LIPING MA
Universidad de California, Berkeley

CONOCIMIENTO Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS ELEMENTALES

La comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU.

ACADEMIA CHILENA DE CIENCIAS
MCMLXIV

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Editor:
Patricio Felmer Aichele

Coordinador editorial:
Marcela Reyes Azancot

Título original:
Knowing and teaching elementary mathemathics
Traducción de:
Paula Micheli

1ª edición marzo de 2010.
Nº de Inscripción: 190861
I.S.B.N.: 978-956-8304-04-1

Editado por Academia Chilena de Ciencias.
Almirante Montt N° 454 Santiago-Centro. Teléfono 4812841.
E-mail: academiaciencia@123.cl
Santiago de Chile.

Diseño gráfico:
Ferrer Producciones Gráficas

Diseño de portada:
Juan Manuel Neira.

Impreso por:
Graficandes®
Santo Domingo 4593. Santiago de Chile.

A Jianfeng, Sushu y John, y a Cathy Kessel,
con el más profundo amor y aprecio.

Contenidos

Prefacio a la edición en español

Con la traducción de este libro al español, la Academia Chilena de Ciencias pone a disposición de la comunidad educacional un texto de extraordinario valor, en momentos de crucial importancia para la educación en nuestro país. La calidad de la educación se ha puesto en el centro de la discusión pública y en los próximos años será un sector que concentrará debates y propuestas, y que requerirá de enormes esfuerzos por parte de todo el conjunto de actores educacionales. En este contexto, el sistema de formación de profesores pondrá grandes desafíos al Ministerio de Educación y a las universidades formadoras de profesores. El primero deberá afianzar y potenciar el trabajo que se ha venido haciendo en el programa Inicia, definiendo e implementando políticas de largo plazo, que permitan mover al sistema de formación de profesores, en un proceso de transformaciones profundas, hacia la superación de problemas arrastrados ya por muchos años. Las segundas deberán redoblar sus esfuerzos por una renovación y fortalecimiento académico, adecuando sus programas e introduciendo cambios, que pueden ser resistidos, pero que son necesarios en esta tarea transformadora. No cabe duda que la calidad del sistema de formación de profesores es un eslabón clave en la tarea de la calidad de la educación, con un fuerte componente en la carrera docente, dignificando y elevando el valor de la profesión de profesor o profesora y con efectos directos sobre lo que sucede en el aula, en el diario quehacer de niños y niñas que merecen una mejor educación.

El conocido informe McKinsey, "Cómo hicieron los Sistemas Educativos con mejor desempeño del mundo para alcanzar sus objetivos", llama la atención sobre un hecho evidente, pero no por ello visualizado con claridad por todos: la calidad de un sistema educacional no puede exceder la calidad de sus profesores. Este informe fortalece nuestro convencimiento de que para lograr los anhelos de una mejor educación para todos los niños y niñas de nuestro país, tenemos que dedicar importantes recursos y esfuerzos para elevar el nivel de preparación de nuestros profesores, en una tarea de largo plazo, donde no hay recetas fáciles ni atajos milagrosos que tomar. Es necesario introducir cambios masivos frente a formas culturales y prácticas cotidianas, que naturalmente se resisten a desaparecer, y para lograr estos cambios, como indentifica Liping Ma, la autora de este libro, el período de formación inicial de los profesores es estratégicamente crítico, porque allí es posible romper el círculo vicioso que transmite estas formas y prácticas de generación en generación. A la luz de esta obra cobran fuerza las propuestas de transformación del sistema de formación de profesores que actualmente se encuentran en desarrollo y que deberían ser fortalecidas. Estas propician la formación de un nuevo contingente de profesores y profesoras que con renovado ímpetu empujen la educación básica en nuestro país, con un efecto multiplicador y de largo plazo, hacia un nivel superior de calidad.

Una de las áreas donde se hace especialmente necesario producir cambios importantes es en la de matemáticas. Aquí se requiere poner un nuevo acento en la comprensión, el conocimiento y las habilidades de los futuros profesores de educación básica, que permita mejorar y acrecentar los aprendizajes de los niños y niñas. Desde los mismos inicios de la civilización y a lo largo de toda la historia, las matemáticas han formado parte de los saberes que dan forma a la organización humana, en sus construcciones sociales y culturales, y en su interacción con el medio natural. Su importancia se ha visto acrecentada en el mundo moderno por su papel en la informática y la tecnología, en todas la ciencias naturales, muy marcada en la biología durante los últimos años, y ciertamente con creciente incidencia en la vida cotidiana. En reconocimiento del rol que juegan las matemáticas en la vida moderna es que, en todo el mundo, los sistemas educativos dan una gran importancia a su desarrollo y, de manera muy importante, en los primeros niveles de la educación escolar. El libro que ahora entregamos al medio educacional presenta un estudio de Liping Ma sobre las diferencias existentes entre profesores norteamericanos y profesores chinos, en sus niveles de conocimiento y comprensión de las matemáticas y en su capacidad para enseñarla. Este estudio, que ha provocado un importante impacto en los Estados Unidos, esperamos que también sea un gran aporte al debate nacional, incidiendo en la forma que deben tomar los cambios que necesitamos en la formación inicial de los maestros y maestras.

Pero uno podría legítimamente cuestionar la importancia que puede tener para nosotros este estudio comparativo, entre estas dos realidades tan marcadamente distintas a la nuestra. Dejando al lector la respuesta, quisiéramos llamar la atención sobre algunos aspectos que presenta el análisis de la autora y que nos parecen especialmente importantes de tomar en cuenta hoy, en nuestra realidad. En una exposición sencilla y a la vez muy profunda, la autora pone en relieve, de manera extremadamente nítida, el rol que juega el profesor en el aprendizaje de los niños y las niñas. Pone en evidencia, en el contexto de una clase de matemática, la aseveración del informe McKinsey mencionada al comienzo. Es el conocimiento, la comprensión y el dominio de las matemáticas que tiene el profesor, lo que pone el nivel de las discusiones matemáticas que pueden ocurrir en la sala de clases, a través del liderazgo natural que ejerce, con o sin intención. La riqueza, amplitud e intención de las preguntas y problemas planteados a los niños, las respuestas inspiradoras a las preguntas de éstos y el estímulo al pensamiento crítico, se ven fuertemente marcados por los conocimientos matemáticos que el profesor y profesora poseen.

Liping Ma no sólo reconoce que los conocimientos del profesor son fundamentales en la tarea de enseñar matemática, sino que busca una caracterización de estos conocimientos y es allí donde radica la originalidad e importancia de su propuesta. Acuña el concepto de Comprensión Profunda de las Matemáticas Elementales para identificar los conocimientos que debería poseer un profesor, para ejercer en plenitud su tarea de enseñar matemáticas elementales a niños y niñas, en los primeros años de escolaridad. Con esta nueva concepción aborda a matemáticos y educadores en Estados Unidos, enfrascados en la llamada guerra de las matemáticas, y provoca un punto de inflexión en sus discusiones. Su nueva concepción tiene un sentido matemático muy concreto y a la vez tiene una valoración pedagógica y metodológica nítidamente reconocida por los educadores.

Poniendo a las matemáticas en el centro del problema, sin escatimar ningún aspecto de su complejidad, riqueza y novedad, la autora logra superar genialmente la vieja dicotomía entre lo que se enseña y el cómo se enseña. Esta dicotomía, muy enraizada en nuestro sistema de formación de profesores, que disputa el espacio formativo con las tradicionales frases: lo único que importa... es que el profesor sepa la materia... y en contraposición ... es que el profesor sepa enseñar..., sembrando la duda en ambas partes, causa un enorme daño en el futuro profesor o profesora que no logra integrar en un sólo saber lo que necesita para tener éxito en la sala de clases. La propuesta de Liping Ma llama a una matemática, en su más pura expresión, entrelazada con los contenidos pedagógicos para su aprendizaje. Y en este contexto, la autora reconoce los aportes de las distintas metodologías de enseñanza que pueden ser implementadas, de acuerdo a la cultura o tendencia dominante: constructivismo, esquema colectivo o social, esquema tradicional, enfoque antropológico o cualquier otro donde esté presente la matemática en su plenitud. El éxito es posible en cualquiera de estas formas metodológicas si el profesor, en su calidad de líder indiscutido en la sala de clases, es capaz de recrear las matemáticas, en un diálogo con contenido matemático, estimulando la curiosidad y guiando los talentos de los niños y niñas.

Si bien Liping Ma visualiza la formación inicial como estratégica para romper el círculo vicioso, permitiendo cambiar la forma y calidad de la educación, su experiencia personal y la de los profesores exitosos bajo estudio, la lleva a enfatizar la importancia del aprendizaje durante la práctica docente. No es cierto que se pueda preparar a un profesor en su formación inicial, para que llegue a saberlo todo muy bien, llevándolo a la cima del conocimiento y comprensión de la matemática escolar, para que entonces pueda dedicarse a enseñar con éxito en la sala de clases. La autora enfatiza la importancia del aprendizaje en el ejercicio de la docencia, el aprendizaje entre pares compartiendo las experiencias ¿cómo enseñas esto? ¿qué significa este concepto? ¿cómo se resuelve este problema? ¿es tu método mejor en todos los casos? ¿por qué esa alumna no entiende mi explicación? ¿por qué a mis alumnos les cuesta esto? ¿y cómo a mi no me resulta tu estrategia?... La constante búsqueda de nuevos conocimientos, de una comprensión más profunda de las matemáticas, del desarrollo de nuevas habilidades, de nuevas estrategias y metodologías de enseñanza en un mundo cambiante, es crucial y el sistema educacional debe crear los espacios para el crecimiento profesional y estimular a los profesores y profesoras a que los ocupen.

Con esta publicación invitamos a los alumnos de pedagogía en educación básica a reflexionar y prepararse para los desafíos que la enseñanza de las matemáticas les presentará. También a los profesores y profesoras en ejercicio, en su constante búsqueda por lograr mejores aprendizajes en sus alumnos. Con mayor énfasis invitamos a los formadores universitarios y a las autoridades de las facultades e instituciones que tienen a su cargo la formación de profesores, a leer esta obra y extraer sus conclusiones. La autora ofrece ideas y propuestas que sólo tendrán realidad en las decisiones que puedan tomar las autoridades y los académicos universitarios, abriendo la posibilidad de llevarlas a la práctica.

La edición de esta versión en español, del celebrado libro de Liping Ma está orientada principalmente al medio nacional, pero no nos cabe duda que su interés supera las barreras nacionales por los temas fundamentales que trata. La realidad chilena no es muy distinta a la de muchos países de la región latinoamericana por lo que ofrecemos esta obra también a todos aquellos que allí quieren mejorar su propia educación.

La edición de este libro ha sido posible gracias al convenio de colaboración entre el Ministerio de Educación de Chile y la Academia Chilena de Ciencias y a la colaboración de numerosas personas, entre las que destacan Servet Martínez, que como presidente de la Academia Chilena de Ciencias impulsó con fuerza el rol de la Academia en educación escolar, Salomé Martínez y Leonor Varas, investigadoras en el área de matemáticas y de educación, por su permanente estímulo para lograr esta publicación y Marcela Reyes, por la coordinación diligente del proceso de edición.

Patricio Felmer, Editor
Miembro Correspondiente
Academia Chilena de Ciencias

Santiago, Marzo de 2010

Prefacio

LEE S. SHULMAN
The Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching.
Stanford, California. EE.UU.

Este es un libro increíble, pero también es increíblemente fácil malinterpretar sus enseñanzas más importantes. Liping Ma ha llevado a cabo un estudio que compara la comprensión matemática en relación con las prácticas de enseñanza en el aula, entre profesores de enseñanza primaria de EE.UU. y China. ¿Podría haber algo más simple? ¿Qué podría uno malinterpretar? A continuación haré una lista:

- Este libro se presenta como un estudio comparativo de profesores de matemáticas norteamericanos y chinos, pero su mayor contribución no es comparativa sino teórica.
- Este libro pareciera tratarse acerca de la comprensión de los contenidos matemáticos más que de su pedagogía, pero su concepción del contenido es profundamente pedagógica.
- Este libro pareciera abordar la práctica de la enseñanza de las matemáticas pero demanda la atención de quienes establecen las políticas educativas y de formación de profesores.
- Este libro parece ser más importante para la formación docente pero sus principales hallazgos podrían perfectamente relacionarse con nuestra comprensión de la labor del profesor y su desarrollo a lo largo de la carrera profesional.
- Este libro se concentra en la labor de profesores de educación primaria pero su público más importante podrían estar en académicos de facultades universitarias que enseñan matemáticas a futuros profesores así como a futuros padres.

Trataré de aclarar estas observaciones un poco crípticas en este prefacio, pero primero haré una breve nota biográfica acerca de Liping Ma.

Liping se convirtió en profesora primaria por cortesía de la Revolución Cultural China. Siendo alumna de octavo grado en Shangai fue enviada “al campo”, en su caso, a un pueblito rural pobre en la región montañosa del sur de China, para que fuera reeducada por los campesinos que labraban la tierra. Pasado unos meses, la máxima autoridad del pueblo le pidió que enseñara en la escuela local. Según ella me lo describió, era una adolescente shangainesa con apenas ocho años de educación formal que luchaba por enseñar todos los ramos, a dos cursos de niños, en una sola sala. Durante los siguientes siete años, enseñó los cinco niveles y se convirtió en la directora del colegio. Unos pocos años después, la contratarían como Superintendente de Educación Primaria de todo el condado.

Cuando volvió a Shangai, llena de curiosidad por su nueva vocación, encontró en el profesor Liu un mentor que dirigió sus lecturas de muchos de los clásicos de educación, entre ellos Confucio, Platón, Locke, Rousseau, Piaget, Vygotsky y Bruner. Con el tiempo, el profesor Liu se convirtió en el presidente de la Universidad Normal de China Oriental donde Liping consiguió el grado de magíster. Ella ansiaba estudiar aún más y continuar su educación en los EE.UU. El último día de 1988, llegó a ese país para estudiar en la Universidad Estatal de Michigan. En esta universidad trabajó con Sharon Feiman-Nemser y Suzanne Wilson en la enseñanza de profesores; con Debora Ball y Magdalene Lampert en educación matemática y con Lynn Paine en educación comparativa, entre otros. Además, participó en el desarrollo y análisis de una encuesta nacional sobre las comprensiones matemáticas de profesores de enseñanza primaria y se sorprendió frente a las concepciones erróneas generalizadas que persistían en los profesores norteamericanos. Tuvo la impresión de que eran muy distintos a los profesores que ella había conocido en China.

Después de unos años, su familia quiso vivir en California y Liping fue aceptada en el programa de doctorado de la Universidad de Stanford para completar sus cursos y su tesis. Yo fui su consejero y la Fundación Spencer la premió con una beca de tesis para completar el estudio que forma la base de este libro. Este apoyo, junto con la continua ayuda del estado de Michigan, le permitió viajar a China para reunir los datos de los profesores de este país. Luego de terminar su doctorado, se le concedió una beca de investigación postdoctoral para trabajar con Alan Schoenfeld en Berkeley, donde siguió con su investigación y donde su tesis se transformó en este magnífico libro.

¿Cuáles son las lecciones más importantes a aprender de este libro? Regresemos a la lista de interpretaciones erróneas que presenté antes y discutámoslas en forma más elaborada:

Este libro se presenta como un estudio comparativo de profesores de matemáticas norteamericanos y chinos, pero su mayor contribución no es comparativa sino teórica. La investigación compara a los profesores chinos y norteamericanos y se concluye, nuevamente, que los chinos saben más. ¿Podría haber algo más simple? Sin embargo, las ideas de este libro no son comparaciones entre profesores norteamericanos y su contraparte china. El núcleo de este libro es el análisis de la Dra. Ma sobre el tipo de comprensión que distingue a los dos grupos. Es mucho más probable que los profesores chinos hayan desarrollado una "comprensión profunda de las matemáticas fundamentales". Decir que ellos "saben más" o "entienden más" es hacer una declaración profundamente teórica. Puede que, de hecho, ellos hayan estudiado mucha menos matemática pero, lo que ellos saben, lo saben en forma más profunda, más flexible y más adaptativa.

Este libro pareciera tratarse acerca de la comprensión de los contenidos matemáticos más que de su pedagogía, pero su concepción del contenido es profundamente pedagógica. Liping Ma pretende dar cuenta de las diferencias de conocimiento del contenido y de la comprensión entre los profesores primarios de EE.UU. y China, pero su concepción de comprensión es crítica. Ella ha desarrollado concepciones de comprensión matemática que ponen énfasis en aquellos aspectos de conocimiento que son los que con más probabilidad contribuyen a la capacidad del profesor para explicar ideas matemáticas importantes a los alumnos. Así, su enunciado de cuatro propiedades de comprensión —ideas básicas, conectividad, representaciones múltiples y coherencia longitudinal— ofrece un marco poderoso para captar el contenido matemático necesario para comprender e instruir el pensamiento de los escolares.

Este libro pareciera abordar la práctica de la enseñanza de las matemáticas pero demanda la atención de quienes establecen las políticas educativas y de formación de profesores. Los encargados de elaborar las políticas se han vuelto ansiosos en su insistencia de que los futuros profesores demuestren que poseen el conocimiento disciplinario necesario para enseñar a los niños. Entre las autoridades formativas estatales está proliferando el uso de pruebas para evaluar el conocimiento disciplinario de los profesores. Sin embargo, éstas no pueden ser pruebas que evalúen el tipo de conocimiento equivocado. El trabajo de Liping Ma debería guiar a los encargados de las políticas escolares para que encarguen el desarrollo de evaluaciones que midan el conocimiento profundo de las matemáticas fundamentales en los futuros profesores y no el conocimiento superficial de procedimientos y reglas.

Este libro parece ser más importante para la formación docente pero sus principales hallazgos podrían perfectamente relacionarse con nuestra comprensión de la labor del profesor y su desarrollo a lo largo de la carrera profesional. Liping Ma no estaba satisfecha con documentar las diferencias de comprensión entre los profesores chinos y norteamericanos por lo que también investigó la fuente de dichas diferencias. Un hallazgo crucial (del que se hizo eco en el trabajo de TIMMS de Stigler y Hiebert) es que los profesores chinos continúan aprendiendo matemáticas y refinando su comprensión del contenido durante sus carreras profesionales. El trabajo de un profesor en China incluye el tiempo y el apoyo para debates serios y seminarios acerca del conocimiento de sus clases; estas son características esenciales del trabajo docente. A los profesores norteamericanos no se les ofrecen oportunidades dentro de la jornada escolar para estos debates colaborativos y, por ende, pueden enseñar por muchos años sin profundizar en su comprensión del contenido que enseñan mientras que los profesores chinos trabajan en ambientes con oportunidades continuas de aprendizaje.

Este libro se concentra en la labor de profesores de educación primaria pero su público más importante podría estar en académicos de facultades universitarias que enseñan matemáticas a futuros profesores así como a futuros padres. Dado nuestro entendimiento de la comprensión matemática para la enseñanza, ¿dónde pueden los futuros profesores aprender en forma inicial este tipo de matemática? En China, los profesores aprenden este tipo de matemáticas de los mismos profesores de enseñanza primaria, mejoran esa comprensión en los ramos universitarios de formación pedagógica y continúan desarrollando y nutriendo su conocimiento con la práctica. El único lugar para romper el círculo vicioso que limita el conocimiento matemático en los profesores norteamericanos es el desarrollo de cursos de matemáticas más efectivos en los programas de pregrado. Sin embargo, los actuales programas universitarios de matemáticas carecen de espacio para enseñar matemáticas fundamentales para una comprensión profunda. Si cabe, dicho conocimiento está mal interpretado como cura para ciertas carencias en lugar de reconocer que es preciso y que merece ser enseñado en la universidad. Los departamentos de matemáticas deben hacerse responsables por satisfacer esta prioridad nacional tanto para los futuros profesores como para los futuros ciudadanos.

Aunque recién se está publicando ahora, copias de los primeros borradores de este manuscrito llevan tiempo circulando en la comunidad matemática. En una reciente carta, el guía de tesis doctoral de Liping, Alan Schoenfeld de la Universidad de California, en Berkeley, describió en detalle la reacción a la publicación previa de las copias de este libro:

> El manuscrito de Liping ha recibido una sorprendente atención. Es un éxito oculto, quizás el único manuscrito que conozco que tiene la atención y la venia de los dos bandos de la “guerra matemática”. Mucho matemáticos de nivel mundial están muy entusiasmados con este texto y, en los encuentros matemáticos anuales, las personas como [aquí se mencionan varios matemáticos profesionales importantes] eran pancartas andantes promocionando este libro. Y eso es porque en el libro se dice que el conocimiento disciplinar es importante. Pero, a la vez, aquellos con una perspectiva reformista, es decir, los que valoran una

> visión profunda y conectada del pensamiento matemático y aquellos que comprenden que la competencia del profesor incluye tener una nutrida base de conocimientos que contenga un amplio rango de conocimiento de contenido pedagógico, encuentran que el libro es rico en ofrecer contenido, preparación y profesionalismo al profesor.

Este es, sin duda, un libro valioso e iluminador que da testimonio del talento de su autora y de los entornos de aprendizaje chino y norteamericano que lo han nutrido, da testimonio del valor de recibir a académicos de otras naciones que vienen a estudiar a los EE.UU. Insto a todos aquellos con una preocupación seria por la calidad de la educación matemática en los EE.UU. que lean este libro y que tomen en serio sus lecciones.

Agradecimientos

Hace unos 30 años, China estaba pasando por la llamada "Revolución Cultural". Producto de ésta, millones de estudiantes de las ciudades fueron enviados a las áreas rurales. Dejé Shangai, donde nací y me crié como una de ellos, me fui a un pequeño y pobre pueblo en la región montañosa del sur de China. Siete adolescentes como yo, con siete u ocho años de educación formal, formamos una familia "cooperativa" ahí. Se suponía que viviríamos de nuestro trabajo en el campo y que, a la vez, los campesinos nos reeducarían. Pero, unos meses después, la máxima autoridad del pueblo se acercó a mí y me sorprendió al pedirme que me convirtiera en profesora de la escuela primaria del pueblo, para educar a sus hijos. La mayoría de los campesinos de esa región montañosa eran analfabetos y querían fervientemente cambiar el destino de las siguientes generaciones.

Hoy, cuando sostengo el manuscrito del libro en mis manos y miro hacia el pasado, veo claramente el punto donde comenzó mi carrera, a la niña de Shangai que luchó duramente por enseñar, todos los ramos, a dos cursos de niños campesinos. Ha sido un largo viaje con penas y alegrías; todo el valor de este libro, si es que tiene alguno, se ha forjado durante este viaje.

No habría sido posible hacer este libro sin haber recibido ayuda a lo largo del camino. El texto se dio en dos etapas: la investigación y redacción de mi tesis y, su revisión como libro. Ambas etapas se lograron con la ayuda de numerosas personas e instituciones.

Primero que nada, estoy profundamente agradecida de la Fundación Spencer y la Fundación McDonnell por las becas de doctorado y postdoctorado que apoyaron la escritura y revisión de mi tesis.

Estoy especialmente en deuda con las académicas Sharon Feiman-Nemser, Lynn Paine y sus familias, de la Universidad Estatal de Michigan (MSU) en East Lansing, mi "ciudad natal" en los EE.UU. Mi hogar intelectual fue el proyecto TELT y obtuve enormes beneficios de mi relación con los miembros del proyecto. Mi trabajo se construye a partir del TELT, tanto intelectualmente como a través del uso de las preguntas que desarrolló Deborah Ball y los datos recopilados por ella, Sharon Feiman-Nemser, Perry Lanier, Michelle Parker y Richard Prawat. Cuando llegué a los EE.UU. sólo tenía 30 dólares en mi bolsillo y Sharon, mi consejera, se esforzó en ayudarme a encontrar una ayudantía en investigación para que pudiera concentrarme en mi desarrollo académico. Su sobresaliente ayudantía en

enseñanza e investigación, iluminó y seguirá iluminando mi investigación en la formación de profesores, así como a las investigaciones de todos sus otros alumnos. Antes de conocer a la profesora Lynn Paine, por la llamada telefónica en chino que me hizo, no me di cuenta de que era norteamericana. De ella recibí mi primera y sólida formación para realizar investigación transnacional en educación. Más adelante, como miembro del comité de mi tesis en Stanford, la profesora Paine leyó mi trabajo y me dio comentarios detallados y considerados para mejorarlo.

En la MSU quedé también en deuda con los profesores Deborah Ball, Margret Buchmann, David Cohen, Helen Featherstone, Robert Floden, Mary Kennedy, David Labaree, William McDiarmid, Susan Melnick, Richard Navarro, John Schwille y Mun Tsang por su importante guía en las primeras etapas de mi programa de doctorado.

Además, me gustaría agradecer a mis colegas y compañeros de postgrado Zhixiong Cai, Fanfu Li, Yiqnig Liu, Shirley Miskey, Michelle Parker, Jeremy Price, Neli Wolf y Chuanguo Xu, su bienvenida, ayuda y camaradería me acogieron en los primeros días de mi estadía en un país extranjero.

Mi consejero en la Universidad de Stanford, Lee Shulman, merece una atención especial. Él me ofreció su apoyo desde el momento en que presenté mi tema de investigación. Siempre me entregó generosamente importantes reflexiones intelectuales, cálidas palabras de aliento y consejos perspicaces. Bajo su guía, aprendí a sembrar la semilla de una idea de investigación y a hacerla madurar hasta llegar a ser un frondoso árbol.

También quisiera agradecer a los profesores Myron Atkin, Robbie Case, Larry Cuban, Elliot Eisner, James Greeno, Nel Noddings, Thomas Rohlen, Joan Talbert y Decker Walker de la Universidad de Stanford por su apoyo durante mis labores investigativas. El profesor Harold Stevenson de la Universidad de Michigan leyó mi propuesta de tesis y me dio valiosas sugerencias. El profesor Fonian Liu, que fue presidente de la Universidad Normal de China Oriental, también demostró un efusivo apoyo a mi investigación.

Durante mi labor postdoctoral quedé en deuda con Miriam Gamoran Shering quien entonces era una estudiante de postgrado en la Universidad de California en Berkeley y ahora es profesora adjunta de la Universidad de Northwestern. Miriam leyó largas secciones del manuscrito y no sólo me ayudó a editar mi "Chinglish" sino que también me inspiró con sus reflexivos comentarios. Otros dos estudiantes de postgrado de Stanford, Kathy Simon y Glen Trager, contribuyeron a mi trabajo, editándolo y dándome su cálido y sostenido apoyo.

Durante mi estadía postdoctoral decidí convertir mi tesis en un libro. Cuando finalmente terminé dicha tarea y fui al correo a enviar el manus-

crito del libro a la editorial, me sentí como una madre antes de la boda de su hija. Terminar la tesis fue sólo como tener un hijo, pero convertirla en un libro, criarla y educarla, no fue para nada fácil. Más aún, para mí que recién aprendí inglés por mi cuenta a los veintitantos, fue especialmente difícil. Afortunadamente, un excelente grupo de gente brindó sus cálidas y fuertes manos.

El profesor Alan Schoenfeld, con quien hice mi trabajo postdoctoral en la Universidad de California, es a la primera persona a quien quisiera agradecer en esta etapa. Alan le dio un hogar al libro en la serie de la que es editor. Leyó y comentó cada capítulo del libro, dándome valiosas sugerencias para mejorarlo e incluso, reescribió algunos párrafos. Siempre ha estado ahí cuando he necesitado ayuda y, trabajando con él de cerca, aprendí mucho acerca de investigación, pero también aprendí mucho más: una forma de interactuar con estudiantes y colegas. Como dijo William Shawn, editor del New Yorker, acerca de su comunidad: "el amor ha sido el sentimiento que nos ha controlado y, amor, es la palabra clave". Alan creó una comunidad en la que los alumnos se tratan como futuros colegas y todos son un posible colega y, astutamente, le sugirió a un miembro de la comunidad que ayudara con el libro.

La Dra. Cathy Kessel, investigadora en Berkeley, hizo de "niñera" de mi "bebé, el libro. Ella realizó la edición gruesa del manuscrito, cuestionó los argumentos débiles, me obligó a aclararlos y comprendió y expresó mis ideas. En el Capítulo 7, revisó la bibliografía y amplió, fortaleció y clarificó mis argumentos. Además de esta labor intelectual, se preocupó de todas las labores tediosas que se deben realizar al preparar el manuscrito de un libro. La contribución de Cathy a este libro nunca se podrá destacar lo suficiente, sin su ayuda yo, la "madre", jamás hubiera podido criar a este "bebe". De hecho, su pasión por este libro no es menor que la mía.

Quisiera agradecer a Rudy Apffel, Deborah Ball, Maryl Gearhart, Ilana Horn y Susan Magidson por sus comentarios para la introducción.

Los detallados y meditados comentarios de Anne Brown para los capítulos del 1 al 4, ayudaron a mejorar su claridad. El grupo de investigación de Alan Schoenfeld, el Functions Group, pasó dos sesiones discutiendo mi manuscrito. Julia Aguirre, Ilana Horn, Susan Magidson, Manya Raman y Natasha Speer hicieron valiosos comentarios. Gracias al Functions Group y a Anne Brown por los comentarios de los capítulos 5, 6 y 7 y, nuevamente gracias a Robert Floden por darme información de último minuto de la bases de datos NCRTE.

También quisiera agradecer a Naomi Silverman, editora en jefe de Lawrence Erlbaum Associates por su útil y paciente apoyo.

Mi sincera gratitud al profesor Richard Askey, cuyo interés y entusiasmo llamó la atención de muchos sobre el manuscrito del libro.

De vuelta en China, mi patria, quisiera agradecer primero a los campesinos de Cunqian, el pueblo donde viví e hice clases, quienes tenían muy poca educación pero me pusieron en el camino que me llevó al doctorado en Stanford. Aprecio sinceramente a los profesores chinos que entrevisté y también, en forma particular a mis propios profesores que dejaron una huella de una excelente enseñanza en mi joven mente.

Finalmente, en mi familia que, sin duda, se merece la máxima gratitud y más grande aprecio, sin su apoyo, no sólo este libro sino, toda mi vida, habrían sido imposibles.

Introducción

Generalmente, los alumnos chinos superan a los norteamericanos en mediciones internacionales de competencia matemática pero, paradojalmente, los profesores chinos tienen aparentemente mucho menos educación matemática que los norteamericanos. La mayoría de los profesores chinos ha tenido 11 ó 12 años de escolaridad: terminan el 9º grado y van a una escuela normal por dos o tres años más*. Por otra parte, la mayoría de los profesores norteamericanos ha tenido entre 16 y 18 años de educación formal: una licenciatura en la universidad y uno o dos años más de estudio.

En este libro sugiero una explicación para esta paradoja, al menos para el nivel de educación primaria. Mis datos sugieren que los profesores chinos comienzan sus carreras pedagógicas con una mejor comprensión de las matemáticas elementales que la que tiene la mayoría de los profesores de educación primaria norteamericanos. Su comprensión de la matemática que enseñan e, igualmente importante, de las formas en que se les pueden presentar las matemáticas elementales a los alumnos, se desarrolla durante toda su vida profesional. Es más, cerca del 10% de esos profesores chinos, a pesar de no tener una educación formal, muestra una profundidad en la comprensión que es extremadamente escasa en los EE.UU.

