proporcionaban pistas para la situación y estaban conectadas entre sí (véase la parte 1 de "El caso de Nicolás Barrios", en el capítulo 4, líneas 3-11). Con el objeto de lograr esta meta, Nicolás decidió que los estudiantes presentaran tablas, una gráfica y una ecuación (en ese orden), lo cual reflejaba la frecuencia con la que la clase utilizó esas representaciones. También identificó los aspectos clave de representaciones particulares que pudieran ser fructíferas para la discusión, por ejemplo: determinar el punto de intersección cuando no resulta obvio de la tabla (líneas 232-235), el modo en que puede conocerse el comportamiento de una gráfica, sin ubicar puntos específicos (líneas 239-242), así como la forma en que puede trazarse una gráfica a partir de una ecuación, sin elaborar una tabla de valores (líneas 243-247). Al poner atención meticulosamente al trabajo de los estudiantes, pudo descubrir características interesantes que quizá hubiesen dado pauta para que todo el grupo reflexionara. En consecuencia, utilizó sus metas de la lección y su conocimiento del "momento en que se ubicaba el pensamiento de varios estudiantes" para orientar sus decisiones concernientes con las ideas que pondría a discusión, así como el orden en que se haría.

En esta lección, Nicolás resolvió dar inicio con la discusión de la respuesta a la pregunta que enmarcaba la investigación de los estudiantes ("¿Qué tanto tiempo tendrías que hablar por teléfono al mes para que ahorraras dinero al suscribirte a la Compañía A?"), porque éstos no estaban de acuerdo respecto de si el plan de la Compañía A se convertía en una mejor opción a partir de los minutos 50 o 51 (líneas 226-230). La respuesta a esta pregunta les brindaría la oportunidad de refrescar su pensamiento, de escuchar los argumentos contrarios y de defender o perfeccionar sus posiciones. Este trabajo puede ayudar a los estudiantes a desarrollar sus habilidades argumentativas y a comenzar a tener cierta autoridad para determinar lo que es correcto y lo que no lo es.

Al parecer Nicolás Barrios decidió no analizar públicamente ninguna de las dificultades que los estudiantes enfrentaron mientras trabajaban en este problema. Quizá haya pensado que los problemas que tuvieron se restringían a equipos específicos y que mediante sus interacciones con éstos, podría ayudarlos a superar los retos que estaban afrontando. De manera alternativa, tal vez haya tenido en mente que a pesar de que algunos de estos temas resultaban importantes y podrían tener consecuencias a largo plazo (por ejemplo, la confusión del grupo 4 sobre qué variables poner en los ejes), no quiso utilizar el tiempo de esta lección para abordarlos. En vista del tiempo limitado, tuvo que tomar decisiones sobre la forma de administrar del modo más eficaz sus 50 minutos de clase.

Si bien resulta claro que Nicolás tomó decisiones meditadas sobre la mejor forma de hacer énfasis en los aspectos matemáticos que debían aprenderse, también tomó cuidadosas decisiones respecto de sus estudiantes (líneas 258-264). Consideró en gran medida la composición de cada equipo y a qué integrante le pediría que hablara a nombre de su equipo. Al elegir a los estudiantes que no habían pasado al frente últimamente, les estaba brindando la oportunidad de demostrar su competencia y de ganar confianza en sus capacidades. Su hábito de identificar a un miembro del equipo para hacer la presentación, siempre significó una forma de hacer responsables a todos los miembros del equipo por el trabajo en grupo.

Existen muchas formas distintas –que quizá sean igualmente productivas– de elegir y secuenciar las respuestas de los estudiantes. El meollo consiste en que el método seleccionado debe reforzar el guion de la clase, que el docente prevé para la sesión, de tal modo que los aspectos matemáticos que se aprenderán surjan de un modo claro y explícito. La labor de Nicolás Barrios sugiere que está en una buena posición para orquestar una discusión así.

Conexión

La conexión puede ser de hecho la más desafiante de las cinco prácticas, debido a que exige que el docente plantee preguntas que hagan evidentes y comprensibles los aspectos matemáticos. En consecuencia, las preguntas deben ir más allá de sólo clarificar y sondear lo que un estudiante particular llevó a cabo y el cómo. Más bien, han de enfocarse en las relaciones y en el sentido matemáticos, así como en vincular las ideas y las representaciones matemáticas. Boaler y Humphries (2005, p. 38) sostienen que dichas preguntas "sirven para un muy específico y deliberado propósito: desafiar a los estudiantes a que tengan en mente un concepto matemático fundamental".

Aunque las preguntas requieren exponer de modo explícito los aspectos matemáticos que se aprenderán, han de dar inicio con lo que los estudiantes conocen. El tránsito desde donde un estudiante se encuentra hasta donde en último término quiere llegar en términos matemáticos, "es una reconstrucción continua" (Dewey, 1902, p. 11). Por el mismo tenor, Ball (1993, p. 394) afirma: "Debo tener en cuenta a las Matemáticas, de acuerdo con los niños, y a éstos de acuerdo con las Matemáticas", sugiriendo así la necesidad del docente por conocer tanto las Matemáticas que han de aprenderse como lo que los estudiantes conocen sobre ellas, con el propósito de tender un puente entre los dos mundos. Tener en cuenta uno de esos factores y desentenderse del otro puede dar como resultado plantear preguntas sin respuestas, debido a que no tienen conexión con las formas de pensamiento en curso de los estudiantes. Tener en cuenta uno sin atender el otro también puede propiciar que el pensamiento de los estudiantes siga estancado, en vez de caminar hacia nuevas comprensiones matemáticas. Debido a lo anterior, resultan esenciales las preguntas enmarcadas dentro del contexto de los estudiantes.

Considérese por ejemplo las preguntas que un docente quisiera plantear en torno a la tarea "Impar + impar = par" (tarea b en la figura 5.2). Imagínese que la meta del docente para la lección diseñada en torno a esta tarea consiste en que los estudiantes reconozcan que: (1) las pruebas deben ser argumentos generales que se aplican en todos los casos y (2) el Álgebra puede utilizarse para representar un argumento general. En la discusión de las soluciones a esta tarea (mostradas en la figura 5.2), el docente quizá quiera pedir a los estudiantes que determinen si cada una de las soluciones es de hecho una prueba, que expliquen por qué sí o por qué no y que muestren la forma en que cada representación está conectada con las otras. Mediante esta discusión, los estudiantes pudieran llegar a percatarse de que la "ficha extra" de la representación de un número impar con el modelo concreto es lo mismo que +1 en el argumento lógico y en la prueba algebraica, y que el número par descrito en el argumento lógico se representa en el modelo concreto mediante un rectángulo con medidas de 2 por "algo" y mediante $2n$ en la prueba algebraica. La discusión pudiera hacer surgir la idea de que $2n$ puede representarse con un rectángulo que tenga dimensiones de 2 por n y que este hecho está relacionado con lo que significa ser *par* (un número par es divisible entre 2), así que cualquier número par puede transformarse en un rectángulo con dos filas. Sin preguntas específicas que hagan las conexiones entre las diferentes estrategias, que no enfaticen cómo cada enfoque aborda la naturaleza de ser par o impar, y sin que hagan explícita la manera en que todos los enfoques satisfacen el criterio para ser demostración, la lección devendrá en una del tipo "mostrar y decir", perdiéndose así el vínculo entre las ideas clave de la disciplina (por ejemplo, las demostraciones son argumentos lógicos que muestran que las conjeturas son siempre verdaderas; las demostraciones pueden expresarse de manera simbólica, por medio de diagramas o en forma de narración). Son las preguntas, así como su estrecha vinculación con el contexto (las soluciones reales generadas por los estudiantes), lo que puede hacer progresar la comprensión matemática de los estudiantes.

La clave para la conexión reside en asegurarse de que los aspectos matemáticos por aprender se aborden de una manera abierta. Considérese la tarea "Comparación de la pizza" (véase la figura 5.1). En el análisis de las soluciones 3, 4 y 5 sería importante deducir argumentos concernientes con lo que es correcto y el por qué, así como abordar de modo explícito: (1) si las porciones que son ½ (o cualquier parte fraccionaria) siempre representan el mismo tamaño, y (2) aquello que determina qué tan grande en verdad es una porción de ½. El docente que esté en esta posición tal vez desee pedir a los estudiantes que construyan situaciones en donde la misma fracción se refiera claramente a porciones de diferente tamaño, a fin de garantizar que los estudiantes tengan una sólida comprensión de esta importante idea. Al escudriñar las tres soluciones, posiblemente se les pregunte a los estudiantes en qué difieren y en qué se asemejan. Sus respuestas a esta pregunta podrían subrayar el hecho de que cada solución describe correctamente la fracción ½, pero es diferente cada total de donde se extrajeron las mitades.

La manera en que los estudiantes compartan su trabajo es un factor importante que tiene que ver con facilitar la discusión presente. Por ejemplo, el profesor Barrios les solicitó a sus estudiantes que elaboraran carteles con su trabajo, pues creyó que sería más fácil así examinar las diferentes representaciones durante la discusión grupal (líneas 73-80). (Vale la pena señalar que el costo de las hojas de rotafolio quizá restrinja su uso; además, elaborar carteles puede propiciar que las actividades matemáticas se conviertan en dilatados proyectos artísticos y que los carteles tengan menos eficacia si todos los trabajos posiblemente sean semejantes). La profesora Domínguez preparó acetatos que contenían los primeros tres elementos de la sucesión de figuras, de modo que los estudiantes pudieran sencillamente describir y mostrar lo que hicieron, sin necesidad de dibujar los patios. Si bien el uso de acetatos propicia que la comparación de estrategias sea un poco más complicada en vista de que sólo puede proyectarse una al mismo tiempo, la colocación en el pizarrón o en hojas de rotafolio de una lista de generalizaciones (véase la lista de Dulce Domínguez en la figura 3.5) –junto con los nombres de los estudiantes que las elaboraron– permite que ellos den seguimiento a la gama completa de ideas que están en la mesa de discusión. En forma alternativa, quizá resulten más eficientes los proyectores de documentos que posibilitan a los estudiantes mostrar sus trabajos originales, sin que tengan necesidad de volver a escribirlos en un cartel o acetato. Con el proyector es posible mostrar más de una solución utilizando la herramienta de alejamiento (*zoom*) para hacer las imágenes más pequeñas.

Ahora regresemos al caso de Nicolás Barrios para ver la forma en que ayuda a sus estudiantes a efectuar conexiones durante la discusión.

ACTIVIDAD DE INVOLUCRAMIENTO 5.2

- Revise la tabla completa de monitoreo de Nicolás Barrios, mostrada en la figura 5.3.
- Dadas las metas de Nicolás para la lección (véase "El caso de Nicolás Barrios" – Parte 1, en el capítulo 4, líneas 2-11), identifique las preguntas que desearía plantearles a los estudiantes, concernientes a las representaciones, a fin de lograr esas metas.

Planes tarifarios: el caso de Nicolás Barrios (Parte 4 – Conexión)

Nicolás inició la fase final de su lección (compartir y resumir) colocando los seis carteles a lo largo del pizarrón que está frente al aula, con la siguiente secuencia: equipo 3, equipo 1, equipo 2, equipo 5, equipo 4 y equipo 6. Aunque no tenía planificado analizar el trabajo de los equipos 4 y 6 de manera formal, pensó que podría elegirlos para hacer ciertas conexiones entre lo que ellos llevaron a cabo y lo que otros equipos hicieron.

Antes de analizar cada uno de los carteles, Nicolás comenzó la discusión preguntando a la clase cuánto tiempo tendría que hablar alguien por teléfono con la compañía A para ahorrar dinero. Los estudiantes gritaron: "50 minutos" y "51 minutos"; Nicolás anotó en el pizarrón ambas respuestas. Preguntó que si alguno de los que dijeron 50 minutos podría explicar su razonamiento. Cuando la identificó el docente, Jazmín dijo: "Los dos planes cuestan $70.00 por 50 minutos, a partir de ahí la compañía A comienza a ser mejor opción". Nicolás preguntó si alguien deseaba añadir algo a lo que Jazmín había dicho. César comentó: "Es ahí donde las dos rectas se cruzan en nuestra gráfica, así que debe ser 50". Yolanda estaba agitando su mano de forma ostensible y cuando Nicolás le concedió la palabra, ella habló abruptamente: "Pero 50 es donde son iguales, así que debes agregar uno más".

Nicolás pensó que el comentario de Yolanda ofrecía un buen pretexto para observar los carteles, así que le pidió a Darío que pasara a explicar la forma en que su equipo había utilizado la tabla (tabla del equipo 3 de la figura 5.4) que elaboraron para obtener la respuesta de 51 minutos. Darío explicó: "Son lo mismo para los 50 minutos, pero cuando se alcanza el 60, vimos que por primera vez el plan A era más barato que el B y así es como seguimos, podríamos decir que el A nunca alcanzaría al B. Son lo mismo para 50 minutos, así que intentamos para 51 y obtuvimos $70.04 para el plan A y $70.10 para el B. Así que pensamos que la respuesta debe ser 51 y no 50". Nicolás preguntó si lo que dijeron Yolanda y Darío tenía sentido para los estudiantes que pensaban que la respuesta era 50. Jessica comentó que creía que sólo les correspondía encontrar en qué punto eran iguales los planes, así que quería revisar su respuesta. Nicolás Barrios preguntó si alguien tenía dudas y después de esperar una respuesta durante 10 segundos, decidió continuar.

Equipo 3

minutos	costo A	costo B
0	50.00	20.00
10	50.40	30.00
20	50.80	40.00
30	60.20	50.00
40	60.60	60.00
50	70.00	70.00
60	70.40	80.00
70	70.80	90.00
80	80.20	100.00
90	80.60	110.00
100	90.00	120.00

Equipo 1

minutos	costo A	costo B
0	50.00	20.00
20	50.80	40.00
40	60.60	60.00
60	70.40	80.00
80	80.20	100.00
100	90.00	110.00

Figura 5.4. Tablas elaboradas por los equipos 3 y 1 para la tarea "Planes tarifarios".

Después Nicolás le preguntó a Tere si podía explicar la manera en que los miembros de su equipo encontraron la respuesta utilizando su tabla (tabla del equipo 1 de la figura 5.4). Comentó que decidieron hacer incrementos de 20, porque comenzaron aumentado 1 y eso fue muy lento. Explicó: "Tal vez hubiéramos seguido más allá de los 100 minutos porque no vimos que sucediera nada, pero el profesor nos pidió que observáramos nuestros números y viéramos si podíamos encontrar un punto en donde A fuera más costosa que B y otro en el que A fuera más barata que B. Luego vimos que A era mayor en 40 y menor en 60. Pero no estábamos seguros de lo que esto significaba, así que tomamos la graficadora y tecleamos los datos de la tabla para graficar. Así pudimos ver que las rectas se cortaban en el minuto 50, justo ente 40 y 60". Nicolás le preguntó a Tere cuál era el significado de eso. Respondió: "B era más barata antes de los 50 minutos, y A era más barata después".

En ese momento, Nicolás Barrios decidió pasar a la gráfica. Señaló el bosquejo que el equipo 2 había hecho (mostrado en la figura 5.5) e invitó a la clase a que tuviera en cuenta lo que el grupo debió haber llevado a cabo para trazar el bosquejo. Luego entabló el siguiente diálogo con sus estudiantes:

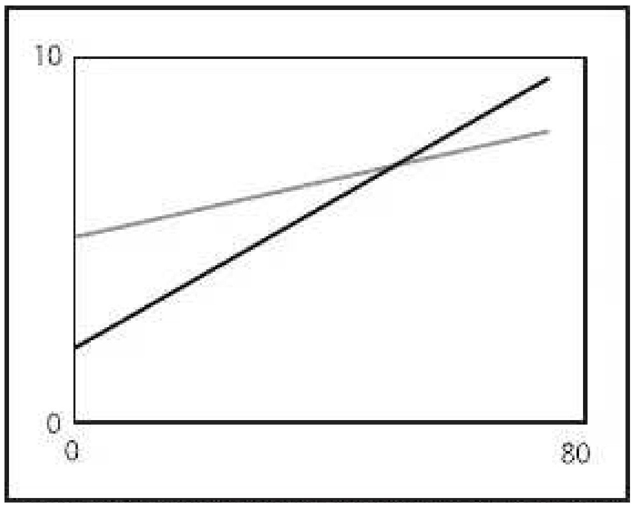


Figura 5.5. Bosquejo de las gráficas hecho por el equipo 2 para los dos planes tarifarios.

María: Estoy pensando que si observas la tabla, puedes ver que ellos tal vez dedujeron lo que el costo aumentó, así queee… además se mantiene en la misma cantidad, así que debe ser lineal, y ya que tenía un punto de intersección, ellos hicieron que se cruzaran.

Profesor Barrios: ¿Qué otra cosa les ayudó a trazar esta gráfica, este pequeño bosquejo?

Ricardo: Lo que les ayudó, pueees, conocer a la Compañía A y a la B; comenzaron con ese 50 y ese 20.

Profesor Barrios: Bien, así que las compañías A y B empezaron con \$50 y \$20, ¿y cómo reflejaron eso en la gráfica?

Ricardo: Porque desde donde está el 0, sólo subieron 2 y 5 espacios.

Profesor Barrios: ¿Qué significa eso?

Ricardo: Que si no hablas ni un minuto, de todas formas tienes que pagar la renta.

Profesor Barrios: Muy bien, así que, ¿cuál dirías que es la Compañía B, con base en lo que me estás comentando? Ya que ellos no las etiquetaron, acércate y muéstrame.

Mercedes: Es ésta, justo aquí [señala la recta más gruesa de la figura 5.5].

Profesor Barrios: Bueno, ¿y por qué escogiste esa recta para la Compañía B?

Mercedes: Porque la Compañía B comienza en 20 y es donde la pusieron… en 20.

Profesor Barrios: De acuerdo [*se dirige al equipo 2, cuyos miembros trazaron la gráfica*]. ¿Es lo que pensaron cuando bosquejaron su gráfica?

[*Los estudiantes del grupo 2 asintieron y algunos dijeron: "Sííí"*].

Profesor Barrios: Muy bien, ahora sólo quiero volver a una cosa más de la gráfica. María dijo que sabía que era lineal al observar la tabla, ¿pueden explicarme un poco más esto?

María: Lo deduje de la tabla, de cómo la Compañía A y la Compañía B siguen constantes …

Profesor Barrios: Ajáa…

María: Sí, y se mantienen en la misma cantidad, así que por eso estoy pensando que son lineales.

Profesor Barrios: De acuerdo. ¿Alguien quiere añadir algo más a esto?

Jaime: Sé lo que ella quiere decir porque puedes expresar eso en la tabla. Se mantiene siempre en la misma cantidad y nunca cambia. Como para la Compañía A, se mantiene en 4 centavos: 4 centavos por minuto.

César: Es un patrón.

Jaime: Por eso la gráfica es una recta.

Profesor Barrios: Pero, ¿cómo son constantes los 4 centavos en la tabla? No estoy viendo eso.

Tere: Bueno, nuestra tabla aumenta a 80 centavos por 20 minutos, pero es lo mismo que 4 centavos por minuto. Es lo que teníamos cuando empezamos, pero luego cambiamos.

Profesor Barrios: Muy bien. Eso significa que si algo aumenta en la misma cantidad, ¿siempre va a ser lineal?

[*Todos los estudiantes están de acuerdo y muchos dicen: "Sííí".*]

Profesor Barrios: De acuerdo, ¿alguien puede decirme si al ver la ecuación [*señala la ecuación en el cartel del grupo 4*: $C = .04m + 5$], podríamos o no podríamos saber si será lineal?, ¿o no?

Tomás: Porque siempre se va a multiplicar por lo mismo.

Profesor Barrios: Siempre se va a multiplicar por lo mismo. ¿Qué es lo que se está multiplicando por lo mismo?

Tomás: Por cada minuto que tú pones en lugar de *m*, multiplicas el costo por 4 centavos por minuto.

Después Nicolás preguntó a todo el grupo qué significado tiene el punto de intersección en el problema. Yolanda contestó voluntariamente que el punto de intersección es donde las dos rectas se cruzan. Nicolás estuvo de acuerdo pero le preguntó cuál era su significado en términos del problema. Yolanda explicó que es el momento en que los planes cuestan lo mismo. Nicolás señaló el minuto 0 para el plan A y el 30 para el plan B (véase la tabla del grupo 3 en la figura 5.4) y preguntó a todos: "¿No costaron aquí también lo mismo?" Yolanda respondió: "Sí, así es. Pero no son la misma cantidad de minutos. En donde se cruzan son los mismos minutos y el mismo costo".

En este momento, Nicolás comentó que quería regresar al punto en el que Tere había intervenido antes. Recordó al grupo que había dicho que B era más barata antes de los 50 minutos y que A era más barata después. Pidió a los estudiantes que consultaran con el compañero de al lado y conversaran 2 minutos sobre si estaban de acuerdo o no con este enunciado y que dieran sus razones. Una rápida encuesta en los equipos indicó que todos estaban de acuerdo con lo que Tere había dicho, pero casi todos no estaban seguros de poder explicar su propio razonamiento. Guillermo se ofreció como voluntario para tratar de hacerlo. Comenzó diciendo: "Pensamos que tiene algo que ver con el hecho de que la que cobra mayor renta cuesta menos por minuto". César saltó para comentar: "Así que la que cobra más, cuesta más si sólo hablas poco tiempo, pero si hablas más, a la larga se vuelve más barata. Es como si la renta se repartiera entre más minutos”. Nicolás le preguntó a Lili si se podía ver eso en el bosquejo de la gráfica. Respondió: “Bueno, puedes ver que el plan A comienza en 50 y sube, y el plan B comienza en 20 y aumenta. Pero B está más inclinada que A, así que sube más rápido”. Nicolás preguntó: “¿Por qué sube más rápido?” Lili contestó que sube más rápido porque el costo por minuto es mayor. Nicolás resumió: “Así que César y Lili están haciendo énfasis en que si bien el plan A cuesta más que el B para cero minutos, en vista de que su costo por minuto es menor que el del plan B, en algún punto será más barata. Y ya hemos determinado que ese punto es el de 51 minutos. ¿Alguien tiene alguna pregunta?” Leticia comentó: “¿Así que está diciendo que, sin importar la renta que sea, el plan en el que los minutos cuesten más barato será el mejor?” Nicolás se percató que ésa era una muy buena pregunta y la escribió en el pizarrón de al lado.

Nicolás comentó al grupo: “Como tarea para casa quiero que esta tarde respondan a la pregunta de Leticia y proporcionen algunos ejemplos de planes que apoyen su punto de vista”. Les dio cinco minutos para que escribieran la pregunta en sus cuadernos. Si bien tenía pensado que los estudiantes hicieran sus nuevos planes tarifarios como tarea (por ejemplo, un plan que en todo momento fuera más barato que los planes A y B; un plan que siempre fuera más caro que los planes A y B), consideró que las ideas a las cuales deseaba que sus estudiantes abordaran surgirían al analizar la pregunta de Leticia.