Además, documento las diferencias entre el conocimiento de las matemáticas para enseñar que tienen los profesores chinos y norteamericanos y, presento sugerencias acerca de cómo la comprensión de las matemáticas que tienen los profesores chinos, así como su forma de enseñanza, contribuyen al éxito de sus alumnos. También documento algunos de los factores que apoyan el crecimiento del conocimiento matemático que tienen los profesores chinos y doy indicios de porqué ahora parece difícil, sino imposible, que los profesores norteamericanos de enseñanza prima-

* N. de la T.: En China, la educación primaria va de 1º a 6º grado, luego vienen tres años más de enseñanza secundaria hasta 9º grado. Luego de eso, los alumnos deben realizar pruebas para optar a los otros tres años de enseñanza secundaria, en este caso, en una escuela normal para formar profesores. En EE.UU. la educación primaria llega hasta el 4º, 6º u 8º grado, y la sigue la educación secundaria dividida en *Middle School* y luego, *Highschool.* Puesto que, los primeros años de la educación primaria en China y EE.UU. generalmente coinciden con nuestros años de educación primaria, se usó el término chileno en la traducción pero, al hablar de los niveles específicos (como 9º grado) se optó por no convertirlos al sistema chileno, que sería “primero medio” porque la división de etapas no es equivalente.

ria desarrollen un entendimiento profundo de la matemática que enseñan. Comenzaré con algunos ejemplos que motivaron este estudio.

En 1989, era estudiante de postgrado en la Universidad Estatal de Michigan y trabajaba como asistente de postgrado en el Estudio de Educación Docente y Aprendizaje para la Enseñanza (TELT en inglés) del Centro Nacional de Investigación de la Educación Docente (NCRTE) codificando transcripciones de respuestas de profesores a preguntas como:

> Imagine que está enseñando a dividir fracciones. Para hacer esto significativo para los niños, a menudo lo que hacen los profesores es tratar de relacionar las matemáticas con otras cosas. A veces, se les ocurren situaciones de la vida real o plantean problemas para demostrar la aplicación de este tipo específico de contenido. ¿Cuál cree usted que sería un buen enunciado o modelo para formular: $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$=?

Me sorprendieron enormemente muchas de las respuestas a esta pregunta, pues muy pocos profesores acertaron. La mayoría, más de 100 estudiantes de pedagogía y profesores nuevos y experimentados, inventaron un enunciado que representaba $1\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$, o $1\frac{3}{4} : 2$. Muchos otros no fueron capaces de crear un enunciado.

Las entrevistas me recordaron cómo aprendí a dividir por fracciones siendo estudiante de educación primaria en Shangai. Mi profesor me ayudó a entender la relación entre división por fracciones y división por números enteros; la división sigue siendo la operación inversa de la multiplicación, pero el sentido de la división por fracciones es una extensión de la división por números enteros: el modelo de medición (encontrar cuántas mitades hay en $1\frac{3}{4}$) y el modelo partitivo (encontrar un número tal que su mitad sea $1\frac{3}{4}$)[1]. Después, me convertí en profesora de educación primaria. La comprensión de la división por fracciones que tenía mi profesor de primaria era común en mis colegas. ¿Cómo era posible entonces que tantos profesores en los EE.UU. fueran incapaces de mostrar esta comprensión?

Varias semanas después de que codifiqué las entrevistas, visité una escuela primaria, con una reputación de enseñanza de calidad, en un próspero suburbio de gente blanca. Con un educador y un profesor con experiencia, observé una clase de matemáticas en la que un estudiante en práctica estaba enseñando medición a alumnos de cuarto grado. Durante la clase, que se dio en forma fluida, me sorprendió otro incidente: después de enseñar las medidas y sus conversiones, el profesor le pidió a un alumno que midiera un lado de la sala con un patrón de medida; el estudiante señaló que medía 7 yardas y 5 pulgadas; después, en su calcu-

1 Para más información acerca de los dos modelos, ver el capítulo 3, p. 90.

ladora, calculó que 7 yardas y 5 pulgadas eran 89 pulgadas*. El profesor, sin siquiera dudarlo, anotó al lado de “7 yardas, 5 pulgadas”, que había escrito antes, “89 pulgadas”. El desajuste de las dos medidas era evidente en la pizarra. Era obvio, pero no sorprendente, que el alumno hubiera convertido mal al calcular el número de pulgadas en una yarda, pero lo que me sorprendió, fue que el obvio error permaneciera en la pizarra hasta el final de la clase, sin ninguna discusión. Lo que me sorprendió aún más fue que el error nunca se reveló ni corrigió; ni siquiera se mencionó después de la clase en una discusión acerca de la enseñanza del profesor en práctica. Ni el educador ni el profesor guía que supervisaba al practicante, se dieron cuenta del error. Como profesora de educación primaria y como investigadora que trabajó con profesores por muchos años, yo había desarrollado ciertas expectativas acerca del conocimiento de matemáticas de un profesor de educación primaria. Sin embargo, las expectativas que desarrollé en China no se aplicaban a los EE.UU.

Mientras más veía de la enseñanza e investigación de las matemáticas elementales en los EE.UU., más me intrigaban. Incluso profesores expertos, que sentían confianza en sus conocimientos matemáticos, y profesores que participaban activamente en la actual reforma de la enseñanza de las matemáticas, parecían no tener un conocimiento acabado de las matemáticas que se enseñan en la educación primaria. Por lo visto, los dos incidentes que me sorprendieron eran sólo dos ejemplos de un fenómeno ya expandido y bastante documentado[2].

Más adelante, leí estudios internacionales de logro matemático[3]. En estos estudios se encontró que los estudiantes de algunos países asiáticos como Japón y China, constantemente superan a su contraparte en los

---

* Nota de la T.: no se tradujeron las medidas al sistema métrico puesto que el error sería muy raro en nuestro sistema, ya que la conversión de metro a centímetro es muy sencilla. Sin embargo, es muy probable que el error sí ocurra en el sistema anglosajón de medidas en que una yarda equivale a 36 pulgadas.

2 Para mayor información acerca de la investigación del conocimiento disciplinario del profesor, referirse a Ball (1989a), Cohen (1991), Leihardt y Smith (1985), NCRTE (1991), Putnam (1992), y Simon (1993).

3 La Asociación Internacional para la Evaluación de Logro Educativo (IEA) organizó el Primer Estudio Internacional de Matemáticas en 1964. El estudio medía el logro de varios temas matemáticos en cada uno de los 12 países en 8º grado y 12º grado. A principios de los ochenta, la IEA realizó otro estudio. El segundo studio internacional de matemáticas comparó 17 países en el componente de Grado 8 y 12. El tercer estudio internacional de matemáticas y ciencia (TIMSS) en el que más de 40 países participaron, ha empezado recientemente a entregar sus informes (para mayor información acerca de estos tres estudios, ver Chang & Ruzicka, 1986; Coleman, 1975; Crosswhite, 1986; Crosswhite et al, 1985; Husen, 1967a, 1967b; LaPointe, Mead, & Philips, 1989; Lynn, 1988; McKnight et al, 1987; National Center for Education Statistics, 1997; Robitaille & Garden, 1989; Schmidt, McKnight, & Raizen, 1997.)

EE.UU.[4] En investigaciones, se han descrito varios factores que contribuyen a esta "brecha de aprendizaje": diferencias en los contextos culturales, tales como las expectativas de los padres o sistemas de notación numérica[5], la organización de los colegios, o el tiempo que se dedica al aprendizaje de las matemáticas; los contenidos y su ubicación en el currículo matemático[6]. Mientras leía estas investigaciones no podía dejar de pensar en el tema del conocimiento matemático que tienen los profesores. ¿Podría ser que la "brecha de aprendizaje" no se limitara a los alumnos? De ser así, habría otra explicación para el rendimiento matemático de los alumnos norteamericanos. A diferencia de factores externos a la enseñanza fuera del aula, el conocimiento del profesor podría afectar directamente al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Más aún, podría ser más fácil de cambiar que los factores culturales como el sistema de notación numérico[7] o la manera de criar a los hijos.

Parecía extraño que los profesores chinos tuvieran una mejor comprensión de las matemáticas que su contraparte norteamericana. Los profesores chinos ni siquiera terminan la educación secundaria sino que, en lugar de eso, después del noveno grado reciben dos o tres años más de educación en una escuela normal. Por el contrario, la mayoría de los profesores norteamericanos tiene una licenciatura. Sin embargo, sospechaba que los profesores de educación primaria de ambos países poseían distintas estructuras de conocimiento matemático que, además del contenido disciplinario que es "igual al de cualquiera de sus colegas" (Shulman, 1986), un profesor podría tener otro tipo de conocimiento disciplinario. Por ejemplo, el que mi profesor de educación primaria tuviera conocimiento de los dos modelos de división pudiera no ser común en los profesores de enseñanza media o universitarios. Este tipo de conocimiento de la matemática escolar puede contribuir significativamente a lo que Shul-

4 Los resultados del TIMMS siguen este patrón. Por ejemplo: cinco países asiáticos participaron en el componente Grado 4 de matemáticas. Singapur, Corea, Japón y Hong Kong tuvieron los puntajes máximos.

5 Por ejemplo, la palabra china para el número 20 significa "dos-diez", la palabra china para el número 30 significa "tres-diez", y así. El consenso es que el sistema numérico chino ilustra la relación entre los números y su significado en forma más directa que el sistema numérico inglés. (N. de la T.: esto se extiende obviamente al español, en que, al igual que el inglés, las decenas tienen nombre propio).

6 Para mayor información ver Geary, Siegler y Fan (1993); Husen (1967a, 1967b); Lee, Ichikawy Stevenson (1987); McKnight et al. (1987); Miura y Okamoto (1989); Stevenson, Azuma y Hakuta (1986); Stevenson y Stigler (1991,1992); Stigler, Lee y Stevenson (1986); Stigler y Perry (1988a, 1988b); Stigler y Stevenson (1981).

7 No obstante, la enseñanza puede tratar exitosamente con irregularidad en los sistemas de notación numérica. Ver Fuson, Smith y Lo Cicero (1997) para un ejemplo de instrucción que considera las irregularidades de los sistemas numéricos inglés y español.

man (1986) llama conocimiento pedagógico del contenido, es decir: "las formas en que se representan y formulan los contenidos de modo que sean comprensibles para otros" (p. 9).

Así, decidí investigar mis sospechas. La investigación comparativa nos permite ver cosas distintas y, a veces, ver las cosas en forma distinta. Mi investigación no se enfocó en juzgar el conocimiento que tienen los profesores en ambos países sino, en encontrar ejemplos de conocimiento matemático suficiente en los profesores. Dichos ejemplos podrían estimular iniciativas futuras para buscar conocimiento suficiente en los profesores norteamericanos; más aún, el conocimiento que emana de los profesores en lugar de marcos conceptuales podría ser más "cercano" a los profesores y serles más fácil de entender y aceptar.

Dos años después, terminé la investigación descrita en este libro y encontré que, aunque los profesores norteamericanos han estado expuestos a matemáticas más avanzadas durante su educación escolar o universitaria[8], los profesores chinos presentan un conocimiento más exhaustivo de las matemáticas que se enseñaban en la educación primaria.

En mi estudio, empleé las preguntas de la entrevista TELT. El principal motivo para usar estos instrumentos es su importancia en la enseñanza de las matemáticas. Como relata Ed Begle en *Critical Variables in Mathematics Education* ("Variables críticas en la Educación Matemática"), los estudios anteriores a menudo medían el conocimiento que tienen los profesores de educación primaria y media en base al número y tipo de cursos de matemáticas que habían tomado o los grados obtenidos y encontraban poca correlación entre estas medidas del conocimiento del profesor y las mediciones del aprendizaje de los estudiantes. Desde fines de los ochenta, los investigadores se han preocupado del conocimiento disciplinario de matemáticas que tienen los profesores para enseñar (Ball, 1988b) "el conocimiento que un profesor necesita tener o que utiliza en el curso de enseñar un nivel escolar específico del currículo de matemáticas" en lugar de "el conocimiento de temas avanzados que un matemático podría tener" (Leinhardt et al., 1991, p. 88).

Los instrumentos matemáticos del TELT desarrollados por Deborah Ball para su tesis de investigación (Ball, 1988b), fueron diseñados para sondear el conocimiento matemático que tienen los profesores en el contexto de cosas comunes que realizan al enseñar. Las labores de entrevista se estructuraron hilando una idea matemática particular en un escenario de clases en que dicha idea tenía un papel crucial. Por ejemplo, en la pregunta que antes mencioné a la cual los profesores respondieron en forma

8 Para información acerca de la preparación de los profesores norteamericanos, ver Lindquist (1997).

tan sorprendente, la matemática de la división por fracciones se puso a prueba en el contexto de una tarea familiar de enseñanza, la generación de algún tipo de representación, contexto del mundo real o diagrama para este tema específico. Esta estrategia ha sido útil para examinar el tipo de conocimiento de los profesores necesario para enseñar de maneras muy distintas a preguntas directas de contenido, como una prueba de matemáticas. El reciente análisis de Rowan y sus colegas apoya esta teoría. En el artículo que publicaron en 1997, en la revista *Sociology of Education*, se describe un modelo basado en los datos del Estudio Nacional Longitudinal de Educación de 1988. En este modelo, las respuestas correctas de un profesor a otro tema del TELT, desarrollado según el mismo marco conceptual, tenían un efecto positivo en el rendimiento de los estudiantes.

Otro motivo para emplear los instrumentos del TELT es su amplia cobertura de las matemáticas elementales. Mientras que la mayoría de la investigación acerca del conocimiento matemático se enfocaba en temas particulares, el TELT se dedicaba a todo el área de la enseñanza y aprendizaje en educación primaria. Los instrumentos del TELT para las matemáticas se ocupaban de cuatro temas básicos: sustracción, multiplicación, división por fracciones y la relación entre área y perímetro. La amplia distribución de estos temas en las matemáticas elementales prometía una visión más o menos completa del conocimiento disciplinario que tienen los profesores en esta área.

Sin embargo, otra razón por la que se usaron los instrumentos TELT fue que, en dicho proyecto, ya se había construido una base sólida de entrevistas a profesores. A partir de esta base de datos, los investigadores del NCRTE lograron investigaciones sustantivas e influyentes. Con la imagen del conocimiento matemático que tienen los profesores norteamericanos que presentó el estudio TELT y otras investigaciones, mi estudio comparativo no sólo sería más eficiente sino que, también, más relevante para la investigación en educación matemática en los EE.UU.

Estudié a los profesores de ambos países con las preguntas y datos del TELT (ver cuadro 1.1). Los 23 profesores de los EE.UU. se consideraban "mejor que el promedio". Once de ellos eran profesores con experiencia que participaban en el Programa de Verano de Matemáticas para Profesores en la Universidad Mount Holyoke y se consideraban "más dedicados y más confiados" con respecto a las matemáticas. Los miembros del proyecto TELT los entrevistaron al principio del curso de verano de matemáticas. Los otros 12 participaban del Programa de Práctica para Egresados que funcionaba en forma conjunta entre un distrito escolar y la Universidad de Nuevo México. Los miembros del proyecto TELT los entrevistaron durante el verano después de su primer año de docencia. Los participantes recibirían el grado de magíster, al final de ese verano.

Aunque los profesores norteamericanos que el TELT entrevistó se consideraban por sobre el promedio, yo intenté obtener una visión más representativa del conocimiento que tienen los profesores chinos. Elegí 5 escuelas primarias evaluadas desde muy baja a muy alta calidad de educación[9] y entrevisté a todos los profesores de matemáticas en cada escuela, que eran 72 en total.

Desde el Capítulo 1 al 4 se presenta una imagen del conocimiento disciplinario que tienen los profesores de matemáticas según lo revelado en las entrevistas. En cada uno de estos capítulos se discute un tema estándar de las matemáticas elementales como la resta con reserva, multiplicación con varios dígitos, división por fracciones y perímetro y área de una figura cerrada. Cada capítulo empieza con una pregunta de la entrevista TELT diseñada para presentar las matemáticas a través de un escenario hipotético de una clase en que se entrelaza el conocimiento matemático con uno de las cuatro tareas comunes de la enseñanza: enseñar un tema, responder a los errores de los alumnos, generar una representación de un tema y responder a una idea novedosa que presente un estudiante. Por ejemplo, en el escenario de la división por fracciones que se mencionó antes, se les pidió a los profesores representar $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ en una forma que hiciera sentido a los alumnos.

En cada uno de estos capítulos de datos describo las respuestas de los profesores norteamericanos luego, las de los profesores chinos y, finalmente, concluyo con una discusión de los datos. Los ejemplos describen imágenes específicas de distintas comprensiones de las matemáticas elementales, incluyendo aquellas de una comprensión profunda de las matemáticas fundamentales.

Los estudios acerca del conocimiento de los profesores tienen abundantes ejemplos de conocimiento disciplinario insuficiente en matemáticas (Ball, 1988a, 1990; Cohen, 1991; Leinhardt & Smith, 1985; Putnam, 1992; Simon, 1993), pero dan pocos ejemplos del conocimiento necesario para que los profesores apoyen su enseñanza, especialmente el tipo de enseñanza que se exige en las recientes reformas de la educación matemática[10].

9 Estos colegios se eligieron a partir de establecimientos que conocía antes de venir a los EE.UU. Tres colegios eran de Shangai, una gran área metropolitana. La calidad de la enseñanza era variada en éstos; uno se consideraba de muy alta calidad, otro de moderada calidad y otro, de muy baja calidad. Los otros dos colegios estaban en un condado de estatus medio tanto socioeconómica como educacionalmente. Uno era un colegio estatal de alta calidad. El otro era una escuela rural de baja calidad que atiende a tres pueblos en una región montañosa.

10 Leinhardt y Ball son las dos investigadoras más importantes en esta área. Para más información acerca del trabajo de Leinhardt y sus colegas, ver Leinhardt y Greeno (1986);

CUADRO 1.1 Los Profesores en el Estudio[a]			
	Experiencia docente	*Seudónimo*	*N*
	Principiante	*Comienza con Srta. o Sr.*	
Norteamericanos[b] Chinos	1 año Menos de 5 años	Nombre Inicial[c]	12 40
	Experimentado	*Comienza con Prof.*	
Norteamericanos[d] Chinos Chinos con CPMF	11 años en promedio Más de 5 años 18 años en promedio	Nombre Inicial Apellido chino	11 24 8

[a] En el anexo se presentan la visión que tienen los profesores norteamericanos acerca de su conocimiento matemático y el número de años que cada profesor norteamericano experimentado ha enseñado.

[b] Después de completar los requisitos del Departamento de Educación del Estado de Nuevo México, estos profesores tomaron cursos de postgrado en los veranos antes y después de su primer año de docencia. Los datos de investigación empleados en este estudio se recolectaron durante el segundo verano.

[c] Aunque el NCRTE le dio a cada profesor norteamericano un nombre y un seudónimo, yo no hice lo mismo para los profesores chinos. En chino, no hay palabras consideradas nombres propios como sí hay en inglés. En vez de eso, los padres chinos le inventan un nombre a cada hijo. Este nombre normalmente es bastante informativo pues revela estatus social, educación, postura política de la familia, la época y lugar de nacimiento, las expectativas de los padres, el estatus en el árbol familiar, etc. Por esto, me pareció incorrecto inventar nombres en chino para 72 personas de las que sabía muy poco, excepto por su conocimiento de las matemáticas. En Chino, los apellidos son neutros comparados con los nombres propios. Sin embargo, el número de apellidos comunes es reducido por lo que decidí utilizar apellidos sólo en los seudónimos de los profesores que yo identifiqué que tenían una CPMF.

[d] Estos profesores participaron del programa Líderes Educacionales en Matemáticas, un proyecto adicional financiado por el NSF en *SummerMath* (Matemáticas de Verano). Este programa es más largo e intenso que el programa de verano regular. Su meta es preparar excelentes profesores de matemáticas de aula para ser líderes operativos en sus propias escuelas regionales o de distrito. (Para mayor información ver NCRTE, 1988, pp. 79-85). Los profesores participaron por dos veranos y tres años escolares. Los datos utilizados en este estudio se recolectaron al comienzo de este programa, en julio y agosto del año 1987.

Los investigadores han creado marcos conceptuales generales que describen el conocimiento disciplinario de las matemáticas que deben tener los profesores. Deborah Ball se encuentra entre aquellos que han llevado a cabo una labor relevante en esta área. Ella identificó la comprensión de las matemáticas que tienen los profesores como un "trenzado" de ideas *del* y *acerca* del tema (1988b, 1991). Por conocimiento *de* matemáticas, ella entendía conocimiento sustantivo del tema: comprensión de temas particulares, procedimientos y conceptos y, las relaciones entre estos temas, procedimientos y conceptos. Por conocimiento *acerca* de las matemáticas, ella se refería a conocimiento sintáctico, es decir, comprensión de la naturaleza y discurso de las matemáticas. Además, ella propuso tres "criterios específicos" para el conocimiento sustantivo de los profesores: exactitud, significado y conectividad. A pesar de expandir y desarrollar concepciones de cuál debería ser el conocimiento disciplinario de las matemáticas que los profesores deben tener, Ball y otros investigadores han estado limitados por sus datos en el desarrollo de una visión concreta de dicho conocimiento.

En el capítulo 5 se comienza a desarrollar este tema. En él, reviso las distintas comprensiones descritas en los capítulos de datos, discuto a lo que me refiero por matemáticas fundamentales y lo que significa tener una comprensión profunda de las matemáticas fundamentales (CPMF). Una comprensión así, va más allá de poder calcular en forma correcta y de dar fundamentos para algoritmos de cálculo. Un profesor o profesora con una comprensión profunda de las matemáticas fundamentales no sólo está consciente de la estructura conceptual y actitudes básicas de las matemáticas inherentes a las matemáticas elementales sino que, también es capaz de enseñarlas a los alumnos. El profesor de primer grado que alienta a los alumnos a descubrir qué tienen en común cinco manzanas, cinco bloques y cinco niños y los ayuda a extraer el concepto de 5 a partir de estos distintos elementos, inculca una actitud matemática: usar los números para describir el mundo. El profesor de tercer grado que dirige la discusión de porqué $7 + 2 + 3 = 9 + 3 = 12$ no puede escribirse como $7 + 2 + 3 = 9 + 12$ ayuda a sus alumnos a alcanzar un principio básico de las matemáticas, la igualdad. El profesor que explica a sus alumnos que dado que $247 \times 34 = 247 \times 4 + 247 \times 30$, uno debe mover la segunda columna a la izquierda al usar el algoritmo estándar de la multiplicación, ilustra principios básicos (reagrupar, propiedad distributiva, valor posicional) y una actitud general (no es suficiente saber cómo, uno también debe saber

Leinhardt y Schmidt (1985), Leinhardt (1987), Leinhardt, Putnam y Baxter (1991); y Stein, Baxter y Leinhardt (1990). Para más información acerca del trabajo de Ball y sus colegas, ver Ball (1988a, 1988b, 1988c/ 1991,1988d, 1989,1990), y Schram, Nemser y Ball (1989).

porqué). Los estudiantes, que informan con entusiasmo, los diferentes métodos que usaron para hallar un número entre 1/4 y 1/5 están experimentando con emoción, la noción de que un problema se puede resolver de múltiples formas. Al planear las lecciones para los alumnos y dirigir la discusión, el profesor se basa en el conocimiento de cómo enseñar (conocimiento pedagógico del contenido) pero, al comprender las respuestas de los alumnos y determinar el objetivo de la clase, el profesor también se basa en el conocimiento disciplinario.

En el capítulo 6 se dan los resultados de una breve investigación de cuándo y cómo los profesores chinos logran un conocimiento profundo de las matemáticas fundamentales. Los factores que sustentan el desarrollo del conocimiento matemático que tienen los profesores chinos no están presentes en los EE.UU. Peor aún, las condiciones en los EE.UU. van en contra del desarrollo de conocimiento matemático de los profesores de educación primaria y su organización para la enseñanza. En el capítulo final, se sugieren cambios en la preparación de los profesores, el apoyo a los profesores en ejercicio e investigación en la educación matemática que permita a los profesores en los EE.UU. obtener una comprensión profunda de las matemáticas fundamentales.

Capítulo 1

Resta con reserva: Enfoques para enseñar un tema

Escenario

> Dediquémosle un tiempo a pensar en un tema en particular con el que puede trabajar cuando enseñe: resta con reserva. Mire estas preguntas ($\begin{array}{r}52\\ \underline{-25}\end{array}$, $\begin{array}{r}91\\ \underline{-79}\end{array}$, etc.) ¿Cómo abordaría estos problemas si estuviera enseñando en segundo grado? ¿Qué diría que deben comprender los alumnos o qué deben ser capaces de realizar antes de que puedan comenzar a aprender la resta con reserva?

Cuando los alumnos aprenden por primera vez a restar, aprenden a sustraer cada dígito del sustraendo de su contraparte en el minuendo:

$$\begin{array}{r} 75 \\ \underline{-12} \\ 63 \end{array}$$

Para calcular esto, ellos simplemente sustraen 2 del 5 y 1 del 7. Sin embargo, esta estrategia directa no funciona siempre. Cuando un dígito en un lugar de menor valor en el sustraendo es mayor que su contraparte en el minuendo (ej.: 22-14, 162-79), los estudiantes no pueden hacer el cálculo en forma directa. Para sustraer 49 de 62, necesitan aprender a restar con reserva:

$$\begin{array}{r} {}^{5}\cancel{6}{}^{1}2 \\ \underline{-49} \\ 13 \end{array}$$

De todas formas, la resta con o sin reserva es un tema que se enseña muy tempranamente. ¿Se necesita una comprensión profunda de las matemáticas para enseñarlo? Este tema, ¿necesita siquiera una comprensión profunda de las matemáticas? ¿Hace alguna diferencia el conocimiento disciplinario del profesor en su forma de enseñar y, eventualmente, contribuye éste al aprendizaje del alumno? Sólo existe una respuesta para todas estas preguntas: Sí, incluso con un tema matemático tan elemental, los profesores mostraron una amplia variedad de conocimientos disciplinarios, lo que sugiere que sus alumnos tuvieron la misma variedad de oportunidades de aprendizaje.

EL ENFOQUE DE LOS PROFESORES NORTEAMERICANOS: PRÉSTAMO VS. REAGRUPACIÓN

Construir el tema

Cuando se discutió el enfoque para enseñar este tema, los profesores norteamericanos tendieron a comenzar con lo que ellos esperaban que sus alumnos aprendieran. Diecinueve de los 23 profesores norteamericanos (83%) se enfocaron en el procedimiento de calcular. La Srta. Fawn, una profesora joven que recién había terminado su primer año de ejercicio profesional, explicó este procedimiento:

> Cuando quiera que haya un número como 21 – 9, ellos necesitarán saber que no se puede sustraer 9 de 1, por ende, tienes que pedir prestado un 10 al espacio de las decenas y, cuando tomas prestado ese 1, equivale a 10. Tarjas el 2 que tenías y se convierte en 10 así que ahora tienes 11 – 9, haces ese problema de sustracción, te queda el 1 y lo bajas.

Estos profesores esperaban que sus alumnos aprendieran a realizar ciertos pasos: tomar 1 decena del espacio de las decenas y cambiarlo por 10 unidades. Describieron el paso de "tomar" como pedir prestado. Al hacer notar el hecho de que "1 decena equivale a 10 unidades", explicaban el paso de "cambiar". Acá vemos las ideas pedagógicas de estos profesores: una vez que sus alumnos pueden realizar estos dos pasos en forma correcta, podrán realizar el cálculo completo en forma correcta.

Los otros cuatro profesores, la Prof. Bernadette, la Prof. Bridget, la Srta. Faith y la Srta. Fleur, sin embargo, esperaban que sus alumnos aprendieran más que el procedimiento de cálculo. También deseaban que sus alumnos aprendieran el razonamiento matemático que fundamenta este algoritmo. Su enfoque enfatizaba dos puntos: la reorganización subyacente en el paso de "tomar prestado" y el intercambio implícito en el paso de "cambio". La Prof. Bernardette, una docente con experiencia, señaló:

> Deben entender qué significa el número 64. Les mostraría que el número 64 y el número 5 decenas y 14 unidades equivalen a 64. Luego, trataría de ilustrar la comparación entre eso porque cuando estás reagrupando no se trata tanto de conocer los hechos sino que, lo que se debe entender es la reagrupación. Se debe partir desde un principio con la reagrupación.

La Srta. Faith, otra profesora en el término de su primer año de enseñanza, señaló que los alumnos deben entender que lo que pasa en la reagrupación es el intercambio entre posiciones de valor:

> Deben entender cómo se hacen los intercambios. . . con la base de 10 bloques cuando llegas a un cierto número, 10, en base 10 en la columna de las unidades es lo mismo decir que 10 unidades son 1 decena. . . tienen que acostumbrarse a la idea de que los intercambios se hacen entre valores de posición y que eso no altera el valor del número. . . . No le pasa nada al valor real pero se pueden hacer intercambios.

Sin embargo, lo que los profesores esperaban que supieran sus alumnos, se relacionaba con su propio conocimiento. Los profesores que esperaban que los alumnos sólo aprendieran el procedimiento tendían a tener una comprensión procedimental. Para explicar porque se necesita "pedir prestado" una decena del lugar de las decenas estos profesores decían: "no se puede restar un número grande a un número menor". Por lo que ellos interpretaban el procedimiento de "tomar prestado" como un tema de que un número obtenía mayor valor a partir de otro, sin mencionar que se trata de un rearreglo dentro del mismo número:

> No se puede sustraer un número mayor a un número menor. . . Se debe pedir prestado a la columna siguiente porque la columna del lado tiene más. (Srta. Fay)

> Pero si no se tienen suficientes unidades, se puede ir donde el vecino que tiene muchas. (Prof. Brady)

"No podemos restar un número mayor a uno menor" es un enunciado matemático falso. Aunque los alumnos de segundo grado no están aprendiendo cómo restarle un número mayor a uno menor, eso no significa que en la operatoria matemática no se pueda hacer. De hecho, los estudiantes aprenderán a hacerlo en el futuro. Aunque esta habilidad avanzada no se enseña en segundo grado, no se debe crear confusión en el futuro aprendizaje del alumno al hacer énfasis en una idea equivocada.

Decir que los dos dígitos del minuendo son amigos o dos vecinos que viven al lado es matemáticamente erróneo en otro sentido, pues sugiere que los dígitos del minuendo son dos números independientes en lugar de dos partes de un número.

Otro error sugerido en la explicación de "pedir prestado" es que el valor del número no tiene que permanecer constante durante el cálculo sino que, se puede cambiar en forma arbitraria. Por ejemplo, si el número es "muy pequeño" y, por algún motivo, es necesario agrandarlo, simplemente se puede pedir prestado cierto valor a otro número.

Contrario a esto, los profesores que esperaban que sus alumnos entendieran la lógica subyacente en el proceso, demostraron que ellos tenían una comprensión conceptual de éste. Por ejemplo, la Prof. Bernadette excluye cualquier error conceptual:

> ¿Qué piensas? Tenemos el número 64, ¿podemos quitarle 46? Pensemos en eso, ¿tiene sentido? Si tenemos un número en el rango de sesenta, ¿podemos quitarle un número en el rango de cuarenta? Bueno, si eso tiene sentido, entonces ahora, 4 menos 6, ¿podemos hacer eso? Acá está el 4, y les mostraría visualmente el 4. Le quitamos 6, 1, 2, 3, 4, no es suficiente. Bueno, ¿qué podemos hacer? Podemos ir a la otra parte del número y quitarle lo que podamos usar, sacarlo de un lado y ponerlo en el otro para ayudar a que el 4 se transforme en 14.

Para la Prof. Bernadette, el problema 64 – 46 no es, como sugiere la explicación de "pedir prestado", dos procesos separados: 4 – 6 y después, 60-40 sino que, es todo un proceso de "sacarle un número en el rango de cuarenta a un número en el rango de sesenta". Más aún, la Prof. Bernadette pensó que no era que "no se puede restar un número mayor a un número menor" sino que, los alumnos de segundo grado "no pueden hacer eso". Por último, la solución era "vamos a la *otra parte del número*" (se agregaron las cursivas) y, "moverlo a nuestro lado para que nos ayude". La diferencia entre las frases "otro número" y "la otra parte del número" es sutil, pero los significados matemáticos que expresan son considerablemente distintos.

Técnicas de instrucción: Material manipulativo

El conocimiento que tiene el profesor en este tema se correlacionó no sólo con sus expectativas de aprendizaje de los alumnos sino también con su enfoque educativo. Cuando discutieron cómo enseñarían el tema, todos, excepto un profesor, hicieron referencia al uso de material manipulativo. El material más popular eran paquetes de palitos (palitos de helado, palitos de fósforo u otro tipo de palitos) otros materiales usados fueron porotos, dinero, bloques base 10, imágenes de objetos y juegos. Los profesores señalaron que, al proveer una experiencia "práctica", el material manipulativo facilitaría un mejor aprendizaje en lugar de sólo "contarles"—la forma en que ellos aprendieron.

Sin embargo, un buen vehículo no garantiza que llegaremos al destino correcto. La dirección que seguirán los alumnos con el material manipulativo depende enormemente de la conducción del profesor. Los 23 docentes tenían ideas distintas que querían hacer entender utilizando material manipulativo. Unos pocos simplemente querían que los alumnos tuvieran una idea "concreta" de la resta. Por ejemplo, con el problema 52 – 25, la Prof. Belinda propuso "poner 52 niños en una fila, sacar 25 y ver qué pasa", la Srta. Florence indicó que ella habría usado porotos como "huevos de dinosaurio", lo que podría ser interesante para los alumnos:

> Yo los habría hecho empezar con algunos problemas de sustracción con quizás un dibujo de 23 cosas y pedirles que tarjen 17 y que después cuenten cuántas quedan. Podría hacerlos trabajar con huevos de dinosaurio o algo que tenga un poco más de significado para ellos. Quizás hacerlos realizar restas concretas con huevos de dinosaurio o quizás usar los porotos como los huevos de dinosaurio o algo.

Los problemas como 52-25 ó 23-17 son problemas de resta con reserva. Sin embargo, lo que los alumnos aprenden de actividades que incorporan material manipulativo como sacar 25 alumnos de un grupo de 52 o sacar 17 huevos de dinosaurio de un lote de 23, no tiene nada que ver con la reorganización. Por el contrario, el uso de material manipulativo elimina la necesidad de reagrupar. El Prof. Barry, otro profesor con experiencia en el grupo guiado por el procedimiento, mencionó que empleaba material manipulativo para hacer entender la idea de que "se necesita pedir algo prestado". Dijo que llevaría monedas de 25 centavos y dejaría que los alumnos las cambiaran por monedas de 10 y de 5 centavos.

> Las monedas serían una buena idea porque a los niños les gusta el dinero... La idea de repartir una moneda de 25 centavos y cambiarla en forma equivalente en 2 de 10 y una de 5 para pedir prestado una de 10, dando a entender la idea de que necesitas pedir prestado algo.

Con esta idea, surgen dos dificultades. Primero que todo, el problema matemático de la representación del Prof. Barry es 25-10, que no necesita de una resta con reserva. Segundo, el Prof. Barry confunde el pedir prestado cotidiano –pedirle 10 centavos a una persona que tiene 25– con el proceso de "préstamo" en la resta con reserva, que reagrupa el minuendo mediante una reorganización del valor posicional. De hecho, el material manipulativo del Prof. Barry no transmite ninguna comprensión conceptual del tema matemático que supuestamente tiene que enseñar.

La mayoría de los profesores norteamericanos dijo que emplearía material manipulativo para ayudar a los alumnos a comprender el hecho de que 1 decena equivale a 10 unidades. Según su punto de vista, de los dos pasos del procedimiento: tomar y cambiar, el último es el más difícil de realizar. Por lo tanto, muchos profesores querían enseñar esta parte en forma visual o dejar que los alumnos tuvieran una experiencia práctica del hecho de que 1 decena es, realmente, 10 unidades:

> Le daría a los alumnos paquetes de 10 palitos de helado amarrados con elásticos y después, escribiría un problema en la pizarra y tendría también los paquetes de palitos y averiguaría primero *cómo los separaría* (las cursivas se añadieron), para solucionar el problema y ver si es que pueden hacer lo mismo y, luego, quizás después de mucha práctica, tal vez darle a cada par de alumnos problemas de resta distintos y después los alumnos, podrían, no sé, demostrar o darnos la respuesta. O, hacerlos inventar un problema con palitos, desarmando los montones e ir paso a paso. (Srta. Fiona)

Lo que indicó la Srta. Fiona es el típico método que usan muchos profesores. Evidentemente, se relaciona más con la resta con reserva que los métodos descritos por la Srta. Florence y el Prof. Barry; sin embargo, sigue pareciendo enfocado en el procedimiento. Siguiendo la demostración del profesor, los alumnos practican cómo descomponer un paquete de 10 palitos y ven cómo funciona en los problemas de resta. Aunque la Srta. Fiona describió el proceso de cálculo claramente, no describió para nada el concepto matemático detrás de éste.

Los académicos se han percatado de que, para promover el entendimiento matemático, es necesario que los docentes ayuden a establecer conexiones entre el material manipulativo e ideas matemáticas explícitas (Ball, 1992; Driscoll, 1981; Hiebert, 1984; Resnick, 1982; Schram, Nemser, & Ball, 1989). De hecho, no todo profesor es capaz de establecer dicha conexión. Pareciera que sólo los profesores que tienen una clara comprensión de las ideas matemáticas que se incluyen en el tema podrían desempeñar este papel. La Srta. Faith, la profesora principiante, con una comprensión conceptual del tema, dijo que "al depender enormemente del material manipulativo" ella ayudaría a los alumnos a comprender "cómo cada uno de estos paquetes es 10, es una decena y son 10 unidades", a saber que "5 decenas y 3 unidades es lo mismo que 4 decenas y 13 unidades", a aprender "la idea de intercambio equivalente" y a hablar de "la relación con los números".

> Desde ese punto, lo que yo haría, sería mostrar cómo cada uno de estos paquetes es 10, es 1 decena o 10 unidades. Me aseguraría de que eso esté claro. Además, ¿qué pasaría si sacamos el elástico y ponemos 10 aquí? ¿Cuántos tendríamos? Para llegar al siguiente paso, les mostraría que ahora tenemos 1, 2, 3, 4 decenas y 13 unidades y después restar de esa forma... Le diría al niño, ¿me estás diciendo que no hemos sumado ni restado nada a los 53? ¿Cierto? Sí, cinco decenas y 3 unidades es lo mismo que 4 decenas y 13 unidades. ¿Y qué pasa si sacamos 25 palitos?

A diferencia de los otros profesores que utilizaron material manipulativo para graficar el procedimiento de cálculo, la Srta. Faith los empleó para representar el concepto matemático. El único motivo por el que el uso de material manipulativo de la Srta. Faith podría llevar más allá a sus alumnos en comparación con el uso que le dieron otros profesores es que ella entendió el tema matemático más profundamente que otros. Utilizando un método similar, profesores con distintas visiones del contenido llevarán a los estudiantes a distintas formas de comprensión de las matemáticas.

EL ENFOQUE DE LOS PROFESORES CHINOS: "DESCOMPONER UNA UNIDAD DE MAYOR VALOR"

Las distintas formas de comprensión que tienen algunos de los profesores chinos se superpusieron a las de los norteamericanos. El grupo de profesores chinos con una concepción de "préstamo" tenía un enfoque bastante similar al de su contraparte norteamericana:

> Les diré a los alumnos que cuando tú calculas problemas del tipo 53 – 25 primero tienes que alinear los números y empezar la resta por el lado de las unidades. Puesto que el 3 no es lo suficientemente grande para restarle 5, debes pedir prestada una decena de la columna de las decenas y convertirla en 10 unidades. Si se suman 10 unidades a 3, te da 13. Le restamos 5 a 13 y nos da 8. Pon el 8 abajo en la columna de las unidades. Luego, te vas a la columna de las decenas. Puesto que el 5 de la columna le prestó 10 a la columna de las unidades, sólo quedan 4 decenas. Le quitas 20 a 40 y te quedan 20. Anótalo en la columna de las decenas. (Srta. Y)

La Srta. Y estaba en la mitad de su segundo año de docencia. Su explicación era una variante de la de la Srta. Fawn. Se enfocó en pasos específicos del algoritmo pero no mostró interés en su razonamiento. La proporción de profesores chinos que tenían este tipo de ideas limitadas al procedimiento, sin embargo, fue considerablemente menor que la de los profesores norteamericanos (14% vs. 83%). La figura 1.1 muestra las distintas comprensiones que tienen los profesores respecto al tema.

La mayoría de los profesores chinos se enfocó en la reagrupación. Sin embargo, al contrario de los profesores norteamericanos, cerca de un 35% de los profesores chinos describió más de una manera para reagrupar. Estos profesores no sólo consideraron la lógica del algoritmo estándar sino que también discutieron otras formas de resolver el problema que no mencionaron los profesores norteamericanos. Veamos el lema de los profesores chinos: descomponer una unidad de mayor valor.

"Descomponer una unidad de mayor valor [tui yi*]" es un término chino de los cálculos aritméticos tradicionales hechos con el ábaco. Cada alambre del ábaco representa un determinado valor posicional. El valor de cada cuenta del ábaco depende de la posición del alambre en que está. Mientras más a la izquierda esté el alambre en el ábaco, mayor valor posicional representa. Por lo tanto, los valores de las cuentas en el alambre de la izquierda son siempre mayores que las de los alambres a la derecha.

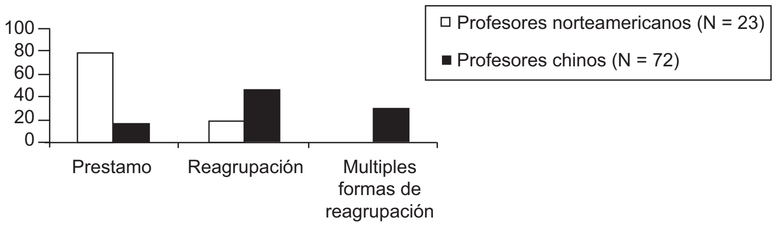


Fig. 1.1. Comprensión de los profesores de la resta con reserva.

Al restar con reserva en el ábaco, se necesita "tomar" una cuenta del alambre de la izquierda y cambiarla por 10 o por potencias de 10 cuentas de un alambre a la derecha. Esto se llama "descomponer una unidad de mayor valor"

El 86% de los profesores chinos describió el paso de "tomar prestado" en el algoritmo como un proceso de "descomposición de una unidad de mayor valor". En lugar de decir: "tomas prestada 1 decena del lugar de la decena", ellos dicen: "se decompone una decena[1]"

La razón por la que podemos calcular 21 – 9 directamente radica en la forma del número 21. En el sistema decimal, los números se componen en razón de 10. Dado que un número tiene 10 unidades de valor en un determinado valor posicional (ej.: la posición de las unidades o de las decenas), las 10 unidades se organizan en 1 unidad del siguiente valor mayor (ej.: el

* Los caracteres chinos para ésta y otras palabras chinas aparecen en la Fig. A del Anexo 2.

1 Este aspecto también lo han observado otros académicos. Stigler y Perry (1988a) informaron que los profesores chinos enfatizan "la composición y descomposición de números en grupos de diez".

espacio de las decenas o las centenas). En teoría, no existen más de 9 unidades "sueltas" (sin componer) en el sistema decimal. Ahora, queremos restar 9 unidades sueltas a 21. Éste tiene sólo 1 unidad, entonces, la solución es descomponer una unidad de mayor valor, un 10, y restarle 9 unidades individuales al 21 recompuesto.

Durante las entrevistas, los profesores tendían a discutir la idea de "descomponer una unidad de mayor valor", conectada con la suma con reserva, "componer una unidad de mayor valor [jin yi]." Cuando la Srta. L, una profesora con experiencia que enseña de primero a tercer grado, describió como enseñaría este tema:

> Comenzaría con una resta sencilla, como 43 – 22 =? Después de que la resuelvan, me gustaría cambiar el problema por 43 – 27 = ? ¿En qué se diferencia el nuevo problema del primero? ¿Qué pasará cuando calculemos el segundo problema? Pronto se darán cuenta que 7 es mayor que 3 y no tenemos suficientes unidades. Luego diría, está bien, hoy no tenemos unidades suficientes, pero a veces tenemos muchas. Debemos recordar que la última semana, cuando hicimos sumas con reservas, teníamos muchas. ¿Qué hicimos esa vez? Dirán que las juntamos en decenas. Entonces, cuando tenemos muchas unidades, las agrupamos en decenas, ¿qué podemos hacer cuando no tenemos suficientes? Podemos descomponer una decena en unidades. Si descomponemos una decena en 40 ¿qué pasa? Tenemos suficientes unidades. Así, presentaría el concepto de "descomponer una unidad de mayor valor en 10 unidades de menor valor".

Algunos profesores señalaron que el término "descomponer" sugiere su relación con el concepto de "componer":

> ¿Cómo que no hay suficientes unidades en 53 para restarle 6? Cincuenta y tres es, obviamente, mayor que 6 entonces, ¿Dónde están las unidades en el 53? Los alumnos dirán que las otras unidades de 53 están armando decenas. Luego, les preguntaré qué podemos hacer para conseguir unidades suficientes para restar 7. Espero que salgan con la idea de descomponer una decena; si no, yo lo propondré. (Sr. P)

En China, al igual que en los EE.UU., el término "pedir prestado" solía ser una metáfora tradicional en la resta. La Srta. S.[2], una profesora de tercer grado en su tercer año de docencia, explicó por qué pensaba que el concepto de "descomponer una unidad de mayor valor" tenía más sentido que la metáfora de pedir prestado:

2 Las primeras versiones de los textos escolares usaban el término "resta con reserva" traducido de occidente. En las últimas décadas, los textos han usado "resta con descomposición" en su lugar.

> Algunos de mis alumnos pueden haber aprendido de sus padres que "tomas prestada una unidad de las decenas y la consideras 10 unidades [jie yi dang shi]"; así, les explicaría que no estás tomando prestada una decena sino, desarmando una. El "pedir prestado" no explica porqué puedes tomar una decena y llevarla a las unidades, pero el "descomponer" puede. Cuando dices descomponerla, implica que los dígitos en las posiciones de mayor valor están de hecho compuestos por los números de las posiciones menores. Son intercambiables. El término "prestar" no implica para nada el proceso de descomponer. "Pedir prestada una unidad y convertirla en 10" suena arbitrario. Mis alumnos podrían preguntarme ¿cómo podemos pedir prestado de las decenas?, Si pedimos algo prestado, tendremos que devolverlo después. ¿Cómo y qué vamos a devolver? Más aún, cuando pedimos algo prestado, necesitamos una persona que quiera prestarnos. ¿Qué pasa si el espacio de las decenas no le quiere prestar al de las unidades? No podrás responder a estas preguntas que podrían hacer los alumnos.

Construir el paso de "pedir prestado" como la descomposición de una unidad mayor, refleja una comprensión aún más acabada que la explicación que usa la "reagrupación". Aunque la lógica del algoritmo es reagrupar el minuendo, la reagrupación, sin embargo, es un enfoque matemático que no se limita a la resta. Es fundamental para varios cálculos matemáticos. Hay varias formas de reagrupación. Por ejemplo, cuando se realiza una suma con reserva, la suma en un determinado lugar, puede ser más de 10 unidades. Entonces reagrupamos componiendo las unidades en una, o más, unidad(es) de una posición de mayor valor. Nuevamente, cuando hacemos multiplicaciones con más de un dígito, reagrupamos el multiplicador en grupos de la misma posición de valor (ej.: cuando se calcula 57 x 39, uno reagrupa 39 en 30 + 9 y realiza el cálculo como 57 x 30 + 57 x 9). De hecho, cada una de las cuatro operaciones aritméticas aplica cierto tipo de reagrupación. Por ende, explicar el procedimiento de "tomar" en términos de "reagrupación" es correcto pero usar descomposición es mejor puesto que la reagrupación es menos relevante para el tema de la sustracción que "descomponer una unidad de mayor valor". Lo anterior no puede identificar la forma específica de reagrupación que ocurre en la sustracción.

Más aún, al usar el concepto de descomposición de una unidad de mayor valor, el proceso de resta se explica de una forma que muestra su conexión con la operación de la suma. No sólo entrega un mayor apoyo conceptual para el aprendizaje de la resta sino que también, refuerza el aprendizaje previo de los alumnos.

El factor de escala para componer una unidad de mayor valor. Con el concepto de "descomponer una decena en 10 unidades" los profesores chinos que se guían por los conceptos, de hecho explican tanto los pasos de "tomar prestado" como de "cambio" en el algoritmo. Sin embargo, muchos de ellos discuten más allá el aspecto de "cambio" del procedimiento. Cerca de la mitad de ellos, al igual que los profesores norteamericanos del grupo de "reagrupación", enfatizó que 1 decena se compone de 10 unidades y que se puede descomponer en estas 10 unidades. Sin embargo, la otra mitad, se refirió a una idea matemática más básica —la tasa o factor de escala para componer una unidad de mayor valor [jin lu]— como un concepto que los alumnos deben saber antes de aprender reagrupación y que se debe reforzar durante toda la enseñanza.

Estos profesores sostuvieron que los estudiantes deben tener una idea clara de "el factor escala para componer una unidad de mayor valor" de manera que puedan entender mejor porqué una unidad de mayor valor se descompone en 10, y potencias de 10, unidades de menor valor. Según estos profesores, esta comprensión facilitará el aprendizaje futuro de los alumnos. El Sr. Mao, un profesor de quinto grado que ha enseñado matemáticas elementales por 30 años, hizo el siguiente comentario:

> ¿Cuál es el factor de escala para componer una unidad de mayor valor? La respuesta es simple: 10. Pregúntele a los alumnos cuántas unidades hay en una decena o cuál es la tasa para componer una unidad de mayor valor y la respuesta será la misma: 10. Sin embargo, el efecto de las dos preguntas en su aprendizaje no es el mismo. Cuando se les recuerda a los alumnos que una decena equivale a 10 unidades, les dices el dato que se usa en el procedimiento y esto, de cierta forma, los limita al dato. Cuando les pides que piensen acerca de la escala para componer una unidad de mayor valor, los guías a la teoría que explica tanto el dato como el procedimiento. Dicho entendimiento es más poderoso que un dato específico pues se puede aplicar a más situaciones. Una vez que se hayan dado cuenta de que el hecho de que la escala para componer una unidad de mayor valor es 10 es la razón por la que descomponemos una decena en 10 unidades, la aplicarán a otras situaciones. No es necesario recordarles nuevamente que 1 centena equivale a 10 decenas cuando en el futuro aprendan a restar con tres dígitos, sino que, podrán darse cuenta por sí mismos.

La Srta. N, que ha enseñado a los primeros cursos básicos de una escuela primaria en un área rural por tres años, señaló:

> Discutir el factor escala para componer una unidad de mayor valor aquí no es sólo útil para que los alumnos trabajen con la resta de números de más de un dígito sino que también, para otras versiones más complicadas de problemas. Para descomponer una decena en 10 unidades o una centena en 10 decenas es descomponer 1 unidad en 10 unida-

> des del siguiente valor menor. Pero, a veces, necesitamos descomponer una unidad en 100, una en 1.000 o en más unidades de menor valor. Por ejemplo, para calcular 302 – 17, necesitamos descomponer una centena en 100 unidades. Nuevamente, al realizar la resta 10.005 – 206, necesitamos descomponer una unidad en 10.000 unidades de menor valor. Si nuestros estudiantes están limitados por el hecho de que 1 decena equivale a 10 unidades, podrían confundirse al enfrentar estos problemas. Pero si al comienzo de su aprendizaje han sido expuestos a la escala para componer unidades de mayor valor, podrán deducir las soluciones a estos nuevos problemas o, al menos, tendrán la clave para resolverlos.

Profesores como el Sr. Mao y la Srta. N comparten una aguda perspectiva en el aprendizaje de los alumnos. Su enfoque a la enseñanza de la resta con dos dígitos previó las habilidades relacionadas necesarias para la resta con más de dos dígitos. Este tipo de resta incluye problemas de descomposición de una centena en decenas o una unidad de mil en centenas. También podría incluir problemas de descomposición de una unidad no en 10 sino, en una potencia de 10 unidades menores como descomponer una unidad de mil en 100 decenas, etc. Esta "perspectiva" obviamente está basada en la acabada comprensión de los profesores sobre este tema

Cuando se aprende suma con reserva, los estudiantes de estos profesores están expuestos a la idea del factor de escala para componer una unidad de mayor valor. Cuando enseñan a restar, estos profesores llevan a sus alumnos a volver a tratar la idea desde otra perspectiva, la de descomponer una unidad. Esta nueva perspectiva es, ciertamente, una mejora a su aprendizaje previo de la idea básica.

Comparada con el concepto de intercambiar 1 decena por 10 unidades, la idea de la escala para componer una unidad de mayor valor llega a una capa más profunda de comprensión matemática. Bruner (1960/1977), en *The Process of Education* dijo: "mientras más fundamental o básica sea la idea que se ha aprendido, casi por definición, mayor será su alcance o aplicabilidad para nuevos problemas" (p.18). De hecho, la escala para componer una unidad de mayor valor es una idea básica del sistema numérico. Conectar el paso de "cambio" con la idea de componer una unidad en el sistema numérico refleja el entendimiento profundo que tienen esos profesores de las ideas básicas detrás de los hechos y su capacidad para representar una idea fundamental de la disciplina en un solo hecho.

Múltiples maneras de reagrupar. La discusión anterior se ha limitado al algoritmo estándar para resolver problemas de sustracción. El algoritmo tiene un procedimiento de reagrupación del minuendo en cierta forma, por ejemplo, 53 se reagrupa como 40 y 13. Mientras que ninguno de los profesores norteamericanos fue más allá de este método estándar, algunos profesores chinos si lo hicieron. Estos profesores señalaron que el algoritmo no es la única manera correcta de realizar la resta. Hay también otras formas que funcionan. La manera estándar funciona mejor en la mayoría de los casos, pero no en todos. En torno al principio de descomponer una unidad de mayor valor, "los profesores discutieron varias formas de reagrupación:"

> De hecho, hay varias maneras de agrupar y reagrupar que podemos usar para pensar en el problema 53 – 26. Primero que todo, podemos reagrupar 53 así:
>
> 53
> / \
> 40 13
>
> De esta forma podemos restarle 6 a 13, 20 a 40 y obtener 27, lo que tiene sentido. Sin embargo, también podemos querer reagrupar 53 de otro modo:
>
> 53
> / \ \
> 40 10 3
>
> Le restamos 6 a 10 y tenemos 4, sumamos 4 y 3 y nos da 7; restamos 20 a 40, le sumamos 7 a 20 y nos da 27. La ventaja de esta segunda forma de reagrupación es que es más fácil restarle 6 a 10 que a 13. La suma incluida tampoco tiene reserva por lo que también es simple. Todavía existe otra manera de reagrupar, podemos querer reagrupar el sustraendo:
>
> 26
> / \ \
> 20 3 3
>
> Primero le restamos 3 a 53 y nos da 50. Luego, restamos los otros 3 a 50 y nos da 47; por último, le restamos 20 a 47 y nos 27 (Prof. C).

Los profesores hablaron de tres formas fundamentales de reagrupación. Una era la forma estándar: descomponer una unidad de un valor posicional mayor en unidades de un valor posicional menor, combinarlas con las unidades menores originales y, luego, restar.

Otra forma fue reagrupar el minuendo en tres partes, en lugar de dos, antes de restar. En otras palabras, dejar la decena separada en lugar de combinarla con las unidades. Luego, restar el dígito del sustraendo de las 10 unidades separadas. Por último, sumar la diferencia con las unidades del minuendo. Aunque la parte adicional del número pareciera crear cierta complejidad, este cálculo es aún más fácil que hacerlo de la forma estándar. Uno simplemente necesita restarle el minuendo a 10 en lugar de a un número mayor que 10.

La resta con la tercera forma de reagrupación puede ser incluso más fácil. Primero, separa del lugar de las unidades del sustraendo, el mismo número que está en el espacio de las unidades del minuendo. Después, resta el número separado del minuendo, lo que deja un cero en las unidades del minuendo. Luego, resta el resto del sustraendo del minuendo que ahora tiene decenas enteras.

El segundo y tercer método se emplean, de hecho, frecuentemente en el día a día. Estos enfoques también son más aceptables para los niños pequeños debido a su todavía limitada capacidad matemática. Además de describir estas formas alternativas de reagrupación, los profesores chinos también las compararon, describiendo las situaciones en que estos métodos podrían facilitar el cálculo. Algunos profesores dijeron que la segunda forma de reagrupación se usa más seguido cuando el dígito de menor valor posicional del sustraendo es significativamente mayor que el del minuendo. Por ejemplo, 52 – 7 ó 63 – 9. Estos problemas son fáciles de resolver si uno le resta primero 7 a 50 y le suma 2 a la primera diferencia, 43, o si primero se le resta 9 a 60 y luego se le suma 3 a la primera diferencia, 51. En este tipo de problemas, los sustraendos son generalmente cercanos a 10.

La tercera forma es particularmente sencilla cuando el valor de los dígitos del minuendo y del sustraendo en la posición de menor valor son cercanos. Por ejemplo, 47 – 8 ó 95 – 7. Es fácil restarle 7 a 47 y luego restarle 1 a los primeros 40 de diferencia o, restarle 5 a 95 y luego restarle 2 a los 90 de diferencia.

A pesar del número de formas de restar, la manera estándar sigue siendo la mejor para la mayoría de los problemas, en particular, aquellos que son más complicados. La Srta. Li, una reconocida profesora, describió lo que pasaba en su sala cuando enseña resta:

> Comenzamos con los problemas de números de dos dígitos menos uno de un dígito, como 34 – 6. Escribo el problema en la pizarra y le pido a los estudiantes que lo resuelvan solos, con montones de palitos u otras ayudas para el aprendizaje o, incluso, sin nada, sólo pensando. Luego de unos minutos, terminan y les digo que informen a sus compañeros lo que hicieron. Podrían presentar varias formas. Por ejemplo, un estudiante podría decir: "34 – 6, el 4 no es suficiente para restarle 6. Pero puedo restar 4 primero y me da 30. Luego, todavía necesito restarle 2. Como 6 = 4 + 2, le resto 2 a 30 y me da 28 así que la forma en que lo hice

> es: 34 – 6 = 34 – 4 – 2 = 30 – 2 = 28". Otro estudiante, que trabajó con palitos, podría decir: "cuando vi que no tenía suficientes palitos sueltos, desarmé un paquete. Tenía 10 palitos y le saqué 6. Me quedaron 4. Puse los 4 palitos con los 4 palitos originales y junté 8, como todavía tengo dos paquetes de 10 palitos, si los junto todos, tengo 28". Algunos alumnos, generalmente menos que los de los dos primeros tipos, podría decir: "las dos formas que usaron mis compañeros están bien, pero yo tengo otra forma de resolver el problema". Hemos aprendido a calcular 14 – 8, 14 – 9, ¿por qué no usar ese conocimiento? Así, en mi mente calculé el problema de una manera simple: reagrupé 34 en 20 y 14 luego, le resté 6 a 14 y me dio 8. Por supuesto, no me olvidé de los 20 así que me dio 28". Anoto todas las formas que los alumnos presentaron y les pongo números: primera, segunda, etc. Luego, invito a los alumnos a compararlas. ¿Cuál creen que es más fácil? ¿Cuál creen que es más razonable? A veces, no están de acuerdo entre ellos. A veces, no están de acuerdo en que la manera estándar que yo enseño sea la más fácil. Especialmente aquellos que no son eficientes ni se sienten cómodos con problemas de restas en las veintenas[3] como 13-7, 15-8, etc. ellos tienden a pensar que el modo estándar es más difícil.

De hecho, los estudiantes pueden proponer varias formas de reagrupación si tratan de resolver el problema solos. Esto lo informaron también otros profesores. Para dirigir una discusión profunda después de que los alumnos hayan expresado todas sus ideas, el profesor necesita una comprensión acabada del tema. Él o ella, debe conocer estas diversas soluciones al problema, saber cómo y porqué los alumnos las proponen, conocer la relación entre la forma estándar y las no-estándar y conocer el concepto que subyace a todos los métodos. La Srta. T., una profesora de segundo grado de entre 30 y 35 años, concluyó, luego de describir las diversas formas en que los alumnos podrían resolver un problema empleando material manipulativo:

> Yo orientaría la clase a descubrir que existe un proceso subyacente a todas las formas de sustracción: desarmar un paquete. Esto los llevaría a comprender el concepto de descomponer una decena, que desempeña un papel fundamental en el cálculo.

Es importante que un profesor conozca el algoritmo estándar así como las versiones alternativas. También es importante que el profesor sepa porqué cierto método se acepta como estándar mientras que otras formas son parte importante en el enfoque hacia el conocimiento que subyace al algo-

3 Por el término "resta dentro de la veintena", los profesores chinos se refieren a resta con reserva con minuendos entre 10 y 20, tal como 12 – 6 o 15 – 7. Por el término "suma dentro de la veintena", los profesores chinos se refieren a la suma con reserva donde el total está entre 10 y 20, como 7 + 8 ó 9 + 9

ritmo. Con una perspectiva amplia para la comparación y contraste de las varias formas de reagrupar en la resta, el concepto subyacente se revela cabalmente. Apoyados por una exhaustiva comprensión del concepto, estos profesores pudieron demostrar flexibilidad al tratar con métodos no tradicionales que no se incluyen en los textos escolares.

Paquete de conocimientos y sus partes esenciales

Otra característica interesante de las entrevistas a los profesores chinos fue que ellos tendían a referirse a conexiones entre los temas matemáticos. Por ejemplo, la mayoría de los profesores chinos mencionó la "sustracción dentro de la veintena" como la base conceptual, así como procedimental, de la resta con reserva.

Señalaron que la idea de reagrupación en la resta, de descomponer una unidad de mayor valor en unidades de menor valor, se desarrolla a través del aprendizaje de tres niveles de problemas.

En el primer nivel se incluyen problemas con minuendos entre 10 y 20 como 15 – 7, 16 – 8, etc. En este nivel, los estudiantes aprenden el concepto de descomponer una decena y la habilidad que se deriva de esto. Aprenden que al descomponer una decena, podrán restar números de un dígito de números del 10 al 19 con dígitos en las unidades menores que el sustraendo. Este paso es crucial puesto que, antes de eso, la resta era directa, se sustraían números pequeños de un dígito a números mayores de un dígito o a números en el rango de las decenas, con las unidades mayores que las del sustraendo[4]. El concepto y la habilidad aprendidos en este nivel sustentarán los procedimientos de reagrupación en otros niveles.

En el segundo nivel se incluyen problemas con minuendos entre 19 y 100 como 53 – 25, 72 – 48, etc. En el segundo nivel, la decena que se descompone se combina con varias decenas. La idea nueva es separarla de las otras decenas.