Luego Nicolás pidió a Tomás que explicara la manera en que el equipo 5 formuló sus ecuaciones (para el plan A: $c = .04m + 50$; para el plan B: $c = .10m + 20$). Él dijo: “Bueno, sabíamos que cada minuto era de 4 centavos para el plan A y de 10 para el B, así que necesitábamos multiplicarlos por el número de minutos (m) y luego sumar la renta mensual, pues ésta no cambia”. Dado que sólo dos grupos formularon ecuaciones, Nicolás quiso asegurarse de que los demás estudiantes comprendiesen lo que Tomás estaba describiendo. Les preguntó a los estudiantes de los equipos 1, 2, 3 y 4 (quienes comenzaron elaborando tablas y en absoluto formularon ecuaciones), lo que pensaban respecto de lo que Tomás estaba diciendo. Darío dijo: “Bueno, es lo que hicimos para elaborar nuestra tabla, pero solamente que no lo escribimos de esa forma, pero tiene sentido”. Cristina comentó: “Creo que lo entiendo, en tanto sepa lo que c y m se supone que sean”.

Nicolás también pidió al grupo que se centraran en la ecuación del plan A y que explicaran en dónde se ubicarían en la gráfica y en la tabla .04 y 50. Tere explicó: “Es como dije antes. Es la cantidad por la que la tabla aumenta. En nuestra tabla sube 80 centavos cada vez, pero por cada 20 minutos, así que es lo mismo que 4 centavos por minuto. Cuando comenzamos nuestra tabla, encontramos que para 1 minuto se tenía \$50.04 y para 2 era \$50.08, así se podían ver mejor los 4 centavos”. Nicolás preguntó a los integrantes del equipo 3 en dónde estaban en su tabla los 4 centavos (véase figura 5.4). Yolanda respondió diciendo que el costo aumentó 40 centavos para 10 minutos, así que era lo mismo que 4 centavos por minuto u 80 centavos para 20 minutos.

Nicolás preguntó: “¿Qué hay de los \$50?” Algunos estudiantes murmuraron casi de inmediato “cero minutos”. Dijo: “Estoy oyendo ‘cero minutos’. ¿Alguien quiere explicar eso?” Nicolás llamó a Cristina, quien había estado muy callada. Ella respondió: “El costo de cero minutos es \$50. Puedes verlo en todas las tablas aquí, y en las gráficas es en donde la recta cruza al eje y”. Nicolás vio un aula en donde todas las cabezas se inclinaban, lo cual interpretó como un asentimiento.

La clase estaba a punto de terminar y Nicolás tenía una última pregunta antes de que los estudiantes se retiraran. Señaló la gráfica que el equipo 5 trazó (mostrada en la figura 5.6) y le preguntó a todo el grupo cómo es que ese equipo (el de Tomás) la había obtenido sin elaborar una tabla.

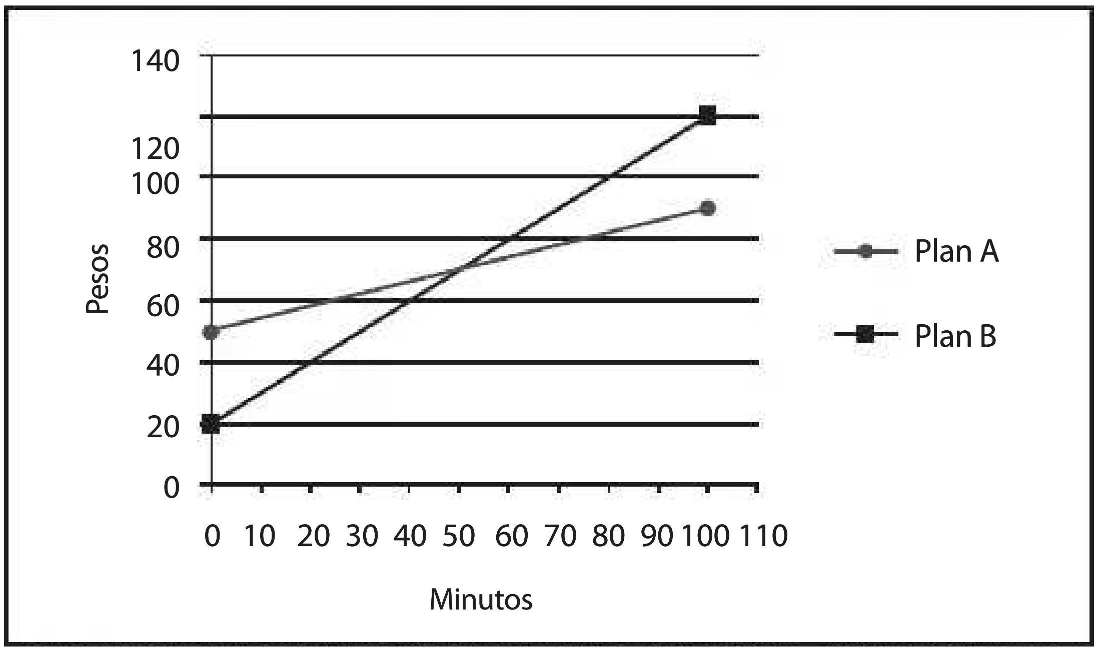


Figura 5.6. Gráfica del equipo 5 para la tarea "Planes tarifarios".

Carla dijo: "Bueno, sabían en dónde comenzaban las rectas, ya que sus ecuaciones tenían +50 y +20. Pero no alcanzo a ver cómo obtuvieron algún otro punto". Nicolás le pidió a Tomás que explicara cómo había determinado su equipo los otros dos puntos (100,90) para el plan A y (100,120) para el B. Tomás comentó: "Bueno, sabíamos que necesitábamos dos puntos para tener una recta y sólo teníamos uno. Así que solamente escogimos 100. Sustituimos 100 en nuestra ecuación y obtuvimos el otro número". Carla preguntó: "¿Por qué eligieron 100?". Tomás contestó: "En realidad fue idea de Jaime". Éste saltó de su silla y dijo: "Bueno, me pareció que sería fácil de multiplicar. Pudimos elegir cualquier número". Nicolás preguntó: "¿Qué hubiera pasado si Jaime hubiese escogido 40 en vez de 100? ¿Habría algún cambio?" Mercedes respondió: "Hubiéramos seguido teniendo dos rectas, pero no se hubieran cruzado aún. Así que sólo hubiéramos tenido que alargarlas".

En ese momento, sólo quedaba un minuto para finalizar la clase. Nicolás agradeció a todo el grupo por la buena discusión y les recordó la tarea; también les dijo que podían utilizar este último minuto para comenzar a reflexionar sobre cómo querían responder la pregunta de Leticia.

Análisis de la conexión en el caso de Nicolás Barrios

Lo que intentó Nicolás Barrios para esta lección es que sus estudiantes: (1) reconocieran que existe un punto de intersección en las ecuaciones lineales de dos rectas únicas no paralelas, justo donde las dos funciones tienen los mismos valores x y y, (2) comprendieran que las dos funciones "intercambian posiciones" en el punto de intersección y que la que estaba "arriba" antes de ese punto, ahora está "abajo" después del punto de intersección, debido a que la función con una menor razón de cambio a final de cuentas será la que más se aproxime al eje *x*, y (3) generaran conexiones entre las tablas, las gráficas y las ecuaciones que posibiliten identificar la pendiente y la intersección con el eje *y* en cada representación. Mediante su trabajo de anticipación, monitoreo, selección y secuenciación, Nicolás pudo realizar conexiones entre las distintas estrategias utilizadas por sus estudiantes y entre éstas y las ideas centrales de la lección.

Aunque resulta evidente que los estudiantes de Nicolás pudieron elaborar tablas, ecuaciones y gráficas que les permitieran responder la pregunta planteada por la tarea “Planes tarifarios”, ésas no eran sus metas principales. Más bien, la pregunta (a saber: ¿en qué momento se ahorraría dinero al suscribirse en la Compañía A?), constituyó un medio para que salieran a la luz ideas relacionadas con el punto de intersección, la pendiente y la intersección con el eje *y*, así como con el comportamiento de los sistemas de ecuaciones lineales. Resultaron fundamentales para la lección de Nicolás las preguntas que planteó con el propósito de comprometer a sus estudiantes en la labor de dar sentido a la situación y para que observaran la forma en que representaciones tan diferentes brindan pistas para saber el comportamiento de las funciones. También resulta valioso examinar la manera en que Nicolás ayudó a sus estudiantes a que efectuaran conexiones importantes haciendo públicas y explícitas las ideas matemáticas.

Ideas matemáticas: el significado del punto de intersección

La primera meta de Nicolás fue que los estudiantes reconocieran que el punto de intersección es el lugar donde dos funciones tienen los mismos valores *x* y *y*. Algunos hicieron referencia al hecho de que ambos planes cuestan lo mismo para los 50 minutos (líneas 280-281; 290) y eso sucedía en donde las dos rectas se cruzaban (líneas 291-292; 307-308). En realidad María utilizó la expresión “punto de intersección” por primera vez (líneas 316-317) al describir el modo en que la tabla ofrecía pistas para saber cómo sería la gráfica. Si bien quizá se tenía una comprensión implícita del punto de intersección, Nicolás preguntó sin rodeos al grupo qué significaba para el problema el punto de intersección (líneas 363-365). Luego apresuró a Yolanda hasta lograr que estableciera que es el punto en donde “*ambos* (el costo y los minutos) eran lo mismo” (líneas 368-370). Por tanto, Nicolás la ayudó a conectar de manera explícita la idea de que los dos planes tienen los mismos valores *x* y *y* en un punto, de que las dos rectas se cruzan en el punto de intersección y lo que éste significa dentro del contexto del problema.

Ideas matemáticas: las funciones intercambian posición en el punto de intersección

La segunda meta de Nicolás para la lección consistió en que sus estudiantes comprendieran que dos funciones “intercambian posiciones” en el punto de intersección. Esta idea surgió primero cuando Tere estaba explicando la forma en que su equipo determinó en qué momento la Compañía A sería más barata que la B: “B era más barata antes de los 50 minutos, y A era más barata después” (líneas 372-373). Aunque Nicolás no se detuvo en esto de inmediato, volvió a esa idea más adelante y les pidió a los estudiantes que analizaran si estaban de acuerdo o en desacuerdo con la afirmación de Tere y que dijeran por qué (líneas 373-375). Esto propició que los estudiantes especularan que el fenómeno se relacionaba con el hecho de que la compañía con una renta mayor costara menos por minuto (líneas 378-379), que la que inicia con una tarifa más alta y que a la larga resultaría más barata (líneas 379-380), y que el plan B tiene mayor “inclinación” que el A, y en consecuencia aumenta con mayor rapidez (líneas 399-401). Lo que resultó fundamental para este análisis fue el resumen hecho por Nicolás de las ideas que estaban en discusión (líneas 385-388): “Así que César y Lili están haciendo énfasis en que si bien el plan A cuesta más que el B para cero minutos, en vista de que su costo por minuto es menor que el del plan B, en algún punto será más barata. Y ya hemos determinado que ese punto es el de 51 minutos. ¿Alguien tiene alguna pregunta?" En ese punto, Nicolás consolidó las ideas que se habían presentado mediante un enunciado claro y conciso, haciendo que los estudiantes lo reconsideraran. Al dejarlo abierto para una exploración adicional, estaba invitando a los estudiantes a que continuaran lidiando con la idea, a fin de ver si podían darle sentido. Esto dio pauta para la pregunta de Leticia respecto de que si dicha idea podría generalizarse estableciendo que sin importar cuál fuese la renta mensual, convendría más un plan que tuviera el costo por minuto más barato (líneas 389-390). Nicolás se percató que era una idea importante y decidió dejar que los estudiantes la exploraran como tarea para la casa mediante la elaboración de planes que pudieran probar tal conjetura. Al hacer esta jugada, Nicolás reconoció la importancia de la contribución de Leticia, brindó una oportunidad para que los estudiantes exploraran de manera independiente la idea –de modo que pudieran percatarse qué sentido le estaban dando– y diseñó una tarea para casa que se adecuaba bien a la lección.

Ideas matemáticas: elaboración de conexiones entre representaciones

La tercera y última meta de Nicolás para la lección tenía que ver con que los estudiantes efectuaran conexiones entre las tablas, las gráficas y las ecuaciones y pudiesen identificar la pendiente y la intersección con el eje *y* en cada representación. Dos de sus movimientos clave hicieron visibles las conexiones. En primer lugar, invitó a los estudiantes a que reflexionaran cómo podrían esbozar una gráfica, sin trazar puntos específicos (líneas 310-313). Este ejercicio los alentó a que pensaran de qué manera se conectaban la tabla y la gráfica. Los estudiantes pudieron discernir que la tasa de cambio constante de las tablas (líneas 314-316; 343-345) señalaban que las funciones debían ser lineales, tener un punto en común era señal de que las rectas se intersecarían (líneas 316-317) y que el valor de los planes para el minuto cero determinaría la intersección con el eje *y* (líneas 319-320; 323; 325). Si bien el equipo 2 podría haber explicado el modo en que trazó su gráfica, resultaba poco probable que su explicación hubiese incitado a la clase a que reflexionara en el hecho de que la información dada en una representación, hace clara otra representación.

El segundo movimiento de Nicolás que ayudó a sus estudiantes a que conectaran las representaciones consistió en pedirles que explicaran en donde se podrían ubicar en la gráfica y en la tabla los valores .04 y 50 de la ecuación para el plan A (líneas 410-411). Aquí los estudiantes comentaron cómo los 4 centavos por minuto estaban implícitos en las tablas porque eran equivalentes a los 80 centavos que costaban 20 minutos (el incremento en la tabla del equipo 1 de la figura 5.4) y a los 40 centavos que se pagaban por 10 minutos (el aumento en la tabla del equipo 3 en la misma figura). Además, analizaron que $50 era el valor de cero minutos en las tablas y que representaba la intersección con el eje *y* en la gráfica (líneas 421-423). Una conexión que Nicolás y sus estudiantes al parecer no hicieron explícita es la ubicación de .04 en la gráfica. Una pregunta específica que abordase este asunto hubiese conducido a una discusión más explícita de la pendiente concebida como tasa razón de cambio en las funciones y el modo en que representa el grado de "inclinación" en las gráficas.

En esta tarea en particular, llevar a cabo conexiones entre distintas representaciones (una meta de la lección) se vinculó de manera directa con llevarlas a cabo hacerlas entre los trabajos presentados por distintos estudiantes. Por ejemplo, cuando se alentó a que los estudiantes idearan la forma en que pudieran hacer un bosquejo de una gráfica sin trazar puntos, hicieron conexiones entre el trabajo que la mayoría del grupo había llevado a cabo cuando elaboraron tablas y el realizado por el equipo 2 al trazar su gráfica. Al estimularlos a que analizaran dónde identificarían a .04 y a 50 en las distintas representaciones, los estudiantes transitaron entre las ecuaciones que el equipo 5 construyó y las tablas y gráficas que otros equipos presentaron.

Resulta importante notar que no siempre emergen de manera natural, a partir de la discusión, las conexiones entre las soluciones, como al parecer sí lo hacen en esta situación. Véase por ejemplo la tarea "Impar + impar = par" que analizamos antes. No resulta claro que los estudiantes se hubiesen percatado de manera espontánea que cada solución (véase figura 5.2) tiene que ver con dos ideas básicas: que un número impar tiene un 1 adicional, del que carece un número par, y que un número par es divisible entre 2. De igual forma, es poco probable que en el grupo del profesor Canales, los estudiantes automáticamente se percataran que el factor de escala de 6 y que el valor unitario de 2.5 resulten fundamentales para las soluciones. Hacer visibles estas ideas mediante el planteamiento de preguntas específicas, serviría para conectar las distintas soluciones entre sí y a éstas con las ideas matemáticas de la lección.

Conclusión

Si bien la anticipación y el monitoreo garantizan que los docentes reflexionen concienzudamente sobre lo que los estudiantes pudieran hacer y decir; amén de que hayan puesto una meticulosa atención al pensamiento del estudiante durante la lección, es mediante la selección, la secuenciación y la conexión que los profesores garantizan que las ideas clave se hagan públicas, de tal manera que todos los estudiantes tengan la oportunidad de dar sentido a los conceptos matemáticos. Aunque existen muchas formas de seleccionar, secuenciar y conectar las respuestas, estas decisiones deben guiarse por lo que el docente está tratando de cumplir en la lección. Por lo tanto, las metas de la lección sirven como un faro hacia donde toda actividad se encamina. Como Hiebert y sus colegas (2007, p. 51) lo enuncian: "Formular metas de aprendizaje claras y explícitas prepara el terreno para todo lo demás".

En el caso de Nicolás Barrios, observamos a un maestro que tomó muy en serio esta idea. Identificó con nitidez sus metas con anterioridad en el proceso de planificación y nunca las perdió de vista, mientras se movía a través de la implementación real de la lección. Aunque podríamos señalar algunas cosas de la lección que pudieran perfeccionarse, el enfoque claro de Nicolás respecto de lo que quería lograr, lo condujo a seleccionar, secuenciar y conectar las respuestas de una manera en que las ideas que deseaba que los estudiantes abordaran se ubicaron en el foro público. Hatano e Inagaki (1991, p. 341) sostienen que: "un grupo, en cuanto totalidad, a menudo tiene una base de datos más abundante para la resolución de problemas, que cualquiera de sus miembros. Es probable que ningún miembro individual adquiera o tenga acceso expedito a todos los fragmentos de información necesarios, pero cada fragmento pertenece al menos a un miembro del grupo". En consecuencia, durante la discusión grupal todos los participantes tienen la oportunidad de "adquirir más fragmentos de información sobre el asunto que está a discusión y comprenderlo de manera más profunda" (Hatano e Inagaki, 1991, p. 346). Aunque Nicolás necesitará hacer un trabajo adicional para evaluar lo que cada estudiante particular aprovechó de la discusión, es probable que la tarea para casa que les asignó brinde pistas que le ayuden a diseñar lecciones subsecuentes.

En los capítulos 4 y 5, nuestra atención se ha centrado en el modo en que se utilizan las cinco prácticas para orquestar una discusión productiva. Como resultado de este enfoque específico, no abordamos en forma explícita otros factores que contribuyen al éxito de dichas prácticas. En el siguiente capítulo, nos centraremos meticulosamente en dos aspectos de la orquestación de una discusión que merece una atención más cuidadosa: plantear preguntas que se centren en ideas importantes y hacer responsables a los estudiantes de su participación activa en la lección.

¡INTENTE ESTO!

- Enseñe la lección que planificó al final del capítulo 4. Recopile datos utilizando la tabla de monitoreo que elaboró y después señale las soluciones que elegirá y el orden en el que secuenciará las presentaciones.
- Tal vez desee grabar un archivo de audio o video de la discusión, de manera que pueda reflejar hasta qué punto usted pudo hacer conexiones entre las diferentes soluciones y entre éstas y las ideas matemáticas que eran centrales en la lección.

CAPÍTULO

6

Cómo asegurar el pensamiento y la participación activos: plantear preguntas adecuadas y hacer responsables a los estudiantes

Las cinco prácticas pueden ayudar productivamente a los docentes en el manejo de las discusiones en el aula, pero no deben permanecer aisladas. Ya hemos analizado la importancia de preparar metas de aprendizaje apropiadas para los estudiantes y de seleccionar tareas educativas que les ofrezcan oportunidades para pensar y razonar. Además, los maestros requieren desarrollar diversas formas para interactuar y comprometerse con los estudiantes mientras trabajan en tareas y comparten su pensamiento con otros compañeros. Esto incluye contar con un repertorio de tipos específicos de preguntas que puedan canalizar el pensamiento de los estudiantes hacia las ideas matemáticas esenciales, así como con métodos para hacerlos responsables de normas rigurosas basadas en la disciplina, que sirvan para comunicar su pensamiento y razonamiento.

¿Por qué la forma en que los docentes interactúan con los estudiantes es tan importante que merece un capítulo aparte? Lo *que* los estudiantes aprenden se entrelaza con el *cómo* lo aprenden. Y gracias a la naturaleza de las interacciones en el aula que se dan entre los maestros y entre éstos y los estudiantes, es que se prepara el escenario para el *cómo* del aprendizaje. Los profesores debieran interactuar con los estudiantes, y éstos con otros estudiantes, en una variedad de maneras que van desde simples sesiones de preguntas y respuestas breves hasta exploraciones más profundas de los conceptos e ideas matemáticas. Cada uno de estos estilos de interacción está vinculado con diversas oportunidades para el aprendizaje del estudiante.

El propósito de este capítulo es doble: ayudar a los docentes a que desarrollen buenas habilidades de cuestionamiento para que los estudiantes asuman el reto de pensar en niveles más profundos, y presentar a los profesores un conjunto de posibilidades discursivas que contribuyan a hacer responsables a los estudiantes por su pensamiento y comunicación durante las discusiones en el aula. Comenzamos identificando e ilustrando preguntas que puedan fomentar el pensamiento de los estudiantes. Después de ofrecer un breve fragmento de la discusión en un aula de la maestra Regina Quiñones, de cuarto grado, analizamos diversos tipos de preguntas que plantea la profesora. En la segunda parte de este capítulo, presentamos acciones que los docentes pueden utilizar para promover la participación de los estudiantes en las discusiones grupales. Se presentarán unos cuantos movimientos discursivos confiables como estrategias para alentar la responsabilidad con la disciplina, la comunidad y el pensamiento riguroso (Chapin, O'Connor y Anderson, 2003).

Plantear preguntas adecuadas

Quizá la más antigua forma de cuestionamiento y la más empleada por parte del docente es lo que suele referirse como el *modelo IRE*, en el que los maestros *inician* una pregunta, el estudiante *responde* (a menudo con dos o tres palabras) y el docente *evalúa* su respuesta como correcta o incorrecta (Mehan, 1979). Los intercambios IRE no contribuyen mucho a que se profundice en la comprensión del problema que el estudiante afronta; más bien enseñan al estudiante a que adivine la respuesta que busca el profesor mediante la formulación de una pregunta. Es más, la autoridad para decidir si una respuesta es correcta o incorrecta reside sólo en el docente y no en algún tipo de razonamiento basado en el contenido, lo cual propicia que el estudiante dependa totalmente de otros en lo que respecta a juzgar la veracidad de sus respuestas matemáticas.

En la década de los noventa, conforme los docentes comenzaron a percatarse del valor que tenía que los estudiantes construyeran sus propios enfoques para resolver problemas cognitivamente fecundos, comenzaron a desechar el modelo IRE. Más que decirles a los estudiantes lo que debían pensar y si sus respuestas eran correctas o incorrectas, los profesores querían fomentar el desarrollo de los estudiantes en lo concerniente a ser pensadores, constructores y evaluadores activos de conocimiento. Por desgracia, la mayoría de los docentes no estaban preparados y no sabía con exactitud cómo hacer esto. Además, muchos estudiantes no estaban listos para este tipo de interacción. Pocos habían tenido la oportunidad de pensar concienzudamente en las tareas matemáticas; estaban acostumbrados a que se les mostraran los pasos que debían seguir para resolver un problema y luego aplicarlos a un conjunto de problemas similares. Incluso a menos estudiantes se les pedía representar o comunicar su pensamiento; a menudo se verificaba su trabajo sólo para determinar si las respuestas eran correctas o incorrectas, por lo que su pensamiento usualmente pasaba desapercibido

A continuación, proporcionamos algunas sugerencias concretas de formas en que los docentes pueden inducir a los estudiantes a reflexionar con mayor ahínco en las tareas cognitivamente desafiantes. Ciertamente, las preguntas adecuadas ayudan. Pueden guiar la atención de los estudiantes hacia características de un problema que se habían pasado por alto antes o pueden liberar su pensamiento de manera que encuentren una nueva perspectiva de lo que se les está pidiendo. Las preguntas adecuadas también obligan a los estudiantes a que articulen su pensamiento de forma que sea comprensible para otro ser humano; a menudo dicha articulación, en sí y para sí misma, actúa como un catalizador para el aprendizaje

La figura 6.1 presenta nueve tipos de preguntas utilizadas por los docentes. Éstas –tomadas del análisis de cientos de lecciones matemáticas hechos por Boaler y Brodie (2004)– cubren la gama completa de preguntas que los profesores plantearon a los estudiantes durante las lecciones observadas. Lo que Boaler y Brodie descubrieron fue que muchos maestros plantearon preguntas principalmente del tipo 1, un hallazgo que guarda consistencia con el modelo IRE analizado. Sin embargo, las clases donde los docentes utilizaron un patrón más diversificado de cuestionamiento condujeron a un logro estudiantil más elevado.

Si bien Boaler y Brodie utilizaron estos tipos de preguntas para documentar lo que estaba ocurriendo en la clase de matemáticas, pueden resultar útiles también para los docentes cuando se trata de ir más allá de recopilar información o de guiar a los estudiantes a través de un procedimiento. Hemos hecho énfasis en tres tipos de preguntas (filas 3, 4 y 5) que sería importante plantear, pues pretenden subrayar las ideas y relaciones relevantes (tipo 3), sondear el pensamiento del estudiante (tipo 4) y generar una discusión entre los estudiantes (tipo 5).

También resulta trascendente lo que estas preguntas *no hacen*: *no* se apropian del pensamiento de los estudiantes al proporcionar demasiada información, al "soltar" la respuesta o al dar un atajo para la misma. Más bien, dan sustento al pensamiento para permitir que los estudiantes reflexionen más y con mayor profundidad sobre las ideas que están a discusión.

	Tipo de pregunta	Descripción
1	Recopilar información, guiar a los estudiantes a través de un procedimiento.	Requiere una respuesta inmediata. Intenta con hechos o procedimientos conocidos. Permite a los estudiantes establecer hechos o procedimientos.
2	Insertar tecnología.	Una vez que las ideas están a discusión, permite el uso del lenguaje matemático correcto para expresarlas.
3	Explorar los significados y/o las relaciones matemáticas.	Señala las relaciones y significados matemáticos subyacentes. Establece vínculos entre las ideas y las representaciones matemáticas.
4	Sondear, lograr que los estudiantes expliquen su pensamiento.	Pide a los estudiantes que articulen, elaboren o clarifiquen ideas.
5	Generar discusión.	Solicita contribuciones de otros miembros de la clase.
6	Vincular y aplicar.	Señala las relaciones entre las ideas matemáticas y las matemáticas, así como entre éstas y otras áreas de estudio o de la vida.
7	Ampliar el pensamiento.	Amplía la situación que se está discutiendo hacia otras situaciones en donde pueden utilizarse ideas similares.
8	Orientar y centrar.	Ayuda a los estudiantes a enfocarse en aspectos o elementos clave de la situación, a fin de permitir la resolución del problema.
9	Establecer el contexto.	Aborda aspectos externos de las matemáticas, con el propósito de permitir que se establezcan vínculos con esta disciplina.

Figura 6.1. Tipos de preguntas utilizadas por los docentes (tomado de Boaler y Brodie [2004, p. 776]).

Como se analizó en el capítulo 5, las preguntas deben plantearse en los momentos apropiados durante las interacciones en el aula; tales momentos están determinados por las metas de la lección y por el progreso que los estudiantes muestran en el logro de dichas metas. Los docentes que se prepararon meticulosamente, anticipando las respuestas de los estudiantes a las tareas educativas, estarán en una mejor posición para conocer cuándo y cómo utilizar estas preguntas.

Exploración de las preguntas en el aula de Regina Quiñones

El siguiente fragmento (adaptado con permiso del Instituto para el Aprendizaje de la Universidad de Pittsburg) se extrajo de una clase de cuarto grado de la docente Regina Quiñones. La profesora y los estudiantes habían comenzado una unidad de geometría del texto "Matemáticas cotidianas" [*Everyday Mathematics*]. Antes de comenzar la lección que se muestra en el siguiente diálogo, los estudiantes clasificaron las figuras como polígonos y no polígonos e identificaron las características de aquéllos. También calcularon el área de rectángulos y cuadrados. La meta de la docente para esta lección consistió en que los estudiantes construyeran la fórmula para determinar el área de un triángulo rectángulo mediante la manipulación, sobre una hoja cuadriculada, de triángulos rectángulos prefabricados de cartón. Quería que los estudiantes se percataran de que las áreas de los triángulos rectángulos pueden calcularse ya sea encajando el triángulo en un rectángulo y luego determinar el área de éste y dividirla entre 2, o bien, dividiendo uno de los lados del triángulo entre 2 y luego multiplicándolo por el otro lado del triángulo (la fórmula canónica del área de un triángulo rectángulo: $A = ½\ bh$).

Regina Quiñones había desarrollado una cultura de resolución de problemas que animaba a los estudiantes a formular y descubrir modos de solución y además los involucraba en discusiones concernientes a tales modos. La siguiente discusión tuvo lugar después de que los estudiantes trabajaron en pequeños equipos para determinar una fórmula o regla a fin de calcular el área de los triángulos que se muestran en la figura 6.2. A los estudiantes se les proporcionó papel cuadriculado, reglas, tijeras y triángulos de cartón para realizar su trabajo.

ACTIVIDAD DE INVOLUCRAMIENTO 6.1

Lea el fragmento de la clase de Regina Quiñones. Utilizando las preguntas tipo, sombreadas en la figura 6.1, clasifique las preguntas de la docente que aparecen en la transcripción.

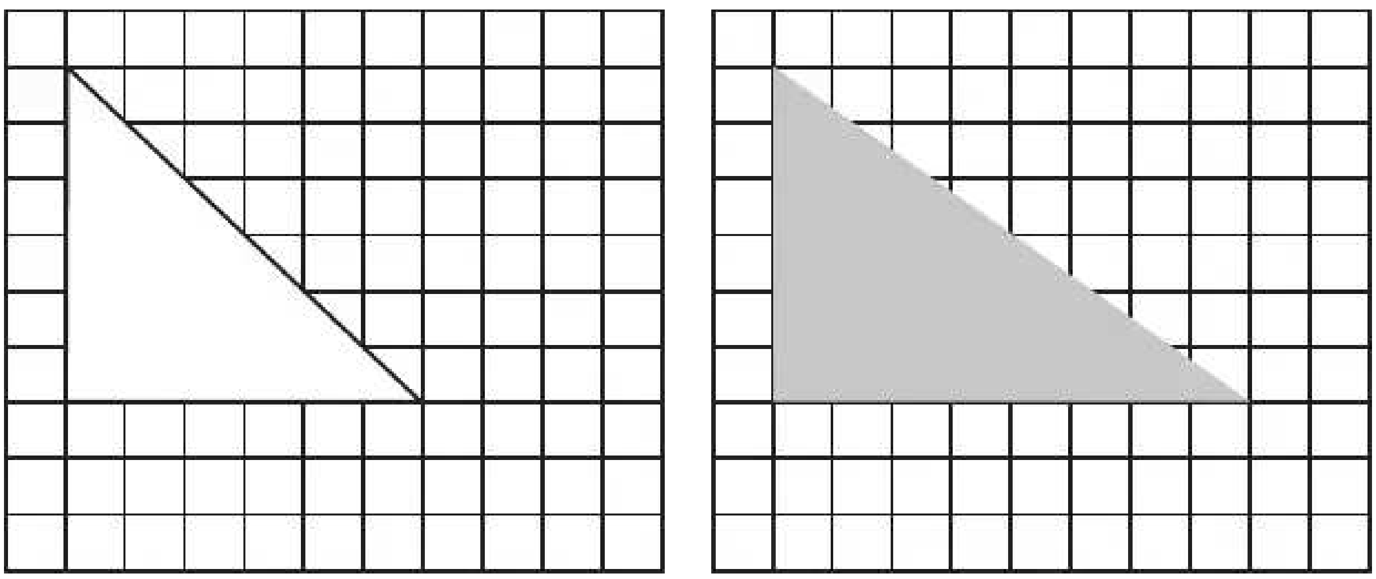


Figura 6.2. Triángulos rectángulos que la maestra Quiñones dio a sus estudiantes.

Profesora Quiñones: Muy bien, chicos, voy a interrumpirlos. Necesito que por un momento pongan atención a esto. Además, estoy escuchando todos esos hallazgos que descubrieron y oí que todos ustedes estaban diciendo algunas cosas. Necesito que alguien que haya encontrado una regla o fórmula para calcular el área de un triángulo la comparta conmigo. Tamara…

Tamara	[al principio es inaudible]: …Cuando calculamos… Tuvimos dos de ellos aquí. Tuvimos la longitud multiplicada por el ancho que estaba dividida entre 2.
Profesora Quiñones	[Escribe sobre un acetato: *(l x a) ÷ 2)*]: ¿Cómo llegaron a eso?
Tamara:	Porque cuando cortas el cuadrado a la mitad, tienes una mitad y pues cuando tienes, pues 36, entonces es todo el cuadrado, así que la mitad es 18, así que si tenías otro cuadrado… cualquier otro, y tú multiplicaste, mhhh, la longitud por el ancho, y luego lo dividiste a la mitad, llegas a tu respuesta.
Profesora Quiñones:	¿Cómo sabes que hay que dividir? ¿De dónde deduces esta división entre 2? Tengo curiosidad por saber cómo llegaste a eso.
Tamara:	Cuando empezamos con todo el cuadrado, se tenía 36. Pero luego lo tuviste que cortar a la mitad para tener un triángulo.
Profesora Quiñones:	¿Por qué…? Me pregunto, ¿por qué tienes que hacer eso?
Tamara:	Porque, mhhh, porque así tuvimos un triángulo. Ahora sabemos cuántas mitades hay. Y en cada una tenemos 18 para cada uno de nuestros cuadrados.
Profesora Quiñones:	Muy bien, así que estás diciendo que el triángulo abarca una mitad del cuadrado, y puesto que pudiste calcular el área de éste, sólo tomaste la mitad de él para determinar el área del triángulo, ¿cierto?
Tamara:	Así es.
Profesora Quiñones:	¿Hay otra forma de…? ¿Alguien puede decirme o compartir conmigo otra manera de que se pueda escribir la misma fórmula y verificar si funcionaría? Quique.
Quique:	Mhhh… La mitad… mhhh la mitad de la longitud por el ancho.
Profesora Quiñones:	¿Es lo mismo?
Quique:	Síiiii.
Profesora Quiñones	[escribe: ½ *(l x a)*]: ¿David?
David:	Síiii, porque cuando escribes 2, es otra forma de decir "la mitad".
Profesora Quiñones:	¡Ah!, cuando dices "dos"… ¿Siempre que yo diga "dos", estaré diciendo "la mitad"?
David:	No, cuando digas "el largo multiplicado por el ancho que *está divido entre dos*".
Profesora Quiñones:	¡Ah! "*Dividido entre dos*".
David:	Es como si dijeras: "multiplicado por la mitad".
Profesora Quiñones:	¿Qué tal si hice esto? Lo escribiré con rojo para que puedan verlo. ¿Qué tal si hice esto? [Escribe ½ *(l x a)* enseguida de *(l x a) /2* en el acetato.] ¿Significa lo mismo? Necesito que alguien que no haya participado me ayude. ¿Piensan que significa lo mismo? ¿Luis?
Luis:	Creo que con ambas puede obtener 18, porque ambas son la misma cosa.
Profesora Quiñones:	¿Cómo lo sabes?

Luis: Pienso que es lo mismo porque, mhhh, la mitad de la longitud multiplicada por el ancho es igual a 18. La mitad de 36 es 18. Creo que es lo mismo porque, mhhh, es sólo otra forma de decir “36 dividido entre 2”.

Profesora Quiñones: ¿Todos están de acuerdo con Luis? ¿Qué opinas Julián?

Julián: Estoy de acuerdo con él: son la misma cosa. Tenemos la mitad del largo multiplicada por el ancho. Es justo el opuesto de lo otro. Es sólo la longitud multiplicada por el ancho y luego los dividimos entre 2.

Profesora Quiñones: Muy bien. Así que podríamos expresar la fórmula como (*l* x *a*/2, o como ½ (*l* x *a*). Voy a pasar al siguiente problema. ¿Cómo podemos representar el área de este triángulo mediante una regla o fórmula?, ¿Ángela? [Traza un triángulo rectángulo con una altura de 6 y una base de 8 cuadros en el papel cuadriculado que está sobre el proyector, como se muestra en la figura 6.2.]

Ángela: Podrías convertirlo en un cuadrado y luego quitarle la mitad: 48/2 = 24. El triángulo mide 24 cuadrados.

[La maestra Quiñones lleva a Ángela hacia el proyector, donde dibuja un rectángulo de 6 x 8 cuadrados alrededor del triángulo; la maestra escribe (l x a)/2 al lado del dibujo de Ángela.]

Profesora Quiñones: Bien. ¿Alguien puede darme otra forma de calcular el área de este triángulo?

Tania: Se podría cortar la longitud a la mitad y luego multiplicarla por el ancho.

Profesora Quiñones: Así que ahora estás diciendo que puedo multiplicar la mitad de la longitud por el ancho. Ahora ya no estoy segura de dónde tienen que colocarse los paréntesis o si incluso son necesarios. ¿Puedo escribir esto de la siguiente forma? [escribe ½ x l x a en el acetato del proyector]

Tania: Ajáaa.

Profesora Quiñones: ¿Cómo sabes que puedo hacer esto?

Tania: Porque ½ de 8 es 4 y 4 x 6 es 24. Es el mismo número que teníamos antes.

Profesora Quiñones: Así que, ¿*siempre* con esta fórmula [señala ½ x *l x a*] puedo obtener la misma respuesta que con las otras dos que habíamos estado usando? ¿Cómo podríamos estar seguros?

Tania: Carolina y yo cortamos la longitud a la mitad. Cuando colocamos el pedazo pequeño en el triángulo más grande, pudimos formar un rectángulo…

Profesora Quiñones: ¿Puedes acercarte al proyector y mostrarnos lo que quieres decir?

[Tania dibuja sobre un acetato y explica cómo ella y Carolina giraron el “pedazo pequeño” y lo colocaron sobre la hipotenusa para formar un rectángulo con un largo que es igual a la mitad de la del rectángulo original de 6 x 8 (figura 6.3).]

Tania: Así que el área de este “nuevo rectángulo” será de 4 x 6 o 24.

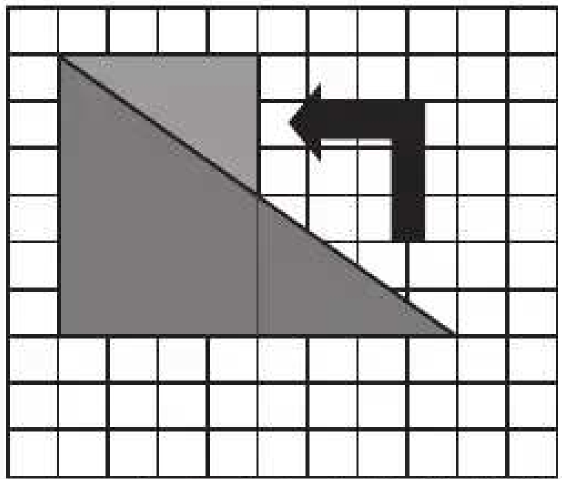


Figura 6.3. Ilustración de cómo Tania justifica la fórmula ½ x *l* x *a*.

Profesora Quiñones: Damián, ¿puedes acercarte al proyector y, utilizando el diagrama de Tania, repetir lo que dijo que Carolina hizo?

Damián: Cortaron el triángulo en dos pedazos, en la marca que señala la mitad de la longitud de la base: aquí. Luego tomaron el pedazo cortado y lo colocaron, como una pieza de rompecabezas, acá arriba para formar un nuevo rectángulo. Si calculas el área del nuevo rectángulo, será 4 x 6 o 24.

Profesora Quiñones: Gracias, Tania, y gracias, Damián. Así que Tania nos acaba de mostrar cómo al tomar ½ del largo, o lo que Damián llamó la base, y multiplicarla por el ancho, puede darnos exactamente la misma área que si tomamos ½ del largo y la multiplicamos por el ancho del rectángulo más grande. ¿Hay otra manera? Jaime, hoy no te hemos escuchado.

Jaime: [Después de una pausa considerable]: Puedes cortar el otro lado del triángulo a la mitad y tener de todas formas la misma respuesta.

Profesora Quiñones: ¿Nos puedes mostrar cómo? [Espera, mientras Jaime muestra el arreglo mostrado en la figura 6.4.] Jaime, dinos por favor lo que hiciste.

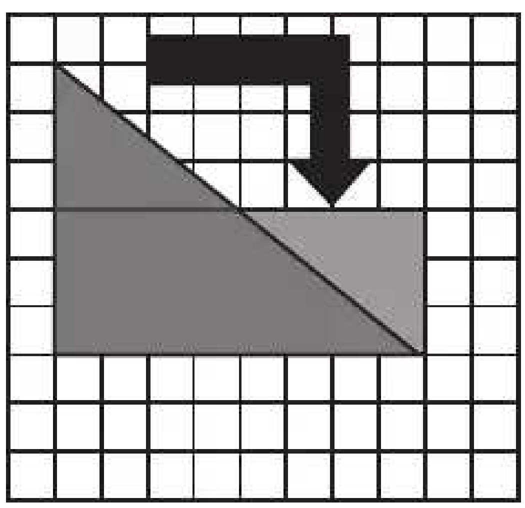


Figura 6.4. Ilustración de cómo Jaime justifica la fórmula ½ x *a* x *l*.

Jaime: En vez de cortar los 8 abajo, corté el otro lado a la mitad. Con eso obtuve 3. Luego volteé ese triángulo pequeño y lo coloqué en la esquina. Así se formó un nuevo rectángulo que medía 8 x 3.

Profesora Quiñones: ¿Cuál es la diferencia entre lo que hicieron Jaime y Tania?

Victoria: Tania tomó ½ de la base y Jaime tomó ½ del lado. En cualquiera de las dos formas, obtuvimos la misma respuesta.

Profesora Quiñones: ¡Exacto! Si queremos llamar a la base "largo" y al lado "ancho" [señala en el triángulo de 6 x 8 su base y su lado, respectivamente], lo que Tania y Jaime nos han mostrado es la equivalencia de estas dos fórmulas [escribe ½ x *l* x *a*, y ½ x *a* x *l* en el acetato]. Y recuerden que antes vimos que ½ x *l* x *a* era también lo mismo que (*l* x *a*) /2. Todas estas fórmulas son iguales y servirán para obtener el área de un triángulo rectángulo.

Análisis de las preguntas en el salón de clases de Regina Quiñones

Este fragmento proporciona ejemplos de algunos de los tipos de preguntas contenidas en la figura 6.1. Usualmente el docente comienza a cambiar su estilo de interacción al "probar" preguntas del tipo 5 "generar discusión". Vemos que Regina Quiñones usa preguntas de este tipo en diversas coyunturas. Su enunciado de inicio (líneas 4-5), "Necesito que alguien que haya encontrado una regla o fórmula para calcular el área de un triángulo la comparta conmigo", resulta un buen ejemplo del modo en que los docentes pueden comenzar una discusión grupal, pidiendo ideas o estrategias de solución a los estudiantes. Un poco más adelante en la discusión (líneas 27-29), Regina Quiñones pide contribuciones adicionales preguntando: "¿Hay otra forma de…? ¿Alguien puede decirme o compartir conmigo otra manera de que se pueda escribir la misma fórmula y verificar si funcionaría?" Ésta también es una buena forma de abrir la puerta a contribuciones adicionales de los estudiantes, en particular a las estrategias alternativas. También se pueden plantear preguntas que generan discusión para tratar de obtener contribuciones de aquellos estudiantes que no participan, como se ilustra en las líneas 43-44, cuando la profesora expresa que necesita oír a los estudiantes que todavía no han participado. Más tarde, una vez más da pauta para la discusión valiéndose de preguntas generadoras, concernientes al segundo problema (el triángulo con altura de 6 unidades y una base de 8 unidades; líneas 57-59) y busca otras formas para determinar el área de un triángulo (líneas 64-65).

Las preguntas que generan discusión son importantes, pero deben emplearse a la par con otros tipos de preguntas para profundizar en la discusión. Las *preguntas para sondear* (el tipo 4 de la figura 6.1) pueden usarse para ayudar a los estudiantes a explicar su pensamiento ("¿Cómo llegaron a eso [(*l* x *a*) ÷ 2)]?", línea 9 y ("¿Cómo sabes que hay que dividir?", línea 15). Ambas preguntas obligaron a que Tamara articulara el razonamiento que estaba detrás de su pensamiento, al explicar que el triángulo puede concebirse como si estuviera dentro de un cuadrado de 6 x 6 y ocupara la mitad del área de dicho cuadrado. Utilizando su saber previo de cómo calcular el área de un cuadrado (*l* x *a*), Tamara dividió el área resultante (36) entre 2, a fin de calcular cuál sería la mitad del área del cuadrado, o sea el área del triángulo.

Más tarde, Regina Quiñones empleó de nueva cuenta una pregunta para sondear, para averiguar si el estudiante tenía un concepto erróneo y, en caso negativo, para que representara con mayor claridad su pensamiento. Después de que David por casualidad enunció: "…cuando escribes 2, es otra forma de decir 'la mitad'" (líneas 33-34), Regina sondea: "¡Ah!, cuando dices 'dos'… ¿Siempre que yo diga 'dos', estaré diciendo 'la mitad'"?, lo cual resulta ser muy útil, en vista de que David a continuación aclara que "dividido entre dos" es lo mismo que "multiplicado por la mitad".

La mayoría de los docentes descubre que las preguntas para sondear son tan fáciles de emplear como las que generan discusión y usualmente aprenden con rapidez ese estilo de cuestionar. También los estudiantes se acostumbran rápidamente a que se les pregunte los *porqués* y los *cómos* de su pensamiento y con frecuencia los proporcionarán sin que se les pida. No obstante, los docentes necesitan aprender el modo de discernir cuándo se espera que este tipo de preguntas reditúe y cuándo no. Pedir a los estudiantes que expliquen más su pensamiento, tiene sentido sólo si el problema tiene "recovecos" y si el método de aproximación del estudiante clarifica algunos conceptos o ideas subyacentes, como fue el caso en el aula de Regina Quiñones. Tal vez se piense que la explicación del estudiante respecto de que el triángulo pudiese concebirse como la mitad de un cuadrado, aclaró el modo en que los estudiantes son capaces de utilizar lo que conocen de una forma novedosa, a fin de resolver algo que desconocen. También surgieron y estuvieron disponibles para una discusión posterior los conceptos de área y de lo que significa tomar la mitad de algo.

Las preguntas de sondeo no tienen que exigir explicaciones discursivas. Hubo otro momento en la lección en el que resultó muy útil una pregunta de sondeo cuando la profesora Quiñones estaba proponiendo públicamente un enigma al preguntar si siempre ½ x *l* x *a* daría la misma respuesta que ½ (*l* x *a*). Después de que Tania hizo la observación de que ella y su compañera Carolina habían utilizado tijeras para cortar un triángulo de 6 x 8 unidades para luego girar la pieza más pequeña, Regina sondeo su pensamiento al pedir a Tania que mostrara en el proyector lo que habían llevado a cabo (líneas 83-84). Esta exposición pública sobre la forma en que la representación geométrica y la simbólica "armonizaban" constituyó un paso importante para consolidar la idea de que cualquiera de estas dos fórmulas siempre funcionaría con los triángulos rectángulos.