El tercer nivel incluye problemas con minuendos más grandes, es decir, minuendos con 3 o más dígitos. La idea nueva en el tercer nivel es la descomposición consecutiva. Cuando la siguiente posición de mayor valor en el minuendo es cero, se debe descomponer una unidad en un valor

4 El sistema numérico chino puede contribuir a la particular atención que los profesores chinos prestan a la composición y descomposición de una decena. En chino los numeros dentro de la decena tienen la forma "diez y un número de un dígito". Por ejemplo, once es "diez-uno", doce es "diez-dos", y así. (Veinte es "dos diez", treinta es "tres diez" y así. Veintiuno se llama "dos diez-uno", veintidós es "dos diez-dos" y así. Por ende, descomponer decenas tiende a ser una solución obvia para el problema de "¿cómo le podemos restar 5 a diez-dos?".

posicional más alejado. Los problemas implican descomponer más de una vez y, en algunos casos, incluso varias veces. Por ejemplo, en el problema 203 – 15, para trabajar con las unidades, se debe descomponer 1 centena en 10 decenas y, luego, descomponer 1 decena en 10 unidades. Según los profesores chinos, la idea básica de la resta con reserva se desarrolla a través de tres niveles. Sin embargo, la "semilla" conceptual y la habilidad básica que cruzan todos los niveles del problema ocurren tan pronto como en el primer nivel, resta dentro de la veintena.

Aquí se da una diferencia interesante de comprensión entre ambos países. En los EE.UU., los problemas como "5 + 7 = 12" ó "12 – 7 = 5" se consideran "datos aritméticos básicos" que los alumnos simplemente memorizan. Sin embargo, en China, se consideran problemas de "adición con composición y resta con descomposición dentro de la veintena"[5] El aprendizaje de la "adición con composición y resta con descomposición dentro de la veintena" es la primera oportunidad en que los alumnos deben recurrir a conocimientos previos, en este caso, su habilidad para componer y descomponer una decena está incorporada significativamente[6].

La Prof. Sun está cercana a los cuarenta y ha enseñado por 18 años en escuelas primarias en varias ciudades. Incluso cuestionó mi pregunta de la entrevista, pensando que no era lo suficientemente relevante:

> El tema que mencionó es resta con reserva, pero los problemas que me mostró, de los cuales todos tienen minuendos mayores que 20 y menores que 100, son sólo un tipo de problema en el aprendizaje de este tema. De hecho, este no es el tipo de problema crucial para aprender este tema. Me cuesta hablar acerca de cómo enseñar este tema basándome sólo en el enfoque hacia estos problemas.

Luego de discutir los tres niveles de problemas para aprender resta con reserva ella siguió explicando por qué pensaba que mi pregunta era problemática:

> Existen nuevos aspectos en cada uno de los niveles de aprendizaje, pero son, de hecho, formas desarrolladas de la idea básica que se presenta

5 En China, la suma con reserva se llama "suma con composición" y la resta con reserca se llama "resta con descomposición"..La "suma con composición y la resta con descomposición dentro de la veintena" se enseñan dentro del segundo semester de primero básico.

6 En los textos de matemáticas escolares chinos, antes de la sección "suma con composición y resta con descomposición dentro de la veintena" hay una sección acerca de la composición de una decena. Empero, antes de que lleguen a la sección de suma y resta dentro de la veintena, los estudiantes no tienen claro el significado matemático de componer y descomponer una decena Durante las entrevistas, los profesores chinos a menudo comentaron que la relación es en doble-sentido: aprender primero un concepto básico sustenta el aprendizaje de un tema más avanzado pero, el aprendizaje de un tema básico también se refuerza por este último.

> cuando uno aprende a restar dentro de la veintena. Lo que uno aprende en el primer nivel se aplica en todos los niveles más altos de resta. Una vez que los alumnos tienen una buena comprensión del concepto y la capacidad para resolver problemas de resta dentro de la veintena, su futuro aprendizaje de la resta tendrá una base sólida sobre la cual construir. Por ejemplo, muchos de ellos podrán deducir cómo resolver los problemas que me muestras acá en gran parte por sí mismos o con una pequeña ayuda mía o de sus compañeros. Por ende, la resta dentro de la veintena es fundamental para aprender resta con descomposición. Este es el conocimiento de mayor peso de los tres niveles. La suma y la resta en la veintena es donde mayormente enfocamos nuestros esfuerzos educativos. Así que me parece imposible hablar acerca de cómo abordar la resta con reserva partiendo de los problemas que me presentaste.

Las acotaciones de la Prof. E eran típicas de los profesores chinos:

> Dado que mis alumnos no tienen una comprensión sólida de problemas dentro de la veintena ¿cómo podrían resolver problemas como 37 – 18 y 52 – 37? Cada vez que sigan el algoritmo se enfrentarán a problemas como 17 – 8 = ? y 12 – 7 = ? ¿Confiaremos en que siempre cuenten palitos? Después de todo, todos los procesos de resta con números más grandes se transforman en resta entre 10 y 20. Es por eso que el primer nivel es tan importante.

Mientras que los profesores chinos hablaban acerca de la importancia de aprender a restar dentro de la veintena, no suponen que era lo único que uno debería saber antes de aprender los problemas que les mostré. Los ítemes que ellos mencionaron como necesarios para que los alumnos aprendieran este tema conformaban una lista bastante más larga que la mencionada por los profesores norteamericanos. En promedio, los profesores chinos mencionaron 4,7 ítemes mientras que los profesores norteamericanos mencionaros 2,1.

El Prof. Chen era un profesor cercano a los sesenta que había enseñado en una escuela rural por más de treinta años. Describió los tres niveles de aprendizaje de reagrupación en la resta y le pregunté si él suponía que el aprendizaje matemático es una secuencia que va paso a paso y señaló:

> Más bien diría que aprender un tema matemático nunca está aislado del aprendizaje de otros temas, uno apoya al otro. Las conexiones entre los tres niveles son importantes pero existen otras ideas importantes que también se incluyen en la resta. Por ejemplo, el significado de la resta, etc. La operatoria de la resta con descomposición es la aplicación de varias ideas en lugar de una sola; es más bien un paquete que una secuencia de conocimiento. El paquete de conocimiento que veo cuando enseño los problemas que presentaste se expande más allá de los tres niveles que acabo de discutir. Puede también incluir a la suma dentro de la veintena,

> resta de números de dos dígitos sin descomposición, suma de números de dos dígitos con reserva, la idea de tasa de descomposición de una unidad de mayor valor, resta con decimales, etc. etc. Algunos de ellos sustentan el conocimiento previo y otros se sustentan en el conocimiento actual.

Le pregunté al Prof. Chen más acerca del "paquete de conocimiento" y su tamaño y componentes y me respondió:

> No existe una forma estricta, rígida o única de "empaquetar" el conocimiento. Todo depende del punto de vista de cada uno. Diferentes profesores, en distintos contextos o, el mismo profesor, con distintos alumnos puede "empaquetar" el conocimiento en formas distintas. Pero el punto es que debes ver un "paquete" de conocimiento cuando enseñas un cierto conocimiento y debes conocer el papel de ese conocimiento en el paquete. Tienes que saber que el conocimiento que enseñas se apoya por tales ideas o procedimientos de manera que lo que tu enseñanza se apoyará, se reforzará y elaborará el aprendizaje de estas ideas. Cuando se enseña una idea importante, que sustentará otros procedimientos, se deben dedicar esfuerzos especiales para asegurarse de que los alumnos entienden bien la idea y que pueden desarrollar el procedimiento de manera eficiente.

La mayoría de los profesores chinos, al igual que el Prof. Chen, se refirió a un grupo de conocimientos en lugar de un solo conocimiento. Se esbozó la siguiente red basada en su discusión de la resta con reserva. Como dijo el Prof. Chen, "empaquetar el conocimiento" (ver los temas matemáticos grupo a grupo en lugar de pieza a pieza) es una forma de pensar. Las opiniones de los profesores acerca de cuáles y cuántos conocimientos se deben incluir en el "paquete" diferían un poco. Lo que compartían eran los principios de cómo "empaquetar" el conocimiento y cuáles eran las piezas "claves". La figura 1.2 ilustra las ideas principales utilizadas por los profesores chinos cuando "empaquetaban" los conocimientos relacionados con la resta con reserva. El rectángulo representa el tema que planteé en la entrevista, las elipses representan los conocimientos relacionados; las elipses sombreadas corresponden a los conocimientos claves; una flecha de un tema a otro indica que el primer conocimiento apoya al segundo, es decir que, según los profesores se debe enseñar antes que el segundo[7].

En la mitad de la figura hay una secuencia de cuatro temas: "suma y resta dentro de la decena", "suma y resta dentro de la veintena", "resta con reserva de números entre 20 y 100" y "resta con reserva de números grandes". De acuerdo a los profesores chinos, el concepto procedi-

7 Durante las entrevistas, los profesores chinos a menudo comentaron que la relación es en doble-sentido: aprender primero un concepto básico sustenta el aprendizaje de un tema más avanzado pero, el aprendizaje de un tema básico también se refuerza por este último.

mental de resta con reserva se desarrolla paso a paso a través de esta secuencia, de una forma primaria y simple a una forma avanzada y compleja. El tema de la "suma y resta dentro de la veintena" se considera la pieza clave de la secuencia a la que los profesores les dedican el mayor esfuerzo en todo el proceso de enseñanza de la resta con reserva. Ellos creen que tanto el concepto como la habilidad de cálculo, que se presentan con el tema "suma y resta dentro de la veintena", constituyen la base para el posterior aprendizaje de formas más avanzadas de resta con reserva. Por ende, les brindará a los alumnos un fuerte apoyo para el posterior aprendizaje de la resta, tanto en los conceptos como en el procedimiento.

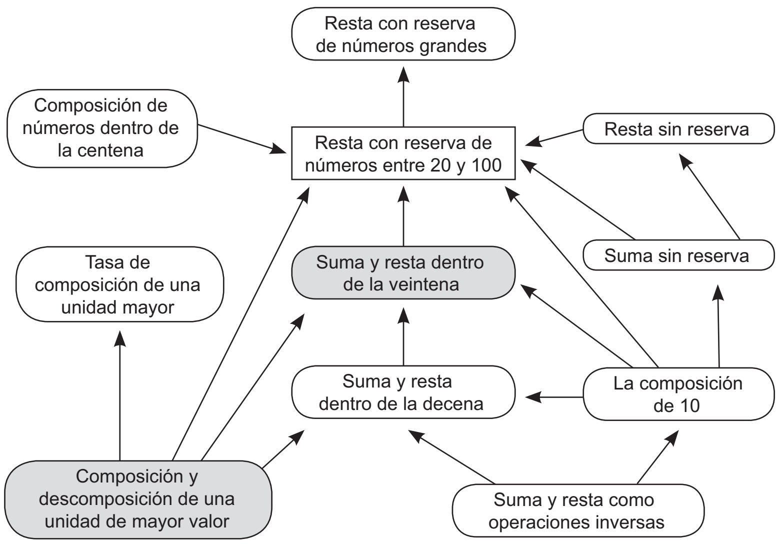


Fig. 1.2. Un paquete de conocimiento para la resta con reserva.

Además de la secuencia central, el paquete de conocimiento también contiene algunos otros temas. Conectados directamente con uno o más eslabones de la secuencia, estos temas engloban la secuencia en forma directa o indirecta. Durante las entrevistas, algunos profesores discutieron acerca de una "subsecuencia" de este "círculo", desde la "composición de una decena" a la "suma sin reserva" y a la "resta sin reserva". Con un cambio de perspectiva podemos imaginar que, por ejemplo, si nuestro tema es como enseñar resta sin reserva, esta subsecuencia podría ser la secuencia central en el paquete de conocimientos del profesor. El tema en el "círculo", "composición y descomposición de una unidad de mayor valor" se considera otra pieza clave en el paquete puesto que es el concepto central que subyace al algoritmo de la resta.

El propósito del profesor al organizar el conocimiento en dicho paquete es promover el aprendizaje sólido de un cierto tema. Es obvio que todos los ítemes del paquete de la resta se relacionan con el aprendizaje de este tema, ya sea apoyándolo o apoyándose en ella. Algunos ítemes, por ejemplo, la resta sin reserva, se incluyen principalmente para apoyar el procedimiento. Otros ítemes, por ejemplo, componer y descomponer una unidad de mayor valor, se consideran principalmente como apoyo conceptual. Sin embargo otros, como el concepto de operación inversa, se consideraron tanto como apoyo conceptual como apoyo procedimental[8]. Las redes de cada profesor variaron de acuerdo al tamaño y los temas específicos incluidos. Sin embargo, las relaciones entre los temas y algunos puntos claves coincidieron.

Material manipulativo y otros enfoques de enseñanza

Aunque se mencionaron con menor frecuencia que entre los profesores norteamericanos, los materiales manipulativos también fueron una estrategia que mencionaron los profesores chinos. La diferencia fue que la mayoría de los profesores chinos señaló que ellos tendrían una discusión con el curso después del uso de material manipulativo. En estas discusiones, los estudiantes podrían informar, mostrar, explicar y argumentar a favor de sus propias soluciones. Mediante las discusiones, se establecería "la construcción explícita de conexiones entre las acciones comprendidas en los objetos y los procesos simbólicos relacionados", según señaló Hiebert (1984, p.509).

Dirigir una discusión después del uso de material manipulativo, sin embargo, exige más profundidad y amplitud de conocimiento disciplinario en un profesor. A través del uso de material manipulativo, los estudiantes pueden plantear varias dificultades. Si un profesor no conoce muy bien las distintas formas de resolver un problema, ¿cómo va a guiar una discusión acerca de las distintas formas que los alumnos presenten en el curso?

A veces, una discusión en clase puede llevar a problemas más intrigantes que no se pueden resolver en una sola lección. La Sra. S. informó acerca

8 Unos pocos profesores chinos mencionaron que le recordarían a sus alumnos que "pensaran en la suma cuando restaran" para facilitar su aprendizaje.

de una discusión, en su curso, que comenzó al principio del año escolar y terminó al final de éste:

> El otoño pasado, cuando mis alumnos trabajaron este tipo de problemas con material manipulativo, encontramos un problema; descubrimos que el procedimiento manipulativo no es el mismo que utilizamos en papel con columnas. Digamos que estamos resolviendo el problema 35 – 18. Con material manipulativo comenzamos por el mayor valor posicional, es decir, tomamos la decena del 18 primero y luego sacamos 8. Con columnas, comenzamos por el lugar de las unidades, restando 8 primero. La manera de hacerlo con material manipulativo, de hecho, es como hacemos la mayoría de las restas en nuestra vida diaria. Cuando pensamos cuánto vuelto recibiremos después de pagar 2 Yuanes[9] por algo que cuesta 1 Yuan y 63 centavos, primero restamos 1 Yuan y, después, los 60 centavos y, al final, los 3 centavos. Pero con el método estándar en columnas lo hacemos al revés. Primero restamos 3 centavos, luego sesenta y, finalmente, 1 Yuan. De la perspectiva de la experiencia de vida de los alumnos, la forma que aprenden en el colegio pareciera más compleja y tiene menos sentido. Lo intentamos en la pizarra para ver qué pasa si comenzamos por el mayor valor posicional. Descubrimos que, empezando por las decenas, tenemos una diferencia de dos en esa posición.

$$\begin{array}{r} 35 \\ -\ 18 \\ \hline 2 \end{array}$$

> Después, cuando trabajamos con las unidades, pasó que tuvimos que cambiar la diferencia que obtuvimos recién en el espacio de las decenas:

$$\begin{array}{r} 35 \\ -\ 18 \\ \hline 2 \\ 17 \end{array}$$

> Pero si comenzamos por la posición de las unidades se podría haber evitado este problema. Podríamos haber obtenido una diferencia final directamente. Sin embargo, esta explicación sólo resuelve la mitad del problema, el porqué necesitamos comenzar por la posición más baja al usar columnas. Los alumnos aún no estaban convencidos de que tenían que aprender la manera estándar puesto que no parecía que utilizarla tenía una ventaja obvia. Sugerí que guardáramos la interro-

9 Yuan es la moneda china, tiene 100 centavos.

> gante, pues probablemente volveríamos al problema más adelante. Al final del año escolar, trabajamos con restas con descomposición de números más grandes y propuse de nuevo la pregunta para discutirla. Mis estudiantes pronto se dieron cuenta de que, con números grandes, la manera estándar es mucho más sencilla para la mayor parte de los problemas y estuvieron de acuerdo en que valía la pena aprenderla.

Si el conocimiento de la Sra. S hubiese estado limitado a cómo realizar el procedimiento de cálculo, habría sido difícil imaginar que ella hubiera podido guiar a sus alumnos a tal comprensión matemática.

DISCUSIÓN

Establecer conexiones: Conscientes versus inconscientes

Ciertamente, el conocimiento disciplinario de matemática de un profesor difiere del de una persona que no enseña. Las características especiales del conocimiento disciplinario del profesor derivan de la tarea de promover el aprendizaje del alumno. Para facilitar el aprendizaje, los profesores tendían a explicitar las conexiones entre los temas matemáticos que son tácitas para los que no son profesores. En discusiones acerca de la enseñanza de la resta con reserva, los profesores tendían a hacer dos tipos de conexiones. Primero, tendieron a conectar el tema con uno o varios temas procedimentales relacionados, generalmente aquellos de menor estatus tales como el procedimiento de resta sin reserva y el hecho de que 1 decena equivale a 10 unidades. Obviamente, éstos son la base para la resta con reserva. En segundo lugar, los profesores, tendieron a conectar el procedimiento con una explicación. Esto también refuerza el aprendizaje de los alumnos, al dar una razón para "tomar" y "cambiar" el profesor entrega más información para apoyar el aprendizaje del algoritmo.

Cuando se les preguntó qué pensaban que los alumnos necesitarían saber para entender o qué necesitarían poder hacer antes de aprender la resta con reserva, todos los profesores presentaron su propio "paquete de conocimiento", incluyendo ambos tipos de conexiones. Una diferencia, sin embargo, fue que algunos profesores mostraron conciencia definida de las conexiones mientras que otros, no. Esta diferencia se asoció con diferencias significativas en el conocimiento disciplinario que tienen los profesores. Los profesores que tendieron a "empaquetar" el conocimiento en forma consciente podían describir los elementos que incluían en el paquete; además, estaban claramente conscientes de la estructura de la red y de la posición de cada elemento en ella.

Por otra parte, aquellos profesores que empaquetaron el conocimiento en forma inconsciente eran vagos e inseguros respecto a los elementos y a la estructura de la red. Los paquetes de conocimiento en sus mentes no estaban bien desarrollados. Ciertamente, aunque conectar un tema que se enseñará con temas relacionados puede ser la intención espontánea de cualquier educador, un paquete de conocimientos totalmente desarrollado y bien organizado acerca de un tema, es el resultado de un estudio deliberado.

Modelos de Conocimiento que tienen los profesores acerca de la resta: Comprensión procedimental versus comprensión conceptual

La mayoría de los paquetes de conocimiento que describieron los profesores durante las entrevistas contenían los mismos tipos de elementos, aquellos que proveen apoyo procedimental y los que brindan explicaciones. Sin embargo, los profesores con comprensión conceptual y aquellos que sólo tenían comprensión procedimental tenían paquetes de conocimientos organizados en forma distinta.

Un modelo de comprensión procedimental de la resta con reserva. Los paquetes de conocimiento que tienen los profesores con sólo una comprensión procedimental de la resta contenían pocos elementos. La mayoría de estos eran temas procedimentales relacionados directamente con el algoritmo de la resta con reserva. Generalmente se incluía una breve explicación, pero no era una verdadera explicación matemática. Por ejemplo, cuando un profesor le dijo a sus alumnos que la base lógica del algoritmo es simplemente como que su madre va donde el vecino a pedirle azúcar; esta explicación arbitraria no tiene ningún sentido matemático real. Algunos profesores explicaron que, puesto que los dígitos en la columna de las unidades del minuendo son menores que los del sustraendo, el primero debe "pedir prestada" una decena a la columna de las decenas y convertirla en unidades. Esto tampoco es una explicación matemática real. Como discutimos antes en este capítulo, algunas explicaciones eran incluso matemáticamente problemáticas. La comprensión de estos profesores parecía conceptual, pero de hecho, tenía demasiados errores y era demasiado fragmentada para promover el aprendizaje conceptual de los alumnos.

La figura 1.3 ilustra un paquete de conocimientos de un profesor con conocimiento procedimental. El rectángulo superior representa el conocimiento del procedimental del algoritmo. Las dos elipses representan temas procedimentales relacionados. El trapezoide bajo el rectángulo representa el conocimiento seudoconceptual del procedimiento.

Ochenta y tres por ciento de la comprensión que tienen los profesores norteamericanos, y el 14% del de los profesores chinos, acerca de la resta con reserva calza con este patrón. La comprensión del tema incluía pocos temas procedimentales y una comprensión seudoconceptual Establecieron muy pocas conexiones entre los temas matemáticos y se incluyeron argumentos no matemáticos en sus explicaciones.

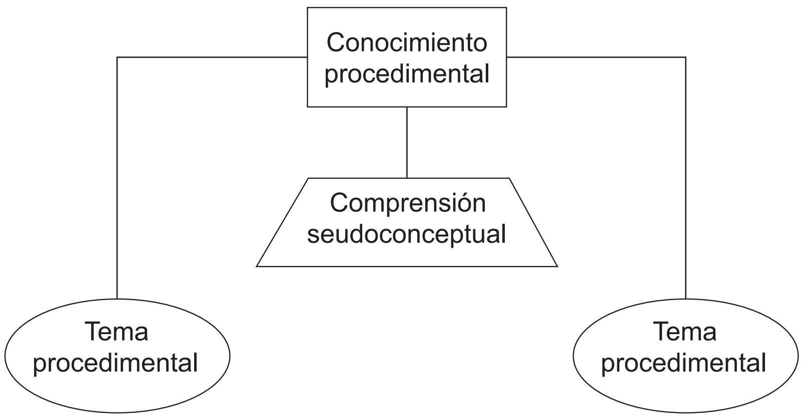


Fig. 1.3. Comprensión procedimental de un tema.

Un modelo de comprensión conceptual de la resta. El conocimiento de los profesores, que poseen una comprensión conceptual de la resta, estaba considerado y organizado en forma distinta. Se incluyeron tres tipos de conocimiento matemático en un paquete de conocimientos de comprensión conceptual plenamente desarrollado y bien organizado: temas procedimentales, temas conceptuales y principios básicos del contenido. Los *temas procedimentales* se incluyeron para apoyar el aprendizaje procedimental así como el aprendizaje conceptual del tema; por ejemplo, la habilidad para componer y descomponer una decena es, en sí, un tema procedimental. Muchos profesores chinos se refirieron a ella como un apoyo significativo para el aprendizaje de la suma y resta dentro de la veintena, tanto en el procedimiento como en forma conceptual. Los *temas conceptuales* se incluyeron principalmente para una comprensión acabada de la base lógica del algoritmo. Sin embargo, los profesores creyeron que los temas conceptuales también desempeñan un papel importante en promover la habilidad procedimental. Por ejemplo, algunos profesores pensaron que una comprensión integral del concepto de reagrupación ayuda a los alumnos a escoger un método fácil de sustracción.

Los paquetes de conocimientos de algunos profesores incluían *principios básicos*, por ejemplo, el concepto de *tasa de composición de una unidad de mayor valor* y el concepto de *operaciones inversas*. La tasa de composición de una unidad de mayor valor es un principio básico de comprensión de los sistemas numéricos. Este concepto no sólo se relaciona con el aprendizaje de la resta con reserva de números grandes cuando se necesita descomposición sucesiva sino que también se relacionará con el posterior aprendizaje de los alumnos del sistema binario, un sistema numérico totalmente distinto. Más aún, al revelar un principio básico de los sistemas numéricos, el concepto profundiza la comprensión de todo el tema.

El concepto de operaciones inversas es uno de los principios más importantes que subyace a las relaciones entre las operaciones matemáticas. Aunque este concepto se relaciona al aprendizaje de la resta con su operación inversa, también apoya el aprendizaje de otras operaciones inversas en matemáticas tales como multiplicación y división, elevar al cuadrado, calcular la raíz cuadrada, elevar al cubo, calcular la raíz cúbica, elevar a n y calcular la raíz n de un número, etc.

Estos dos principios generales son ejemplos de lo que Bruner (1960/1977) llamaba "la estructura del contenido". Bruner dijo: "Aprehender la estructura de un tema es comprenderla en una forma que permite que otras cosas se relacionen con ella en forma significativa. En breve, aprender estructura, es aprender cómo se relacionan las cosas" (p. 7).

De hecho, los profesores que tendieron a incluir ideas básicas "simples pero poderosas" acerca del tema de su enseñanza no sólo promueven el aprendizaje conceptual en el presente sino que también, preparan a sus alumnos para relacionar el aprendizaje presente con el futuro.

Una comprensión conceptual bien desarrollada de un tema también incluye comprender otra dimensión de la estructura del contenido—la actitud hacia las matemáticas. Nuevamente, Bruner dijo: "el dominio de ideas fundamentales de un área involucra no sólo aprehender principios generales sino también, desarrollar una actitud hacia el aprendizaje y la investigación, hacia la adivinación y las corazonadas, hacia la posibilidad de resolver problemas por uno mismo" (p. 20).

Los profesores no dieron ningún ejemplo de actitudes hacia las matemáticas en sus paquetes de conocimientos. Sin embargo, unos pocos profesores, evidenciaron su conocimiento de actitudes generales. Sus discusiones acerca de las formas convencional y alternativas para reagrupar demostraron una actitud frente al tema, la de enfocar un problema matemático de varias perspectivas. Las descripciones de los profesores de alentar a los alumnos a presentar sus propias maneras de restar con reserva y guiarlos hacia una discusión de estas maneras, mostró las actitudes de los propios profesores hacia la investigación matemática. Además, la intención de los profesores de proveer pruebas matemáticas después de proponer un problema, su confianza y capacidad para discutir el tema de forma matemática y su intención para promover tal discusión en los alumnos son todos ejemplos de actitudes generales. De hecho, aunque no se incluyeron explícitamente como ítemes particulares en el paquete de conocimiento del profesor, las actitudes básicas hacia las matemáticas tienen una fuerte influencia en su comprensión conceptual. Como indico en los capítulos siguientes, la mayoría de los temas específicos mencionados en este capítulo no aparecen en discusiones de multiplicación con varios dígitos, división por fracciones y área y perímetro. No obstante, las actitudes de los profesores que se presentaron en este capítulo nos acompañarán durante los otros capítulos de datos y lo que queda del libro.

La figura 1.2 muestra cómo se organizó un paquete de conocimiento bien desarrollado para la resta. La figura 1.4 ilustra un modelo de comprensión conceptual de un tema. El rectángulo superior gris representa la comprensión procedimental del tema. El trapezoide central gris representa la comprensión conceptual del tema. Lo sustentan unos pocos temas procedimentales (elipses blancas), temas conceptuales regulares (elipses color gris claro), ideas básicas de matemáticas (elipses oscuras como principios básicos y elipses de líneas punteadas como actitudes básicas de matemáticas). El rectángulo de la base representa la estructura de las matemáticas.

Una auténtica comprensión conceptual se sustenta en argumentos matemáticos. Por ejemplo, los profesores norteamericanos, que poseían una comprensión conceptual, elaboraron el aspecto de "reagrupación" de la operación. La mayoría de los profesores chinos explicaron que la idea principal del algoritmo es "descomponer una unidad de mayor valor". Ambas explicaciones se basan en argumentos matemáticos y reflejan la comprensión conceptual que tienen los profesores del tema procedimental.

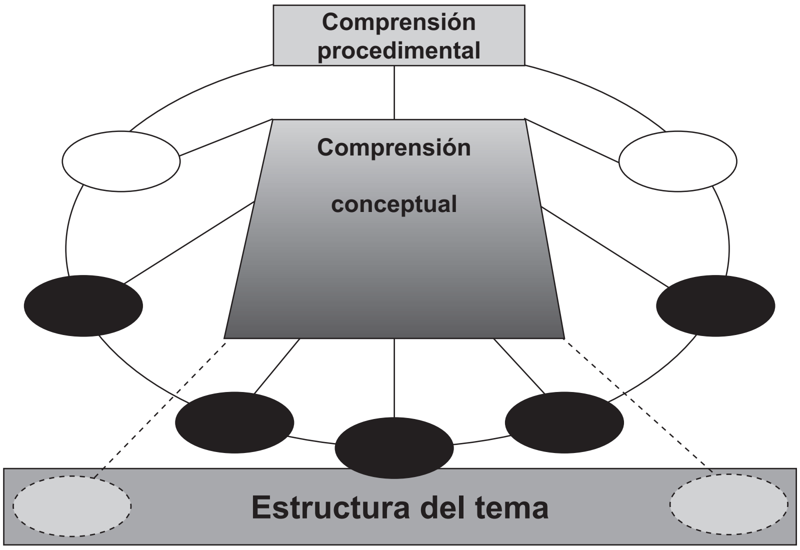


Fig. 1.4. Compresión conceptual del tema.

La comprensión conceptual de la resta con reserva, sin embargo, no tiene "una sola respuesta correcta". Existen varias versiones de explicaciones conceptuales. Por ejemplo, el profesor A podría discutir el concepto de descomposición de una unidad de mayor valor. El profesor B podría discutir el concepto de descomposición en relación al concepto de composición. El profesor C podría presentar el concepto de tasa de composición de una unidad de mayor valor. El profesor D podría presentar el concepto de reagrupación utilizando la reagrupación sugerida en el algoritmo. El profesor E podría presentar varias formas de reagrupación para elaborar el concepto. Todos estos profesores tienen comprensiones conceptuales auténticas. Sin embargo, la amplitud y profundidad de su comprensión no es la misma. El sombreado del trapezoide se hizo para mostrar esta característica de la comprensión conceptual.

Sabemos poco acerca de la calidad y las características de la comprensión conceptual de los profesores. Una cosa que podría ser cierta es que el poder matemático de un concepto depende de su relación con otros conceptos. Mientras más cercano sea un concepto a la estructura del tema, más relaciones puede tener con otros temas. Si el profesor presenta un principio básico del contenido para explicar la base lógica del procedimiento de la resta con reserva, él o ella dotan esa explicación con gran poder matemático.

Diecisiete por ciento de los profesores norteamericanos y el 86% de los profesores chinos demostraron una comprensión conceptual del tema. Entre esos profesores, los profesores chinos presentaron un conocimiento más sofisticado que su contraparte norteamericana.

Relación entre conocimiento disciplinario y método de enseñanza: ¿Puede el uso de material manipulativo compensar deficiencias de conocimiento disciplinario?

Comparados con el conocimiento disciplinario, otros aspectos de la enseñanza reciben, generalmente, mayor atención, quizás porque parecieran afectar más directamente a los alumnos. Al pensar cómo enseñar un tema, será una preocupación importante qué enfoque utilizar. Durante las entrevistas, la mayoría de los profesores señaló que utilizarían material didáctico. Sin embargo, la manera en que se usaría dicho material dependía de la comprensión matemática del profesor que los utilizaba. Los 23 profesores norteamericanos no tenían los mismos objetivos de aprendizaje. Algunos querían que los alumnos tuvieran una idea "concreta" de la resta, algunos querían que los alumnos entendieran que una decena equivale a 10 unidades y uno quería que los alumnos aprendieran la idea del intercambio equivalente. Aquellos que querían que los alumnos tuvieran una idea concreta de la resta describieron usos del material manipulativo que eliminaban la necesidad de reagrupar. Aquellos que querían que los alumnos aprendieran que 1 decena equivale a 10 unidades, describieron un procedimiento con material manipulativo, que los alumnos podían usar para calcular. La profesora que quería que los alumnos aprendieran la idea de intercambio equivalente, describió cómo utilizaría el material manipulativo para ilustrar el concepto detrás del procedimiento. En contraste con los profesores norteamericanos, los profesores chinos dijeron que tendrían una discusión con el curso, luego de usar material manipulativo, en la que los alumnos informarían, mostrarían, explicarían y darían argumentos a favor de sus soluciones.