El fragmento de la lección muestra que Regina Quiñones usó preguntas del tipo 3 (exploración de los significados y/o relaciones matemáticas) en dos coyunturas críticas. En la primera, empleó preguntas del tipo 3 para remarcar la cuestión de que dividir entre 2 es lo mismo que multiplicar por ½ (líneas 35-36; 39-42). El principio matemático general que viene a colación aquí es que la multiplicación por una fracción es lo mismo que dividir por su recíproco ($a \times b/c = a \div c/b$).

En el segundo caso la profesora empleó, más adelante en la lección, preguntas del tipo 3 para ventilar la idea de que ½ (*l* x *a*) es lo mismo que ½ x *l* x *a* y que ½ x *a* x *l*. Esta experiencia hace énfasis en las propiedades conmutativas y asociativas de la multiplicación. Por ejemplo, en las líneas 69-72, Regina Quiñones pregunta si puede escribir ½ (*l* x *a*) como ½ x *l* x *a* (pregunta, en otras palabras, si al agrupar se cambia algo). Aunque no se refiere de manera explícita a las propiedades, los estudiantes estaban estableciendo con claridad la equivalencia entre diversas maneras de secuenciar y agrupar los factores por medio de su pensamiento y razonamiento.

Un poco más adelante, Regina planteó la pregunta "¿Cómo podríamos estar seguros?" Es decir, ¿cómo podríamos saber con seguridad que siempre tendremos la misma respuesta utilizando ya sea ½ (*l* x *a*) o ½ x *l* x *a* (líneas 76-78)? Esta pregunta conduce a la demostración de Tania de cómo al cortar y girar el triángulo se tiene exactamente la misma área que al tomar ½ del triángulo más grande de 6 x 8 unidades. La idea matemática que está en juego aquí es la equivalencia, la cual se muestra de manera simbólica utilizando las propiedades conmutativa y asociativa y de modo geométrico a través de diagramas.

Acciones para guiar la discusión y asegurar la responsabilidad

Muchos docentes de matemáticas creen que los estudiantes aprenden compartiendo sus ideas, escuchando y criticando las ideas de otros y recibiendo de otros una crítica a sus enfoques para la resolución de problemas. Las discusiones en el aula en donde estas actividades ocurren no surgen de la nada. Más bien, se planifican por medio de la anticipación y el monitoreo; se orquestan a través de la selección, la secuenciación y la conexión, y se llevan a cabo gracias a una hábil utilización, por parte del docente de acciones discursivas identificables.

Casi todas las buenas discusiones en el aula comienzan de la misma manera: invitando a un estudiante a que comparta la forma en que resolvió un problema particular. No obstante, después de la respuesta inicial del estudiante, la discusión del grupo diverge: se separa en discusiones fructíferas (relativamente raras) y en improductivas del tipo "mostrar y decir" (mucho más frecuentes). Al parecer, invitar a los estudiantes a que revelen su pensamiento es algo sumamente sencillo de aprender, y la mayoría de ellos se adaptan. Hemos presenciado muchas discusiones grupales en las que un estudiante tras otro se para enfrente del aula para explicar la manera en que resolvieron el problema. Sin embargo, suele suceder que los docentes consideren que todas las presentaciones sean igual de buenas, hacen algunas preguntas a los estudiantes y no vinculan entre sí sus distintas presentaciones o las ideas matemáticas que están investigándose.

Resulta mucho más difícil aprender la manera de dar seguimiento a las ideas que surgen en tales representaciones de los estudiantes. La consecución de esta habilidad distingue a los buenos docentes de los novatos. En este libro hemos proporcionado sugerencias concretas para orquestar una discusión productiva que se fundamente en las cinco prácticas. Sin embargo, además de tales prácticas, los docentes requieren un *conjunto de acciones* que les ayuden a conducir discusiones grupales en las que los estudiantes compartan su pensamiento entre ellos de una manera respetuosa y académicamente productiva.

En esta sección identificamos acciones particulares que los docentes eficaces emplean para ubicar ventajosamente a los estudiantes tanto en su relación entre ellos como en su relación con las matemáticas. Ubicarse en relación con otros estudiantes implica sentir que se tiene derecho y que se espera que uno cuestione y comente las ideas que otros han presentado, así como esperar que se consideren con seriedad las ideas, las preguntas y el entendimiento de uno. Situarse en relación con las matemáticas significa sentir que se tiene derecho y que se espera que uno plantee preguntas y llegue a conclusiones mediante una pesquisa razonada de los conceptos, principios y métodos de la asignatura, en contraste con la simple aceptación de un modo acrítico y superficial de aquello que se le dice a uno.

Si bien existen muchas acciones que los docentes pueden llevar a cabo para conducir discusiones grupales productivas, en este libro hemos decidido enfocarnos en cinco: (1) el parafraseo, (2) pedir a los estudiantes que replanteen el razonamiento de otro estudiante, (3) solicitar a los estudiantes que apliquen su propio razonamiento al razonamiento de un tercero, (4) alentar a los estudiantes a una mayor participación y (5) utilizar el tiempo de espera (Chapin, O'Connor y Anderson, 2003, pp. 12-16).

Parafraseo oral

Las contribuciones de los estudiantes, sobre todo en los primeros intentos por que se den discusiones en el aula, a menudo son difíciles de oír y con frecuencia de entender. Aun así, los estudiantes necesitan tener acceso a lo que un compañero suyo haya dicho, si se espera que reflexionen y comenten al respecto. Por esto, parafrasear oralmente una parte o toda la respuesta de un estudiante suele resultar una valiosa acción para los docentes.

Cuando se parafrasea oralmente la contribución de un estudiante, es importante que el docente evite despojar al estudiante de su autoría. Si éste expresó la contribución a un volumen muy bajo, el docente sólo deberá (después de brindarle al estudiante la oportunidad de decirla a mayor volumen) repetirla, de modo que todos puedan escucharla. Si la idea no se expresó apropiadamente y por lo tanto resultó difícil que la captaran otros estudiantes de la clase, el maestro deberá replantearla para hacerla más comprensible, pero sin alterar la idea. Si se pone en duda el significado en su totalidad, el docente habrá de pedir al estudiante que responda a la contribución parafraseada oralmente y que verifique si es correcta o no lo es.

En las líneas 23-25, podemos encontrar en la clase de Regina Quiñones un ejemplo de parafraseo oral de la discusión, concerniente a determinar el área de triángulos rectángulos. Después de brindarle a Tamara varias oportunidades para que explicara cómo sabía que al dividir el área de un cuadrado entre 2 se obtenía el área del triángulo rectángulo, la docente no estaba convencida de que Tamara hubiese establecido con suficiente claridad su razón, de modo que todos los del aula "la hubiesen captado". Por eso parafraseó la contribución de Tamara diciendo: "Muy bien, así que estás diciendo que el triángulo abarca una mitad del cuadrado, y puesto que pudiste calcular el área de éste, sólo tomaste la mitad de él para determinar el área del triángulo". Después de replantear la docente su interpretación de lo que Tamara expresó, comprobó de nuevo con la estudiante la veracidad diciendo: "¿cierto?"

Algunas veces el parafraseo oral puede realizarse de manera eficaz después de que varios estudiantes ya hayan participado. Por ejemplo, durante la fase en la que se comparte y se resume, correspondiente a la tarea "Planes tarifarios" y analizada en el capítulo 5, Nicolás Barrios quiso asegurarse de que los estudiantes comprendieran por qué a largo plazo el plan A resultaba más barato que el B. Algunos estudiantes ofrecieron explicaciones parcialmente coherentes: César comentó: "Así que la que cobra más, cuesta más si sólo hablas poco tiempo, pero si hablas más, a la larga se vuelve más barata. Es como si la renta se repartiera entre más minutos" (líneas 379-381). Un poco más adelante, al hacer referencia a su gráfica, Lili dijo: "Bueno, puedes ver que el plan A comienza en 50 y sube, pero el plan B comienza en 20 y aumenta. Pero B está más inclinada que A, así que sube más rápido… porque el costo por minuto es mayor (líneas 384-387)". Después Nicolás Barrios resumió: "Así que César y Lili están haciendo énfasis en que si bien el plan A cuesta más que el B para cero minutos, en vista de que su costo por minuto es menor que el del plan B, en algún punto será más barato" (líneas 385-386). Este parafraseo oral sirvió para reafirmar el punto principal de que la característica de "costo por minuto" de los planes era la razón por la que, a la larga, el plan A fuese más barato que el B.

Solicitar a los estudiantes que replanteen el razonamiento de otro

En vez de que los estudiantes hagan la paráfrasis oral de sus propias ideas, los docentes pueden pedir a un tercero que reformule, con otras palabras, lo que un estudiante acaba de expresar. De nuevo, no se trata de interpretar, evaluar o criticar la respuesta. El replanteamiento de la contribución de un estudiante por parte de sus compañeros significa que dicha contribución resulta muy importante y vale la pena subrayarla. De esta manera, el maestro le está diciendo al autor que sus ideas se están tomando en serio y además hace saber a los demás integrantes del grupo que tienen una segunda oportunidad para aprender algo en verdad relevante, y que más vale que estén preparados, pues alguno de ellos puede ser la siguiente persona a la que le pida que replantee la contribución de uno de sus compañeros. Un docente debe pedir a un estudiante que replantee lo que otro expresó, sólo si las ideas son claras y comprensibles.

Un ejemplo de cómo un estudiante replanteó lo que otro dijo se ilustra en las líneas 90-93 y 87, en la discusión que propició Regina Quiñones en el aula. Tania acababa de mostrar cómo ½ x l x a se interpretaba geométricamente, al cortar y girar un rectángulo de 6 x 8 unidades. Era el momento clave en la discusión porque vinculó la fórmula canónica del área del triángulo rectángulo [A = (½ bh)] con la representación geométrica que exponía el nuevo arreglo de las dos subáreas del triángulo para formar un rectángulo de 6 x 4 unidades, con la misma área. Al pedirle a Damián que se acercara al proyector para reformular lo que Tania acababa de hacer, la docente hizo énfasis en la importancia del trabajo de Tania, verificando si otros estudiantes habían seguido su razonamiento y dando otra oportunidad a todos para que se percataran de la relación entre una representación geométrica y otra simbólica. Al utilizar un lenguaje que no era idéntico al de Tania, Damián proporcionó a los estudiantes un acceso alternativo al razonamiento de ella.

Solicitar a los estudiantes que apliquen su propio razonamiento al razonamiento de un tercero

Comparar el razonamiento propio con el de otros resulta importante para las discusiones productivas en el aula. Algunas veces dos estudiantes descubren que están de acuerdo. Otras, que sus formas de razonamiento podrían diferir, pero ambas son correctas. Esta experiencia ofrece una oportunidad para descubrir cómo dos senderos distintos pueden conducir a la misma comprensión o a la misma solución. Por último, los estudiantes pueden percatarse de que sus razonamientos son diferentes de los de otros y de que no están de acuerdo en las ideas o soluciones fundamentales de un problema, lo cual hace manifiesta la necesidad de averiguar cuál es el razonamiento correcto.

Todos estos escenarios brindan a los estudiantes oportunidades para perfeccionar su comprensión de las matemáticas y de la manera en que funcionan. Para los docentes, la clave reside en apremiar a sus estudiantes para que den más que su consentimiento o su disenso y para justificar su acuerdo o desacuerdo.

En la lección de los "Planes tarifarios" (capítulo 5), una de las metas que Nicolás Barrios estableció para los estudiantes consistía en llevar a cabo conexiones entre las distintas representaciones de los dos planes tarifarios. Casi al final de la lección, él sabía que la mayoría de los estudiantes habían razonado correctamente sobre la representación en forma de tabla y, de igual forma, que aquellos que habían realizado representaciones simbólicas (ecuaciones) también habían razonado bien. Ahora quería que fuesen capaces de "encontrar" su razonamiento dentro del "espacio" de la representación de otros.

Nicolás Barrios le pidió a Tomás que explicara la manera en que su equipo obtuvo la ecuación de cada plan (líneas 430-431). Cuando éste terminó de explicar el modo en que su equipo utilizó en cada plan el costo por minuto para multiplicarlo por el total de minutos y luego sumarle la tarifa mensual para obtener las ecuaciones, el profesor preguntó a otros equipos –los estudiantes que comenzaron usando tablas y que no formularon ecuaciones– qué pensaban sobre lo que Tomás estaba diciendo. En esencia, les pidió que aplicaran su propio razonamiento respecto de las tablas al razonamiento del equipo de Tomás sobre sus ecuaciones. Esto propició una buena discusión en la que uno obtendría el coeficiente de m (.04 para el plan A) y la tarifa mensual constante en las tablas (líneas 432-439).

De igual forma, Regina Quiñones deseaba asegurarse (línea 50) de que todos estuvieran de acuerdo en cuanto a la equivalencia de ½ (l x a) y (l x a)/2. Después de que Luis afirmó que las dos expresiones eran iguales y lo justificó, la profesora preguntó: "¿Todos están de acuerdo con Luis? ¿Qué opinas, Julián?" Éste procedió a dar su versión del porqué las expresiones son iguales: "Estoy de acuerdo con él, son la misma cosa. Tenemos la mitad del largo multiplicada por el ancho. Es justo lo contrario de lo otro. Es sólo el largo multiplicado por el ancho y luego los dividimos entre 2". En este caso, el razonamiento de todos los estudiantes concordaba (así como con el de los dos anteriores participantes: Quique y David), pero cada estudiante enunció el caso de una manera distinta. En vista de que la equivalencia de estas dos expresiones constituía un punto importante que debía establecerse antes de continuar la lección, el hecho de que los estudiantes aplicaran su propio razonamiento al de otros estudiantes, resultó ser una forma en que Regina Quiñones propició que se diera sentido a esta idea y se apuntalara y a que se haya formulado de maneras distintas.

Alentar a los estudiantes a una mayor participación

Después de poner sobre la mesa de discusión algunas ideas iniciales, se puede pedir que se integren más estudiantes. La discusión se enriquece si se fomenta que contribuya un mayor número de estudiantes. La invitación para que haya un mayor grado de participación puede extenderse de una manera abierta-cerrada, cerca del momento de cierre de un punto importante ("¿Alguien piensa distinto o quiere comentar algo sobre lo que hemos estado hablando?"), o de un modo más estratégico. Por ejemplo, en el capítulo 5 observamos que Nicolás Barrios estaba tratando de que sus estudiantes consideraran lo que aquellos estudiantes que trazaron gráficas para los dos planes tarifarios pudieron haber utilizado como el fundamento para sus bosquejos. Después de discutir la manera en que los estudiantes supieron cómo colocar los puntos en (0,20) y (0,50), la conversación se encauzó hacia la observación de que las gráficas eran líneas rectas. Cuando Nicolás Barrios apremió a María para que explicara por qué había afirmado que la gráfica era lineal, obtuvo una respuesta a medias: "…se mantienen en la misma cantidad, así que por eso pensé que son lineales" (líneas 340-341). En ese momento, el docente abrió la discusión a la clase diciendo: "De acuerdo. ¿Alguien quiere añadir algo más a esto?" (línea 342). Esta pregunta propició una vívida discusión entre cuatro estudiantes (Jaime, César, Tere y Tomás), en torno a cómo cada plan se incrementa en una cantidad constante (que nunca cambia) y cómo se puede determinar esa tasa de cambio constante en las tablas, a pesar de que no resulta evidente de inmediato en las tablas con el incremento en múltiplos de 10, en vez del incremento de un minuto a la vez (véase la figura 5.4). En este caso, la utilización que hizo el profesor de la pregunta "¿Alguien quiere añadir algo más a esto?" propició una explicación mucho más detallada de la razón por la cual las gráficas deberían ser lineales, en comparación con la respuesta inicial de María.

Utilización del tiempo de espera

Ofrecer a los estudiantes un tiempo para preparar sus respuestas da una idea del valor del pensamiento deliberativo, reconoce que el pensamiento profundo necesita tiempo y crea un ambiente normativo que respeta y recompensa tanto el tiempo que uno se toma para responder, como el tener paciencia cuando otros se toman el tiempo para formular sus pensamientos. Todo esto diversifica la participación. Un mayor número de estudiantes podrán y querrán unirse si se les brinda un tiempo para crear algo con lo cual se sientan a gusto de compartir, en vez de tener los mismos tres o cuatro participantes que dominen la discusión.

Utilizar el tiempo de espera puede ser ventajoso en distintas coyunturas de la discusión grupal. Quizá lo que resulta más familiar a los docentes es escuchar el trillado refrán de que deben esperar al menos 10 segundos para que un estudiante levante la mano, después de plantear una pregunta. Sin embargo, también deben esperar un tiempo después de dirigirse a un estudiante en particular (Chapin, O'Connor y Anderson, 2003). Por ejemplo, después de que Tania presentó un diagrama que mostraba por qué ½ x l x a funcionaría como una fórmula para obtener el área de un triángulo rectángulo, Regina Quiñones preguntó si habría otra manera de configurar el área de un triángulo rectángulo. Dirigió específicamente esta pregunta a Jaime, diciendo: "Jaime, hoy no te hemos escuchado" (línea 98). Si bien el estudiante se tomó su tiempo para responder, la docente podría haberle dicho lo que él estaba pensando, pero le concedió el tiempo que éste requirió. Como se observa en la línea siguiente de la transcripción, Jaime dio una forma totalmente distinta y del todo válida de demostrar cómo obtener el área de un triángulo de 6 x 8.

En el capítulo 5, cerca del comienzo de la parte 4 de la tarea "Planes tarifarios", vemos incluso una tercera coyuntura en la que el tiempo de espera resulta útil. Después de que la clase estableció (mediante diversas líneas de razonamiento) que los 51 minutos (y no los 50) es el punto en el que el plan A se vuelve más barato que el B, Nicolás preguntó que si alguien tenía dudas y luego hizo una pausa de 10 segundos (líneas 388-389). Como no las hubo, decidió continuar. Este tiempo de espera proporcionó una oportunidad para que los estudiantes digirieran un importante hallazgo y para que plantearan cualquier duda persistente que se les pudiera ocurrir. Además, la pausa marcó el cierre de una fase de la discusión y abrió otra.

Conclusión

Las habilidades analizadas en este capítulo complementan y profundizan la enseñanza que se guía por las cinco prácticas. Su aplicación ayudará a los docentes a hacer surgir, sondear y estimular el pensamiento de los estudiantes. En vista de que una abundante oferta del pensamiento del estudiante constituye la materia prima para el uso eficaz de las cinco prácticas, las habilidades analizadas en este capítulo son importantes precursores de la instrucción en el aula basada en ellas.

Nos hemos referido a habilidades que estimulan el pensamiento del estudiante en dos categorías principales. Primero identificamos e ilustramos las formas en que los docentes pueden interrogar de manera individual a los estudiantes, respecto de su pensamiento, con el objeto de adentrarse en niveles más profundos. En el mejor de los casos, las preguntas que *sondean* y *exploran el significado y las relaciones* presionan a los estudiantes para que expliquen los *porqués* de su pensamiento y al hacerlo los ayudan a descubrir los métodos del razonamiento matemático y las relaciones que yacen en el núcleo de las ideas fundamentales de la disciplina. Cuando emergen los métodos matemáticos de razonamiento y las ideas importantes, el docente se beneficia al tener materia prima para trabajar en la discusión. Los estudiantes se benefician al darse cuenta –quizá por primera vez en su vida– de que pueden razonar las matemáticas y darles sentido.

También hemos analizado una segunda categoría de habilidades para estimular el pensamiento de los estudiantes. Éstas se diseñaron para valerse de la interacción social como una manera de acelerar el pensamiento y el razonamiento complejos. Muchos teóricos del aprendizaje afirman que todo el pensamiento complejo tiene sus raíces en la interacción social (por ejemplo, Vygotsky, 1978). El razonamiento matemático ciertamente se ha beneficiado de las idas y venidas de las afirmaciones y negaciones a lo largo de la historia (Lakatos, 1976). Escuchar, dar sentido y construir con base en el pensamiento de otros, constituyen prácticas dentro del aula que los docentes pueden desarrollar mediante el conjunto de acciones que hemos delineado en la segunda sección de este capítulo. Tales acciones pueden hacer surgir el razonamiento del estudiante e invitar a otros a que se adhieran a ese razonamiento y a cuestionarlo. Con el tiempo, se desarrollan normas sobre la forma en que uno debe comportarse en una clase de matemáticas; normas que pueden influir en gran medida para que los estudiantes cambien su percepción de las matemáticas y de sí mismos, en tanto pensadores y personas que resuelven problemas.

En el siguiente capítulo ubicamos la preparación para las discusiones en el aula, en un contexto más amplio de la planificación de la lección, en donde se les pide a los docentes que consideren cuestiones adicionales relativas a facilitar el aprendizaje de todos los estudiantes.

¡INTENTE ESTO!

- Si ya efectuó una grabación de audio o video, como se sugirió en la sección "*¡Intente esto!* de la parte final del capítulo 5, transcriba 10 minutos de la discusión que grabó.
- Vea si puede identificar alguno de los tipos de pregunta analizados en la primera mitad del capítulo 6 (observe las filas sombreadas de la tabla de la figura 6.1) o cualquiera de las cinco acciones discursivas, analizadas en la segunda mitad del capítulo. Para cada pregunta o acción que haya identificado, considere el impacto que tuvieron en la discusión subsecuente. (Quizá también desee considerar en qué momento la utilización de alguno de los tipos de pregunta o alguna de las acciones haya propiciado un resultado más productivo.)

CAPÍTULO

7

Ubicación de las cinco prácticas en un contexto más amplio de la planificación de la lección

Hasta ahora, este libro se ha enfocado principalmente en los pasos que se deben dar antes y durante una lección para garantizar que la discusión al final de la misma resulte productiva y ofrezca algo importante en términos matemáticos y que las cuestiones matemáticas que los estudiantes aprenderán se aborden de manera explícita. Hemos sostenido que una discusión productiva requiere: *(1)* establecer metas claras de aprendizaje para la lección y seleccionar una tarea que tenga el potencial de satisfacer tales metas (capítulo 2), *(2)* comprometerse con las prácticas de anticipación, monitoreo, selección, secuenciación y conexión (capítulos 3, 4 y 5), *(3)* plantear preguntas que fomenten el pensamiento no algorítmico y *(4)* hacer responsables a los estudiantes para que se involucren de manera activa en el discurso público (capítulo 6).

Ahora, en este capítulo ampliaremos nuestro enfoque al considerar la planificación de la lección de una forma más general, teniendo en cuenta la manera en que las cinco prácticas se ajustan a un contexto más amplio en este tema. Comenzamos con un análisis de la planificación de la lección que va más allá de la anticipación (la primera de las cinco prácticas), luego consideramos lo que Nicolás Barrios (el docente cuya práctica investigamos en los capítulos 4 y 5) hizo al planificar su lección y que antes pasaba desapercibido, y concluimos con un resumen de los aspectos de la planificación que un docente tal vez desee recordar a fin de apoyar la verdadera puesta en práctica de la lección y que servirá como un registro para futuras implementaciones.

ACTIVIDAD DE INVOLUCRAMIENTO 7.1

- ¿Qué es lo que usted lleva a cabo al planificar una lección (es decir, ¿en qué preguntas piensa?, ¿qué fuentes consulta?, ¿de qué cosas toma nota?)
- ¿En qué medida la exigencia de la tarea cognitiva que está utilizando afecta al nivel de planificación en el que usted está comprometido (véase la figura 2.3)?.

Planificación de la lección

Una buena planificación es la clave para la enseñanza eficaz, pues ésta "lleva sobre los hombros gran parte de la carga" de la enseñanza, al sustituir la toma de decisiones llevada a cabo "de improviso" durante la lección, por una investigación cuidadosa sobre el *qué* y el *cómo* de la enseñanza, *antes* de que se imparta la lección (Stigler y Hiebert, 1999, p. 156). De acuerdo con Fennema y Franke (1992, p. 156):

> Durante la fase de planificación, los docentes toman decisiones que afectan la enseñanza de un modo significativo. Deciden lo que se enseña, la forma en que se va a enseñar, el modo de organizar a los estudiantes, qué rutinas utilizar y cómo adaptar la enseñanza a los individuos.

Sin embargo, los planes de clase se han concebido tradicionalmente como directrices para impartir lecciones particulares, haciendo énfasis en los procedimientos y estructuras, aunque poniendo poca atención al modo en que la lección ayudaría a los estudiantes a desarrollar la comprensión de ideas clave de la disciplina. Tales planes se suelen escribir para satisfacer obligaciones contractuales, más que para investigar a profundidad los *qué* y *cómo* de la enseñanza. Considérese por ejemplo el plan de clase de Patricia Miranda que se muestra en la figura 7.1, como preparación para la lección sobre sistemas de desigualdades lineales.

Periodos 4 y 6:	**EL PORTAFOLIO TRIMESTRAL SE ENTREGA HOY**
Objetivo:	Graficar sistemas de desigualdades lineales.
Preparación:	Revisar las desigualdades lineales.
Procedimientos:	pp. 30-31
Tarea:	pp. 464-466 (1, 2, 4, 6, 11, 13, 18)

Figura 7.1. Plan de clase de Patricia Miranda (tomado de Mossgrove [2006, p. 13.])

El plan de Patricia Miranda se enfoca en lo que *abarcará* durante la lección (páginas 30-31 del libro de texto) y en lo que los estudiantes *harán* (completar la preparación y la tarea asignada). Este "plan de clase en forma de recordatorio" no se hace cargo de nada de lo que implica la enseñanza, así que todas las decisiones que la docente tome durante la lección serán "en el momento", ya que al parecer ha reflexionado muy poco por adelantado sobre el *qué* y el *cómo* de la enseñanza. Tal y como Brahier (2000) observó, la eficacia de la lección está relacionada con la calidad de la preparación de la misma. Si creemos que éste sea el caso, entonces esperaríamos que la lección diseñada por Patricia Miranda tuviese un mal fin, incluso antes de que ponga un pie en el aula.

Ahora consideremos el plan de clase de Claudio Núñez para una lección relacionada con la enseñanza de las funciones exponenciales, la cual se basa en la tarea "El diablo y Daniel Webster",[61] misma que se muestra en la figura 7.2. El plan de clase de Claudio Núñez (véase la figura 7.3) proporciona cierta evidencia de que tiene en mente no sólo la tarea en la que los estudiantes habrán de trabajar, sino la forma en que formulará la tarea y las preguntas que plantearía al final de la lección. Asimismo, al parecer reconoce que los estudiantes quizá se confundan con la distinción entre el salario que el diablo paga a Daniel al inicio del día y el salario neto de éste, una vez que le paga al diablo la comisión al final del día. El do-

[61] *The Devil and Daniel Webster*, obra de Stephen Vincent Benet (cuento corto que posteriormente se convirtió en película).

cente consideró abordar esta confusión antes de que los estudiantes comenzaran a trabajar en el problema (véase la parte sombreada de la figura 7.3). Si bien quedan muchas cosas sin especificar en el plan de Claudio Núñez (por ejemplo: ¿cuáles son las ideas matemáticas clave que los estudiantes aprenderán?, ¿qué soluciones es probable que los estudiantes produzcan durante la exploración de la tarea?, ¿qué dificultades pudieran enfrentar los estudiantes cuando se involucren en la tarea?, ¿cómo hacer conspicuas las ideas matemáticas clave?), ha explorado la lección de una forma más allá de lo superficial.

El diablo y Daniel Webster

El diablo hizo una proposición a Daniel: pagarle sus servicios de la siguiente forma:

En el primer día te pagaré $1000 temprano en la mañana. Al final del primer día debes pagarme una comisión de $100, así que tu salario neto será de $900. Al inicio del segundo día, duplicaré tu salario a $1800, pero al final del día deberás pagarme el doble de lo que me pagaste, o sea $200. ¿Trabajarás un mes para mí?

Figura 7.2. Tarea "El diablo y Daniel Webster" (tomado de Burke, *et al.*, 2001, pp. 66-68; esta tarea y el plan de clase relacionado pueden consultarse en http://illuminations.nctm.org).

Álgebra: el diablo y Daniel Webster

Metas: considerar un problema de la vida real que tenga un contexto exponencial. Determinar la fórmula exponencial que está asociada a un problema en contexto real. Aprobar los exámenes.

Inicio

Pregunta: ¿Alguien puede pensar en una situación real que pueda expresarse con exponentes?

Pregunta: ¿Alguien sabe de cuánto es la comisión?

Repartir las hojas de trabajo.

Leer el planteamiento del problema.

Que los estudiantes escriban sus consideraciones sobre si aceptarían o rechazarían la oferta. Asegurarse de que entiendan cómo funciona el proceso. La cantidad que les quedó al final de la jornada es igual a su salario menos la comisión. Esta diferencia es la que se duplicará al siguiente día.

Exploración

Los estudiantes trabajan en pequeños equipos para completar su hoja de trabajo.

Resumen

Pregunta: ¿Qué tipo de relación existe entre la comisión y el número de días? (exponencial)

Pregunta: ¿Qué fórmula obtuviste para conocer el monto de la comisión, con base en el número de días?

Pregunta: ¿Cuál piensas que sea la relación entre el número de días y el salario?

Pregunta: ¿Crees que sea exponencial?

Pregunta: Si no nos preocupásemos por restar la comisión, ¿cómo sería?

Consulta la hoja de trabajo. Comienza con 1000. Para calcular lo del día siguiente, ¿qué "le haces" a los 1000? (los duplicas). Luego, para calcular lo del siguiente día, ¿qué haces con los 2000? (los duplicas).

Muy bien, pero en verdad no los estás duplicando. Tienes 1000 y lo duplicas, pero luego restas una cantidad pequeña. Después duplicas 2000 y restas un poco más. Más adelante duplicas 4000 y luego restas un poco más que las veces anteriores.

Pregunta: ¿Cómo crees que sería esta gráfica? (empezaría subiendo y luego bajaría).

Pregunta: ¿La gráfica de la comisión siempre desciende? (no).

Si la comisión es algo negativo y siempre está aumentando, pero el salario es algo positivo y sólo se incrementa momentáneamente, entonces ¿éste sería el tipo de trabajo permanente que quisieras?

Pregunta: ¿Qué significa que la recta que representa al salario cruce el eje y? (significa que se está haciendo negativo el $)

Pregunta: ¿Esto parece una situación razonable de la vida real? ¿Por qué no?

Muestra mediante una graficadora la manera de obtener la fórmula para la regresión exponencial. Recuerda cómo se hizo esto para la regresión lineal. Si en verdad todos los puntos se generan mediante una ecuación, entonces **ExReg** te dará esa ecuación.

Inténtalo para el salario con el objeto de saber qué obtienes. ¿Qué tanta precisión piensas que tenga eso? (Observa el valor de la raíz cuadrada de *r*).

Figura 7.3. Plan de clase de Claudio Nuñez (tomado de Mossgrove [2006, pp. 286-287]).

Podríamos concebir la planificación de la clase como un continuo que va de izquierda a derecha, teniendo en el extremo izquierdo a la *falta de planificación* y en el derecho a la *planificación cuidadosa y cabal*. Desde esta perspectiva, situaríamos a Patricia Miranda cerca del lado izquierdo del continuo y a Claudio Núñez en algún lugar a la derecha del mismo, como se muestra en la figura 7.4. Esto hace surgir la pregunta que consideraremos en la siguiente sección: ¿qué conforma un plan de clase cuidadoso y cabal (tal vez sea aquel que se relacione con el punto gris de la figura 7.4)?, y ¿cuál es el trabajo que los docentes deben realizar para crear tales planes?

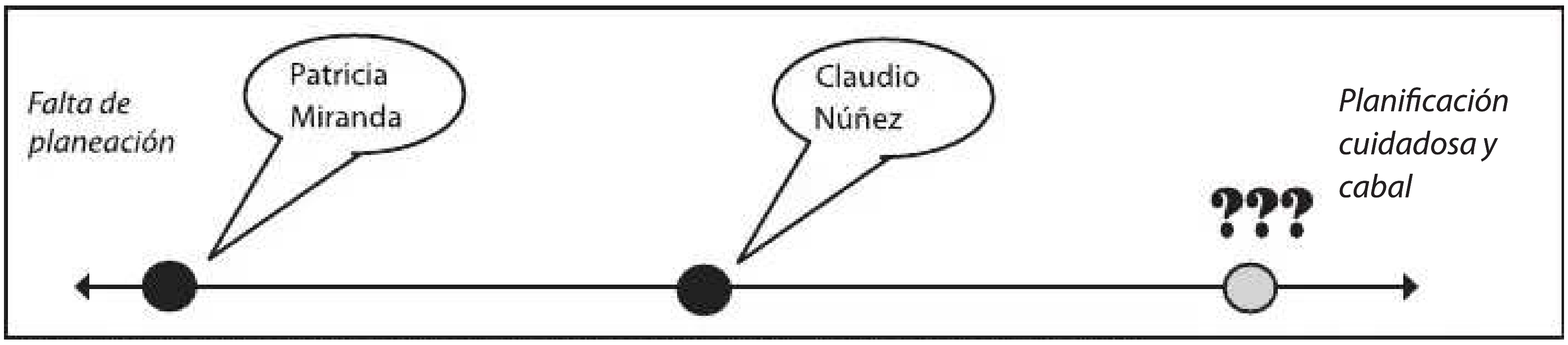


Figura 7.4. El continuo de la planificación de la lección.

Desarrollo reflexivo y minucioso de los planes de la lección

En años recientes, la planificación de las lecciones ha recibido una creciente atención como vehículo para mejorar la enseñanza y el aprendizaje. Esto se debe en parte al éxito del estudio de clase japonés (Lewis 2002; Stigler y Hiebert, 1999). Lo que vale la pena destacar de la planificación de la lección –en la cual se involucran los docentes como parte del proceso de estudio de la lección– es la atención que le dan a: (1) la anticipación de lo que es probable que los estudiantes lleven a cabo durante la lección, (2) al planteamiento de preguntas que los maestros mismos podrían contestar con el fin de promover el pensamiento de los estudiantes durante la lección, (3) considerar el tipo de guía que pudieran ofrecerle a los estudiantes que muestran fallas en su pensamiento y (4) determinar el modo de concluir la lección para propiciar la comprensión de los estudiantes. En este proceso de planificación, la atención se desvía desde el docente, en tanto protagonista clave en el aula, hacia los estudiantes: ¿qué están pensando?, ¿cómo están dando sentido al contenido?, ¿cómo se puede hacer progresar su comprensión matemática durante la lección?

Smith, Bill y Hughes (2008) ofrecen un marco teórico para el desarrollo de las lecciones que utilizan el pensamiento matemático de los estudiantes como factor esencial para lograr su comprensión de las ideas clave de la asignatura. El Protocolo para Reflexionar Cabalmente una Lección (PRCL) [*Thinking Through a Lesson Protocol* (TTLP)], que se muestra en la figura 7.5, tiene el objetivo de promover el tipo de planificación cuidadosa y detallada que caracteriza al estudio de clase japonés. El propósito del PRCL consiste en proveer a los docentes un sustento a su trabajo de planificación de las lecciones, brindándoles un conjunto de preguntas organizadas alrededor de tres actividades clave: (1) seleccionar y preparar una tarea matemática, (2) apoyar la exploración de la tarea por parte de los estudiantes y (3) compartir y discutir la tarea. En las siguientes secciones analizamos la relación entre el PRCL y las cinco prácticas, poniendo especial atención en los aspectos del PRCL que las cinco prácticas no abarcan.

ACTIVIDAD DE INVOLUCRAMIENTO 7.2

- Revise el PRCL que se muestra en la figura 7.5.
- ¿En qué difiere o se asemeja el PRCL al proceso de planificación de la lección que usted describió en la actividad de involucramiento 7.1?
- ¿Considera usted que son importantes las diferencias entre el PRCL y su proceso de planificación actual? Si es así, ¿en qué formas?

Establecimiento de las metas y selección de una tarea

Selección, Secuenciación

PARTE 1: SELECCIONAR Y PREPARAR UNA TAREA MATEMÁTICA

¿Cuáles son sus metas matemáticas para la lección (es decir, qué aspectos matemáticos desea que los estudiantes conozcan y entiendan como resultado de esta lección)?

¿De qué forma se basa esta tarea en los saberes previos, en las experiencias vitales y en la cultura? ¿Qué definiciones, conceptos o ideas necesitan conocer los estudiantes para comenzar a trabajar en la tarea? ¿Qué preguntas planteará para ayudar a los estudiantes a que tengan acceso a sus saberes previos y a las experiencias culturales y vitales relevantes?

¿Cuáles son todas las formas en que se puede resolver la tarea?

- ¿Cuáles de estos métodos considera que sus estudiantes utilizarán?
- ¿Qué conceptos erróneos pudieran tener?
- ¿Qué errores podrían cometer?

¿Qué retos particulares podría tener la tarea actual que obstaculizaran a los estudiantes que están aprendiendo inglés (ELL, por sus siglas en inglés)? ¿Cómo abordará usted esos retos?

¿Cuáles son sus expectativas respecto de los estudiantes, conforme trabajan y completan esta tarea?

- ¿Qué recursos o herramientas tendrán que utilizar los estudiantes en su trabajo que les permitan razonar y que les ayuden a lo largo de toda la tarea?
- ¿Cómo trabajarán los estudiantes (de manera independiente, en pequeños equipos o en parejas) para explorar esta tarea? ¿Cuánto tiempo trabajarán de manera independiente, en pequeños equipos o en parejas? ¿Los estudiantes se agruparán de un modo específico? Si así fuese, ¿en qué forma?
- ¿Cómo registrarán e informarán sobre su trabajo?

¿Cómo involucrará usted a los estudiantes en la actividad para que *todos* tengan acceso, al mismo tiempo que conserva las exigencias cognitivas de la tarea? ¿Cómo se asegurará de que ellos entiendan el contexto del problema? ¿Qué cosas de lo que escuche le harán saber que los estudiantes están entendiendo lo que les pide que hagan en la tarea?

PARTE 2: APOYO A LA EXPLORACIÓN DE LA TAREA POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES

Conforme los estudiantes trabajen de manera independiente o en pequeños equipos, ¿qué preguntas les planteará para…

- ayudar a un equipo a empezar o a progresar en la tarea?
- enfocar el pensamiento de los estudiantes en las ideas matemáticas clave de la tarea?
- evaluar la comprensión de los estudiantes respecto de las ideas matemáticas clave, de las estrategias de solución para los problemas o de las representaciones?
- que avance la comprensión de las ideas matemáticas de los estudiantes?
- alentar a todos los estudiantes para que compartan su pensamiento con otros, o para evaluar si comprendieron las ideas de sus compañeros?

¿Cómo se aseguraría de que los estudiantes se comprometan con la tarea?

- ¿Qué ayuda ofrecería o qué preguntas plantearía a un estudiante (o equipo) que de inmediato se frustre y necesite más orientación y dirección para resolver la tarea?
- ¿Qué hará si un estudiante (o equipo) termina casi al instante la tarea? ¿Cómo extendería la tarea para que ofrezca un reto adicional?
- ¿Qué hará si un estudiante (o equipo) se centra en aspectos no matemáticos de la actividad (por ejemplo, invierte mucho tiempo en hacer un cartel de su trabajo)?

PARTE 3: COMPARTIR Y DISCUTIR LA TAREA

¿Cómo orquestará la discusión grupal de modo que usted cubra sus metas matemáticas?

- ¿Qué métodos de solución desea que se compartan durante la discusión grupal? ¿En qué orden se presentarán las soluciones? ¿Por qué?
- ¿Cuál será el orden en que se presentarán las soluciones de modo que se desarrolle la compresión de los estudiantes respecto de las ideas matemáticas que son el núcleo de su lección?
- ¿Qué preguntas específicas planteará para que…
  1. tengan sentido las ideas matemáticas que usted quiera que ellos aprendan?
  2. se amplíe la discusión y se cuestionen las soluciones que se están compartiendo?
  3. se vinculen las diferentes estrategias presentadas?
  4. se busquen patrones?
  5. comience a generalizarse?

¿Cómo se asegurará de que, con el tiempo, *cada estudiante* tenga oportunidad de compartir su pensamiento y razonamiento con sus compañeros?

¿Qué cosas observará o escuchará que le indiquen que *todos* los estudiantes de su grupo entienden las ideas matemáticas que usted trata de que aprendan?

¿Qué hará mañana para basarse en esta lección?

Anticipación

Conexión

Figura 7.5. Protocolo para Reflexionar Cabalmente una Lección (PRCL). (Tomado de Smith, Bill y Hughes [2008, p. 134])

Relación entre el PRCL y las cinco prácticas

En la figura 7.5 hemos hecho observaciones para indicar las formas en que las cinco prácticas se intercalan dentro del PRCL. Si bien resulta claro que el PRCL abarca más que las cinco prácticas, éstas representan de hecho un subconjunto significativo del trabajo de planificación. Hemos afirmado que antes de que los docentes empiecen a poner en ejecución las cinco prácticas, en primer lugar habrán de establecer una meta para la lección y seleccionar una tarea. Tal y como la observación sugiere, esto también representa un paso fundamental dentro de un proceso más general de planificación de lecciones.

La anticipación constituye asimismo un elemento destacado en el PRCL, pues implica adelantarse tanto a las formas en que un estudiante pudiese resolver una tarea, ya sea de manera correcta o incorrecta (véase la primera parte del PRCL), como a las preguntas que los docentes podrían plantear con el objeto de prepararse para responder a lo que los estudiantes estén realizando mientras trabajan en la tarea (el primer conjunto de "balazos" de la segunda parte del PRCL). En la parte 3 del PRCL, vemos que explícitamente se presta atención a la selección, secuenciación y la conexión (como lo muestran las anotaciones en la figura 7.5), constituyendo esta labor una parte significativa de lo que el docente debe llevar a cabo para preparar una discusión productiva.

Algo que destaca por su ausencia en el PRCL, es la falta de vinculación con el monitoreo. Éste es un proceso que acontece *durante* el aprendizaje y si bien se facilita mediante una anticipación cuidadosa de la lección, un poco de planificación adicional podría apoyar en la creación de una hoja de monitoreo, como la que hizo Nicolás Barrios (véase la figura 4.3). La hoja de monitoreo completada (véase la figura 5.3) puede servir como registro de lo que los estudiantes compartieron de su pensamiento y razonamiento con sus compañeros (una de las preguntas de la tercera parte del PRCL).

Más allá de las cinco prácticas

Aunque las cinco prácticas (junto con la "práctica 0" [determinar la meta de la lección]) engloban gran parte de lo que implica el proceso de planificación, sostenemos que cada pregunta del PRCL merece cierta consideración mientras el docente prepara una lección. La tabla de la figura 7.6 contiene las preguntas del PRCL que no se abordan en las cinco prácticas y proporciona un motivo poderoso para que la pregunta se considere durante el proceso de planificación. Si bien el docente podría responder de inmediato, sin reflexionar previamente, a algunos de los temas que tocan las preguntas del PRCL (mostrados en la primera columna de la tabla) –por ejemplo, un estudiante que está aprendiendo inglés (ELL) está confundido por el enunciado de la tarea; un equipo termina muy rápido la tarea y ya no tiene nada qué hacer; los estudiantes piden calculadoras, pero están bajo llave en un armario–, resultaría complicado atender todos estos asuntos "en línea", sin que se les considerase con antelación y aun así lograr que la lección siguiese avanzando hacia una dirección productiva.

Preguntas del PRCL que no se consideran en las cinco prácticas	**Razón fundamental para tener en cuenta la pregunta durante el proceso de planificación**
¿Qué retos particulares podría tener la tarea actual que obstaculizaran a los estudiantes que están aprendiendo inglés (ELL, por sus siglas en inglés)? ¿Cómo abordará usted esos retos?	Resulta fundamental satisfacer las necesidades de todos los estudiantes. Aquellos cuya lengua materna no es el inglés o aquellos que tienen dificultades con el aprendizaje de las Matemáticas, tal vez requieran más apoyo que otros. Por tanto, los docentes deben considerar cuidadosamente ciertos factores como los equipos en los que ubican a los estudiantes, los recursos que proporcionan para que éstos se compenetren en la tarea, así como la atención que ponen al vocabulario y al contexto (por ejemplo, ¿los estudiantes comprenden lo que es un plan de secuenciación?). La atención del docente a este nivel de detalle ayudará a garantizar que todos los estudiantes tengan acceso al contenido de la lección.
¿Cuáles son sus expectativas respecto de los estudiantes, conforme trabajan y completan esta tarea?	Los estudiantes necesitan saber lo que se espera que produzcan como resultado de su trabajo en la tarea, así como los recursos de los cuales dispondrán para producirlo. Este conocimiento les permitirá comenzar su trabajo teniendo un claro sentido del propósito y de la dirección. Para lograr este objetivo, el docente debe determinar cuáles serán los productos de la lección y habrá de tener disponibles los materiales para los estudiantes, a fin de que los obtengan.
¿Cómo involucrará a los estudiantes en la actividad, de tal forma que *todos* tengan acceso, al mismo tiempo que conserva las exigencias cognitivas de la tarea?	Si el docente proporciona mucha información cuando la tarea se presenta por primera vez, las exigencias cognitivas de ésta podría disminuir. Por otra parte, si se ofrece muy poca información puede resultar que los estudiantes no comprendan lo que exige el problema. En consecuencia, es importante que el docente considere el modo de encontrar un equilibrio entre ofrecer, por un lado, una guía para los estudiantes a fin de que se involucren en la tarea, y por otro que no sea tan escasa que el reto se diluya.
¿Cómo se aseguraría de que los estudiantes se comprometan con la tarea?	Con el objeto de que los estudiantes aprendan lo que se propuso el docente y que participen de manera activa en la discusión, primero deben involucrarse en la tarea. Algunos tienen problemas para empezar y se frustran con facilidad. Si el docente no está preparado para encauzarlos con presteza, quizá terminen desentendiéndose por completo. Esto a menudo propicia comportamientos de rechazo a la tarea, que pueden ser tan improductivos como desorganizadores. Por otra parte, algunos estudiantes trabajan a un ritmo mucho más veloz y concluyen una tarea con rapidez. El docente debe estar preparado para satisfacer las necesidades de los estudiantes ubicados en cualquiera de los extremos de este continuo, preparando un andamiaje adicional que ayude a los estudiantes que tienen problemas y a la vez que ofrezca desafíos mayores a los estudiantes más avanzados.
¿Qué cosas observará o escuchará que le indiquen que *todos* los estudiantes de su grupo entienden las ideas matemáticas que usted trata que aprendan?	Los docentes deben tener en cuenta la manera en que sabrán si los estudiantes han aprendido lo que aquéllos se propusieron enseñarles. Esto implica el desarrollo de preguntas que brinden información sobre el pensamiento de los estudiantes, el diseño de tareas para la casa que les den tiempo para pensar de manera independiente en un conjunto de ideas, propiciar una reflexión al final de clase o hacer papeletas donde se pida a los estudiantes que consideren algún aspecto de la lección, y también implica el desarrollo de medios más formales para evaluar el aprendizaje. Es importante que el docente no equipare la conclusión de una tarea con la comprensión de las ideas subyacentes.
¿Qué hará mañana para basarse en esta lección?	A fin de garantizar que la enseñanza sea coherente y cohesiva, resulta fundamental considerar la manera en que una lección armoniza con la siguiente. Comprender una idea matemática particular no requiere un periodo de 45 minutos, sino una serie de lecciones. Los docentes han de considerar la manera en que el conocimiento se construye a lo largo del tiempo y el modo en que los saberes previos se cimientan, amplían y profundizan en las siguientes lecciones.