En las actividades que involucran el uso de material manipulativo y, en particular, las discusiones descritas por los profesores chinos, los alumnos podrían proponer preguntas que llevarían a una comprensión más profunda de las matemáticas. La comprensión del potencial de aprendizaje de tales preguntas aun podría depender en gran parte de la calidad del conocimiento disciplinario del profesor.

RESUMEN

La resta con reserva es tan básica que es difícil imaginar que los profesores no tengan un conocimiento adecuado de este tema. Sin embargo, las entrevistas en este capítulo revelaron que ese era el caso de algunos profesores.

El 77% de los profesores norteamericanos y el 14% de los profesores chinos mostraron sólo conocimiento procedimental del tema. Su comprensión se limitaba a los aspectos superficiales del algoritmo, los pasos de tomar y cambiar. Esta limitación en su conocimiento reduce también sus expectativas del aprendizaje de los alumnos, así como su capacidad para promover el aprendizaje conceptual en la sala de clases.

Este capítulo también reveló distintas capas de comprensión conceptual de la resta con reserva. Algunos profesores norteamericanos explicaron el procedimiento como reagrupación del minuendo y dijeron que, durante su instrucción, destacarían el aspecto de "intercambio" que subyace al paso de "cambio". La mayoría de los profesores chinos explicó la reagrupación, utilizada en cálculos de resta, como descomposición de una unidad de mayor valor. Más de un tercio de los profesores chinos discutieron métodos alternativos de reagrupación y relaciones entre métodos estándares y alternativos.

Profesores, con una distinta comprensión de la resta con reserva, tenían distintos objetivos de enseñanza. Aunque muchos profesores mencionaron el uso de material manipulativo como un enfoque educativo, los usos que describieron de éste, que incidirían enormemente en la calidad del aprendizaje en clases, dependían de la forma en que ellos pensaban que los alumnos debían aprender. Al contrario de los profesores norteamericanos, los profesores chinos señalaron que, luego de que los alumnos hubieran utilizado el material manipulativo, tendrían una discusión con el curso; una estrategia de enseñanza que requiere una mayor amplitud y profundidad de conocimiento disciplinario por parte del profesor.

Capítulo 2

Multiplicación con números de varios dígitos: Manejo de los errores de los alumnos

Escenario

Algunos profesores de sexto grado se dieron cuenta de que varios de sus alumnos cometían el mismo error al multiplicar números grandes. Cuando intentaban calcular

$\underline{123} \times 645$

los alumnos parecían olvidarse de “mover los números” (es decir, los productos parciales) en cada línea. Estaban haciendo esto:

$$\begin{array}{r} \underline{123} \times 645 \\ 615 \\ 492 \\ \underline{738} \\ 1845 \end{array}$$

en lugar de esto:

$$\begin{array}{r} \underline{123} \times 645 \\ 615 \\ 492 \\ \underline{738} \\ 79335 \end{array}$$

Los profesores estaban de acuerdo en que esto era un problema pero no había acuerdo en qué hacer al respecto. ¿Qué haría si enseñara en sexto grado y se diera cuenta de que varios de sus alumnos están haciendo esto?

Todos los profesores del estudio consideraron que el error de los alumnos en la multiplicación con varios dígitos, de alinear los productos parciales en forma incorrecta, era un problema de aprendizaje matemático en lugar de falta de preocupación o descuido. Sin embargo, al identificar el problema y explicar cómo ayudarían a los alumnos a corregir el error, los profesores presentaron varias ideas.

EL ENFOQUE DE LOS PROFESORES NORTEAMERICANOS: ALINEAR VERSUS SEPARAR EN TRES PROBLEMAS

Razones del error

Al identificar el error de los alumnos, dieciséis profesores norteamericanos (70%) pensaban que era un problema al realizar el proceso de alineación mientras que otros siete profesores (30%) concluyeron que los alumnos no comprendían la base lógica del algoritmo. El segundo grupo de profesores incluía a la Prof. Bridget, la Srta. Faith y la Srta. Fleur, quienes también tenían un enfoque conceptual respecto a la resta con reserva. La misma frase: "el estudiante no tenía una buena comprensión del valor posicional", se escuchó frecuentemente en la mayor parte de las entrevistas. Sin embargo, por "valor posicional" los profesores de ambos grupos entendían cosas distintas. Lo que los profesores, que se guiaban por el procedimiento, entendían por "valor posicional" sólo la segunda parte de la frase "posicional", en cuanto a la posición de los números. Por ejemplo, la Prof. Bernice, una profesora experimentada, dio la siguiente explicación:

> No veo un problema en la multiplicación por 5. En la próxima, si están multiplicando la segunda, la segunda en la columna de las decenas, tendrían que moverse hacia las decenas para poner su respuesta. Y luego, multiplican en la columna de las centenas, así que tendrían que moverse a la tercera posición.

Cuando profesores como la Prof. Bernice hablan de "columna de las decenas" o "columna de las centenas", no se enfocan en el valor de los dígitos en esas columnas sino que emplean los términos "decenas" y "centenas" para nombrar las columnas. Según su punto de vista, estas etiquetas ayudan a verbalizar el algoritmo para poder realizarlo en forma correcta. Mientras los alumnos puedan identificar una columna y acordarse de poner el número relevante en ella, "No se pueden equivocar", señaló el Prof. Baird. Otros profesores utilizaron los números del multiplicador para identificar las columnas. Cuando mencionaron una parte del multiplicador, 40 ó 600, ellos no se refieren a su valor sino que lo usan para identificar una columna. Al referirse a lo que ocurría con la labor de los alumnos, la Srta. Fay, una profesora principiante, dijo:

> Creo que quizás se estaban confundiendo un poco con el valor posicional... Primero que todo, estamos multiplicando por 5 en las unidades. Luego, nos movemos y no estamos multiplicando por 4, sino por 40. *Por ende, tenemos que mover el valor posicional. Es solo cosa de recordar el proceso de donde se ponen, donde comienza la columna* (las cursivas se agregaron).

En un principio, podríamos pensar que la Srta. Fay tiene un enfoque conceptual puesto que empleó el término "valor posicional" y dijo que el 4 en el lugar de las decenas no era 4 sino 40. Sin embargo, no siguió la dirección conceptual que uno esperaría a partir de su aseveración. Su atención estaba en el cómo mover los números no en el por qué. Ni "valor posicional" ni "cuarenta" se enfocaban en el valor del producto parcial. Tampoco se usaron para revelar el concepto que sustenta el algoritmo. Reconocer 40 y 600 era simplemente una forma de alinear los productos parciales. Cuando multiplicas por 40, recuerda alinear con 40; cuando multiplicas por 600, recuerda alinear con 600. Es sólo un asunto de memorizar el procedimiento.

En cambio, los profesores en el grupo guiado por los conceptos, tenían una interpretación distinta del error de los alumnos. Usando los términos de la Srta. Fay, otra profesora principiante, la Srta. Francesca dijo:

> Yo diría que los niños, los alumnos, no tienen una idea de, no entienden realmente el valor posicional. No entienden el concepto, porque calcular 4 por 3, que es lo que se ve, pero tienes que tomarlo como 40 por 3 y ellos no están comprendiendo eso. Por eso no están poniendo las cosas donde corresponde... El problema es que no ven cómo se establece cada número.

La preocupación de la Srta. Francesca, así como la de los otros profesores del grupo guiado por los conceptos, no era "dónde poner la respuesta". Sino, que los alumnos no entendían la razón por la que los productos parciales se alinean según la forma que requiere el algoritmo. La Prof. Belle, una profesora experimentada, indicó que el no comprender el concepto que sustenta el procedimiento era el motivo del error de los estudiantes:

> No creo que los niños entendieran qué están multiplicando- Creo que, si de verdad hubieran entendido el concepto, recordarían dónde poner el número, sabrían donde poner los números. Creo que, a menudo, a los niños se les enseña pasos, haces este paso y luego ese otro paso y te corres una vez, después te corres otra vez; no saben realmente porqué están haciendo todo eso. Creo que si de verdad entendieran qué están haciendo, se correrían el espacio.

Lo que los profesores creían que era la causa de los errores de los alumnos determinaba la dirección del aprendizaje que pretendían promover al manejar el problema. La perspectiva procedimental o conceptual de un profesor, al definir el problema, sin embargo, parecía estar mayormente determinada por el conocimiento disciplinario del profesor acerca de la multiplicación con varios dígitos.

Todos los profesores en el grupo que se guiaba por los conceptos, y sólo dos en el grupo que se guiaba por el procedimiento, mostraron una sólida comprensión de la base lógica que sustenta el algoritmo. Los otros catorce profesores guiados por el procedimiento (61%) tenían un conocimiento limitado del tema. Aunque podían verbalizar la regla de "correrse un espacio" en forma explícita, ninguno la pudo explicar.

Durante las entrevistas, algunos profesores admitieron que no conocían la base lógica. La Prof. Beverly, una profesora experimentada, que consideraba que las matemáticas eran su fuerte, respondió que ésta era un área con la que tenía problemas y no era capaz de explicar "porqué correrse un espacio". "Ahora veamos, estos son los tipos de cosas con las que tengo problemas. Áreas con las que tengo, se entiende, problemas".

Otros profesores emitieron una respuesta, pero no pudieron dar una verdadera explicación matemática. "Es difícil... Porque así es como siempre se hace... Es el hecho. ... O sea, es la forma en que nos enseñaron a hacerlo" (Srta. Fay). "Porque es la forma correcta. Es lo que aprendí. Es lo correcto" (Srta. Fiona). "No me puedo acordar de esa regla. No me puedo acordar de porqué se hace eso. Es igual que cuando me la enseñaron, simplemente se hace" (Srta. Felice).

El conocimiento matemático se basa tanto en la lógica como en la convención. Sin embargo, en este caso la convención sirve como escudo para aquellos que no tienen una comprensión conceptual del procedimiento matemático.

También se revelaron rasgos problemáticos en el conocimiento disciplinario que tienen los profesores en sus opiniones acerca de los ceros "ocultos" incluidos en el cálculo. El alineamiento que confunde a los estudiantes con errores es, de hecho, una abreviación de lo siguiente:

$$\begin{array}{r}\underline{123} \times 645 \\ 615 \\ 4920 \\ \underline{73800} \\ 79335\end{array}$$

Cuando se incluyen los ceros, la base lógica del algoritmo se vuelve clara. 492 representa 4920 y 738 representa 73800. Sin embargo, la mayoría de los profesores, en el grupo con orientación procedimental, no veía este significado. Los catorce profesores con una comprensión procedimental del algoritmo tenían dos opiniones distintas acerca del papel de los ceros en el cálculo. Algunos pensaban que los ceros molestaban mientras que otros, los veían como buenos marcadores de posición. Todos consideraron los ceros como algo ajeno al cálculo. Los profesores que tenían una opinión negativa argumentaron que los ceros son "artificiales" y que "no pertenecían a ese lugar":

> Bueno, algunos de los textos y algunos profesores usan ceros y ponen ceros como marcadores de posición al multiplicar cada dígito. Pero nunca me ha gustado eso porque siempre me pareció como que había, que era artificial, que había una suma de algo que realmente no pertenecía a ese lugar, para mí, personalmente, me incomodaba. (Sr. Felix).

Otros profesores pensaban que los ceros confundirían más a los alumnos. "Me daría miedo que [los ceros] sólo los confundieran más" (Prof. Bernice). "Yo hago eso [poner un asterisco como marcador de posición] para poner atención y no confundirme con otros ceros" (Prof. Belinda).

Por otra parte, los profesores que consideraban los ceros como marcadores de posición, útiles para desarrollar el algoritmo, tampoco veían un significado matemático en los ceros. Cuando se comprobó que poniendo un cero después de 492, se cambiaría el número, se intrigaron y confundieron.

> Ah, sí, es cierto y, y por eso, la razón por la que digo cero es porque, mmm, sólo, sólo me ayuda a mantener la posición, no tiene valor en un número. Hm, pero me ayuda a mantener mi posición y donde, donde debería estar. (Srta. Fay).

> De acuerdo, no les diría que estaba agregando ceros, estoy anotando ceros como marcadores de posición. (Prof. Bernadette).

Sin poder explicar esta compleja situación, la Srta. Fay y la Prof. Bernadette sólo quería evitar enfrentar el desafío. La Srta. Francine, sin embargo, argumentó que el número no cambiaría puesto que "cero más cero es nada". "Diría, bueno, ¿qué es 5 más cero? ¿Estamos sumando algo? no"

El argumento de la Srta. Francine sugiere que confunde "sumarle cero" a un número (5 + 0 = 5 ó 492 + 0 = 492) con el papel del cero en un numeral (50 ó 4920). Los profesores del grupo con orientación procedimental utilizaban el cero como un recordatorio para correrse un espacio. No lo veían como algo distinto a un marcador arbitrario de posición. Poner un cero es como poner una x sin significado:

> Diría que no los estás cambiando sino que estás poniendo un espacio para acordarte de correrte o quizás, podrías incluso poner una x y no un cero, algo que les recuerde correrse. (Srta. Felice).

Los sondeos conceptuales expusieron las limitaciones del conocimiento de estos profesores. Ellos sabían cómo realizar el algoritmo y cómo verbalizar la regla pero no entendían porqué se había creado la regla.

Los siete profesores en el grupo que se guiaba por los conceptos, sin embargo, brindaron explicaciones matemáticas del algoritmo. Explicaron que multiplicar por 645 era de hecho, multiplicar por 5, por 40 y 600, de modo que los productos parciales eran, de hecho 615, 4920 y 73800. Sometidos a las mismas indagaciones acerca de los ceros, ellos pasaron la prueba. Cuando se les preguntó si agregar ceros cambiaría los números, algunos dijeron que sí y otros que no. Pero ambas posiciones tienen sentido. La Srta. Fawn argumentó que si el 492 del problema fuera un 492 normal, entonces agregar un cero después de él es cambiar el número y este cambio es necesario.

> Yo diría que sí, que cambia el número. Puesto que 123 x 40 no es lo mismo que 492, este número no es el número correcto y estamos cambiando el número porque multiplicamos por más que por 4, multiplicamos por 40.

La Srta. Frances, desde otra perspectiva, argumentó que puesto que 492 no es un 492 normal si no uno que empieza por la columna de las decenas, agregar un cero no era cambiar el número, sino revelar su verdadero valor:

> Bueno, yo diría que era este número. Recuerda lo que multiplicaste... Pondrías un cero allí y sería 4920, porque estás multiplicando por 10.

Sin embargo, otros profesores como la Srta. Faith y la Srta. Fleur indicaron que al mostrarle a los alumnos "lo que verdaderamente pasa en el procedimiento", el problema de si poner un cero después de 4920 cambiaría el número no sería un problema o, ya se habría resuelto.

> Ya les habría mostrado que no es sólo agregarlo (el cero) ahí, que hay una razón porque el número es realmente 4.920 y no un 492 corrido. (Srta. Fleur).

> De acuerdo, creo que mediante este proceso (separar el problema y hacer una lista con los productos parciales). Les mostraría que no sólo están agregando ceros. (Srta. Faith).

Estrategias de enseñanza

Procedimental

Los dos grupos de profesores, que definieron el error de los alumnos en dos formas, tenían distintos enfoques para abordarlo. Los profesores guiados por el procedimiento, dijeron que les enseñarían a los alumnos cómo alinear correctamente los productos parciales. Describieron tres estrategias:

Describir la regla. Cinco profesores mencionaron que había que verbalizar claramente la regla, entre ellos la Prof. Bernice y la Prof. Beverly:

> Bueno, si el niño está consciente del valor posicional, podría alentarlo a ponerlo bajo el número que están multiplicando hasta su valor posicional. Por ejemplo, el 5 en la columna de las unidades, así comenzarías por las unidades, el cuatro en las decenas, entonces te empiezas a mover y lo pones justo debajo del 4 en la columna de las decenas y, después, trabajas con las centenas y pones el 6. (Prof. Bernice).

> Volvería al valor posicional y les diría que cuando están multiplicando por las unidades, se alinea con el número de arriba y que cuando te mueves a la siguiente columna, la de las decenas, se alinea con las decenas. Y luego, el número siguiente se alineará con las centenas y así en adelante. (Prof. Beverly).

Las descripciones de las profesoras Bernice y Beverly son dos ejemplos más de cómo un término conceptual se puede utilizar en forma procedimental. El término "valor posicional" no se les presentó a los alumnos como un concepto matemático sino como etiquetas para columnas donde debían poner los números.

Usar hojas con líneas. Otra estrategia para ayudar a los alumnos a realizar la operación siguiendo la regla, es usar hojas con líneas o cuadriculadas:

> Bueno, probablemente es la misma forma en que enseño ahora. Comienzo con un papel con líneas y lo giro para tener un número en cada línea y hacer que vean cómo este es 40. Sólo pon un número en cada línea, en cada espacio. Y luego, los haría trabajar con eso. Y los haría ver que cuando multiplican, bueno, 3 por 5 y que se pondría bajo el 5. . . Y, después, cuando multipliquen 3 por 4, se pondría en la misma columna que el 4 y que, cuando multiplicas 3 por 6 está en la misma columna que el 6 (Prof. Bridget).

La estrategia que sugirieron la mayoría de los profesores fue colocar un marcador de posición en los espacios en blanco. Ocho profesores propusieron utilizar el cero como marcador. Por supuesto, puesto que la mayoría de los profesores no entendían el verdadero significado, ni siquiera pensaron en promover una comprensión más profunda del formato particular de alineación. Ellos sugerirían esto a los alumnos sólo para que los números se colocaran en la posición correcta.

> Lo que quizás quieras hacer para ayudar a recordar es que, cuando multiplicas, llenas la primera línea e inmediatamente colocas un cero en las unidades para que sepas que no puedes ocupar ese espacio. (Srta. Francine).

Utilizar marcadores de posición. Dos profesores con experiencia en enseñar este tema, informaron que sugerían a sus alumnos utilizar un marcador de posición que no fuera cero, por ejemplo, un asterisco. La Prof. Barbara señaló que su manera de enseñar el tema era utilizar cosas que "llamarían la atención al estudiante" como marcadores:

> Una cosa que haría sería, bueno, diría que he hecho, es que, cuando enseño esto por primera vez en la pizarra, siempre pongo una manzana o una naranja o lo que sea, en los espacios. O sea, podría ser algo raro, incluso fotos de elefantes. No me importa lo que sea pero los niños memorizaron esto y decían: ah, me acuerdo de que [mi profesor] dijo que no pusiera nada ahí porque ahí estaba la naranja o la manzana. . . sólo pon algo distinto para que les llame la atención.

La estrategia de la Prof. Barbara parecía basarse en la experiencia de que, poniendo una manzana, una naranja, un elefante o cualquier cosa inusual en el espacio en blanco era una forma exitosa de enseñar a los alumnos a realizar el procedimiento en forma adecuada. Desafortunadamente, esto no pareciera promover un aprendizaje matemático significativo. Por el contrario, es consistente con la idea de que en el aprendizaje de las matemáticas no es necesario entender la idea que subyace un procedimiento, uno sólo necesita seguir las "interesantes" pero arbitrarias instrucciones del profesor. Con miras a resolver el problema a nivel procedimental, este enfoque de alineación no se preocupaba para nada del aprendizaje.

Conceptual

Explicar la base lógica. Al contrario, los profesores del grupo que era guiado por los conceptos, se enfocaron en revelar la base lógica de la regla de alineación. Dos profesores informaron que explicarían la base lógica a los alumnos. La Prof. Belle dijo:

> Les hablaría acerca de qué significa el ejemplo en sí mismo ¿qué significa 123 multiplicado por 645? . . Hablaríamos acerca de 123 y de qué es realmente 123 y qué significa. Es 100, un veinte más 3. Después, hablaríamos del 645 y de qué significa. Y, después acerca de qué significa multiplicar y tomaría un número como 123 multiplicado por 5 y qué significa multiplicar 123 por 5. Significa 5 veces 123. Y después, haríamos lo mismo con la otra parte del número, 40 y después, con el 600.

Separar el problema en tres subproblemas. Los otros cinco profesores informaron acerca de la estrategia que usarían: separar el problema en "problemas pequeños". Estos profesores separarían el problema 123 x 645 = en tres pequeños problemas donde se multiplica 123 por 5, 40 y 600, respectivamente. Después, alinearían y sumarían los tres productos parciales: 615, 1920 y 73800. Ninguno de los cinco profesores justificó de alguna forma esta transformación, por ejemplo, haciendo referencia a la reagrupación o a la propiedad distributiva. Tres profesoras principiantes, la Srta. Faith, la Srta. Fleur y la Srta. Frances, informaron acerca de cómo demostrarían esto: Tomemos a la Srta. Faith como ejemplo:

> La manera en que los guiaría sería comenzar diciendo multiplicar 5 veces 123 y *escribir la respuesta al lado*. Después. Multiplicaría 40 veces 123 y pondría la respuesta a la derecha. Para que quede aparte y puedan visualizar que el cero está ahí... Después, multiplicaría 123 por 600 y, después, *sumaría todos estos resultados y, a la vez, explicaría que lo que estamos haciendo es exactamente lo mismo* (las cursivas se agregaron).

Como indicó la Srta. Faith, por medio de su demostración y explicación, los alumnos verían qué pasa realmente durante el procedimiento de la multiplicación con varios dígitos. En particular, verían que los números 492 y 738 en el procedimiento son realmente 4920 y 73800 sin los ceros. Eso explicaría de dónde viene la escalera de las columnas, porqué los estudiantes están equivocados y también explicaría la regla de alineamiento. El siguiente es otro ejemplo:

> Repasaría el valor posicional y les mostraría que esos productos parciales se puede separar, simplemente multiplica 123 por 5, después 123 por 40 y luego 123 por 600 y lo sumas todo... *Eso es lo que haces en ese problema*. Y después, dejaría a los niños poner ese cero marcador de posición. (Srta. Fleur, las cursivas se agregaron).

Algunos profesores del grupo con orientación conceptual, como la Srta. Fleur, se refirieron también a estrategias procedimentales, particularmente a usar un cero como marcador posicional. No hay duda de que los profesores deben poner atención a los procedimientos de cálculo, sin embargo, para el grupo enfocado en los conceptos, las estrategias procedimentales eran complementarias mientras que, el grupo enfocado en los procedimientos, las usaba exclusivamente.

Relación entre conocimiento disciplinario y estrategia de enseñanza

El conocimiento disciplinario limitado restringe la capacidad del profesor para promover el aprendizaje conceptual en los alumnos. Incluso una fuerte creencia en la "enseñanza de matemáticas para la comprensión" no puede remediar o complementar las desventajas de conocimiento disciplinario del profesor. Unos pocos profesores principiantes en el grupo guiado por los procedimientos, querían "enseñar para la comprensión". Intentaron involucrar a los alumnos en el proceso de aprendizaje y promover en ellos el aprendizaje conceptual, que explicaba la base lógica del procedimiento. No obstante, debido a sus propias deficiencias de conocimiento disciplinario, su concepción de la enseñanza no se podía concretar. El Sr. Felix, la Srta. Fiona, la Srta. Francine y la Srta. Felice intentaron promover el aprendizaje conceptual. Irónicamente, con un conocimiento limitado del tema, sus perspectivas al definir el error de los alumnos y sus enfoques para manejar el problema tenían también un enfoque procedimental. Al describir sus ideas acerca de la enseñanza, el Sr. Félix dijo:

> Quiero que realmente piensen acerca de eso y que realmente usen material manipulativo y cosas donde puedan ver lo que están haciendo aquí, por qué es necesario moverse una columna. ¿Por qué hacemos eso? Creo que muchas veces los niños son capaces de entender una base lógica para la conducta y las acciones y mucho más de lo que realmente les reconocemos. Creo que es más fácil, para cualquier persona, hacer algo y recordarlo una vez que ha comprendido por qué se hace de esa forma.

El Sr. Félix presentó una clara intención de alentar a los alumnos a "pensarlo realmente". Sin embargo, su propia comprensión de "porqué correrse un espacio" era "debes alinearte con el dígito que estás multiplicando". No comprendía el verdadero valor posicional de los productos y pensaba que los posibles ceros "realmente no pertenecían a ese lugar". Por ende, aunque pretendía promover el aprendizaje conceptual, su estrategia de enseñanza era que los alumnos "hicieran sus problemas en una hoja de composición girada, utilizando las líneas del papel para marcar las columnas verticales" para aclarar que "hay que saltarse una columna". En esto no se evidencia ningún aprendizaje conceptual.

La Srta. Fiona insistió en que sus alumnos necesitaban poder responder la pregunta: "¿por qué se mueven un espacio esos números?". Sin embargo, como el Sr. Felix, ella misma no entendía verdaderamente porqué uno tiene que mover los números. Cuando se le preguntó acerca de esto, no pudo entregar una explicación convincente. Luego, lo que ella quería que los alumnos "aprendieran" era "esa es la forma correcta, eso es lo que aprendí".

La Srta. Francine creía que, para el aprendizaje de un alumno, la comprensión venía antes de la memorización porque "así se preparan para la vida". Sin embargo, cuando dijo que haría que los alumnos pusieran ceros para que pudiesen alinear correctamente los números ella misma no pudo dar una explicación matemáticamente válida de por qué tenía sentido incluir los ceros. En consecuencia, aunque la Srta. Francine creía que los alumnos debían comprender un procedimiento antes de recordarlo, su limitado conocimiento disciplinario coartaba su capacidad de ayudar a los alumnos a entender el procedimiento.

La Srta. Felice usaría la enseñanza entre pares. Ella creía que los alumnos podían aprender más matemáticas trabajando en grupos heterogéneos con sus pares. Sin embargo, nuevamente, su propio limitado conocimiento disciplinario limitaría el desarrollo de sus alumnos:

Srta. Felice: Bueno, los agruparía con niños que lo estuvieran haciendo bien. . . y dejaría que se llevara a cabo la enseñanza entre pares. Después, los haría ir a la pizarra con niños que supieran como, donde estén con gente que sepa cómo. Y luego, lo repasaría, de la forma en que ellos lo estaban haciendo, la haría así, *para que pudieran seguirme y seguir a sus pares* (las cursivas se agregaron). Lo discutiríamos y, si aún no lo entienden, me sentaría y me sentaría con ellos uno a uno para explicárselos.

Entrevistador: ¿tiene alguna idea acerca de cómo le gustaría específicamente que ellos explicaran como hacer este problema, 123 por 645?

Srta. Felice: Los haría explicar porqué lo estaban haciendo así, repasar verbalmente, lo que, sus pasos. Y, después, los seguiría verbalmente y diría "así es como se hace" y ambos lo resolveríamos juntos.

Entrevistador: ¿Podría decirme lo que diría?

Srta. Felice: Yo siempre, cuando era joven, yo siempre ponía ceros imaginarios ahí. O incluso, los escribía de otro color y entonces, o los borraba después. Pero siempre ponía algo ahí para acordarme.

Aunque mencionó que los haría "explicar por qué lo estaban haciendo así", en toda la entrevista nunca dio más detalles acerca de por qué. En lugar de eso, puso énfasis en *cómo* realizar el procedimiento: hacer que los alumnos siguieran a otros alumnos, repasar los pasos en forma verbal, poner ceros imaginarios, etc. Señaló que lo discutiría con sus alumnos y le explicaría uno a uno. No obstante, cuando el entrevistador sugirió simular una conversación entre la Srta. Felice y los alumnos, ella no pudo discutir el problema conceptualmente.

El conocimiento disciplinario del profesor puede que no produzca automáticamente métodos de enseñanza promisorios o nuevas concepciones de la enseñanza. Pero, sin una base sólida de conocimiento disciplinario, no se pueden llevar a cabo exitosamente métodos promisorios o nuevas concepciones de la enseñanza.

EL ENFOQUE DE LOS PROFESORES CHINOS: ELABORAR EL CONCEPTO DE VALOR POSICIONAL

En términos generales, el enfoque de los profesores chinos al problema tenía ciertos aspectos en común con el de los profesores norteamericanos. Los profesores chinos también mostraron correlaciones entre el conocimiento disciplinario que tienen los profesores y sus estrategias de enseñanza para esta situación. Los profesores que tenían una comprensión conceptual del tema tendían a definir el error como un problema de falta de comprensión conceptual y tendían a resolverlo enfocándose en la comprensión de los alumnos. Los profesores que apenas podían verbalizar el algoritmo, tendían sólo a decirles a los alumnos que memoricen la regla de alineación.

En lo que diferían los profesores chinos de los norteamericanos, nuevamente, era en el tamaño de los "grupos de opinión" y en la variedad de los "grupos con enfoque conceptual". Sólo 6 de los 72 profesores chinos (8%) no mostró una comprensión conceptual del algoritmo. Nueve profesores chinos, los seis que tenían una comprensión procedimental y, tres que entendían la base lógica, se enfocaron en el procedimiento a la hora de definir y manejar el error. Sesenta y tres profesores chinos tomaron una posición orientada a los conceptos. Una comparación entre el "tamaño del grupo de opinión" de los profesores norteamericanos y chinos, se muestra en las siguientes dos figuras: Figura 2.1 ilustra el conocimiento disciplinario que tienen los profesores acerca del tema. Figura 2.2. ilustra la dirección pedagógica al definir y tratar el error de los alumnos.

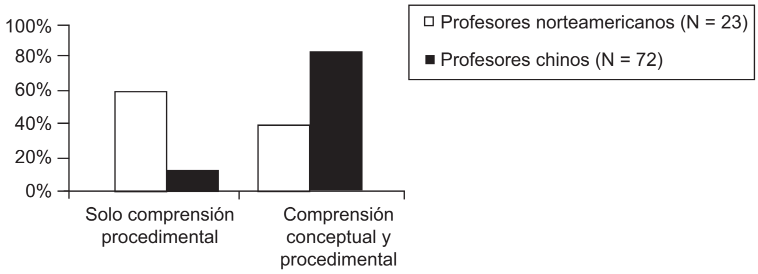


Fig. 2.1. Conocimiento del algoritmo que tenían los profesores

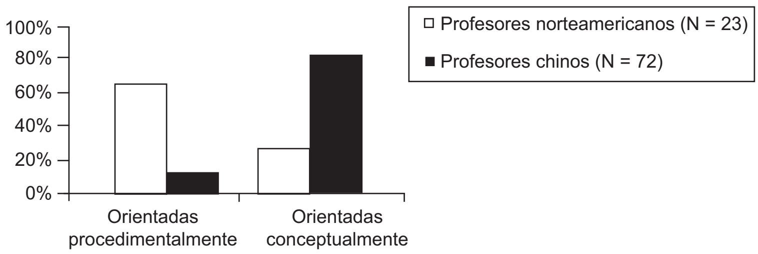


Fig. 2.2. Estrategias de enseñanza.

Estas dos figuras ilustran el intrigante aspecto antes descrito: *es casi igual el número de los profesores que describieron una estrategia de enseñanza orientada al concepto que los que poseen comprensión conceptual del algoritmo.*

Interpretar el error

Los profesores chinos que se guiaban por los conceptos, caben en tres subgrupos: Un grupo se enfocó en la propiedad distributiva[1]. Otro grupo extendió el concepto de valor posicional a sistema de valor posicional. El tercer grupo explicó el problema desde ambas perspectivas.