Figura 7.6. Tabla que muestra las preguntas del PRCL y las razones fundamentales para que se tomen en cuenta.

En nuestro análisis de la labor de planificación de Nicolás Barrios (capítulo 4) no discutimos de manera explícita ninguna de las preguntas que aparecen en la tabla de la figura 7.6. Eso no significa que el profesor Barrios no las hubiese considerado, sino que decidimos que no fuesen el punto principal al subrayar su apego a las cinco prácticas. Resulta difícil imaginar que no tuviera en cuenta alguno de tales temas, en vista de que su lección se desarrolló sin contratiempos. Por ejemplo, es evidente que Nicolás Barrios tuvo expectativas concernientes a la manera en que los estudiantes trabajarían en la tarea, por lo que abordó la segunda pregunta de la columna 1 de la tabla mostrada en la figura 7.6. Decidió que los estudiantes trabajaran en equipos (véase la lista de los equipos en la figura 4.4) y que elaboraran carteles que compartirían (líneas 75-80). Al parecer, también Nicolás hizo que estuviesen disponibles los materiales necesarios (hojas de rotafolio, marcadores, reglas y calculadoras graficadoras). Parece que los estudiantes sabían qué hacer y contaban con los recursos para llevar a cabo la labor.

Igualmente resulta plausible que Nicolás Barrios tuviera en cuenta las dos últimas preguntas incluidas en la tabla de la figura 7.6. Al dejar como tarea para la casa que los estudiantes exploraran una de las ideas clave que él quería que aprendieran (es decir, dos funciones “intercambian posiciones” en el punto de intersección, de modo que la que estaba “arriba” antes del punto de intersección, ahora está “abajo”, después de dicho punto), pudo evaluar el estado actual de la comprensión de los estudiantes. Además, la tarea para la casa podría haber servido como una forma de iniciar cómodamente la siguiente lección y para presionar a los estudiantes de un modo más directo para que explicaran por qué las funciones que se intersecan “intercambian posiciones” antes y después del punto de intersección y si dos funciones lineales siempre tendrán un punto de intersección. Si bien la asignación específica de la tarea para la casa se generó durante la clase debido a una pregunta que planteó Leticia (es decir, ¿sin importar la renta que sea, el plan en el que los minutos cuesten menos será el mejor?), se relacionaba en gran medida con lo que Nicolás Barrios había pensando asignar (líneas 392-398).

El meollo aquí es que un docente que reflexiona cuidadosamente en las preguntas del PRCL antes de la lección, estará listo para lidiar con gran parte de lo que suceda durante la misma. Aunque el plan de clase –el objeto físico– representa el resultado del proceso de pensar y sirve como un registro histórico de la lección, lo que más importa es el *nivel de pensamiento* que se involucra en la preparación del plan. Un docente con el que hemos trabajado dijo sencillamente: “Tienes que repasar la lección una y otra vez, la manera en que la vas a orquestar; de otro modo, podría convertirse en un fracaso”.

Creación de un registro permanente de la lección

Si bien es importante el pensamiento que se involucra en la preparación de una clase, resulta vital la elaboración de algún registro de las decisiones concernientes a la lección por dos razones. En primer lugar, el plan escrito sirve como un recordatorio de las decisiones clave, de manera que los docentes no tienen que guardar en su cabeza todos los detalles; auxilia a los profesores conforme implementan la clase, recordándoles el curso de acción que han establecido. En segundo lugar, el plan escrito sirve como un registro de la lección, mismo que los maestros pueden guardar para usarlo, revisarlo y compartirlo con sus colegas más adelante. El plan de clase, junto con la hoja de monitoreo que se completó durante la lección, proporciona un buen panorama de la intención y da cierta idea del resultado de ésta.

Considérese la utilidad de distintos planes de clase. El que elaboró Patricia Miranda, analizado con anterioridad en este capítulo, ofrece un apoyo limitado para la enseñanza de la lección. Incluso si ella reflexionase profundamente en ésta, es poco probable que lo que haya escrito le ofrezca algún apoyo durante la lección o sirva como registro de lo que desearía llevar a cabo a futuro. Tal y como era de esperarse, la profesora no estaba preparada para afrontar muchas cosas que ocurrieron durante la lección, lo cual incluyó el no percatarse de que la clave de respuestas, ubicada en la parte posterior de los libros de texto de los estudiantes, no era correcta, pues no se dio el tiempo para resolver por sí misma los problemas que había asignado (Mosgrove, 2006).

Aunque el plan de clase de Claudio Núñez estaba más completo que el de Patricia Miranda e incluía indicaciones para preparar la tarea y preguntas que pudiesen plantear los estudiantes durante la lección, no tenía claridad sobre lo que sus estudiantes harían o lo que él deseaba que fuese el resultado de la lección. Por consiguiente, ésta se restringió a completar la tarea y no a comprender las Matemáticas que estaban implícitas en ella.

Si un plan de clase sirviera para proporcionar apoyo en el transcurso de la lección y constituyera un registro histórico que los docentes pueden consultar en futuras lecciones, ¿cómo sería ese plan de clase? Smith y Cartier (2009) crearon la Plantilla para Planes de Clase, la cual se basa en el PRCL, pero abarca cuatro áreas clave: tarea, apoyo a la enseñanza, metas de aprendizaje y evidencia. Dicha Plantilla para Planes de Clase se utilizó en la elaboración de un plan de clase que se muestra en la figura 7.7 para la tarea de "Planes tarifarios".

Tarea

¿Cuál es la actividad principal en la que trabajarán los estudiantes en esta lección?

La compañía telefónica de larga distancia A cobra una renta básica de $50.00 mensuales, más 4 centavos por minuto que se utilice el servicio. La compañía telefónica de larga distancia B cobra una renta mensual de sólo $20.00, pero cobra 10 centavos por minuto de uso. ¿Cuánto tiempo al mes tendrías que hablar por teléfono para que al suscribirte con la compañía A pudieras ahorrar dinero?

¿Cuáles son las distintas formas en que los estudiantes pudieran llevar a cabo la actividad?

Enfoques adecuados

- Elaborar una tabla con incrementos de 10 minutos y ubicar el punto de intersección (PDI) determinando el renglón que tenga el mismo costo para el mismo número de minutos.
- Elaborar una tabla con incrementos de 20 minutos y luego trazar una gráfica para determinar el PDI.
- Plantear una ecuación y utilizar puntos para trazar una gráfica a fin de que después se termine el PDI.

COMPARTIR AL MENOS UNA TABLA, UNA GRÁFICA Y UNA ECUACIÓN

Posibles dificultades

1. Confundir .04 con .4 y con 4.
2. No incluir el minuto 0 en la tabla.
3. No estar seguros de qué hacer si el PDI no se muestra en la tabla.
4. Confundir el costo por minuto con la renta mensual.

Apoyo a la enseñanza

¿Qué herramientas o recursos tendrán que utilizar los estudiantes en su trabajo que les permitan involucrarse con la actividad y les ayuden a razonarla plenamente?

- Los estudiantes trabajarán en sus equipos previamente asignados de 4 compañeros.
- Cada estudiante obtendrá una copia de la tarea.
- Todos los equipos tendrán una hoja de rotafolio.
- Los estudiantes habrán de tener acceso a calculadoras graficadoras, reglas, lápices de colores y marcadores, según los necesiten.

¿Qué preguntas plantearía a los estudiantes para apoyar su exploración de la actividad y ***tender un puente entre lo que hicieron*** *y* ***lo que usted deseaba que aprendieran*** *(véanse los recuadros unidos por una flecha)?*

Para tener claridad respecto de lo que en verdad llevaron a cabo los estudiantes, comience planteando una serie de preguntas como éstas: ¿de qué manera obtuviste eso?, ¿qué significa?, ¿tiene sentido? Una vez que tenga una idea más clara de aquello que están comprendiendo los estudiantes, continúe con las siguientes preguntas.

Enfoques correctos

- ¿En qué forma te ayudó tu tabla a determinar la respuesta a la pregunta?
- ¿Cómo piensas que serían las gráficas? ¿Por qué piensas eso?
- ¿Qué representa (50,7) para este problema? ¿Por qué es importante? ¿Cualesquiera dos rectas se intersecarán? ¿Cómo lo sabes?
- ¿Cómo encontrarías el costo por minuto a partir de la tabla, la gráfica y la ecuación?
- ¿Cómo encontrarías la renta mensual mediante la tabla, la gráfica y la ecuación?
- ¿Por qué las compañías A y B "intercambian posiciones" después del PDI? ¿Qué es lo que pasa en ese punto? ¿Puedes plantear un enunciado general respecto de este comportamiento?

Posibles dificultades

1. ¿Cómo escribirías cincuenta pesos con cuatro centavos, utilizando la notación monetaria usual? ¿Cómo lo que escribiste en comparación con lo que ahora tienes?
2. ¿Qué significaría hablar cero minutos? ¿Cuánto costaría eso?
3. Hacer que los estudiantes se fijen en las filas de la tabla donde los dos planes intercambian posición entre sí. ¿Qué pasa ahí? ¿Puedes predecir cómo sería la gráfica de las dos ecuaciones? ¿Puedes explicar por qué sucede esto?
4. ¿Qué representan 40 y 50 en el problema? ¿Cuál cambia conforme uno habla más y cuál no? ¿Cuánto costarían 10 minutos usando tu ecuación? ¿Tiene sentido?

Metas de aprendizaje (restantes)

¿Qué saberes obtendrán de esta actividad los estudiantes?

1. Reconocer que existe un punto de intersección en la gráfica de dos ecuaciones lineales que representan dos rectas no paralelas, únicas en donde dos funciones tienen los mismos valores x y y;
2. Comprender que dos funciones "intercambian posiciones" en el punto de intersección, debido a que la función con menor tasa de cambio será a la larga la función que esté más cerca al eje x, y.
3. Vincular las tablas, gráficas y ecuaciones con el contexto mediante la identificación de la pendiente y la intersección con el eje y en cada tipo de representación.

Evidencia

¿Qué dirán, harán, producirán, etc., los estudiantes para proporcionar evidencia de su comprensión?

- Los estudiantes elaborarán carteles que muestren la forma en que determinan en qué momento la compañía A resultó más barata, utilizando tablas, gráficas, ecuaciones y el contexto, a fin de explicar lo que llevaron a cabo y por qué funciona.
- Como tarea para la casa, los estudiantes elaborarán distintos planes tarifarios. Esto proporcionará evidencia respecto de si entendieron el modo en que la renta mensual y el costo por minuto influyen en la gráfica de las funciones y les ayudará a determinar cuál compañía es la más barata a largo plazo.

Figura 7.7. Un plan de clase para la tarea "Planes tarifarios" que utiliza la Plantilla para Planes de Clase, creada por Smith y Cartier (2009).

La "Tarea" (recuadro izquierdo de la figura) se refiere a aquello en lo que los estudiantes trabajarán, a los enfoques que podrían utilizar para resolverla y a las dificultades que pudiesen afrontar en el camino. Las "Metas de aprendizaje" (recuadro de arriba a la derecha en la figura 7.7) se refiere a lo que los estudiantes sabrán como resultado de su involucramiento en la tarea. La flecha que inicia en la tarea y finaliza en las metas de aprendizaje implica la conexión entre las dos: el objetivo de la tarea consiste en ofrecer a los estudiantes una oportunidad para aprender las Matemáticas que se especifican en las metas de aprendizaje. El "Apoyo a la Enseñanza" (recuadro en medio de la figura 7.7) representa el puente entre las tareas y las metas de aprendizaje; asimismo, se refiere tanto a los recursos que auxiliarán a los estudiantes en la tarea que lleven a cabo, como a las preguntas que el docente planteará para que se efectúen las conexiones con las ideas matemáticas y para ayudar a los estudiantes a progresar en la tarea. La "Evidencia" (recuadro de la parte inferior derecha de la figura 7.7) tiene que ver con los indicadores que permitirán al docente conocer lo que los estudiantes están entendiendo. La ubicación de la evidencia debajo de las "Metas de aprendizaje" no es arbitraria: hace un llamado de atención hacia el requerimiento de que la evidencia debe relacionarse con las metas de aprendizaje.

El plan de clase que se muestra en la figura 7.7 no pretende abarcar todo el pensamiento que un docente llevó a cabo al preparar la lección que comprende la tarea "Planes tarifarios". Más bien pretende servir como un registro de las decisiones clave hechas antes de la lección, conforme el docente reflexionó concienzudamente sobre las preguntas del PRCL. Es un registro al cual el docente puede referirse durante la lección, en caso de que lo necesite, y que puede archivar para la siguiente lección. Un plan de clase de esta naturaleza puede auxiliar al docente para que no desatienda las metas de la lección y para que cuente con formas específicas de apoyo a los estudiantes con el objetivo de lograr aquellas.

Ahora queremos regresar a la pregunta planteada con anterioridad: ¿qué conforma un plan de clase cuidadoso y cabal? Pensemos que el plan de clase de la figura 7.7 sea una versión de dicho plan y propongámoslo como un candidato para ocupar la posición indicada por el punto gris en el continuo de la figura 7.4. A diferencia de los otros planes que hemos revisado, se hace responsable de una carga mucho mayor del aprendizaje al enfocarse en lo que los estudiantes habrán de aprender (metas), en lo que realizarán (tareas) y en el modo en que el docente confluirá con ellos en el lugar donde se encuentren para conducirlos a donde necesitan llegar (apoyo educativo). Aunque el PRCL ofrece un conjunto fundamental de preguntas que se deben tener en cuenta mientras el docente está planificando su lección, la Plantilla para Planes de Clase (figura 7.7 en relación con la tarea "Planes tarifarios") destaca un subconjunto de preguntas que surgen en el PRCL y que pueden auxiliar al docente a llevar a cabo la lección y a acompañar la discusión conforme se despliega.

Conclusión

En este capítulo, y de manera más general en este libro, nuestra intención es fundamentar la importancia que tiene la planificación por anticipado de una lección para la enseñanza. Si bien las cinco prácticas brindan a los docentes un mecanismo para mejorar la calidad de las discusiones matemáticas que acontecen en sus aulas, estas prácticas resultarán más eficaces cuando los docentes tengan en cuenta un conjunto más amplio de preguntas concernientes a la enseñanza y el aprendizaje.

La planificación constituye una "habilidad excepcional de la enseñanza" (Stigler y Hiebert, 1999, p. 156) porque tiene un impacto significativo sobre la calidad de las experiencias educativas de los estudiantes en el aula. Es una habilidad que puede aprenderse y mejorarse de manera significativa mediante una serie de colaboraciones con los colegas. Es probable que Claudio Núñez y Patricia Miranda se hubiesen beneficiado muchísimo si hubieran planificado sus lecciones en colaboración con colegas más experimentados. En tanto docentes novatos, contaban con relativamente poca experiencia para preparar su lección; además, se hubieran beneficiado de la sabiduría obtenida por la experiencia que les proporcionasen los docentes experimentados. En el siguiente capítulo analizaremos el tipo de apoyo que necesitan los docentes para convertirse en hábiles planificadores y ejecutores de la enseñanza.

¡INTENTE ESTO!

- Utilice el PRCL para elaborar un plan de clase. Haga un registro de los aspectos clave de su planificación haciendo uso de la Plantilla para Planes de Clase.
- Imparta la lección.
- Reflexione sobre el impacto que el PRCL y que la correspondiente Plantilla para Planes de Clase tienen en su habilidad para poner en práctica la lección.

CAPÍTULO

8

Trabajo en el ambiente escolar para mejorar las discusiones en el aula

La buena enseñanza no se desarrolla de manera aislada. Aunque los docentes están acostumbrados a orquestar las discusiones en la privacidad de sus propias aulas, su aprendizaje y motivación continuos dependen del ambiente inmediato en el quese ubican: su escuela y sus comunidades profesionales de aprendizaje. Si bien los docentes suelen sentir que tienen un impacto limitado en tales ambientes, esto no necesariamente debe ser así. Este capítulo analiza las formas en que los docentes pueden interactuar con sus colegas y los líderes escolares para garantizar que contarán con el tiempo, los materiales y el acceso al conocimiento especializado que requieren, a fin de aprender y conservar el esfuerzo para orquestar discusiones productivas.

Comenzamos este capítulo final con el caso de María Lara, una docente novata que quiso involucrar a sus estudiantes en un trabajo matemático más desafiante, en un ámbito escolar donde dicho trabajo no constituía la norma ni parecía valorarse. Mediante conversaciones con sus colegas y con su director, encontró el apoyo que necesitaba para arriesgarse y tratar de cambiar el *status quo*. Concluimos el capítulo con un análisis de los pasos que pueden dar los docentes con el objeto de formar comunidades al interior de sus escuelas que les brinden apoyo en sus esfuerzos por mejorar la enseñanza.

Búsqueda de apoyo: el caso de María Lara

María Lara tuvo la buena suerte de asistir a un programa de formación de docentes en donde adquirió conciencia de lo importante que es anclar la educación en las metas de aprendizaje matemático y en el pensamiento de los estudiantes. Cuando hubo completado su trabajo del curso y culminó su experiencia de práctica docente con los estudiantes, ella quedó convencida de que éstos aprenden lo que tienen ocasión de aprender. Si a los estudiantes se les brinda la oportunidad de resolver tareas complejas, de observar modelos adecuados de pensamiento y razonamiento, así como de justificar sus soluciones, concebirán las Matemáticas como significativas y como algo con las que en lo personal se comprometen y comprenden. Al contrario, si los estudiantes invierten su tiempo "resolviendo" problemas usando procedimientos aprendidos de memoria, opinarán que las Matemáticas resultan estériles, aburridas y que sólo tienen sentido para los estudiantes "aplicados".

El inicio de su primer trabajo fue algo muy distinto. Si bien María Lara estaba emocionada por haber sido contratada en un distrito escolar prestigioso con reputación de ofrecer una enseñanza progresista, pronto se percató de que el Departamento de Matemáticas de secundaria se centraba en enseñar procedimientos a los estudiantes, que ponían, si acaso, una atención limitada a los conceptos y a la comprensión. En raras ocasiones los estudiantes tenían la oportunidad de aprender cómo pensar y razonar su forma de solucionar problemas no rutinarios. En el primer año, la profesora se resignó y utilizó los libros de texto indicados por el distrito y los complementaba, tanto como le era posible, con proyectos y tareas cognitivamente mucho más significativos.

Cuando al final del primer año tuvo una plática con Marcos, su colega del mismo grado, respecto de la enseñanza, María se dio cuenta de que las frustraciones que había experimentado no eran sólo de ella. Juntos, María y Marcos decidieron comenzar un grupo de lectura después del horario de clases, que estaba abierto a cualquier docente interesado, y el cual se centraría en la forma en que se orientaría la educación mediante tareas de alto nivel y cognitivamente desafiantes. Tanto María como Marcos habían estado enfrentándose con la cuestión de cómo "llegar al meollo" de sus lecciones, cuando sus estudiantes solían tener enfoques de las tareas sumamente divergentes. Es más, los comentarios que hizo su director después de haber observado sus clases, sugerían que estaba preocupado porque los estudiantes, a pesar de que se veían comprometidos, no estaban aprendiendo las "tuercas y tornillos" de las Matemáticas. María y Marcos también estaban preocupados por el aprendizaje de sus estudiantes.

En el siguiente mes de septiembre, María y Marcos se reunieron con otra docente, Clara, y entre los tres seleccionaron su primera lectura: el artículo "Cómo orquestar discusiones" [*Orchesting Discussions* (Smith *et al.*, 2009)]. Eligieron ese artículo porque al parecer abordaba los problemas que todos ellos estaban afrontando. Lograr que los estudiantes hablasen resultó sencillo, pero asegurarse de que la plática en el aula fuese productiva e incluso respetuosa de las ideas que los estudiantes traían a colación, resultó en extremo difícil. Marcos comentó que tenía la impresión de que siempre sentía como si estuviese interrumpiendo y corrigiendo a los estudiantes. Tanto María como Clara estaban preocupadas por dejar que los estudiantes se desviaran por direcciones infructuosas durante mucho tiempo. El artículo proporcionó un conjunto de prácticas (las cinco prácticas analizadas en este libro), cuyos autores afirmaban que les ayudarían a eliminar cierto grado de improvisación en la enseñanza. Esto es, las prácticas auxiliarían a los docentes a anticipar lo que pudiera acontecer y a planificar por adelantado la manera de afrontar formas específicas con las que los estudiantes pudieran enfocar el problema.

Los tres docentes estaban seguros de que leer materiales concernientes a las cinco prácticas sería una cosa y llevarlas a cabo sería otra. En particular, todos estaban atemorizados por la recomendación del artículo, el cual se refería a la planificación de las lecciones de una forma muy cabal. Así que decidieron implementar poco a poco la tarea denominada "La bolsa de canicas" que se presentaba en dicho artículo (véase la figura 8.1), en el cual se habían identificado las posibles estrategias de solución que los estudiantes pudieran emplear, ¡de modo que el primer paso (anticipación) ya se había llevado a cabo! Después de estudiar las diversas estrategias de solución, María comenzó a sentirse más a gusto con el material de la lección, por lo que se ofreció a impartirla y a tratar de implementar las restantes prácticas: monitoreo, selección, secuenciación y conexión. Gracias a la intervención del director, a Marcos y Clara se les liberó de otras obligaciones, de manera que pudieran observar cómo impartía María la lección. El director también decidió participar en la observación.

El grupo de Matemáticas de la profesora Ríos estaba estudiando Estadística. Trajo consigo tres bolsas que contenían canicas rojas y azules. Las tres estaban etiquetadas como se muestra a continuación:

Bolsa *x*	**Bolsa *y***	**Bolsa *z***
Total = 100	**Total = 60**	**Total = 125**

La profesora Ríos revolvió las canicas en cada bolsa. Planteó a la clase lo siguiente: "si cerraran los ojos, metieran la mano a una bolsa y tomaran una canica, ¿de qué bolsa tendrían la mayor probabilidad de sacar una canica azul?"

¿Qué bolsa escogerías? ________

Explica por qué tienes la mayor probabilidad de elegir una canica azul de esa bolsa. Puedes utilizar los diagramas de arriba para tu explicación.