1 Los estudiantes en China aprenden una versión aritmética de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva. Se les enseña que estas propiedades pueden facilitar los cálculos matemáticos. Por ejemplo, con la propiedad conmutativa y asociativa, uno puede reorganizar problemas como 12 + 29 + 88 + 11 =" en "(12 + 88) + (29 + 11) =" de manera que el cálculo se facilita. Con la propiedad distributiva, uno puede reorganizar "35 x 102 =" como "35 x 100 + 35 x 2 =" para facilitar el cálculo.

Propiedad distributiva

El primer subgrupo contiene cerca de un tercio de los profesores guiados por los conceptos. Sus explicaciones eran paralelas a aquellas de los profesores guiados por los conceptos en EE.UU. Pero los argumentos de los profesores chinos eran más “formales” matemáticamente que los de sus contrapartes norteamericanas. Más de la mitad de esos profesores se refirieron a la propiedad distributiva para justificar sus explicaciones, mientras que ninguno de los profesores norteamericanos mencionó el término. En lugar de simplemente separar el problema en tres problemas más pequeños, los profesores chinos tendieron a presentar el proceso de transformación:

> El problema es que el estudiante no tenía una clara idea de por qué los números debían alinearse de forma aparentemente distinta a la de la adición. El alineamiento, de hecho, se deriva de varios pasos: Primero, pondría en la pizarra una ecuación y la resolvería con los alumnos:
>
> $$\begin{aligned} 123 \text{ x } 645 &= 123 \text{ x } (600 + 40 + 5) \\ &= 123 \text{ x } 600 + 123 \text{ x } 40 + 123 \text{ x } 5 \\ &= 73800 + 4920 + 615 \\ &= 78720 + 615 \\ &= 79335 \end{aligned}$$
>
> ¿Qué nos permitió transformar el problema? La propiedad distributiva. Luego, le sugeriría a la clase reescribir la ecuación en columnas:
>
> $$\begin{array}{rl} \underline{123} & \text{x } 645 \\ 615 & \\ 4920 & \\ \underline{73800} & \\ 79335 & \end{array}$$
>
> Les pediría a los alumnos que observaran los ceros en la ecuación y los de las columnas. ¿afectan a la suma? ¿por qué si o por qué no? ¿se pueden eliminar los ceros de la ecuación? ¿qué pasa con los ceros de las columnas? Si los borramos, ¿qué pasa? Luego, borraría los ceros de las columnas y obtendríamos las columnas con forma de escalera en la pizarra:
>
> $$\begin{array}{rl} \underline{123} & \text{x } 645 \\ 615 & \\ 492 & \\ \underline{738} & \\ 79335 & \end{array}$$

> Después de una discusión así, creo que la forma de alinear en la multiplicación tendrá sentido para los alumnos y, también, se les quedará grabada (Prof. A).

La lógica de la Prof. A era muy clara. Primero, apeló a la propiedad distributiva para justificar su transformación y mostró el proceso de cómo el problema se puede presentar como una composición de tres problemas más pequeños. Segundo, reescribió la operación en columnas para que los tres productos parciales estuvieran representados en ellas y le pidió a los alumnos que compararan las dos formas de la operación, especialmente, que pusieran atención a los ceros. Después, luego de una discusión acerca del papel de los ceros, los borró de las columnas puesto que no hacían ninguna diferencia en el cálculo. Por último, transformó las columnas originales en las columnas en forma de escalera del algoritmo. En comparación con las explicaciones de los profesores norteamericanos, la de la Prof. A se acercaba más a un argumento matemático convencional. Las características de un argumento matemático (justificación, razonamiento riguroso y expresión correcta) se reflejan en toda su explicación.

No obstante, unos pocos profesores dijeron que explicaciones como las del Prof. A no eran lo suficientemente rigurosas, puesto que, se debería incluir otra importante propiedad matemática, la multiplicación por 10:

> Además de la propiedad distributiva, existe otro argumento que se debe incluir en la explicación. Este es la multiplicación por 10 o por una potencia de 10. Multiplicar por 10 o por una potencia de 10 es un proceso especial que difiere de la multiplicación regular pues, para obtener el producto simplemente ponemos los ceros del multiplicador al final del multiplicando. Al multiplicar un número por 10, simplemente ponemos un cero al final del número, si es por 100, simplemente ponemos dos ceros. Este aspecto también explica por qué 123 x 40 = 4920. De lo contrario, si los alumnos trataran 123 x 40 como un problema normal de multiplicación, tendrían columnas como éstas:

$$\begin{array}{r} \underline{123} \times 40 \\ 000 \\ \underline{492} \\ 4920 \end{array}$$

> El problema de porqué se debe "mover" el 492 seguiría ahí. Creo que por eso en los textos escolares la multiplicación por 10 y por potencias de 10 va justo antes de la multiplicación por números de varias cifras, en general. Puesto que el procedimiento de multiplicar por 10 y por potencias de 10 es tan simple, tendemos a ignorarlo pero, en términos de

> exactitud matemática, se debe discutir o al menos mencionar, en nuestra explicación (Prof. Chen).

La preocupación del Prof. Chen no era gratuita. Entre los siete profesores norteamericanos que explicaron la base lógica del procedimiento, dos revelaron ignorancia acerca de lo que discutió el Prof. Chen. Aunque separaban correctamente el problema en subproblemas, no entendían los procedimientos particulares de x10 y x100, incluidos en los subproblemas x40 y x600. En su lugar, los trataban como cálculos normales:

> Bueno, y si lo multiplicamos por 10. Y repasaría todo el concepto. Bueno, cero veces esto es 0. Ahora, lo multiplicamos por 40. Les mostraría que necesitan poner el 0 ahí porque cero veces eso era 0. Ahora, vamos a multiplicar el 4, 4 veces esto y les muestro donde el 0, cómo les mantiene el valor posicional. (Srta. Fawn).

> Diría, cuánto es 123 por 40... Multiplícalo por cero. Ahora, 0 por 3 es 0 y 0 por 2 es 0 y 0 por 1 es 0. (Srta. Frances).

En este sentido, aunque la Srta. Fawn y la Srta. Frances tenían una sólida comprensión de la base lógica del algoritmo de la multiplicación con varios dígitos, no revelaron un conocimiento acabado del tema. Sus explicaciones no se justificaron explícitamente. Las explicaciones como las del Sr. A o el Prof. Chen no sólo expresaban piezas específicas de conocimiento sino también, las convenciones de la disciplina.

Transformar el problema 123 x 645 en 123 x 600 + 123 x 40 + 123 x 5 era una forma de explicar la base lógica del proceso de alineación. Los elementos clave de esta explicación fueron: primero revelar los ceros "invisibles" en el proceso y, luego, ilustrar cómo los omitirían.

El Sistema de valor posicional

Sin embargo, otros profesores pensaron que revelar los ceros y, después, volver a eliminarlos era un desvío innecesario. Los otros dos tercios de los profesores chinos guiados por los conceptos describieron una manera más directa de explicar el proceso, que no requería incluir los ceros. Su argumento se basaba en la elaboración del concepto de valor posicional. En lugar de decir que el 4 del 645 es 40 y que 123 x 40 es 4920, estos profesores argumentaron que el 4 de 645 es 4 decenas y que 123 multiplicado por 4 decenas es 492 decenas. Luego, explicaron porqué el 492 se debe alinear con las decenas:

> Puesto que el 5 del 645 está en el espacio de las unidades, corresponde a 5 unidades. 123 x 5 = 615, es 615 unidades. Así que ponemos el 5 en el lugar de las unidades. El 4 de 645 está en las decenas, corresponde

> a 4 decenas. 123 x 4 = 492, es 492 decenas. Así que ponemos el 2 en el lugar de las decenas. El 6 del 645 está en el lugar de las centenas, así que corresponde a 6 centenas. 123 x 6 = 738, son 738 centenas. Así que ponemos el 8 en el lugar de las centenas. (Srta. S).

Al referirse a 492 como 492 decenas y a 73800 como 738 centenas, los profesores evitaron el "desvío" de incorporar los ceros. Además de la propiedad distributiva que brinda la base lógica general del algoritmo, los profesores ocuparon su sólida comprensión del sistema de valor posicional, el concepto de unidad básica y su valor posicional, y la interdependencia de los valores posicionales.

El concepto de *unidad básica* de un número desempeña un papel significativo en numeración. Generalmente usamos "uno" como la unidad básica de un número. Cuando decimos 123, queremos decir 123 unidades. En la vida cotidiana, damos por sentado que "uno" es la unidad básica de un número. No obstante, podemos utilizar otras unidades básicas para numerar si fuera necesario o incluso si simplemente quisiéramos. Por ejemplo, utilizando una decena, una centena, una décima o incluso dos como unidad básica, podemos decir que el número 123 es 12,3 decenas, 1,23 centenas, 1230 décimas o, incluso, 61,5 dos. También podemos cambiar el valor de un número simplemente cambiando el valor posicional de su unidad básica. Con los mismos tres dígitos: 123 décimas, 123 decenas y 123 centenas tienen un valor significativamente distinto. Basados en esta observación, los profesores afirmaron que las 40 unidades del 645 deberían considerarse en realidad como 4 decenas, un número de un dígito, en el algoritmo. En forma similar, las 600 unidades de 645 se deberían manejar como 6 centenas.

En efecto, en el sistema de valor posicional, cada lugar se relaciona con el otro. Un único valor posicional no tiene un significado independiente. Cada uno se define por su relación con los otros miembros del sistema, de modo que todos los valores posicionales son interdependientes. No habría "uno" a menos que hubiera una décima de diez, una centésima parte de cien, o diez décimas, etc. El valor posicional de una unidad básica determina cómo se presenta un número. Mediante discusiones de la relación entre 4920 unidades y 492 decenas, se desarrollará la comprensión previa de los alumnos acerca del valor posicional:

> Necesitamos profundizar la comprensión de los alumnos del valor posicional. Su concepto de valor posicional solía ser bastante directo. La unidad básica de un número siempre es la que está en el lugar de las unidades. Cuando ven el número 492 siempre es: 492 unidades. Cuando ven el número 738 siempre es 738 unidades. Pero ahora, el valor posicional de la unidad básica no es único. Cambia según el contex-

> to. Por ejemplo, el valor posicional de 4 en el problema es la decena. Cuando multiplicamos 123 por 4, lo consideramos 4 decenas. Luego, las decenas se convierten en el valor posicional de la unidad básica del producto 492. No son 492 unidades, como en el trabajo de los alumnos, sino 492 decenas. Por eso ponemos el 2 en el lugar de las decenas. Lo mismo pasa cuando multiplicamos 123 por el 6, que consideramos 6 centenas. El valor posicional de la unidad básica del producto es en la centena, 738 centenas. Así que tenemos que poner el 8 en el lugar de las centenas. En lugar de cuántas unidades, ahora pensamos cuántas decenas, cuántas centenas o incluso cuántas unidades de mil, etc. ... Para corregir el error de los alumnos, debemos expandir su comprensión del valor posicional para ayudarlos a pensar en el concepto de una forma flexible. Si, es un 492 pero no son 492 unidades sino, 492 decenas. (Prof. Wang).

El Sr. Mao consideraba la multiplicación con varios dígitos como una oportunidad para desarrollar el concepto de valor posicional en los alumnos:

> Hemos enseñado a los alumnos una regla básica de que los dígitos siempre se deben alinear con aquellos del mismo valor posicional. Ahora, se podrían confundir porque pareciera que se quiebra la regla. Pero la confusión es realmente un momento para desarrollar su comprensión del valor posicional y la regla de alineamiento. ¿por qué se ve como si alineáramos de forma distinta? ¿se quiebra la regla de alineación que aprendimos antes? Al explorar estas preguntas, nuestros alumnos verán que el valor de un número no sólo depende de los dígitos que contiene sino también, de dónde se colocan los dígitos. Por ejemplo, el valor de los números de tres dígitos en el problema, varía si los ponemos en distintos lugares. 123 x 4 es 492, ahí no hay problema. Pero puesto que el 4 no es 4 unidades sino, 4 decenas, el 492 no es 492 unidades sino 492 decenas. O, esta vez podemos decir que el lugar de las decenas es el de las unidades de las decenas. El lugar de las centenas se vuelve el lugar de las decenas de las decenas. Así se forma el número 738, que es 738 centenas. Por ende, no es que la idea de alineación cambie o se rompa de alguna forma. Más bien, se necesita una versión compleja para explicar la regla.

Estos profesores presentaron descripciones claras de los varios aspectos del valor posicional. También estaban conscientes de que los aspectos complicados derivan de aspectos simples y elementales de este concepto. Más importante, demostraron una sólida comprensión de la idea central del concepto, "lo que significa un dígito en un determinado valor posicional". Esta idea central penetra todas las etapas de la enseñanza y aprendizaje y subyace a los diferentes aspectos de este concepto. Más aún, los profesores estaban conscientes de cómo el concepto de valor posicional se entrelaza con varias operaciones matemáticas y el papel que éste desempeña en estas operaciones. Sabiendo esto, los profesores preparan a los alumnos para aprender una idea, incluso cuando aún no es obvia en el tema que están enseñando en ese momento. El Sr. Li discutió cómo el concepto de valor posicional se desarrolla paso a paso en los alumnos:

> Los estudiantes no pueden alcanzar una comprensión acabada del valor posicional en un día sino, paso a paso. Al principio, cuando comienzan a enumerar y reconocer dos dígitos y luego, números con varios dígitos, tienen una idea preliminar de lo que significa una posición en matemáticas, los nombres de las posiciones, los aspectos limitados de la relación entre espacios, como que 1 decena equivale a 10 unidades, etc. La idea más significativa que aprenden en esta etapa es que dígitos en distintas posiciones, tienen significados distintos o representan distintos valores. Empezamos a preguntarles: "¿Qué representa este dígito?". Aprenden que un 2 en el espacio de las unidades, representa 2 unidades; un 2 en el espacio de las decenas representa 2 decenas y que un 2 en el espacio de las centenas representa 2 centenas, etc. Después, cuando aprenden la suma y resta simples, el valor posicional se vuelve más significativo para ellos puesto que tienen que alinear los dígitos con el mismo valor posicional. Después de eso, cuando aprenden la suma con composición y la resta con descomposición[2], los alumnos aprenden los aspectos de componer y descomponer una unidad de mayor valor. La composición y descomposición de una unidad también son aspectos importantes del concepto de valor posicional. Ahora, en la multiplicación, se enfrentan a nuevos aspectos del concepto. Ellos solían tratar con varias decenas, pero ahora tienen varias decenas de decenas, digamos 20 o 35 decenas o, incluso, varios cientos de decenas como en este problema, 492 decenas. Ellos solían trabajar con varias centenas, pero ahora trabajan con varias decenas de centenas o incluso varias centenas de centenas como 738 centenas. Para entender este aspecto, deben saber cómo manejar el valor posicional en forma sistemática.

Valor posicional y la ley distributiva

El Sr. Li fue uno de los once profesores que propuso presentar a los alumnos dos explicaciones, una con ceros y otra sin los ceros. Aquellos profesores dijeron que una comparación entre ambas formas expandiría las perspectivas matemáticas de los alumnos y también desarrollaría su capacidad para hacer sus propios juicios matemáticos.

2 En China, la suma con reserva se llama "suma con composición" y la "resta con reserva" se llama "resta con descomposición".

Paquete de conocimientos

Al igual que en el caso de la resta con reserva, la respuesta de los profesores chinos al tema de la multiplicación con varios dígitos, puso en evidencia su preocupación por el aprendizaje de temas relacionados con estos. Los conocimientos en sus paquetes incluían temas como valor posicional, el significado de la multiplicación, la base lógica de la multiplicación, la multiplicación por números de dos dígitos, la multiplicación por números de un dígito, la multiplicación por 10, multiplicadores y potencias de 10, la propiedad distributiva y la conmutativa. En el paquete también había piezas claves que los profesores pensaban tenían más peso. La multiplicación por números de dos dígitos fue el que más salió. Se consideró la piedra angular que sostenía el aprendizaje de la multiplicación por números de tres dígitos. El tema de la "multiplicación por números de dos dígitos" surgió entre los profesores en sus primeras reacciones a mi pregunta. Cerca del 20% de los profesores chinos comentó que sus alumnos no habrían cometido "ese error" al aprender la multiplicación por números de tres dígitos porque esto ya habría sido resuelto en la multiplicación por números de dos dígitos:

> Este error debió haber ocurrido cuando los alumnos aprendieron multiplicación por números de dos dígitos. Tanto el concepto matemático como la habilidad de cálculo en la multiplicación con varios dígitos, se incorporan en el aprendizaje de la operación con números de dos dígitos. De este modo, el problema podría ocurrir y debe ser resuelto en esa etapa. (Srta. F).

Algunos profesores indicaron que el tema que planteé, la multiplicación por números de tres dígitos, no era una pieza clave en el paquete de conocimientos. Es una "rama" no la "raíz" ni el "tronco" del árbol. Desde la perspectiva de los profesores chinos, la multiplicación por números de dos cifras es mucho más importante que la de tres cifras. Cuando se analizó la razón por la que los estudiantes cometieron tal error, algunos profesores dijeron que "los alumnos no entendieron el concepto cuando aprendieron la multiplicación por números de dos dígitos. El Prof. Wang informó que la multiplicación por números de dos dígitos se tomaba en serio y que se trabajaba intensamente en su enseñanza:

> Para serte honesta, no les enseño a mis alumnos la multiplicación por números de tres dígitos. En lugar de eso, hago que la aprendan por sí mismos. De todas formas, mi enfoque es la multiplicación por dos dígitos. Multiplicar por un número de dos dígitos es el punto difícil. Los alumnos necesitan aprender un nuevo concepto matemático así como también una nueva habilidad de cálculo. Tienes que asegurarte de que tengan ambos. Siempre los hago discutir con profundidad, una y otra vez. ¿Cómo resol-

> ver el problema? ¿Por qué necesitas correrte un espacio? Pueden tener su propia idea pero también pueden abrir el libro y leer lo que dice. El punto principal es que tienen que pensar porqué y explicarlo. Generalmente tengo discusiones en grupo y con todo el curso. Para la discusión grupal, junto dos alumnos que estén sentado en el mismo pupitre[3], o cuatro alumnos sentados en dos pupitres con los dos alumnos de atrás. Los estudiantes del pupitre del frente, se dan vuelta para juntarse con los otros alumnos. El problema de la discusión grupal es que algunos estudiantes lentos tienden a confiar en que sus compañeros expliquen el tema. Así que, en la discusión con el curso, pongo especial atención en ellos. Los invito a hablarle al curso y me aseguro de que entendieron. Luego, el curso tiene que practicar el cálculo. Algunas veces, aunque entiendan la base lógica, pueden olvidarse de mover los números porque se acostumbraron a alinear en forma recta, cuando se suma. Así que necesitan practicar. Una vez que tienen una idea clara del concepto y han practicado lo suficiente, se vuelven diestros en la multiplicación por números de dos dígitos. Estoy bastante segura de que, después, podrán aprender por sí mismos a multiplicar por números de varios dígitos. Por eso es que es tan importante su comprensión del concepto cuando trabajan con multiplicación de dos dígitos.

Desde la perspectiva del conocimiento disciplinario, los profesores chinos parecieran tener una idea más clara de cuál es la forma más simple de una cierta idea matemática. Desde la perspectiva del aprendizaje del alumno, ellos prestan atención especial a la primera vez que les presentan una idea a los alumnos en su forma más simple.

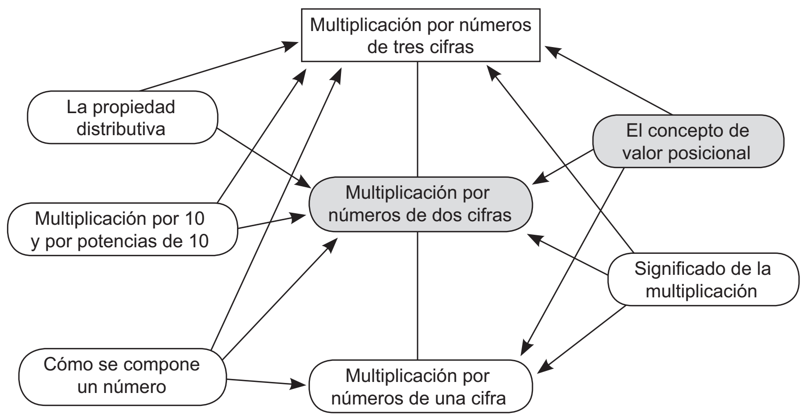


Fig. 2.3. Un paquete de conocimientos para la multiplicación por números de tres dígitos.

3 En China, dos alumnos comparten un banco doble y los bancos se alinean en filas mirando al escritorio del profesor.

Ellos creen que una vez que los alumnos entienden cabalmente una idea en su forma más simple, el posterior aprendizaje de sus formas avanzadas y complejas tendrá una base sólida a partir de la cual construir. El aprendizaje posterior, además, reforzará la idea aprendida en forma simple. Además del tema de la multiplicación con números de dos dígitos, el concepto de sistema de valor posicional es otra pieza clave que los profesores mencionaron frecuentemente. La figura 2.3 ilustra el paquete de conocimientos que describen los profesores para la multiplicación con varios dígitos.

Estrategias de enseñanza

La tendencia observada entre los profesores norteamericanos también se hizo evidente entre los profesores chinos: Cómo un profesor tendía a ayudar a los alumnos dependía enormemente de su propio conocimiento. Los pocos profesores chinos con conocimiento limitado a los procedimientos informaron que simplemente les dirían a los alumnos que se acordaran de moverse por las columnas. Sin embargo, la mayoría de los profesores presentó estrategias basadas en los conceptos para ayudar a los alumnos a entender el problema.

Explicación y demostración

De los 72 profesores, 22 señalaron que explicarían a los alumnos una manera correcta de resolver el problema. Veinte profesores informaron que harían una demostración así como también darían una explicación. Mientras que estos dos enfoques también se vieron frecuentemente entre los profesores norteamericanos, las explicaciones y demostraciones de la mayoría de los profesores chinos difirieron de las de sus contrapartes norteamericanas. Para la mayoría de los profesores norteamericanos, explicar significaba verbalizar el procedimiento del algoritmo y demostrar significaba mostrar los pasos del cálculo. Por el contrario, la mayoría de los profesores chinos pretendían ilustrar la base lógica del algoritmo mediante sus explicaciones y demostraciones Las explicaciones se establecían generalmente en bases conceptuales sólidas. El siguiente, es un ejemplo típico de una explicación de los profesores chinos:

> Le diría a los alumnos que, puesto que el 4 de 645 representa 4 decenas, por ende, 123 multiplicado por el 4, es igual a 492 decenas. 492 decenas ¿dónde se debe alinear el 2? Por supuesto que en el espacio de las decenas. De nuevo, el 6 representa 6 centenas de modo que 123 veces las 6

> es igual a 738 centenas. ¿dónde se debe alinear el 8? En el espacio de las centenas. Las cifras en el espacio de las unidades de estos tres números (615, 492 y 738) de hecho representan tres distintos valores. Uno representa las unidades, otro representa las decenas y el otro, representa las centenas. Tu problema es que no te das cuenta de la diferencia y los viste a todos representando las unidades. (Srta. G).

A través de su explicación, la Srta. G dio a entender el concepto incluido en la base lógica del procedimiento, así como la vena de un argumento matemático. La mayoría de los profesores que afirmaban explicar el algoritmo a través de la transformación del problema según la propiedad distributiva, informó que demostraría la transformación en la pizarra. Durante las entrevistas, los profesores tendieron a mostrar cada paso en el proceso mientras enseñaban para que los alumnos pudiesen ver todo el flujo lógico del cálculo.

Los alumnos encuentran el problema

Otros 29 profesores chinos pretendían que los alumnos se pusieran a buscar el problema por sí mismos. La Srta. Felice, una profesora norteamericana, también expresó una intención similar, esperando que el aprendizaje entre pares, los alumnos que cometían el error, hallaran el problema por sí mismos. Sin embargo, puesto que el propio conocimiento del tema de la Srta. Felice se limitaba al procedimiento, el problema que ella quería que sus alumnos encuentren, también estaba en el nivel procedimental. Por otra parte, muchos de los profesores chinos tenían la intención de guiar a los alumnos hacia una comprensión de la base lógica del procedimiento y de los conceptos matemáticos asociados. Durante las entrevistas, informaron acerca de varias estrategias que les gustaría usar para interesar y guiar a que los alumnos encuentren el problema.

Observar, examinar, analizar y discutir. Algunos profesores chinos informaron que esperarían que los alumnos hallaran el problema mediante la observación. Dijeron que pondrían el error en la pizarra e invitarían a los alumnos a examinarlo de cerca y luego, los haría discutir sus hallazgos:

> Abriremos nuestro "pequeño hospital matemático". Los estudiantes serán los "doctores" y el problema será el "paciente". Los "doctores" diagnostican si el "paciente" está o no enfermo. Dejemos que ellos decidan. Si está "enfermo", ¿qué tipo de enfermedad? ¿cuál es la causa de la enfermedad? Como profesora, mi responsabilidad es guiarlos para que descubran porqué está mal… Es un problema de valor posicional, digamos, dígitos en diferentes posiciones de valor expresan distintos significados. (Prof. Sun).

> Pondría la problemática uno en la pizarra e invitaría a mis alumnos a observar cuidadosamente y ver si está correcta o no. Luego, los dejaría expresar dónde está el problema, por qué esta incorrecto. ¿por qué se deben alinear distinto el 492 y el 738? ¿Qué representan estos números y, qué deberían realmente representar? Luego, haría que un alumno, quizás el que cometió el error, fuera a la pizarra a corregirlo. Después de tal revisión de la base lógica, haríamos un resumen de la regla. Finalmente, daría unos problemas más y les pediría que describieran el procedimiento y lo explicaran. (Srta. L).

Al contrario de la Srta. Felice, los profesores chinos no se detuvieron en la etapa en que los alumnos veían el problema aparente. Una discusión seguiría para explorar el concepto oculto bajo este. Luego, lo que los estudiantes aprendieron mediante la discusión no era solamente cómo corregir el procedimiento errado sino también, el concepto equivocado que había bajo este.

Hacer preguntas para establecer la dirección. En lugar de mostrar directamente el problema, algunos profesores establecerían una dirección antes de que los alumnos observaran el problema. Algunos profesores usarían ciertas preguntas para guiar a los alumnos a descubrir el problema. Las preguntas les recordarían a los alumnos los conceptos incluidos en la explicación del procedimiento, por ejemplo cómo se forma un número, el valor posicional de los dígitos del multiplicador, etc. Estas preguntas se las harían generalmente a los mismos alumnos que cometieron el error:

> Primero que todo, le pediría a los alumnos que me dijeran cómo se forma el número 645. Me dirían que con 6 centenas, 4 decenas y 5 unidades. O, podrían decir que es 600 más 40 más 5. Después, les pediría que pensaran qué representa 123 x 5. ¿Qué representa 123 x 4? ¿Qué representa 123 x 6? Entonces ¿estaban resolviendo bien este problema? ¿Por qué está mal? Corríjanlo. (Sr. A).

> Le preguntaría a los alumnos qué representa el 4 del 645, ellos dirían 4 decenas, luego les pediría que estimaran cuánto es 123 por 4 ¿puede ser 492? Luego, les pediría que siguieran pensando y me entregaran su trabajo corregido y me explicaran el problema que encontraron. (Srta. F)

> He enseñado matemática elemental por más de veinte años, pero nunca he visto un error así. Pero dado que ha sucedido con mis alumnos de quinto grado, quizás quisiera decir, bueno, puesto que han aprendido la propiedad distributiva, ¿quién puede reescribir el problema 123 x 645 según esa propiedad, separando el multiplicador según los valores posicionales? Una vez que lo hayan reescrito, veremos pronto dónde está el problema. (Prof. Mao).

Al hacer las preguntas, los profesores brindaron claves a los estudiantes de dónde podría estar el problema y los dejaron descubrirlo por sí mismos. Guiados por estas preguntas, la atención de los alumnos no se dirige hacia los aspectos superficiales del problema sino que va directamente a su esencia.

Ejercicios de diagnóstico. Diseñar ejercicios relevantes para ayudar a los alumnos a "diagnosticar" el problema fue otra estrategia usada por los profesores para definir una dirección de ayuda para que los alumnos encuentren el problema. Estos ejercicios también pretendían plantear los temas conceptuales subyacentes al procedimiento:

> Creo que la razón por la que los alumnos cometieron tal error es que no comprendieron el significado que cada dígito expresa cuando está en cada posición. Primero los haría resolver problemas como estos:
>
> 123 = ( )xl00 + ( )xl0 + ( )x1.
> 645 = ( )xl00 + ( )xl0 + ( )xl
>
> Después, les pediría que pensaran si estaban correctos o no y porqué. (Sr. H).
>
> Primero, les pediría que hicieran dos problemas:
>
> 42 x 40 = ( ) decenas
> 42 x 400 = ( ) centenas
>
> Estos problemas los llevarán a percatarse de la base lógica de la multiplicación. Segundo, les pediría a los alumnos de un mismo pupitre que se dijeran entre sí qué significa cada dígito de 645 por 123 y en qué lugar se deben poner los productos. Luego, los haría discutir si hay un error aquí, analizar el error basándose en la base lógica del cálculo y explicar cuál es la forma correcta. (Srta. A).
>
> Dado que mis alumnos lo hicieron así, primero haría que tres alumnos fueran a la pizarra, cada uno resolviendo uno de los tres problemas. 123 x 5 =?, 123 x 40 = ? y 123 x 600 = ? Luego, le pediría al curso que comparara los resultados en la pizarra con el resultado problemático, preguntándoles, qué encuentran. De esta forma, pronto descubrirán el problema y cómo se produjo. (Prof. C).

Los profesores que utilizarían "ejercicios de diagnóstico" indicaron un enfoque hacia los alumnos, al igual que los profesores que emplearían preguntas, pero ellos dejaron la labor de abordar el problema a los alumnos.

Revisar la regla. Algunos profesores chinos harían que los alumnos repasaran el proceso antes de discutir la base lógica. Estos profesores indicaron que les gustaría que los alumnos modificaran la regla para encontrar el problema comparando el error con ella:

> Si mis alumnos tienen ese error, les pediría que abrieran el libro y modificaran por sí mismos el procedimiento. Luego, los alentaría a pensar acerca de por qué ésta es la regla, por qué la regla dice que los productos parciales se deben alinear de esta manera. Después de eso, mostraría el error en la pizarra. ¿Qué piensan acerca del trabajo de estos alumnos? Encontrarían inmediatamente lo que está mal. Les pediría que dijeran porqué está mal, cómo corregirlo. (Prof. B).

Aunque comenzaron por el aspecto procedimental de la regla, estos profesores no ignoraron su aspecto conceptual. Basados en su propia comprensión conceptual del tema, lograron alcanzar su objetivo de ayudar a los alumnos a "recordar la regla basados en su comprensión".

Los profesores que propusieron distintas estrategias para hacer que los alumnos buscaran el problema tenían algunas características en común. La mayoría de los profesores esperaba que sus alumnos hallaran el problema por sí mismos y lo explicaran a nivel conceptual. Algunos profesores hicieron preguntas diseñadas para diagnosticar problemas con la intención de establecer una dirección conceptual. Otros profesores intentaron dejar que los alumnos primero encontraran el problema procedimental para después abordar el concepto subyacente. En cualquiera de los casos, el enfoque fue la base lógica del procedimiento.

El discurso matemático, que se constituye mediante la investigación, desafío y defensa de proposiciones, incluye también un discurso dentro de uno mismo. Esta convención de las matemáticas se refleja en las estrategias de estos profesores; involucrar a los alumnos en la búsqueda del problema y explicarlo por sus propios medios.