Creado por el equipo de evaluación QUASAR, bajo la dirección de Suzanne Lane, en la Universidad de Pittsburgh; tomado de QCAI (QUASAR Cognitive Assessment Instrument) para los grados 6-7-8.

Figura 8.1. Tarea "La bolsa de canicas" (tomado de Smith, *et al*. [2009]).

Durante la observación, Marcos y Clara utilizaron la herramienta que estaba en el artículo, a fin de monitorear el trabajo de los estudiantes (véase la figura 8.2). Pasaron mucho tiempo observando de cerca a los estudiantes mientras trabajaban en equipos y algunas veces les planteaban preguntas. El director, por el contrario, permaneció en la parte posterior del aula durante toda la lección.

Estrategia	Quién y qué	Orden
Fracción Determina la fracción de cada bolsa que represente las canicas azules (*x* es 1/4; *y* es 1/3; *z* es 1/5). Decide cuál de las tres fracciones es la mayor (1/3). Escoge la bolsa con la mayor fracción de canicas azules (bolsa *y*).		
Porcentaje Determina la fracción de cada bolsa que represente a las canicas azules (*x* es 25/100; *y* es 20/60; *z* es 25/125). Convierte cada fracción a porcentaje (*x* es 25%; *y* es 33 1/3%; *z* es 20%). Selecciona la bolsa con el mayor porcentaje de canicas azules (bolsa *y*).		
Razón (razón unitaria) Determina la razón que existe entre las canicas azules y las rojas en cada bolsa (en *x* es 3:1, en *y* es 2:1; en *z* es 4:1). Identifica la bolsa que tiene la menor cantidad de canicas rojas por cada canica azul (bolsa *y*).		
Razón (incremento) Incrementa la cantidad de canicas en cada bolsa, de modo que el número de canicas azules sea la misma en cada una (por ejemplo, en *x* son 300 rojas y 100 azules; en *y* son 200 rojas y 100 azules; en *z* son 400 rojas y 100 azules). Escoge la bolsa que tenga la menor cantidad de canicas rojas por cada 100 canicas azules (bolsa *y*).		
Estrategia aditiva Determina la diferencia entre el número de canicas rojas y azules para cada bolsa (en *x* es 50; en *y* es 20; en *z* es 75). Selecciona la bolsa que tiene la menor diferencia (bolsa *y*).		
Otro		

Figura 8.2. Herramienta para monitorear el trabajo de los estudiantes para la tarea "La bolsa de canicas" (tomado de Smith *et al*. [2009]).

Después, María se sintió muy contenta con la lección, pero aún seguía preocupada por lo que pensarían otras personas, especialmente el director. Empezó a enfocarse en lo que necesitaba trabajar: escuchar con mucha atención lo que los estudiantes comentaban, de manera que pudiese comprender la forma en que estaban pensando respecto del problema y luego llevar a cabo la construcción con base en esos pensamientos, al mismo tiempo que los ayudaba a explorar los aspectos matemáticos que constituían el núcleo de la lección. Se percató de que realizar eso implicaba una enorme concentración y enfoque.

Al final de la jornada, los cuatro se reunieron brevemente para analizar la lección. Las hojas de monitoreo que Marcos, Clara y María utilizaron durante la misma con el objeto de recopilar datos concernientes a lo que los estudiantes estaban haciendo y pensando, sustentaron su análisis. Ellos discutieron acerca de las similitudes y diferencias en sus observaciones, así como sobre las interpretaciones de las estrategias que los estudiantes estaban empleando. Esto resultó sumamente útil para María, en vista de que tanto Marcos como Clara pudieron dar sentido a las estrategias de algunos estudiantes, pero a ella se le escaparon. La siguiente vez que trabaje con esta tarea, pensó, convendría reconocer estas sutiles variantes de las estrategias anticipadas que aparecían en el artículo.

Por ejemplo, María no tenía la seguridad de que la solución presentada por Cosme fuese acertada (véase la figura 8.3). Aunque escogió la bolsa correcta, su enfoque no concordaba exactamente con las estrategias identificadas. Marcos y Clara ayudaron a María a percatarse de que Cosme había utilizado una estrategia de fracciones, pero centrándose en la fracción de canicas rojas de una bolsa. La bolsa con la fracción más pequeña de este tipo tendría la fracción más grande de canicas azules.

> La bolsa *x* tiene $\frac{3}{4}$ de canicas rojas; la bolsa *y* tiene $\frac{2}{3}$ y la bolsa *z* $\frac{4}{5}$.
> Ya que $\frac{2}{3}$ es la fracción más pequeña, la bolsa *y* tiene la fracción más pequeña de canicas rojas. Así que la bolsa *y* debe tener la fracción más grande de canicas azules. De la bolsa *y* se tiene la mayor probabilidad para sacar una canica azul.

Figura 8.3. La solución de Cosme para la tarea "La bolsa de canicas".

Marcos y Clara también analizaron las estrategias que compartirían, el orden que éstas tendrían y su justificación. Aquí, igualmente, sus perspectivas se ensancharon. Si bien María había preparado la lección de una forma extremadamente meticulosa, aún tenía que pensar sobre la marcha: ¡el tiempo no se detiene! Como había tenido acceso a dos percepciones adicionales (por parte de sus colegas que se habían liberado de la carga de impartir la clase), éstas le revelaron toda clase de nuevas posibilidades con respecto a cómo utilizar y apoyar de un modo más productivo a sus estudiantes en su forma de pensar.

El director, que no había usado esta herramienta, comenzó a darse cuenta de que tenía una perspectiva muy diferente de la lección, en comparación con Marcos y Clara, y que además tenía menos que ofrecer para ayudar a María a perfeccionarse. Al no contar con la herramienta de monitoreo que lo guiase hacia senderos particulares de solución y que lo impulsara tanto a examinar el trabajo de los estudiantes, como a escuchar el pensamiento de ellos, al director le había parecido un poco incoherente la lección, en donde cada quien trabajaba por su cuenta. Cuando escuchó la conversación de los tres docentes, se percató de que se estaba dando otro nivel de enseñanza y aprendizaje, al cual no tenía acceso.

Análisis del caso de María Lara

El caso de María Lara resulta representativo de muchos docentes que creen que están solos en su deseo de basar su enseñanza en el apoyo a sus estudiantes, conforme éstos se involucran en tareas que los desafían a pensar y a razonar. El punto crítico para María lo constituyó la conversación que tuvo con Marcos a finales del año escolar (líneas 19-29), quien compartió muchas de sus inquietudes y deseos por mejorar la enseñanza. Mientras María comenzaba su segundo año de enseñanza, su colaboración con Marcos y Clara le brindó la confianza y determinación que necesitaba para poner en práctica en su clase tareas que exigían más a los estudiantes.

La observación conjunta en que tomaron parte Marcos, Clara, María y el director, proporcionó una experiencia compartida fundamental para hablar sobre la enseñanza y el aprendizaje. En primer lugar, gracias al análisis, María pudo percatarse y comprender las cosas de modo distinto (por ejemplo, el pensamiento subyacente en las soluciones, como en el caso de Cosme, que no le resultó inmediatamente claro (líneas 78-88]); además obtuvo un mayor conocimiento respecto de las formas en que necesitaba apoyar a sus estudiantes. En segundo lugar sus colegas le proporcionaron sugerencias sobre las maneras alternativas en que podría orquestar la discusión, al hacer énfasis en el modo en que la selección y la secuenciación de las distintas soluciones condujeron a muy diferentes resultados. Por último, la observación y el subsecuente interrogatorio proporcionaron al director una valiosa oportunidad para que reconsiderase la naturaleza de las observaciones que él mismo realizó y para evaluar si las características superficiales de lo que ocurre en el aula expresan a cabalidad la historia de lo que los estudiantes están aprendiendo.

Los tres docentes (María, Clara y Marcos) integraron una comunidad pequeña pero cohesionada que se centró en el mejoramiento de la calidad de las discusiones dentro del aula. Se comprometieron a trabajar de manera colaborativa y a dedicar un tiempo después de clases para llevarlo a cabo. Juntos lograron el apoyo del director, quien otorgó tiempo libre a Marcos y Clara para que pudieran observar la clase de María. Como resultado, los tres maestros consiguieron avanzar y quizá más adelante otros profesores de la escuela se les unan en sus esfuerzos por mejorar la enseñanza.

En lo que resta de este capítulo analizamos el modo en que los docentes superan algunos obstáculos que al parecer se interponen entre ellos y el tipo de docente que quisieran ser, así como la manera en que los maestros pueden comenzar a trabajar colaborativamente con sus colegas y su director.

Superación de los obstáculos

Quizá el obstáculo más desalentador que un docente afronta es el miedo de que su supervisor no entienda o no apoye el enfoque de la enseñanza que se postula en este libro. Cuando los directores no tienen acceso a la estructura de aprendizaje más profunda que acontece en las aulas, suelen juzgar la "capa superficial" de la actividad como indisciplinada e incluso caótica. No todos los directores serán tan abiertos como al parecer lo es el de María (incluso él quizá necesite estar más convencido de que este enfoque de enseñanza provea las calificaciones que su escuela necesita obtener en las pruebas). No obstante, los docentes como María, Marcos y Clara, quienes permitieron que el director atestiguara el hecho de que existe una poderosa lógica subyacente en el enfoque que utilizaron, están dando un importante primer paso. Es más, el hecho de que la lógica esté sustentada en la teoría y la investigación concernientes a la manera en que los estudiantes aprenden, puede ayudar a convencer a los directores escépticos de que tal enfoque de la enseñanza se basa en evidencias.

Por supuesto, el aprovechamiento de los estudiantes constituye la "prueba" final. Los docentes ayudan a sus estudiantes mediante este enfoque a desarrollar la comprensión que debiera ubicarlos en una buena posición para desempeñar un destacado papel en las pruebas estandarizadas de su nivel. Las investigaciones del desempeño estudiantil en las aulas que emplean la currícula basada en estándares y que se enfocan en los estudiantes, han demostrado que los estudiantes de esas clases se desempeñan tan bien en las pruebas de competencias básicas, como aquellos a los que se les enseña con currícula convencional conducida por el docente; es más, en las pruebas de comprensión conceptual y razonamiento, los estudiantes que llevaban currícula basada en estándares tuvieron un mejor desempeño que quienes tuvieron currícula convencional (Chapell, 2003; Putnam, 2003; Swafford, 2003). Y, desde luego, el enfoque de la enseñanza para la comprensión centrado en los estudiantes se compara favorablemente respecto del enfoque típico de prepararlos para los exámenes, en el cual los docentes proporcionan a los estudiantes prácticas con reactivos "parecidos" a los de las pruebas, haciendo poco o ningún esfuerzo para desarrollar la comprensión de los estudiantes.

No obstante, todavía queda mucho trabajo por hacer, incluso después de que se haya apaciguado el temor que el director siente por las evaluaciones insatisfactorias. Es probable que los docentes que trabajan para mejorar su enseñanza utilizando las cinco prácticas sean mucho más exigentes con ellos mismos que otros profesores. Una vez que los profesores comienzan a ver su práctica "desde adentro" –es decir, desde la perspectiva del pensamiento del estudiante– se les abre un panorama mucho más amplio de desafíos y posibilidades. Ciertamente hay muchos más errores conceptuales que se deben corregir de los que un docente pudiera haber imaginado, pero también se presentan indicios estimulantes de lo que sería posible si se tiene en cuenta la curiosidad, creatividad y flexibilidad de la mente humana. Los profesores comienzan a vislumbrar que las mentes de sus estudiantes son activas y cómo ellos mismos influyen en el modo que aprenderán los estudiantes y en su forma de pensar.

Por todas estas razones, los docentes que consideran útiles las cinco prácticas suelen trabajar ininterrumpidamente para mejorar. La primera vez que un maestro utiliza una tarea particular para la enseñanza, tal vez se centre en la anticipación y el monitoreo a fin de aprender más sobre la manera en que sus estudiantes tienden a responder a la tarea y sobre qué ideas matemáticas pueda traer a colación a partir de las respuestas de los estudiantes. La segunda ocasión, el docente puede utilizar la información obtenida en la primera vez con el objeto de elegir juiciosamente con toda seguridad qué enfoques seleccionará para la discusión grupal. En las siguientes lecciones, el profesor emplearía la información recopilada en las anteriores para comenzar a desarrollar métodos eficaces de secuenciación y conexión. Así, con el tiempo, el docente puede reforzar su empeño por facilitar una discusión relacionada con una tarea particular, acelerándose su progreso siempre y cuando trabaje con otros colegas, haga uso tanto de los recursos proporcionados por la investigación, como de los materiales curriculares y se base de manera consistente en registros de lo que haya observado y aprendido durante cada esfuerzo.

El trabajo con otros

Una vez que los docentes se hayan percatado de los beneficios de la enseñanza centrada en el estudiante y hayan descubierto las cinco prácticas como una herramienta útil para orquestar discusiones, inexorablemente querrán compartir su descubrimiento con otros. ¿De qué manera un profesor puede transitar desde un pequeño grupo de colegas que piensan de manera similar (en el caso de María, fueron sólo tres maestros) hacia una comunidad de docentes más numerosa que ayude a los estudiantes a aprender de esa forma? En los siguientes párrafos exploramos distintos enfoques que los maestros pueden tener en cuenta al erigir una comunidad de profesores que tengan una visión compartida de la enseñanza y el aprendizaje.

En primer lugar, los docentes pueden invitar a sus colegas a que observen una lección en la cual emplean las cinco prácticas. Más que ofrecerles de buenas a primeras a los observadores un “mapa de las cinco prácticas”, el profesor que hace la demostración puede incluirlos en una lista para que en su momento ayuden poniendo atención a lo que los estudiantes “están comprendiendo” y a lo que no entienden. De este modo, la atención de los observadores se centrará en los estudiantes; una vez comenzada la discusión en donde se comparta y se resuma, los observadores deberán tener ciertas nociones de la variedad de respuestas de los estudiantes. Siendo esto así, es muy probable que se ubiquen de manera que observen lo que el docente que hace la demostración es capaz “de realizar” con las distintas comprensiones. Si los profesores en verdad se han percatado de las acciones de dicho docente, entonces se les puede conectar con el lenguaje de las cinco prácticas.

Un segundo enfoque puede consistir en que los profesores convencieran al director de reservar el tiempo usual asignado a los grupos de maestros para planificar y de contratar a un consultor externo que auxilie al grupo a planificar conjuntamente la lección, que posteriormente uno de ellos impartiría mientras los otros observarían. El tiempo para la planificación conjunta resulta más productivo cuando los docentes tienen que desempeñar una tarea específica y luego se les hace responsables de la misma. Al final del semestre, a cada grupo de planificación conjunta se le pediría una lección de muestra para su grado o para toda la escuela. Esto es parecido a un modelo de estudio de lección, que ha tenido como resultado propiciar un mayor enfoque en el aprendizaje del estudiante (Perry y Lewis, 2010).

Un tercer enfoque para una comunidad de docentes más amplia que trabajan de manera conjunta en una meta común, radicaría en hacer participar al director con el objeto de diseñar un proceso de selección de currículo que se enfoque en los niveles de exigencia cognitiva de la mayoría de las tareas. Como se comentó antes, la orquestación de discusiones productivas en el aula resulta casi imposible con tareas que se basen en procedimientos de bajo nivel. Si los profesores inician con una dotación de buenas tareas, estarán en una posición mucho mejor para comenzar a trabajar con las cinco prácticas. De hecho, si se apegan fielmente a un currículo de gran exigencia, pronto experimentarán la *necesidad* de aplicar las cinco prácticas. Hemos descubierto que es útil emplear la Guía para el análisis de tareas (analizada en el capítulo 2 y que se muestra en la figura 2.3) en el estudio de un tema común que esté en todos los libros de texto.

Un cuarto enfoque sería formar un grupo e instaurar el requerimiento de una práctica centrada en el estudiante, mediante el inicio de un diálogo con los responsables educativos de la comunidad. Por ejemplo, un docente pudiera solicitar la palabra en una reunión del comité educativo de la dirección de la escuela, para hablar de las estimulantes tendencias de la enseñanza y el aprendizaje matemáticos. Hemos colocado una presentación hecha en PowerPoint que pudiese servir como punto de arranque para dicha sesión. (Para consultar la presentación y otros materiales que apoyen una discusión sobre tareas cognitivamente desafiantes, visite el sitio www.teacherscollegepress.com, seleccione la opción *Free Downloads* (Descargas gratuitas) del menú que está a la derecha y recorra la pantalla hasta la opción *Implementing Standards-Based Mathematics Instruction* (Implantación de la Enseñanza Matemática basada en Estándares) (Stein *et al.*, 2009). Se tendría un efecto aún más contundente si se agregasen videogra-baciones que muestren ejemplos locales de la práctica centrada en el estudiante. La misma presentación en PowerPoint pudiera utilizarse con los padres de familia en reuniones abiertas al público o con la junta directiva escolar. Asimismo, sería de utilidad el seminario en línea *Effective Mathematics Instruction: The Role of Mathematical Tasks (K-12)* [Enseñanza matemática eficaz: el papel de las tareas matemáticas (K-12)], que está disponible en el sitio del *NCTM* [vaya a http://www.nctm.org/profdev y seleccione la opción *E-Seminars* (Seminarios electrónicos)], para divulgar las ideas relacionadas con el beneficio de utilizar en el aula tareas cognitivamente desafiantes.

Un último enfoque sería que los docentes convencieran a sus directores para que asistieran a un seminario *Lenses on Learning* (Miradas al aprendizaje), seguido de un desarrollo profesional de las cinco prácticas, con el propósito de alentarlos a que utilicen una herramienta basada en las mencionadas prácticas cuando observen las clases. (Para mayor información sobre los seminarios *Lenses on Learning*, visite www.mathleadership.org y seleccione la opción *Lenses on Learning (LOL)* del menú que está al lado izquierdo de la página de inicio.)

Conclusión

María Lara y los maestros como ella necesitan no sentirse incapaces de propiciar el cambio en sus ambientes escolares. Un docente quizá se tope al principio con uno o dos compañeros que piensen como él, gracias a las conversaciones sostenidas con sus colegas, quienes juntos puedan comenzar a realizar cambios en la forma en que las Matemáticas se enseñan y aprenden; tales cambios pueden servir como un catalizador para reformas más ambiciosas centradas en la escuela.

El trabajo que pone a la consideración este libro no resulta sencillo: una enseñanza planificada de manera cabal y razonada que gira alrededor de tareas cognitivamente desafiantes, mismas que culminan con la discusión grupal, lo cual convierte en algo conspicuo a las Matemáticas que habrán de aprender los estudiantes. Aunque algunos profesores han afrontado solos este reto, el trabajo con otros colegas puede mejorar de manera significativa sus esfuerzos. Maestros como María, Marcos y Clara están comprometidos a perfeccionar las oportunidades de aprendizaje que ofrecen a sus estudiantes, están dispuestos a examinar críticamente las prácticas actuales y están decididos a llevar a cabo mejoramientos graduales en la práctica. Por consiguiente, se ubican en una categoría que los convierte en lo que Stigler y Hiebert (1999, p. 179) designan como "profesores protagónicos del siglo xxi". Es decir, serán los docentes "que trabajan de manera conjunta para infundir mejores ideas a la práctica estándar. Serán los maestros que colaboran en la construcción de un sistema que tiene la meta de mejorar el aprendizaje de los estudiantes en el aula 'promedio', quienes trabajan de modo gradual en la mejora de las prácticas estándares en el aula".

Todos los profesores tienen la capacidad para convertirse en docentes estrellas; sólo requieren tener acceso a oportunidades para aprender, reflexionar y crecer. Este libro ofrece dichas oportunidades. Trabajando concienzudamente en el libro –solos o con sus colegas– los profesores pueden comenzar a hacer cambios en sus prácticas pedagógicas, las cuales mejorarán la eficacia de su enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes a su cargo.

REFERENCIAS

Achieve. *Foundations for Success: Mathematics Expectations for the Middle Grades.* Washington, D.C.: Achieve, 2002.

Ball, D. L. "With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary School Mathematics." *The Elementary School Journal* 93, no. 4 (1993): 373–97.

Bill, V. L., and I. Jamar. "Disciplinary Literacy in the Mathematics Classroom." In *Content Matters: A Disciplinary Literacy Approach to Improving Student Learning*, edited by S. M. McConachie and A. R. Petrosky, pp. 63–85. San Francisco: Jossey-Bass, 2010.

Bennett, J. M., E. B. Burger, D. J. Chard, A. L. Jackson, P. A. Kennedy, F. L. Renfro, J. K. Scheer, and B. K. Waits. *Mathematics Course 2*. Austin, Tex.: Holt, Rinehart, and Winston, 2007.

Boaler, J., and K. Brodie. "The Importance of Depth and Breadth in the Analysis of Teaching: A Framework for Analyzing Teacher Questions." In *Proceedings of the 26th Meeting of the North America Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Toronto, Ontario, 2004. Brahier, D. J. *Teaching Secondary and Middle School Mathematics*. Allyn and Bacon, 2000.

Bransford, J. D., A. L. Brown, and R. R. Cocking, eds. *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School*. Washington, D.C.: National Academy Press, 2000.

Burke, M., D. Erickson, J. W. Lott, and M. Obert. *Navigating through Algebra in Grades 9–12. Principles and Standards for School Mathematics* Navigations Series. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

Chapin, S. H., C. O'Connor, and N. C. Anderson. *Classroom Discussions: Using Math Talk to Help Students Learn, Grades 1–6.* Sausalito, Calif.: Math Solutions, 2003.

Chappell, M. "Keeping Mathematics Front and Center: Reacting to Middle-Grades Curriculum Projects Research." In *Standards-Based School Mathematics Curricula: What Are They? What Do Students Learn?* edited by S. L. Senk and D. R. Thompson, pp. 285–96. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 2003.

Cuevas, C., and K. Yeatts. *Navigating through Algebra in Grades 3–5. Principles and Standards for School Mathematics.* Navigations Series. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2001. Dewey, J. *The Child and the Curriculum.* Chicago: University of Chicago Press, 1902.

Doyle, W. "Work in Mathematics Classes: The Context of Students' Thinking during Instruction." *Educational Psychologist* 23 (February 1988): 167–80.

Engle, R. A., and F. C. Conant. "Guiding Principles for Fostering Productive Disciplinary Engagement: Explaining an Emergent Argument in a Community of Learners Classroom." *Cognition and Instruction* 20, no. 4 (2002): 399–483.

Fennema, E., and M. L. Franke. "Teachers' Knowledge and Its Impact." In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by D. Grouws, pp. 147–64. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1992.

Hantano, G., and K. Inagaki. "Sharing Cognition through Collaborative Comprehension Activity." In *Perspectives on Socially Shared Cognition,* edited by L. B. Resnick, J. M. Levine, and S. D. Teasley, pp. 331–480. Washington, D.C.: American Psychological Association, 1991.

Hart, K. *Children's Understanding of Mathematics.* London: John Murray, 1981.

Heller, P. M., A. Ahlgren, T. Post, M. Behr, and R. Lesh. "Proportional Reasoning: The Effect of Two Context Variables, Rate Type, and Problem Setting." *Journal of Research in Science Teaching* 26 (March 1989): 205–20. Hiebert, J., A. K. Morris, D. Berk, and A. Jansen. "Preparing Teachers to Learn from Teaching." *Journal of Teacher Education* 58 (February 2007): 47–61.