El enfoque del Prof. Chen

Además de los enfoques ya mencionados para manejar el error de los alumnos, el Prof. Chen propuso su propio método, que también fue impresionante. Sugirió utilizar formas "no convencionales" de resolver el problema para ayudar a los alumnos a entender el procedimiento. Dijo que inspiraría a los alumnos para ver que existe más de una forma correcta de alinear las columnas. Propuso que podría haber cinco o más maneras además de la forma convencional de alinear:

123	123	123	123	123
x 645	x 645	x 645	x 645	x 645
615	492	492	738	738
738	615	738	492	615
492	738	615	615	492
79335	79335	79335	79335	79335

El Sr. Chen creía que guiar a los alumnos a encontrar estas formas no convencionales estimularía su comprensión del algoritmo para que lo usaran en forma más flexible.

DISCUSIÓN

"Comprensión conceptual": Una historia que no es sencilla

Para el tema de la multiplicación con varias cifras, las respuestas de los profesores se distribuyeron en un patrón similar al del capítulo anterior. Nuevamente, los profesores alcanzaron el nivel procedimental, todos sabían cómo realizar la multiplicación correctamente. Sin embargo, el 61% de los profesores norteamericanos y el 8% de los profesores chinos, no pudo entregar una auténtica explicación conceptual para el procedimiento. Irónicamente, tendieron a usar el término "valor posicional" en forma procedimental, para identificar o nombrar las columnas para alinear los números.

El otro 39% de los profesores norteamericanos y el 92% de los profesores chinos, brindó explicaciones conceptuales para el algoritmo de la multiplicación con varias cifras. No obstante, sus explicaciones fueron variadas. Los siete profesores norteamericanos dijeron que el problema 123 x 645 de hecho constituía tres subproblemas: 123 x 600, 123 x 40 y 123 x 5 pero no pudieron entregar justificaciones explícitas para esta aseveración. Por ende, los productos parciales no eran de hecho 615, 492 y 738 sino, 615, 4920 y 73800. Los profesores chinos, por otra parte, tendieron a indicar que el concepto implícito en el algoritmo es la propiedad distributiva. No sólo mencionaron frecuentemente el término propiedad distributiva sino que también lo aplicaron para mostrar y justificar la transición.

$$
\begin{aligned}
123 \text{ x } 645 &= 123 \text{ x } (600 + 40+5) \\
&= 123 \text{ x } 600 + 123 \text{ x } 40 + 123 \text{ x } 5 \\
&= 73800 + 4920 + 615 \\
&= 79335
\end{aligned}
$$

Para explicar porqué los ceros que se encuentran en el extremo derecho de los productos parciales se omiten en el algoritmo, los profesores chinos elaboraron el concepto de sistema de valores posicionales. Dijeron que, desde la perspectiva del sistema de valores posicionales, los tres productos parciales también se pueden considerar 615 unidades, 492 decenas y 738 centenas. Más aún, unos pocos profesores chinos incluyeron la multiplicación por 10 y las potencias de 10 en su discusión para hacer la explicación más rigurosa.

Aunque todas las explicaciones mencionadas anteriormente explican el procedimiento de cálculo de la multiplicación con varias cifras, fácilmente se pueden ver diferencias conceptuales entre ellas. ¿Cómo vamos a entender estas diferencias entre la comprensión conceptual que tienen los profesores acerca de un tema matemático? ¿Tendrán incidencia en el aprendizaje de los alumnos estas diferencias en las comprensiones de los profesores? Durante 1998, se habló mucho en la educación matemática acerca de la comprensión conceptual en contraste con la procedimental. No obstante, se ha puesto poca atención en las características más específicas de una comprensión conceptual adecuada, por ejemplo su rigurosidad.

El paquete de conocimientos y sus partes claves

Las preguntas respecto al tema del capítulo anterior (resta con reserva) que se realizaron en la entrevista, incluían un sondeo de temas relacionados. En las entrevistas que se discuten en este capítulo, no se incluyó un sondeo similar. Sin éste, los profesores norteamericanos limitaron su discusión al tema de la multiplicación con varias cifras. A pesar de esto, la mayoría de los profesores chinos tendieron a mencionar espontáneamente unos pocos temas relacionados. Al igual que con el tema de la resta con reserva, el paquete de conocimiento que mencionaron los profesores chinos incluía una secuencia lineal de temas matemáticos: multiplicación por números de una cifra, por números de dos cifras y por números de varias cifras. La secuencia de las operaciones de multiplicación se sustentaba en unos pocos temas más, como el concepto de sistema de valor posicional, la propiedad distributiva, la multiplicación por 10 y por potencias de 10, etc.

Es interesante ver que, al igual que en el caso de la resta con reserva, los profesores chinos pensaron que el tema de la entrevista no era la parte clave del paquete. La multiplicación por números de dos cifras, donde se presenta por primera vez la base lógica del tema, se consideró la pieza clave que merecía mayor esfuerzo tanto de los profesores como de los alumnos. Para la resta con reserva, la pieza clave era la resta dentro de la veintena. Los profesores chinos tendían a prestar una importante atención al momento en que se presentaba un concepto por primera vez, pues pretendían establecer una base sólida para los aprendizajes posteriores. Según ellos, mientras más sólido sea el primer aprendizaje básico, éste podrá brindar un mayor apoyo al aprendizaje posterior del concepto en su forma más compleja. A su vez, este apoyo mejorará el aprendizaje temprano de la forma primaria.

La perspectiva de los profesores chinos respecto a la pieza clave de una secuencia de conocimientos nos recuerda un enfoque de enseñanza en los EE.UU. En el currículum espiral, los conceptos matemáticos se repiten durante los años escolares. ¿Cómo contribuye al aprendizaje, cada aparición de un concepto en el currículum? ¿Cómo se deben relacionar las sucesivas apariciones de un concepto, para producir un aprendizaje coherente? Ninguno de los profesores norteamericanos en este estudio ni ninguno de los que he conocido en otras escuelas norteamericanas, mostró preocupación al respecto de cómo se debe enseñar un concepto en cada ocasión que aparece. Dado que los profesores no están conscientes de que existe una relación entre estas ocasiones y, dado que no saben cuál relación debería ser esta, la enseñanza matemática del tema será inconexa y fraccionada.

Relación entre las creencias y el conocimiento disciplinario: ¿Es suficiente enseñar con la intención de lograr la comprensión?

Los datos en este capítulo revelan un aspecto interesante de la relación entre el conocimiento disciplinario que tienen los profesores y el aprendizaje que intentan promover a través de su enseñanza. Entre los profesores de ambos países, el porcentaje de aquellos que mostraron una comprensión conceptual del tema fue apenas mayor al de aquellos que tomaron una dirección conceptual al ayudar a los alumnos a corregir el error. Por un lado, ninguno de los profesores con conocimiento procedimental describió una estrategia de enseñanza dirigida hacia los conceptos. Por otro lado, unos pocos profesores, que tenían una comprensión conceptual del tema, tomarían una dirección procedimental en la enseñanza; no esperaban que el aprendizaje de los alumnos fuera tan avanzado como el de ellos. No se observó a ningún profesor que promoviera un aprendizaje más allá de su propio conocimiento matemático.

RESUMEN

La mayoría de los profesores consideró el error de los alumnos, en la multiplicación con varias cifras (alinear los productos en forma incorrecta), como un indicio de un problema en la comprensión matemática de los alumnos más que un error de descuido. No obstante, los profesores tenían visiones distintas del problema: Algunos lo consideraron un problema de conocimiento del procedimiento; otros pensaron que era un problema de comprensión conceptual. Las perspectivas de los profesores respecto al problema correspondían a su conocimiento disciplinario del tema. El conocimiento del tema de la mayoría de los profesores norteamericanos era procedimental. Al contrario, la mayoría de los profesores chinos mostró una comprensión conceptual.

Los profesores describieron estrategias de enseñanza para abordar el error pero el enfoque de estas estrategias no correspondía completamente al conocimiento de los profesores. De los profesores que tenían una comprensión conceptual del tema, un poco menos del total describió estrategias enfocadas a los conceptos. Las explicaciones del algoritmo de los profesores chinos y sus estrategias para manejar el error se sustentaban bien en su conocimiento de las ideas básicas de la disciplina y de los temas relacionados con la multiplicación por varias cifras.

Capítulo 3

Generar representaciones: División por fracciones

Escenario

La gente tiende a tener enfoques distintos para resolver problemas que involucran la división con fracciones. ¿Cómo se resuelve un problema como este?

$$1\frac{3}{4} : \frac{1}{2} =$$

Imagina que estás enseñando la división con fracciones. Para hacer esto significativo para los niños, algo que muchos profesores intentan es relacionar las matemáticas con otras cosas. A veces, intentan crear situaciones del mundo real o problemas de desarrollo para mostrar la aplicación de algún contenido particular. ¿Cuál diría que es un buen problema de enunciado o modelo para $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2} =$?

Esta vez, se le pidió a los profesores que hicieran dos tareas: calcular $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2} =$ y representar un significado para la frase matemática resultante. Los temas matemáticos discutidos en los dos capítulos anteriores son relativamente básicos, pero la división por fracciones es un tema avanzado de la aritmética. La división es la más complicada de las cuatro operaciones y las fracciones a menudo se consideran los números más complejos de las matemáticas básicas. Por ende, la división por fracciones, la operación más complicada, con los números más complejos, se puede considerar un tema en la cima de la aritmética.

EL DESEMPEÑO DE LOS PROFESORES NORTEAMERICANOS EN EL CÁLCULO

Las debilidades del conocimiento disciplinario que tienen los profesores norteamericanos se hicieron más notables en este tema avanzado que en los otros dos discutidos anteriormente. Todas sus discusiones acerca de la resta de números enteros y la multiplicación, habían mostrado un correcto conocimiento procedimental pero, incluso éste, estuvo ausente en muchas de sus discusiones acerca de la división por fracciones. De los 23 profesores norteamericanos, 21 intentaron calcular y, sólo nueve (43%) terminaron sus cálculos y llegaron a la respuesta correcta. Por ejemplo, el Sr. Felix, un profesor principiante, dio esta explicación:

> Yo convertiría el $1\frac{3}{4}$ a cuartos, lo que me daría $\frac{7}{4}$. Luego, lo dividiría por $\frac{1}{2}$, invertiría $\frac{1}{2}$ y multiplicaría. Entonces, multiplicaría $\frac{7}{4}$ por 2 y me daría $\frac{14}{4}$ y luego dividiría 14 por 4 y volvería al número mixto $3\frac{2}{4}$ o lo reduciría después a $3\frac{1}{2}$.

Para profesores como el Sr. Felix, el procedimiento computacional era claro y explícito. Convertir el número mixto en una fracción impropia, invertir el divisor y multiplicarlo por el dividendo, reducir el producto 14/4 y convertirlo en número mixto.

Dos de los 21 profesores (9%) realizaron el algoritmo en forma correcta pero no redujeron su respuesta ni la convirtieron en fracción propia. Su respuesta, $\frac{14}{4}$, era incompleta. A la vez, cuatro de los 21 profesores (19%) fueron poco claros acerca del procedimiento o claramente inseguros acerca de lo que estaban haciendo:

> Lo primero que *tienes que hacer* es cambiarlas para que queden iguales. Bueno, se supone que tienes que multiplicar eso y sumarle eso. Así que eso es 4, más es $\frac{7}{4}$ y después *tienes que hacerlo igual*. Dividido por $\frac{2}{4}$. ¿Cierto? Y luego, simplemente los multiplicas cruzado así. Te da $\frac{28}{8}$. (Srta. Felice, las cursivas se agregaron)

Convertir el dividendo y el divisor en fracciones similares y luego realizar la división, es una alternativa al algoritmo estándar de la división por fracciones. Por ejemplo, al convertir un problema de dividir $1\frac{3}{4}$ pizzas por $\frac{1}{2}$ pizza en la división de $\frac{7}{4}$ por $\frac{2}{4}$ de pizza, uno divide 7 cuartos de pizza por 2 cuartos de pizza. Este enfoque del "común denominador" convierte la división por una fracción en una división por un número entero (7 trozos divididos por 2 trozos). Sin embargo, la dificultad de la Srta.

Felice fue que ella no demostró un conocimiento sólido del algoritmo estándar y que pensó que "tienes que" convertir los números en fracciones similares. Puede que haya visto el enfoque del común denominador antes, pero parecía no entender ni su base lógica ni la relación entre el enfoque alternativo y el algoritmo estándar. También podría haber confundido el algoritmo estándar de la división por fracciones con el de la suma de fracciones, que requiere un común denominador. En cualquier caso, no estaba segura durante el cálculo. Más aún, no redujo el cuociente ni lo convirtió en fracción propia.

La Srta. Blanche, una profesora con experiencia, estaba muy insegura acerca de lo que recordaba del algoritmo:

> Parece que lo que necesitas, no puedes trabajar con una fracción y un número mixto, así que lo primero que haría, convertir este en algún número de cuartos. Entonces tendrías $\frac{7}{4}$ dividido por $\frac{1}{2}$. Es esto, es lo mismo que multiplicarlo por dos, según entiendo. Así que los pasos que daría, ahora me estoy empezando a preguntar si lo estoy haciendo bien. Sería que tengo $\frac{7}{4}$ que tengo que convertir esto dividido por $\frac{1}{2}$ es lo mismo que hacer $\frac{7}{4}$ multiplicado por 2, creo. Así que te da 14, déjame ver si esto . . . espera un poco –Déjame pensar los pasos de este proceso ... No sé decir si hace sentido porque no me acuerdo ... y por alguna razón pensaba que era exactamente la fórmula que recordaba. Pero no estoy segura de que sea lógico.

La Prof. Blanche comenzó a preguntarse si lo estaba haciendo bien al principio del cálculo y terminó con "No estoy segura de que sea lógico".

Mientras que las memorias de profesores como la Srta. Felice y la Prof. Blanche estaban confundidas o inciertas, las de otros cinco (24%) estaban incluso más fragmentadas. Recordaban vagamente que "debes darlo vuelta y multiplicar" (Srta. Fawn), pero no estaban seguros de "qué significaba":

> Por alguna razón, está en mi subconsciente que se invierte una de las fracciones. Que, mmm, o que $\frac{7}{4}$ se transforma en $\frac{4}{7}$ o que $\frac{1}{2}$ se convierte en $\frac{2}{1}$. No estoy segura. (Srta. Frances).

El recuerdo incompleto del algoritmo de estos cinco profesores, les impidió calcular. La Prof. Bernadette, la profesora experimentada que fue muy elocuente acerca de la base lógica de la resta con reserva, intentó una estrategia completamente incorrecta:

> Intentaría encontrar, ¡ay!, el mínimo común denominador. Creo que cambiaría ambos. Mínimo común denominador, creo que así se llama. Creo que no sé cómo llegar a la respuesta. ¡Huy! Perdón.

Al igual que la Srta. Felice, la Prof. Bernardette primero mencionó encontrar un común denominador aunque su comprensión era incluso más fragmentada que la de la Srta. Felice. No sabía cuál sería el siguiente paso.

Cuadro 3.1.

Cálculo de los profesores norteamericanos de 1 ¾ : ½ (N= 21)		
Respuesta	**%**	**N**
Algoritmo correcto, respuesta completa	43	9
Algoritmo correcto, respuesta incompleta	9	4
Algoritmo incorrecto, respuesta insegura, incompleta	19	4
Recuerdo fragmentado del algoritmo, sin respuesta	24	5
Estrategia equivocada, sin respuesta	5	1

La otra profesora simplemente admitió que no sabía cómo hacer el cálculo después de mirarlo. En el cuadro 3.1 se resume el desempeño de los 21[1] profesores norteamericanos en el cálculo de $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$.

EL DESEMPEÑO DE LOS PROFESORES CHINOS EN EL CÁLCULO

Todos los 72 profesores chinos hicieron el cálculo en forma correcta y dieron respuestas completas al problema. En lugar de "invertir y multiplicar", la mayoría de los profesores chinos utilizó la frase: "dividir por un número es equivalente a multiplicar por su recíproco":

> Dividir por un número es equivalente a multiplicar por su recíproco. Entonces, para dividir $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$, multiplicamos $1\frac{3}{4}$ por el recíproco de $\frac{1}{2}$ y nos da $3\frac{1}{2}$ (Srta. M).
>
> El recíproco de una fracción con numerador 1 es el número del denominador, por ende, el recíproco de $\frac{1}{2}$ es 2. Sabemos que dividir por una fracción se puede convertir en una multiplicación por su recíproco. Por lo tanto, dividir $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$ es equivalente a multiplicar $1\frac{3}{4}$ por 2. El resultado será $3\frac{1}{2}$ (Prof. O).

1 Como se indicó antes, 21 de los 23 profesores intentó hacer el cálculo.

Algunos profesores mencionaron la conexión entre la división por fracciones y la división por números enteros. El Prof. Q explicó por qué la regla "dividir por un número es equivalente a multiplicar por su inverso multiplicativo" no se enseña a los alumnos hasta que se presenta el concepto de fracción[2]:

> Dividir por un número es equivalente a multiplicar por su inverso multiplicativo, siempre y cuando el número no sea cero. Aunque este concepto se presenta cuando se aprende a dividir por fracciones, también se aplica a la división por números enteros. Dividir por 5 es equivalente a multiplicar por $\frac{1}{5}$, pero el inverso multiplicativo de cualquier número entero es una fracción, una fracción con 1 en el numerador y el número original como denominador, así que tenemos que esperar hasta las fracciones para introducir este concepto.

La frase: "dividir por un número es equivalente a multiplicar por su inverso multiplicativo" se utiliza en los textos escolares chinos para justificar el algoritmo de la división por fracciones. Esto es consecuente con el énfasis del currículum de matemáticas básicas chino en las relaciones entre las operaciones y sus inversas. La mayoría de los profesores no se refirió a la propiedad para acordase del procedimiento de cálculo, sino, para justificar sus cálculos.

Encontrar el sentido del algoritmo

La pregunta de la entrevista original, sólo les pedía a los profesores calcular la división. Sin embargo, durante las entrevistas, los profesores chinos tendieron a elaborar cómo tendría sentido el algoritmo. Después, luego de entrevistar a dos tercios de los profesores chinos, comencé a preguntarles si el algoritmo tenía sentido para ellos. La mayoría de los profesores de cuarto y quinto grado pudieron decir más que "dividir por un número es equivalente a multiplicar por su inverso multiplicativo". Ellos elaboraron su comprensión desde varias perspectivas. Algunos profesores argumentaron que la base lógica del procedimiento de cálculo se puede comprobar al convertir la operación con fracciones en una con números enteros:

---

2 Según el curriculum nacional de matemáticas vigente en China, el concepto de fracciones no se enseña sino hasta cuarto grado. La división por fracciones se enseña en sexto grado, el último año de educación primaria.

Podemos utilizar el conocimiento que los alumnos han aprendido para comprobar que dividir por una fracción es equivalente a multiplicar por su inverso multiplicativo. Han aprendido la propiedad conmutativa y han aprendido cómo sacar y agregar un paréntesis. También han aprendido que una fracción es equivalente al resultado de una división, por ejemplo ½ = 1 : 2. Ahora, usando estos, para tomar tu ejemplo, podemos volver a escribir la ecuación de esta forma:

$$\begin{aligned} 1\tfrac{3}{4} : \tfrac{1}{2} &= 1\tfrac{3}{4} : (1 : 2) \\ &= 1\tfrac{3}{4} : 1 \times 2 \\ &= 1\tfrac{3}{4} \times 2 : 1 \\ &= 1\tfrac{3}{4} \times (2 : 1) \\ &= 1\tfrac{3}{4} \times 2 \end{aligned}$$

No es para nada difícil. Incluso puedo darle a los alumnos algunas ecuaciones con números simples y pedirles que comprueben la regla por sí mismos. (Prof. Chen).

Otros profesores justificaron el algoritmo basándose en otro conocimiento que los alumnos han aprendido, la regla de "mantener el valor del cuociente"[3]:

Bien, los alumnos de quinto grado saben la regla de "mantener el valor del cuociente". Esta es que cuando multiplicamos el dividendo y el divisor por el mismo número, el cuociente no cambia. Por ejemplo, dividiendo 10 por 2, el cuociente es 5. Dado que multiplicamos 10 y 2 por un número, digamos 6, nos da 60 dividido por 12 y el cuociente permanece igual, 5. Ahora, si tanto el dividendo como el divisor se multiplican por el inverso multiplicativo del divisor, el divisor se vuelve 1. Puesto que dividir por 1 no cambia el número, se puede omitir. Entonces, la ecuación se convertirá en la de la multiplicación del dividendo por el inverso multiplicativo del divisor. Déjame mostrarte el procedimiento:

3 En China, "mantener el valor del cuociente" se presenta como parte de la división. La regla es: mientras que el dividendo y el divisor se multiplican o dividen por el mismo número, el cuociente no cambia. Por ejemplo: 15 : 5 = 3 así que (15 x 2) : (5 x 2) = 3 y (15 : 2) : (5 : 2) = 3.

$$1\tfrac{3}{4} : \tfrac{1}{2} = (1\tfrac{3}{4} \times \tfrac{2}{1}) : (\tfrac{1}{2} \times \tfrac{2}{1})$$

$$= (1\tfrac{3}{4} \times \tfrac{2}{1}) : 1$$

$$= 1\tfrac{3}{4} \times \tfrac{2}{1}$$

$$= 3\tfrac{1}{2}$$

Con este procedimiento, podemos explicarles a los alumnos que este algoritmo, aparentemente arbitrario, es razonable. (Prof. Wang).

Existen varias maneras en que se puede mostrar la equivalencia de $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ y $1\frac{3}{4} \times \frac{2}{1}$. El Prof. Chen y el Prof. Wang demostraron cómo usaron el conocimiento que los alumnos ya tenían para justificar el algoritmo de la división por fracciones. Otros profesores dieron su explicación de por qué $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ equivale a $1\frac{3}{4} \times 2$ se basaría en el significado de la expresión $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$.

¿Por qué es igual a multiplicar por el inverso multiplicativo del divisor? $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ significa que $\frac{1}{2}$ de un número es $1\frac{3}{4}$. La respuesta, como uno puede imaginar, será $3\frac{1}{2}$, que es exactamente lo mismo que la respuesta para $1\frac{3}{4} \times 2$. Dos es el inverso multiplicativo de $\frac{1}{2}$, así es como se lo explicaría a mis alumnos. (Prof. Wu).

Enfoques alternativos de cálculo

La pregunta de la entrevista les recordó a los profesores que "la gente tiende a tener enfoques distintos para resolver problemas que involucran la división con fracciones". Sin embargo, los profesores norteamericanos mencionaron sólo un enfoque, "invertir y multiplicar" el algoritmo estándar. Los profesores chinos, al contrario, propusieron al menos tres otros enfoques: dividir por fracciones usando decimales, aplicar la propiedad distributiva y dividir una fracción sin multiplicarla por el inverso multiplicativo del divisor.

Alternativa I: Dividir por fracciones usando decimales[4]

Una forma alternativa popular para la división por fracciones utilizada por los profesores chinos era calcular con decimales. Más de un tercio informó que la ecuación también se podría resolver convirtiendo las fracciones en números decimales:

$$1\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = 1{,}75 : 0{,}5 = 3{,}5$$

Muchos profesores dijeron que la ecuación era de hecho, más fácil de resolver con decimales:

> Creo que el problema es más fácil de resolver con decimales. Porque es tan obvio que $1\frac{3}{4}$ es 1,75 y que 1/2 es 0,5, y cualquier número se puede dividir por el dígito 5. Divides 1,75 por 0,5 y te da 3,5. Es muy directo. Pero si lo calculas con fracciones tienes que convertir $1\frac{3}{4}$ en una fracción impropia, invertir $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{1}$, multiplicar, reducir los números y denominadores y, al menos, necesitas transformar el producto desde una fracción impropia a un número mixto. El proceso es más largo y más complicado que con decimales. (Srta. L).

Los decimales no sólo facilitan un problema de fracciones sino que, las fracciones también pueden facilitar un problema de decimales. El problema es conocer las características de ambos enfoques y poder juzgar según el contexto:

> Aunque a veces dividir por un decimal es más fácil que dividir por una fracción, no siempre es el caso. Algunas veces, convertir fracciones en decimales es complejo y difícil, a veces los decimales pueden no ser finitos. No obstante, algunas veces, es más fácil resolver una división con decimales convirtiéndolos en fracciones. Como 0,3 : 0,8

4 En el curriculum nacional chino los temas relacionados con las fracciones se enseñan en este orden:
1. Presentación del "conocimiento primario de las fracciones" (concepto de fracción) sin operaciones.
2. Introducción de los decimales como "fracciones especiales con denominadores 10 y potencias de 10."
3. Las cuatro operaciones básicas con decimales (que son similares a las de los números enteros).
4. Los temas de números enteros relacionados con fracciones, como divisores, múltiplos, números primos, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, etc.
5. Temas tales como fracciones propias, fracciones impropias, números mixtos, reducir una fracción y encontrar denominadores comunes.
6. Suma, resta, multiplicación y división con fracciones.

> que es más fácil resolver con fracciones: te dará fácilmente. De cualquier forma, es importante para nosotros y para nuestros alumnos, conocer formas alternativas para abordar un problema y poder juzgar cuándo cada forma es más razonable para un problema particular. (Prof. B).

El conocimiento exhaustivo de un tema por parte de los profesores puede contribuir a las oportunidades de los alumnos para aprenderlo. Los profesores informaron que también alentaron a los alumnos a resolver problemas de fracciones con decimales:

> También alentamos a los alumnos a resolver problemas de fracciones con decimales, o viceversa, para todas las cuatro operaciones. Existen varias ventajas al hacer esto. Puesto que ya han aprendido a operar con decimales, esta es una oportunidad para que repasen conocimientos aprendidos antes. Además, la conversión entre fracciones y decimales profundizará su comprensión de estas dos representaciones numéricas y promoverá su sentido numérico. Más aún, es una práctica de resolución de problemas a través de formas alternativas. (Prof. S).

Alternativa II: Aplicar la propiedad distributiva

Siete profesores dijeron que se podía usar la propiedad distributiva para calcular $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$. En lugar de considerar $1\frac{3}{4}$ como un número mixto y transformarlo en una fracción impropia, lo escribieron como $1 + \frac{3}{4}$, cada parte dividida por $\frac{1}{2}$, luego sumaron los dos cuocientes. Se informaron dos procedimientos levemente distintos:

A) $$\begin{aligned} 1\tfrac{3}{4} : \tfrac{1}{2} &= (1 + \tfrac{3}{4}) : \tfrac{1}{2} \\ &= (1 + \tfrac{3}{4}) \times \tfrac{2}{1} \\ &= (1 \times 2) + (\tfrac{3}{4} \times 2) \\ &= 2 + 1\tfrac{1}{2} \\ &= 3\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

B) $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = (1 + \frac{3}{4}) : \frac{1}{2}$

$$= (1 : \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{3}{4} : \tfrac{1}{2})$$

$$= 2 + 1\tfrac{1}{2}$$

$$= 3\tfrac{1}{2}$$

Después de presentar la versión A, el Prof. Xie comentó que este procedimiento aparentemente complejo, de hecho, hacía el cálculo más simple que el procedimiento estándar.

> En este caso, aplicar la propiedad distributiva simplifica la operación. El procedimiento de cálculo que puse en el papel parece complicado pero quería mostrarte la lógica del proceso. Pero cuando realizas la operación es muy simple. Simplemente piensas que 1 por 2 es 2 y que $\frac{3}{4}$ por 2 es $1\frac{1}{2}$, después los sumas y te da $3\frac{1}{2}$. Se puede hacer incluso sin lápiz. Cuando trabajaron con números enteros, mis alumnos aprendieron a resolver cierto tipo de problemas de una manera más simple, aplicando la propiedad distributiva. Este enfoque se aplica a operaciones con fracciones también.

El uso, por parte de los profesores, de la propiedad distributiva otorgó evidencia acerca de su comprensión de la propiedad y su confianza al usarla. También demostró su exhaustiva comprensión de un número mixto, un concepto que, como veremos, fue un obstáculo para algunos profesores norteamericanos durante los cálculos.

Alternativa III: "No es necesario multiplicar"

Tres profesores señalaron que, aunque multiplicar por el inverso multiplicativo del divisor es la manera convencional de realizar la división por fracciones, uno no siempre necesita hacer esto. Algunas veces, los problemas de división por fracciones se pueden resolver sin usar la multiplicación. La ecuación que se me pidió resolver es uno de esos ejemplos:

$$1\tfrac{3}{4} : \tfrac{1}{2} = \tfrac{7}{4} : \tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{7 : 1}{4 : 2}$$

$$= \tfrac{7}{2}$$

$$= 3\tfrac{1}{2}$$

Nuevamente, los profesores que propusieron este enfoque argumentaron que, para la ecuación presentada en la entrevista, su método era más fácil que el método estándar. Se eliminaron dos pasos, invertir el divisor y reducir la respuesta final. No obstante, los profesores explicaron que, este enfoque, sólo se aplica a los problemas en que tanto el numerador y el denominador del dividendo son divisibles por los del divisor. Por ejemplo, en $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, 7 es divisible por 1 y 4 es divisible por 2. Sin embargo, si el problema fuera $1\frac{2}{3} : \frac{1}{2}$, puesto que el denominador del dividendo, 3, no es divisible por el denominador 2, este enfoque no se aplica. El Prof. T. dijo:

> De hecho, la división es más complicada que la multiplicación. Sólo piensa en los casos en que un número no se puede dividir por otro sin un resto. Incluso si usas decimales, podrías encontrar decimales periódicos. Pero en la multiplicación nunca se da el problema de los restos. Es probablemente por eso que se aceptó como la manera estándar el multiplicar por el inverso multiplicativo del divisor. Pero en este caso, puesto que 4 dividido por 2 es fácil y también lo es 7 dividido por 1, es aún más fácil realizar directamente la división.

El Prof. Xie fue el primer profesor que conocí en describir este método no estándar de resolver un problema de división por fracciones sin realizar la multiplicación. Le dije que nunca lo había pensado de esa forma y le pedí que me explicara cómo funcionaba. Dijo que se podía comprobar fácilmente:

$$
\begin{aligned}
1\tfrac{3}{4} : \tfrac{1}{2} &= \tfrac{7}{4} : \tfrac{1}{2} \\
&= (7 : 4) : (1 : 2) \\
&= 7 : 4 \ : \ 1 \times 2 \\
&= 7 : 1 : \ 4 \times 2 \\
&= (7 : 1) : (4 : 2) \\
&= \frac{7 : 1}{4 : 2}
\end{aligned}
$$

Nuevamente, dedujo el resultado basándose en principios básicos como los del orden de las operaciones y la equivalencia entre una fracción y una expresión de división.

Todos los profesores que sugirieron métodos alternativos argumentaron que sus métodos eran "más fáciles" o "más simples" para este cálculo. De hecho, no sólo conocían formas alternativas para calcular el problema sino que también estaban conscientes del significado de estas formas de cálculo, para hacer el procedimiento de cálculo más fácil o más simple. Resolver un problema complejo de una forma simple es uno de los estándares estéticos de la comunidad matemática. Los profesores discutieron que los estudiantes, no sólo deberían saber varias maneras de resolver un problema sino que también deberían poder evaluar estas formas y determinar cuál sería la más razonable de usar.

LAS REPRESENTACIONES DE LOS PROFESORES NORTEAMERICANOS DE LA DIVISIÓN POR FRACCIONES

Los conceptos matemáticos que los profesores representaron

Aunque el 43% de los profesores norteamericanos calculó con éxito $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, casi todos fallaron a la hora de crear una representación de la división por fracciones. De los 23 profesores, 6 no pudieron crear un problema de desarrollo y 16 crearon problemas con conceptos errados. Sólo un profesor presentó una representación conceptualmente correcta pero que presentaba problemas pedagógicos. Los profesores exhibieron varios conceptos errados acerca del significado de la división por fracciones.