Kaput, J., and M. M. West. "Missing-Value Proportional Problems: Factors Affecting Informal Reasoning Patterns." In *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics,* edited by G. Harel and J. Confrey, pp. 235–87. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994.

Lakatos, I. *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

Lampert, M. *Teaching Problems and the Problems of Teaching.* New Haven, Conn.: Yale University Press, 2001.

Lappan, G., J. T. Fey, W. W. Fitzgerald, S. N. Friel, and E. D. Philips. *Connected Mathematics: Looking for Pythagoras*. Boston: Pearson Education, 2010.

Larson, R., L. Boswell, and L. Stiff. *Geometry.* McDougal Littel, 2004.

Lave, J., and E. Wenger, *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. N.Y.: Cambridge University Press, 1991.

Lewis, C. C. *Lesson Study: A Handbook of Teacher-Led Instructional Change.* Philadelphia: Research for Better Schools, 2002.

Mehan, H. *Learning Lessons: Social Organization in the Classroom.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1979.

Mossgrove, J. *Examining the Nature of Instructional Practices of Secondary Mathematics Preservice Teachers.* PhD diss., University of Pittsburgh, 2006. UMI Dissertation Services 3250964.

Perry, R., and C. Lewis. "Building Demand for Research through Lesson Study." In *Research and Practice in Education: Building Alliances, Bridging the Divide,* edited by C. E. Coburn and M. K. Stein, pp. 131–46. Lanham, Md.: Rowman and Littlefield, 2010.

Putnam, R. "Commentary on Four Elementary Mathematics Curricula." In *Standards-Based School Mathematics Curricula: What Are They? What Do Students Learn?* edited by S. L. Senk and D. R. Thompson, pp. 161–78. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 2003.

Resnick, L. *Education and Learning to Think.* Washington, D.C.: National Academy Press, 1987. Smith, M. S., V. Bill, and E. K. Hughes. "Thinking through a Lesson Protocol: A Key for Successfully Implementing High-Level Tasks." *Mathematics Teaching in the Middle School* 14 (October 2008): 132–38.

Smith, M. S., and J. Cartier. "The Lesson Plan Template." Created under the auspices of the Collaborative, Technology-Enhanced Lesson Planning as an Organizational Routine for Continuous, School-Wide Instructional Improvement Project, directed by M. K. Stein and J. Russell at the University of Pittsburgh, 2009.

Smith, M. S., A. F. Hillen, and C. Catania. "Using Pattern Tasks to Develop Mathematical Understandings and Set Classroom Norms." *Mathematics Teaching in the Middle School* 13 (August 2007): 38–44.

Smith, M. S., E. K. Hughes, R. A. Engle, and M. K. Stein. "Orchestrating Discussions." *Mathematics Teaching in the Middle School* 14 (May 2009): 548–56.

Smith, M. S., and M. K. Stein. "Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice." *Mathematics Teaching in the Middle School* 3 (February 1998): 344–50.

Stein, M. K., R. A. Engle, M. S. Smith, and E. K. Hughes. "Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Helping Teachers Learn to Better Incorporate Student Thinking." *Mathematical Thinking and Learning* 10, no. 4 (2008): 313–40.

Stein, M. K., B. Grover, and M. Henningsen. "Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms." *American Educational Research Journal* 33 (Summer 1996): 455–88.

Stein, M. K., S. Lane, and E. Silver. "Classrooms in Which Students Successfully Acquire Mathematical Proficiency: What Are the Critical Features of Teachers' Instructional Practice?" Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New York, April 1996.

Stein, M. K., M. S. Smith, M. A. Henningsen, and E. A. Silver. *Implementing Standards-Based Mathematics Instruction: A Casebook for Professional Development.* 2nd ed. New York: Teachers College Press, 2009.

Stigler, J. W., and J. Hiebert. *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom.* New York: The Free Press, 1999.

Swafford, J. "Reaction to High School Curriculum Projects." In *Standards-Based School Mathematics Curricula: What Are They? What Do Students Learn?* edited by S. L. Senk and D. R. Thompson, pp. 457–68. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 2003.

Van de Walle, J. A. *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally.* 4th ed. Boston: Allyn and Bacon, 2004.

Van de Walle, J. A., K. S. Karp, and J. M. Bay-Williams. *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally.* 7th ed. Boston: Pearson Education, 2010.

Vygotsky, L. S. *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1978.

Prácticas

5 Guía de desarrollo profesional

La guía tiene el propósito de fomentar conversaciones sobre las ideas clave de este libro. Los docentes que lo lean quizá encuentren preguntas y sugerencias adicionales que estimulen el pensamiento, pero su beneficio real es servir como apoyo para que se puedan dar las discusiones en los grupos de los maestros practicantes o que están en la etapa de preservicio.

Sugerencias para utilizar las actividades de este libro

En los capítulos de esta obra se insertan dos tipos de actividades con el fin de interesar a los maestros: "Actividad de involucramiento" e "¡Intente esto!" Aunque ambas pueden resultar benéficas para un docente que trabaje de manera individual, también pueden alentar discusiones interesantes dentro de un grupo de maestros que se reúnan para un propósito común.

ACTIVIDAD DE INVOLUCRAMIENTO

A lo largo del libro, estas actividades ofrecen al lector sugerencias respecto de cómo aprovechar un artefacto específico propio de la práctica en el aula, que un capítulo presenta (casos narrativos de enseñanza en el aula, transcripciones de interacciones en el aula, tareas educativas, ejemplos de trabajos de estudiantes). Un grupo de docentes podrían explorar tales sugerencias y analizarlas mediante la conformación de equipos pequeños o grandes, con el objeto de identificar diversas perspectivas o soluciones antes de leer el análisis del autor.

Por ejemplo, en el capítulo 2 se invita a los lectores a que resuelvan la tarea de "Embaldosar un patio" (véase la actividad de involucramiento). Quizá un facilitador exhorte a los docentes para que trabajen en esta tarea en equipos pequeños, compartir distintas soluciones y luego orquestar una discusión de la tarea empleando las cinco prácticas. Esto daría acceso a los maestros tanto a diversos métodos de solución (algunos de los cuales se encontrarán más adelante en el caso de Dulce Domínguez) como a una oportunidad de participar en un tipo de discusión cuidadosamente orquestada, la cual estamos sugiriendo que impulsen en sus propias aulas.

En el capítulo 3 se les pide a los lectores que analicen el caso de Dulce Domínguez y que identifiquen instancias en donde al parecer utiliza las cinco prácticas (véase la actividad de involucramiento 3.1). Un facilitador podría pedir a los docentes que lean este caso con miras a prepararse para una discusión grupal en torno a las formas en que las cinco prácticas fueron o no evidentes en el ejercicio de enseñanza de Dulce Domínguez. La discusión proporcionaría una oportunidad para plantear diversas ideas y para que los docentes justifiquen la selección de situaciones específicas como instancias de las cinco prácticas. Al dar seguimiento a una discusión grupal, los profesores pueden continuar con la lectura del análisis ofrecido por los autores y considerar en qué medida concuerdan o disienten de la perspectiva de los autores. Lo anterior también podría proporcionar materia para una discusión grupal adicional. Al concluir esta actividad, los docentes tendrían una perspectiva más nítida de cómo son las cinco prácticas cuando se implementan y estarían en una mejor posición para trabajar con los capítulos siguientes.

¡INTENTE ESTO!

Al final de los capítulos 4, 5, 6 y 7 se invita a los lectores a que sometan a prueba, en sus propias aulas, las ideas clave analizadas en los capítulos. En la última parte de estos capítulos, el facilitador debiera sugerir que los docentes se involucren en la tarea, ya sea de forma individual o colectiva, y que programen una sesión para hablar sobre sus experiencias.

Por ejemplo, en la sección "¡Intenta esto!" de la parte final del capítulo 4 se les pide a los docentes seleccionar una tarea de alto nivel e involucrarse en la primera práctica: anticipación. Un facilitador podría formar parejas de docentes que impartan el mismo contenido y solicitarles que comiencen planificando una clase de manera colaborativa, anticipando lo que harán los estudiantes cuando afronten la tarea y la forma en que responderán cuando la realicen. Más adelante podría reunirse a los docentes en equipos de cuatro, dándole la oportunidad a cada par de compartir la tarea que seleccionaron y las soluciones que hayan anticipado. Después podrían recibir retroalimentación de sus colegas a fin de revisar la tarea o sus expectativas respecto de lo que harán los estudiantes. Se puede emplear el Protocolo para la Narración de Casos (*Case Story Protocol,* Hughes, Smith, Hogel y Boston, 2009) o el Protocolo para Observar y Preguntar (*Noticing and Wondering Protocol* ,Smith, 2009) con el propósito de compartir ideas de manera respetuosa y producir una retroalimentación útil.

Hughes, E. K., M. S. Smith, M. Hogel, and M. D. Boston. "Case Stories: Supporting Teacher Reflection and Collaboration on the Implementation of Cognitively Challenging Mathematical Tasks." In *Inquiry into Mathematics Teacher Education*, edited by F. Arbaugh and P. M. Taylor, pp. 71–84, Monograph Series, vol. 5. San Diego, Calif.: Association of Mathematics Teacher Educators, 2009.

Smith, M. S. "Talking about Teaching: A Strategy for Engaging Teachers in Conversations about Their Practice." In *Empowering the Mentor of the Preservice Mathematics Teacher*, edited by G. Zimmermann, pp. 39–40; *Empowering the Mentor of the Beginning Mathematics Teacher*, edited by G. Zimmermann, pp. 33–34; and *Empowering the Mentor of the Experienced Mathematics Teacher*, edited by G. Zimmermann, pp. 35–36. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2009.

Sugerencias para profundizar más

Aunque muchas de las ideas presentadas en el libro podrían explorarse con mayor profundidad (por ejemplo, el planteamiento de preguntas, la conversación responsable, el estudio de clase japonés), una idea que tal vez requiera más atención sea la exigencia cognitiva de una tarea matemática. Esta idea se analiza en el capítulo 2, pero en función de los antecedentes y las experiencias de los docentes, quizá se necesite un esfuerzo adicional a fin de preparar los capítulos posteriores, en vista de que este concepto resulta fundamental para trabajar con las cinco prácticas.

Por ejemplo, un facilitador quizá haga que se interesen los docentes en analizar uno de los siguientes artículos en los que se presentan ideas afines:

Smith, M. S., and M. K. Stein. "Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice." *Mathematics Teaching in the Middle School 3* (February 1998): 344–50.

Stein, M. K., and M. S. Smith. "Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice." *Mathematics Teaching in the Middle School 3* (January 1998): 268–75.

O tal vez el facilitador involucre a los docentes en la clasificación de una serie de tareas con distintos niveles de exigencia que les ayude a desarrollar conjuntos de características de las tareas para cada nivel. Se puede encontrar una recopilación de tareas que se utilicen para este propósito en:

Smith, M. S., M. K. Stein, F. Arbaugh, C. A. Brown, and J. Mossgrove. "Characterizing the Cognitive Demands of Mathematical Tasks: A Sorting Activity." In *Professional Development Guidebook for Perspectives on the Teaching of Mathematics: Companion to the Sixty-sixth Yearbook*, pp. 45–72. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2004.

Sugerencias de preguntas para los docentes

Las siguientes preguntas pretenden interesar a los docentes en consideraciones adicionales sobre las ideas presentadas en el libro y propiciar que planteen sus creencias y prácticas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje. El facilitador de desarrollo profesional puede seleccionar algunas preguntas para que los participantes las consideren antes de leer los capítulos o para que las utilicen en una reflexión o análisis que se lleve a cabo después de la lectura.

Introducción

1. ¿Considera que las discusiones son una característica importante de las clases de Matemáticas? ¿Por qué sí o por qué no?
2. ¿Qué experiencias ha tenido en la orquestación de discusiones? ¿Qué desafíos ha afrontado cuando se esfuerza para que sus estudiantes se involucren en una plática sobre Matemáticas?
3. ¿Está de acuerdo en que los estudiantes aprenden cuando se les alienta a ser autores de sus propias ideas y cuando se responsabilizan de las ideas clave de la disciplina? ¿Por qué si o por qué no? ¿Qué implicaciones para la enseñanza tiene este punto de vista?
4. En la tarea de las hojas y las orugas, David Canales permitió a los estudiantes "ser autores de sus propias ideas", pero al parecer no los hizo responsables de su aprendizaje de ideas matemáticas específicas. Los autores sugieren que para lograrlo, el docente primero requería tener claridad respecto de lo que necesitaba que sus estudiantes aprendieran.
   a. ¿Cuál sería una meta de aprendizaje apropiada para una lección que propone como tarea la de las hojas y las orugas?
   b. ¿Qué tan diferente hubiera sido el desarrollo de la discusión en el aula del maestro Canales si se considera esa meta?

Capítulo 1. Introducción a las cinco prácticas

1. ¿Piensa que las discusiones son una característica importante para las clases de Matemáticas? ¿Por qué sí o por qué no?
2. ¿Qué experiencias ha tenido en orquestar discusiones? ¿Qué obstáculos ha afrontado en sus esfuerzos para involucrar a los estudiantes en conversaciones sobre Matemáticas?
3. La anticipación es una actividad que al parecer incrementa el tiempo invertido en la planificación de una clase. ¿Cuál sería la recompensa que esperaría obtener de esta inversión de tiempo?
4. ¿En qué forma sería útil una tabla de monitoreo como la de la figura 1.1 en su trabajo?
5. Muchos docentes creen que las preguntas surgen “en el momento”, como resultado de interacciones en el aula. ¿En qué medida los docentes pueden planificar preguntas previas a la lección? ¿Qué beneficios genera preparar preguntas antes de la clase?
6. ¿Cómo afectaría a la calidad de la discusión una cuidadosa selección y secuenciación? ¿En qué manera le darían estas prácticas mayor control sobre la discusión?
7. ¿Por qué es tan importante la práctica de la conexión? ¿Cuál es el papel del docente cuando ayuda a los estudiantes a realizar conexiones?

Capítulo 2. Preparación para las cinco prácticas: establecimiento de las metas y selección de las tareas

1. ¿Cómo describiría la relación entre la meta de la lección y las actividades educativas con las que los estudiantes se involucran durante la clase?
2. ¿Considera que la especificidad de una meta le pueda ayudar durante la lección? ¿Cómo?
3. Los autores afirman que lo que los estudiantes aprenden está en función de la naturaleza de la tarea en la que se involucran. ¿Está de acuerdo con este punto de vista? ¿Por qué sí o por qué no?
4. ¿Cuáles considera que sean las ventajas y desventajas de utilizar tareas de alto nivel (es decir, tareas cognitivamente desafiantes) como base de la educación?

Capítulo 3. Investigación de las cinco prácticas en acción

1. ¿Considera que la clase de Dulce Domínguez fue eficaz? ¿Qué elementos lo llevan a esa conclusión? ¿Qué llevó a cabo ella, más allá de las cinco prácticas, que hubiese contribuido (u obstaculizado) a la calidad de la lección?
2. ¿Qué le hubiera gustado que Dulce Domínguez hiciera distinto, si acaso hubiese algo? ¿En qué forma cree que afectarían al aprendizaje de los estudiantes los cambios que usted propone?
3. Compare la experiencia educativa de la clase de Dulce Domínguez con la de David Canales. ¿En qué fueron semejantes y en qué se diferenciaron? ¿Qué impacto cree usted que hayan tenido las diferencias sobre las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes?

Capítulo 4. Comienzo: anticipación de las respuestas de los estudiantes y monitoreo de su trabajo

1. ¿Cuáles considera que sean las ventajas de resolver la tarea en la que se involucran los estudiantes?

2. ¿Cuál es la razón por la que quisiera anticipar los enfoques correctos e incorrectos para resolver una tarea?
3. ¿De qué forma sería útil para su trabajo una tabla de monitoreo como la de la figura 4.4? (La misma pregunta se planteó en relación con el capítulo 1. ¿Ha cambiado su percepción sobre la utilidad de esta herramienta desde que en un inicio pensó en el valor de la tabla de monitoreo?)
4. Nicolás Barrios debe de haber invertido mucho tiempo en planificar y en reflexionar sobre la lección. ¿En qué circunstancias tal inversión de tiempo sería redituable?
5. ¿Qué cree que Nicolás Barrios podría o debería haber hecho de diferente forma, si acaso debió hacer algo, en la planificación (parte 1) y en el apoyo al trabajo de los estudiantes concerniente a la tarea (parte 2)? ¿Por qué haría usted esos cambios?

Capítulo 5. Establecimiento del rumbo de la discusión: selección, secuenciación y conexión de las respuestas de los estudiantes

1. ¿Alguna vez le ha pedido a sus estudiantes que compartan de manera voluntaria las soluciones a la tarea que se les asignó? ¿Cuáles son las mejores y las peores experiencias que ha tenido al utilizar esta estrategia para compartir soluciones? ¿Considera que la práctica de selección propicia un resultado más consistente?
2. ¿En qué circunstancias o condiciones piensa que compartir públicamente enfoques incorrectos con los estudiantes tenga sentido? ¿Cómo haría lo anterior, de tal manera que los estudiantes no se quedaran con la creencia de que el enfoque incorrecto era válido?
3. Cuando las soluciones deseadas se hacen públicas, ¿es realmente importante quién presente una solución de la tarea? ¿Por qué sí o por qué no?
4. ¿Qué cree que Nicolás Barrios podría o debería haber hecho de manera distinta, si acaso debió hacer algo, en la selección y en la secuenciación de las respuestas de los estudiantes (parte 3) y al realizar conexiones entre las respuestas y las ideas matemáticas que resultaron cruciales para la clase (parte 4)? ¿Por qué haría usted esos cambios? ¿Qué impacto esperaría que tuvieran dichos cambios en las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes?

Capítulo 6. Cómo asegurar el pensamiento y la participación activos: plantear preguntas adecuadas y hacer responsables a los estudiantes

1. ¿En qué medida utiliza el modelo IRE de cuestionamiento en su propia aula? ¿Cuáles considera que sean las ventajas y las desventajas de este modelo de interacción?
2. ¿En qué forma podrían serle útiles las categorías de los tipos de preguntas identificados por Boaler y Brodie para ampliar su repertorio de tipos de preguntas? ¿Qué valor potencial considera que tiene este tipo de iniciativa?
3. Veamos la parte 4 del caso de Nicolás Barrios que se presenta en el capítulo 5. ¿Puede localizar ejemplos de distintos tipos de preguntas en ese segmento de la clase? ¿Qué papel desempeñaron los diferentes tipos de preguntas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes y para involucrarse en la lección?
4. ¿Hasta qué grado utiliza en la actualidad las cinco acciones de diálogo en su enseñanza? ¿Qué beneficios percibe al incorporar alguna o todas estas acciones en su práctica?

5. ¿Qué cree que Regina Quiñones podría o debería haber hecho para brindar un mejor apoyo a sus estudiantes en su aprendizaje y para involucrarlos en la lección? ¿Por qué haría usted esos cambios? ¿Qué impacto esperaría que tuvieran éstos en las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes?

Capitulo 7. Ubicación de las cinco prácticas en un contexto más amplio de la planificación de la lección

1. Las preguntas de discusión del capítulo 1 le solicitaron que describiera en qué forma planificó una lección. ¿Cómo se compara el proceso que describió en relación con el que sugiere el PRCL? ¿Qué considera valioso, si acaso lo considera, en la amplitud de las preguntas que el PRCL le pide que tome en cuenta?
2. ¿En qué forma "se puede echar a los hombros la carga de la enseñanza" un plan de clase?
3. ¿Bajo qué circunstancias se imagina que usted se involucraría en el nivel de planificación sugerido? ¿Qué ventajas considera que tendría hacer lo anterior para un subconjunto de clases que pudieran impulsar particularmente el aprendizaje de conceptos específicos?
4. ¿En qué forma animaría a sus colegas o a su departamento para que se involucraran en el diseño colaborativo de una clase? ¿Cuáles serían los beneficios de un trabajo de esa naturaleza?

Capítulo 8. Trabajo en el ambiente escolar para mejorar las discusiones en el aula

1. En su ámbito escolar, ¿Está enfrentando en la actualidad desafíos en su clase que tienen un impacto en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas? Si así fuera, ¿cuáles son esos desafíos? ¿Cómo comenzaría a afrontarlos?
2. En su escuela, ¿las tareas cognitivamente desafiantes son una característica usual en la enseñanza matemática? Si no es el caso, ¿de qué manera desempeñaría usted un papel activo para cambiar el *status quo*?
3. ¿En qué medida su director busca prácticas compatibles con las cinco prácticas cuando observa la clase que usted imparte? Si su director se centra en un conjunto distinto de prácticas, ¿cuáles son sus opciones?
4. De la experiencia de María Lara, ¿qué lección aprovecharía para aplicarla en su propia situación?

Notas

5 Prácticas
para orquestar discusiones productivas en Matemáticas

Anticipar las posibles soluciones de los estudiantes a tareas Matemáticas.
Monitorear el trabajo de los estudiantes en la clase, en “tiempo real”.
Seleccionar los enfoques y a los estudiantes para compartir resultados.
Secuenciar las respuestas de los estudiantes en un orden específico.
Conectar los distintos enfoques de los estudiantes con las Matemáticas subyacentes.

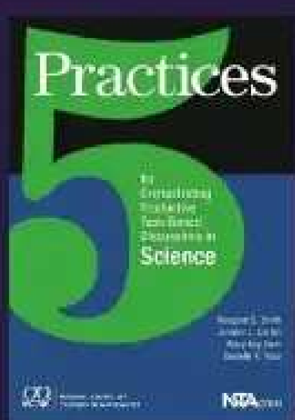
Estas 5 prácticas administradas permiten a los docentes tener el control de organizar discusiones productivas en el aula.

“Ofrece a los docentes una guía concreta para integrar estudiantes en las discusiones que hacen que las matemáticas contenidas en las lecciones de clase sean transparentes para todos. Estas prácticas instruccionales son muy oportunas a la luz de lo que se busca en los Estándares para la Práctica Matemática en el Marco Común Estatal de los Estándares para Matemáticas, y apoyarán a los docentes y estudiantes a llevar a cabo dichas normas. Este libro será una valiosa fuente de apoyo para futuras capacitaciones profesionales.

Catherine Martin
Directora de Matemáticas y Ciencias, Escuelas Públicas de Denver
Ex-profesora de Matemáticas de secundaria inferior y superior

“Asegurar que los estudiantes tienen la oportunidad de razonar matemáticamente es uno de los retos más difíciles que enfrentan los docentes. Un componente clave es la creación de un aula en la que el discurso se anima y conduce a una mejor comprensión. La discusión productiva no es un accidente ni puede realizarse por un docente que trabaja sobre la marcha, con la esperanza de un intercambio fortuito de ideas matemáticas significativas entre los estudiantes. Si bien reconocemos que este tipo de enseñanza es exigente, Smith y Stein presentan cinco prácticas que cualquier docente puede utilizar para propiciar conversaciones matemáticas coherentes. Mediante el uso de estas cinco prácticas, los docentes aprenderán a enseñar eficazmente a través de este enfoque.

Fredrick Dillon
Profesor de Matemáticas, Strongsville High School, Strongsville, Ohio
Certificado por la Mesa Directiva Nacional
Premio del Presidente por Excelencia en la Enseñanza de Matemáticas y Ciencia, 1995
Comité Ejecutivo. Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas



5 Practices for
Orchestrating
Productive

Task-Based
Discussions
in Science