Confundir la división por $\frac{1}{2}$ con la división por 2

Diez profesores norteamericanos confundieron la división por $\frac{1}{2}$ con la división por 2. Los profesores con esta concepción errada crearon problemas acerca de dividir la cantidad $1\frac{3}{4}$ en forma igual entre dos personas o en dos partes. El tema más común de estos problemas era comida circular, como tortas o pizza.

> Podrías usar una torta, una torta entera y, luego tienes tres cuartos de otra torta y *tienes dos personas*, ¿cómo te asegurarías de que se *divide en forma igual*, para que cada persona reciba una porción igual?. (Srta. Fiona, las cursivas se agregaron).

Las frases que usaron los profesores, "dividir equitativamente entre dos" o "dividir por la mitad", corresponden a la división por 2, no a la división por $\frac{1}{2}$. Cuando decimos que vamos a dividir diez manzanas equitativamente entre dos personas, dividimos el número de manzanas por 2, no por $\frac{1}{2}$. Sin embargo, los profesores parecieron no notar esta diferencia.

Confundir la división por $\frac{1}{2}$ con la multiplicación por $\frac{1}{2}$

Seis profesores entregaron problemas que confundían la división por $\frac{1}{2}$con la multiplicación por $\frac{1}{2}$. Este error conceptual, aunque no tan común como el anterior, también fue significativo. Tomemos otro ejemplo con tortas:

> Probablemente lo más fácil serían las tortas, con este número pequeño. Es usar la típica torta para las fracciones. Podrías tener una torta entera y tres cuartos de esta, como que alguien por ahí robó un pedazo. Pero estarías dividiéndola en cuartos y entonces tendrías que *sacar la mitad del total* (Prof. Barry, las cursivas se agregaron).

Mientras que los profesores que discutimos antes , mencionaban "dividir entre dos", el Prof. Barry sugirió "sacar la mitad del total". Para encontrar una cierta porción de una unidad, usamos la multiplicación por fracciones. Supongamos que queremos sacar $\frac{2}{3}$ de un saco de harina de 2 kg, multiplicamos 2 por $\frac{2}{3}$ y nos da 1 1/3 de kilos de azúcar. Lo que los profesores como el Prof. Barry representaron fue multiplicar por una fracción: $1\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$, no $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$. Los problemas que confundían la división por $\frac{1}{2}$ con la multiplicación por $\frac{1}{2}$, también revelaron debilidades en la concepción que tienen los profesores de la multiplicación por fracciones.

Confundir los tres conceptos

La Prof. Bernadette y la Prof. Beatrice, que no estaban en ninguno de los dos grupos ya mencionados, confundieron los tres conceptos: dividir por $\frac{1}{2}$, dividir por 2 y multiplicar por $\frac{1}{2}$:

> Dividir el entero y tres cuartos por la mitad. Bien, veamos … Tendrías todo este entero, tendrías los tres cuartos aquí y después, quieres sólo la mitad de todo. (Prof. Bernadette)

> Te da uno y tres cuartos de un líquido en un jarro y lo quieres dividir por la mitad, para visualizar, cada uno de ustedes tendrá, tendrá la mitad del jarro para beber. (Prof. Beatrice)

Cuando la Prof. Bernadette y la Prof. Beatrice plantearon el problema como "dividir el entero y tres cuartos por la mitad" o "dividirlo en la mitad" estaban confundiendo la división por $\frac{1}{2}$ con la división por 2. Luego, cuando propusieron que "quieres sólo la mitad de todo" o "obtienes la mitad de él", confundieron la división por $\frac{1}{2}$ con la multiplicación por $\frac{1}{2}$. Para ellos, parecía no haber diferencia entre la división por $\frac{1}{2}$, la división por 2 y la multiplicación por $\frac{1}{2}$.

Sin confusión pero sin problema de enunciado

Dos otros profesores no pudieron dar un problema pero se percataron de que dividir por $\frac{1}{2}$ es distinto a dividir por 2. La Prof. Belinda, una profesora experimentada de sexto grado, estaba consciente de la deficiencia de su conocimiento y del escollo del problema:

> No estoy segura de entenderlo lo suficiente, excepto en términos de cálculo. Sé cómo hacerlo pero no sé realmente qué significa para mí.

El Sr. Félix también notó una diferencia entre los dos conceptos. Luego de intentar y fracasar al inventar un problema, explicó:

> Dividir algo por un medio y así me confundí solo con el dos, pensando que era dividir por dos, pero no... Significa algo totalmente distinto ... Bueno, para mí lo que lo hace difícil es no poder visualizarlo, lo que representa en el mundo real. No puedo pensar realmente en qué significa dividir por un medio.

Aunque la Prof. Belinda y el Sr. Felix no pudieron dar una representación del concepto de división por fracciones, no lo confundieron con otra cosa. Fueron los únicos profesores norteamericanos que no confundieron la división por fracciones con otra operación.

Concepto correcto y representación pedagógicamente problemática

La Prof. Belle, una profesora con experiencia, fue la única que entregó una representación conceptualmente correcta del significado de la división por fracciones[5]:

> Tomemos algo como, dos quequitos y cuarto. Le quiero dar a cada niño medio quequito. ¿Cuántos niños pueden, más bien tendrán un pedazo

5 La Prof. Belle usó 2 ¼ en lugar de 1 ¾, no obstante, su comprensión del concepto de division por fracciones es correcta

> de quequito? Por supuesto que me da medio niño ahí al final pero, bueno, ese es el problema con usar niños ahí, porque entonces tienes cuatro niños y medio. Mmm, cuatro niños y un niño solo recibirá la mitad de la cantidad que los otros. Supongo que podría arreglar eso.

La Prof. Belle representó el concepto en forma correcta. Dividir el número A por el número B, es encontrar cuántas veces cabe B en A. Sin embargo, como la propia Prof. Belle indicó, esta representación resulta en un número fraccionario de niños. La respuesta sería $3\frac{1}{2}$ alumnos, lo que es pedagógicamente problemático porque en la vida real, un número de personas nunca será una fracción.

Manejar la discrepancia: Cálculo correcto vs. representación incorrecta

Aunque los problemas creados por los profesores ilustraron concepciones erradas acerca de la división por fracciones, hubo oportunidades, durante las entrevistas que podrían haber llevado a algunos de ellos a descubrir el escollo. De los 16 profesores que crearon un problema conceptualmente incorrecto, 9 habían calculado respuestas correctas o incompletas. Puesto que la mayoría de los profesores discutieron los resultados de sus problemas, estas discrepancias entre las respuestas de los problemas conceptualmente erróneas ($\frac{7}{8}$) y los cálculos ($3\frac{1}{2}$,$\frac{7}{2}$ o $\frac{28}{8}$) podrían pronosticar su reflexión. Aunque cuatro profesores no notaron ninguna discrepancia, los otros cinco si lo hicieron. Desafortunadamente, el descubrimiento de esta discrepancia no llevó a ninguno de estos cinco a una concepción correcta.

Los cinco profesores reaccionaron de tres formas ante la discrepancia. Tres profesores dudaron de la posibilidad de crear una representación y decidieron rendirse. A la Srta. Fleur, la frustró que "el problema no sale de la forma en que uno pensaría". La Prof. Blanche quedó "totalmente perpleja" cuando se dio cuenta de que las dos respuestas eran distintas. El Prof. Barry concluyó que "[el problema] no va a resultar. No sé qué hice".

La Srta. Felice, por otra parte, pareció más asertiva. Creó una historia para $1\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ para representar $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$. "Eso es una y tres cuartos tazas de harina y quieres la mitad de eso, para poder hacer media hornada de galletas".

Al estimar el resultado del problema de desarrollo, se dio cuenta de que sería "un poco más de tres cuartos" en lugar de tres y medio. Como había estado insegura durante sus cálculos del procedimiento, pronto se decidió a que $\frac{28}{8}$, la respuesta que había obtenido antes, estaba mal. Pensaba que "algo del mundo real" con lo que salió, tenía más autoridad que una solución obtenida al usar el algoritmo:

> Lo hace, [el cálculo que hizo] estaba malo. Como tienes una mitad de uno, será un medio y una mitad de tres cuartos será [pausa extensa] si lo estimas, será un cuarto y un poco más. Veamos, que la respuesta es un poco más de tres cuartos... Cuando lo hice con algo del mundo real, me di cuenta de que lo había hecho mal y lo habría hecho de nuevo. Cuando lo haces sin algo del mundo real, podrías estar haciéndolo muy mal y podrías hacer el problema mal de esa forma.

Desafortunadamente, la "cosa del mundo real" de la Srta. Felice representaba una concepción errada. Debido a que estaba insegura de su cálculo y a su inclinación ciega por "cosas del mundo real", el hallar la discrepancia no la llevó a reflexionar acerca del error de concepto sino, a descartar el resultado correcto, aunque incompleto, que había calculado.

La otra profesora, la Srta. Francine, encontró eventualmente una forma para explicar la discrepancia. El problema que inventó representaba $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$:

> Así que, algún tipo de comida, una marraqueta quizás, porque tiene cuatro secciones. Tienes un entero, cuatro cuartos y luego, sacas un cuarto, sólo tenemos una y tres cuartos y, después, queremos, cómo vamos a dividir esto para que, digamos, tenemos dos personas y queremos darle la mitad a uno, la mitad al otro, a ver cómo lo harían.

Al dividir uno y tres cuartos de marraqueta entre dos personas, ella esperaba llegar a la misma respuesta que le dio con la expresión $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ "tres y un medio". Sin embargo, resultó que cada persona recibiría tres y medio cuartos de marraqueta.

> *¿Nos daría tres y un medio, lo hice bien?* [está mirando a lo que escribió y murmurándose a sí misma] A ver, veamos, uno, dos, tres, si, está bien, uno, dos, tres. *Cada uno recibiría tres cuartos y un medio del otro cuarto*. (las cursivas se agregaron).

A pesar de que la Srta. Francine se dio cuenta de que había "dos [respuestas] distintas", explicó finalmente cómo la última, tres y medio cuartos tenía sentido con la respuesta anterior, tres y un medio. Pareció encontrar una explicación satisfactoria de porqué el dividendo $1\frac{3}{4}$ era menor que el cuociente $3\frac{1}{2}$.

> Uno se pregunta cómo uno y tres cuartos, que es un número más chico que tres y un medio, así es aquí uno y tres cuartos se refiere a lo que

> tienes entero, tres y un medio es, de acuerdo a la fracción de uno y tres cuartos, así que si sólo consideras la ecuación, no tendría sentido, quiero decir, no tendría sentido.

La forma en que la Srta. Francine explicó la discrepancia, confundía el número $3\frac{1}{2}$ (la respuesta de $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$) con $3\frac{1}{2}$ cuartos (la respuesta de $1\frac{3}{4} : 2$). Puesto que el número $\frac{1}{2}$ es un cuarto del número 2, el cuociente de un número dividido por 2 será un cuarto del cuociente del número dividido por $\frac{1}{2}$. Por ejemplo, $2 : 2 = 1$, $2 : \frac{1}{2} = 4$, ó $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$. Es por eso que $\frac{7}{8}$, el cuociente de la expresión $1\frac{3}{4} : 2$, resulta ser $3\frac{1}{2}$ cuartos. La Srta. Francine, por supuesto, no los confundió a propósito. Ni siquiera notó la coincidencia. Su inadecuado conocimiento de las fracciones y su ignorancia de que el resultado de dividir por una fracción menor que 1 será mayor que el dividendo, la llevó a una explicación incorrecta de la discrepancia.

La razón porque el descubrimiento de discrepancias no llevó ni a la Srta. Francine ni a la Srta. Felice a reflexionar en sus representaciones fue que su conocimiento computacional era limitado y pobre. Aunque sus cálculos estaban correctos, no se apoyaban sólidamente en su comprensión conceptual. Como dijeron los profesores durante las entrevistas, no entendieron porqué funcionaba el algoritmo de cálculo. Por ende, los resultados obtenidos del cálculo no podían resistir un desafío ni servían como un punto de partida para del cual abordar el significado de la operación.

Una comprensión inadecuada del procedimiento impide crear una representación

El caso de la Srta. Fay fue otro ejemplo de cómo el conocimiento de una habilidad de cálculo puede influir en el enfoque conceptual personal en relación al significado de la operación. La Srta. Fay parecía capaz de alcanzar una comprensión del significado de la división por fracciones. Mientras calculaba, describió el procedimiento claramente y obtuvo una respuesta correcta:

> Copiaría la primera fracción como se lee, luego cambiaría el signo de división por el de multiplicación y después, invertiría la segunda fracción. Luego, porque la primera fracción es una fracción mixta, la cambiaría de mixta a una fracción impropia. Así, tomaría 1 por 4 que es 4 y luego le sumaría 3, que daría $\frac{7}{4}$ por 2. . . Con fracciones multiplicamos directamente así que sería 7 veces 2 que es $\frac{14}{4}$ y después, lo reduciría.

Más aún, la Srta. Fay expresó el problema en forma correcta, usando "dividir por un medio" (: $\frac{1}{2}$), en lugar de "por la mitad" (: 2). No obstante, cuando comenzó a dividir el $1\frac{3}{4}$ de pizza por $\frac{1}{2}$ pizza, se "perdió" y no sabía adónde ir "a partir de aquí":

> Bueno, sería una pizza entera y después tres cuartos de una pizza. Lo que sería algo como esto y sería dividido por un medio de pizza. Y después … Me perdí después de eso, de verdad. Si combino esos [la pizza entera y los tres cuartos de una pizza], no sé qué haría después con un alumno. Diría que tenemos que combinar estos porque sé que tienes que hacerlo, que es necesario. Es muy difícil, es casi imposible para mí dividir una fracción mixta por una fracción entera y no puedo explicar porqué pero esa es la forma en que se me enseñó. Que tienes que transformar el numeral mixto en una fracción... Así que tendrías que mostrarle al alumno como combinar estos dos y eso es un poco difícil. No sé a dónde iría a partir de acá.

La Srta. Fay había empezado de forma adecuada. La historia que trató de inventar, de dividir $1\frac{3}{4}$ pizza por media pizza era probablemente un modelo correcto para dividir $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$. Sin embargo, se "perdió" en la mitad y se rindió a terminar la historia. Lo que le impedía a la Srta. Fay terminar la historia era su comprensión inadecuada del procedimiento de cálculo que quería usar: transformar la fracción mixta en una fracción impropia y dividir.

Mientras calculaba, la Srta. Fay manejó el número mixto según lo que "le habían enseñado". Hizo la primera parte del procedimiento, convertir el $1\frac{3}{4}$ en $\frac{7}{4}$, pero no pudo explicar porqué había que transformarlo. Más aún, no entendía lo que pasaba durante el proceso de transformación de un número mixto en fracción impropia. Esta deficiencia en la comprensión la hizo "perderse". Si la Srta. Fay hubiera entendido qué significa convertir un número mixto en fracción impropia (convertir todo el número en una fracción impropia con el mismo denominador que la fracción y combinarla con la última) habría podido realizar este procedimiento para las $1\frac{3}{4}$ pizzas. Lo que necesitaba hacer era simplemente cortar toda la pizza en cuartos para que el entero, 1, se convierta en $\frac{4}{4}$ y el $1\frac{3}{4}$ de pizza se convierta en $\frac{7}{4}$ pizza. Le tomaría al menos un paso más para completar la representación. Además de la Srta. Fay, al menos tres otros profesores informaron que tenían dificultad al trabajar con números mixtos. Su inadecuado conocimiento del procedimiento de cálculo obstaculizó su enfoque al significado de la operación.

¿Puede el conocimiento pedagógico compensar la ignorancia del concepto?

La deficiencia de los profesores para comprender el significado de la división por fracciones determinó su incapacidad para generar una representación apropiada. Ni su conocimiento pedagógico puede compensar su ignorancia del concepto. Las comidas circulares se consideran apropiadas para representar conceptos de fracciones, no obstante, como hemos visto, las representaciones que los profesores generaron con pizzas o tortas exhibían errores conceptuales. El uso de la Srta. Francine de un pan con cuatro secciones también fue reflexivo pedagógicamente al representar cuartos. Sin embargo, no alivió su comprensión errada del significado de la división por fracciones. Para generar una representación, uno debe primero saber qué representar. Durante las entrevistas, los profesores dieron varias ideas pedagógicas para generar representaciones. Desafortunadamente, debido a su conocimiento disciplinario inadecuado, ninguna de estas ideas consiguió guiarlos a una representación correcta.

La Srta. Florence que era una profesora que sostenía que le gustaban las fracciones, usaba "artículos ahí mismo en la sala para representar un concepto". La representación que propuso fue:

> José tiene una caja y tres cuartos de lápices y quiere dividirlos entre dos personas o dividir los lápices por la mitad y, luego, primero podemos hacerlo con los lápices y quizás escribirlo en la pizarra o dejarlos hacerlo con números.

Los profesores también utilizaron otros contextos, usando medidas como recetas de cocina, kilometraje, dinero y capacidad, para representar conceptos de fracciones. La Srta. Francesca dijo que utilizaría dinero: "Les diría, 'tienes tanto dinero, tienes dos personas y tienes que dividirlo en forma equitativa'".

La Prof. Blanche, una profesora con experiencia, que tenía mucha confianza en su conocimiento matemático, pensaba que podía utilizar cualquier cosa para la representación: "Tendría un entero y tres cuartos de algo, lo que sea, y si necesito dividirlo por dos, lo quiero dividir en dos grupos..."

Mientras que los profesores mencionados anteriormente representaron el concepto de dividir por 2, otros profesores representaron el concepto de multiplicar por $\frac{1}{2}$. La Prof. Barbara era una profesora experimentada, orgullosa de su conocimiento matemático que dijo que disfrutaba el "desafío de las matemáticas". Señaló que le costaban las fracciones cuando era alumna pero que, desde que su profesor le enseñó fracciones con una receta de cocina, lo "captó" y "le encantó trabajar" con ellas. Así que le enseñaría a sus alumnos en la forma en que aprendió ella, usando una receta:

> Bueno, si tuviera este tipo de ecuación, diría bueno, usando una taza y tres cuartos de mantequilla y quieres sacarle la mitad, ¿cómo lo harías?. O se podría usar en cualquier, mmm, tengo harina o azúcar o algo así.

La Srta. Fawn, una profesora principiante, creó varias representaciones con distintos objetos, tales como dinero, recetas, tortas, manzanas, etc. Sin embargo, todos sus problemas representaban un concepto errado, el de multiplicar por $\frac{1}{2}$ en lugar de dividir por $\frac{1}{2}$. No hubo evidencia de que estos profesores no tuvieran el conocimiento pedagógico. Los temas de sus historias, comida circular, recetas, artículos de la sala, etc., eran aptos para representar los conceptos de fracciones. No obstante, debido a su concepción equivocada acerca del significado de la división por fracciones, estos profesores no pudieron crear representaciones correctas.

EL ENFOQUE DE LOS PROFESORES CHINOS HACIA EL SIGNIFICADO DE LA DIVISIÓN POR FRACCIONES

La deficiencia en el conocimiento disciplinario que tienen los profesores norteamericanos, en la aritmética avanzada de la división por fracciones, no apareció entre los profesores chinos. Mientras que sólo un profesor de los 23 norteamericanos generó una representación conceptualmente correcta para el significado de la división, el 90% de los profesores chinos hizo lo mismo. Sesenta y cinco de los 72 profesores chinos crearon un total de más de 80 problemas de desarrollo representando el significado de la división por fracciones. Doce profesores propusieron más de un planteamiento para enfocar distintos aspectos del significado de la operación. Sólo seis (8%) profesores dijeron que no podían crear un problema de desarrollo y sólo un profesor entregó un enunciado incorrecto (que representaba $\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4}$, en lugar de $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$). La Figura 3.1 muestra una comparación del conocimiento que tienen los profesores respecto a este tema.

Los profesores chinos representaron el concepto utilizando tres modelos distintos de división: de medición, partitiva y factores y productos[6]. Por ejemplo $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ puede representar:

---

6 Greer (1992) dio una discusión amplia de los modelos de división y multiplicación. Su categoría "área rectangular" se incluye en "productos y factores".

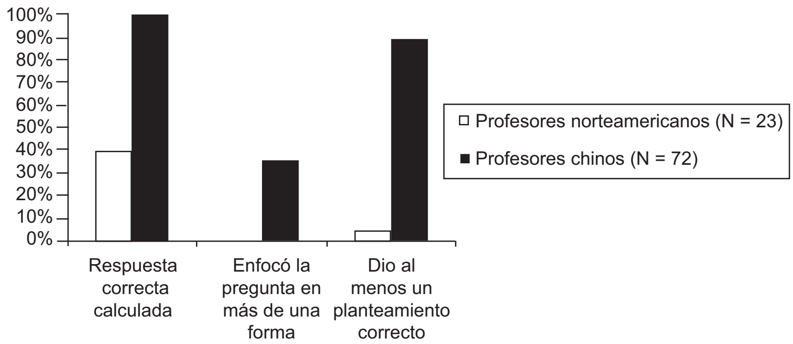


Fig. 3.1. Conocimiento que tienen los profesores de la división por fracciones.

- $1\frac{3}{4}$ metros : $\frac{1}{2}$ metro = $\frac{7}{2}$ (modelo de medida)
- $1\frac{3}{4}$ metros : $\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ metro (modelo partitivo)
- $1\frac{3}{4}$ metros cuadrados : $\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ metro (productos y factores)

lo que podría corresponder a:

- ¿Cuántos $\frac{1}{2}$ metros hay en algo que mide $1\frac{3}{4}$ metros de largo?
- Si la mitad de una distancia es $1\frac{3}{4}$ metros, ¿cuál es la distancia total?
- Si un lado de un rectángulo de $1\frac{3}{4}$ metros cuadrados, mide $\frac{1}{2}$ metro ¿cuánto mide el otro lado?

Los modelos de división por fracciones

El modelo de medición para la división: "Encontrar cuántos medios hay en $1\frac{3}{4}$" o "Encontrar cuántas veces cabe $\frac{1}{2}$ en $1\frac{3}{4}$"

Dieciséis enunciados generados por los profesores ilustraron dos ideas relacionadas al modelo de medición para la división: "encontrar cuántos medios hay en $1\frac{3}{4}$ y "encontrar cuántas veces cabe $\frac{1}{2}$ en $1\frac{3}{4}$". Ocho enunciados acerca de cinco temas correspondieron al primer tipo. Aquí hay dos ejemplos:

> Al ilustrar la división con el modelo de medición, $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ se puede expresar como cuántos medios hay en $1\frac{3}{4}$. Para representarlo, podemos

> decir, por ejemplo, dado que un equipo de trabajadores construye $\frac{1}{2}$ km de un camino al día, ¿Cuántos días les tomará construir un camino de $1\frac{3}{4}$ km? El problema aquí es encontrar cuántas partes de $\frac{1}{2}$ km, que es lo que pueden hacer cada día, caben en $1\frac{3}{4}$ km. Divides $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$ y el resultado es $3\frac{1}{2}$ días. Les tomaría $3\frac{1}{2}$ días construir el camino. (Prof. R).
>
> Corta una manzana en cuatro partes iguales. Toma tres pedazos y júntalos con una manzana entera. Dado que la porción será $\frac{1}{2}$ manzana, ¿cuántas porciones podemos obtener de $1\frac{3}{4}$ manzanas? (Srta. I).

"Encontrar cuántos medios hay en $1\frac{3}{4}$" corresponde al enfoque de la Prof. Belle, la profesora norteamericana que tenía una comprensión conceptual del tema". Hubo ocho enunciados que representaron "encontrar cuánto multiplicado por un $\frac{1}{2}$ es $1\frac{3}{4}$". Por ejemplo:

> Se planeó destinar 1 mes $\frac{3}{4}$ a construir un puente, pero en realidad solo se demoró $\frac{1}{2}$ mes. ¿Cuántas veces menos que lo pensado se demoraron en realidad? (Prof. R).

"Encontrar cuántos medios hay en $1\frac{3}{4}$" y "encontrar cuánto multiplicado por $\frac{1}{2}$ es $1\frac{3}{4}$" son dos enfoques para el modelo de medición para la división por fracciones. El Prof. Li señaló que, aunque el modelo de medición es coherente para los números enteros y fracciones, cuando se incorporan las fracciones hay que modificarlo:

> En la división de números enteros, tenemos un modelo para descubrir cuántas veces cabe un número en otro. Por ejemplo, ¿cuántas veces cabe el 2 en el 10? Dividimos 10 por 2 y tenemos 5. El 2 cabe 5 veces en el 10. Esto es lo que llamamos el modelo de medición. Con fracciones, podemos decir todavía, ¿cuántas veces cabe $\frac{1}{2}$ en $1\frac{3}{4}$? Hacer un problema de desarrollo, podemos decir por ejemplo, hay dos parcelas. La Parcela A tiene $1\frac{3}{4}$ hectáreas y la B, $\frac{1}{2}$ hectárea. ¿Cuántas veces el área de la parcela B es la de la parcela A? Para resolver el problema, dividimos $1\frac{3}{4}$ hectáreas por $\frac{1}{2}$ hectárea y nos da $3\frac{1}{2}$. Entonces, sabemos que el área de la parcela A es $3\frac{1}{2}$ veces la de la parcela B. La división que me pediste representar encaja en este modelo. Sin embargo, cuando se usan las fracciones en este modelo de medición para la división es necesario modificarlo. En particular, cuando el dividendo es menor que el divisor y el cuociente se convierte en fracción propia, se debe modificar

el modelo. La aseveración "encontrar qué fracción es un número de otro número" o "qué fracción de veces es un número de otro" se debe agregar a la expresión original. Por ejemplo, para la expresión 2 : 10, podemos preguntar ¿Qué fracción de 10 es 2? O, ¿qué fracción de veces es 2 de 10? Dividimos 2 por 10 y nos da $\frac{1}{5}$; 2 es $\frac{1}{5}$ de 10. En forma similar, también podemos preguntar: ¿Qué fracción de $1\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{4}$? Entonces, debes dividir $\frac{1}{4}$ por $1\frac{1}{2}$ y te da $\frac{1}{6}$.

El modelo partitivo de la división: Encontrar un número tal que $\frac{1}{2}$ de él sea $1\frac{3}{4}$

Entre los 80 problemas de desarrollo que representaban el significado de $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, 62 enunciados representaron el modelo partitivo de la división por fracciones, "hallar un número tal que $\frac{1}{2}$ de él sea $1\frac{3}{4}$":

> La división es el inverso de la multiplicación. Multiplicar por una fracción significa que conocemos un número que representa un todo y queremos encontrar un número que represente una cierta fracción de él. Por ejemplo, dado que queremos saber qué número representa $\frac{1}{2}$ de $1\frac{3}{4}$, multiplicamos $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$ y nos da $\frac{7}{8}$. En otras palabras, el total es $1\frac{3}{4}$ y un medio de él es $\frac{7}{8}$. En la división por una fracción, por otra parte, el número que representa el total se convierte en la incógnita por descubrir. Conocemos una parte fraccionaria de él y queremos descubrir el número que representa el total. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ de una cuerda de saltar es $1\frac{3}{4}$ metros, ¿cuál es el largo de toda la cuerda? Sabemos que una parte de la cuerda es $1\frac{3}{4}$ metros y también sabemos que esta parte es $\frac{1}{2}$ de la cuerda. Dividimos el número de la parte $1\frac{3}{4}$ por la fracción correspondiente del total, $\frac{1}{2}$ y nos da el número que representa el total, $3\frac{1}{2}$ metros. Dividiendo $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$, encontraremos que toda la cuerda mide $3\frac{1}{2}$ de largo... Pero prefiero no usar la división por $\frac{1}{2}$ para ilustrar el significado de la división por fracciones. Porque uno puede ver la respuesta fácilmente sin hacer realmente la división por fracciones. Si decimos $\frac{4}{5}$ de una cuerda para saltar son $1\frac{3}{4}$ metros, ¿De qué largo es la cuerda? La operación de división será más significativa porque entonces no se puede ver la respuesta inmediatamente. La mejor manera de calcular es dividir $1\frac{3}{4}$ por $\frac{4}{5}$ y nos da $2\frac{3}{16}$ metros. (Srta. G).

> Dividir por una fracción es descubrir un número cuando se conoce una parte fraccionaria de él. Por ejemplo, dado que sabemos que $\frac{1}{2}$ de un número es $1\frac{3}{4}$, dividiendo $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$ podemos descubrir que ese número es $3\frac{1}{2}$. Para encontrar un problema de desarrollo que ilustre este modelo, digamos que un tipo de madera pesa $1\frac{3}{4}$ toneladas por metro cúbico, es justo $\frac{1}{2}$ del peso por metro cúbico de un tipo de mármol. ¿Cuánto pesa un metro cúbico de mármol? Sabemos que $\frac{1}{2}$ metro cúbico de mármol pesa $1\frac{3}{4}$ toneladas. Para encontrar el peso de un metro cúbico de él, dividimos $1\frac{3}{4}$, el número que representa la parte fraccionaria, por $\frac{1}{2}$, la fracción que $1\frac{3}{4}$ representa y nos da $3\frac{1}{2}$, el número del total. Por metro cúbico, el mármol pesa $3\frac{1}{2}$ toneladas. (Prof. D).

> Mi enunciado sería: Un tren va y vuelve entre dos estaciones. De la estación A a la estación B va cuesta arriba mientras que, a la vuelta, va cuesta abajo. El tren se tarda $1\frac{3}{4}$ horas en ir de la estación B a la A. Esto es sólo $\frac{1}{2}$ del tiempo de lo que se demora de la estación A a la B. ¿Cuánto se demora el tren en ir de A a B? (Prof. S).

> La mamá compró una caja de dulces. Le dio $\frac{1}{2}$ de la caja, que pesaba $1\frac{3}{4}$ kg a la abuelita. ¿Cuánto pesaba originalmente la caja de dulces? (Srta. M).

Estos profesores explicaron la versión fraccional del modelo partitivo de la división. El Prof. Mao discutió en particular cómo el modelo partitivo de división por enteros se modifica cuando se incorporan las fracciones:

> Con los números enteros, los alumnos aprendieron el modelo partitivo de la división. Es un modelo de encontrar el tamaño de cada uno de los grupos iguales que se forman a partir de una cantidad dada. Por ejemplo, en nuestro curso hay 48 alumnos, se forman en 4 grupos de igual tamaño, ¿cuántos alumnos hay en cada grupo? Aquí, conocemos la cantidad de varios grupos, 48 alumnos. También conocemos el número de grupos, 4; lo que tenemos que encontrar es el tamaño de cada grupo. Así, *un modelo partitivo consiste en hallar el valor de una unidad cuando se conoce el valor de varias unidades*. Por otro lado, en la división por fracciones, la condición cambia. Lo que sabemos ahora no es el valor de varias unidades, sino el valor de una parte de la unidad. Por ejemplo, dado que pagamos $1\frac{3}{4}$ Yuanes para comprar $\frac{1}{2}$ de una torta, ¿cuánto costaría una torta entera? Dado que sabemos que $\frac{1}{2}$ de todo el precio es $1\frac{3}{4}$ Yuanes, para conocer el precio total, dividimos $1\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$ y nos da $3\frac{1}{2}$ Yuanes. En otras palabras, *la versión fraccional del modelo*

> *partitivo es descubrir un número cuando se conoce una parte de él.* (las cursivas se agregaron).

La observación del Prof. Mao es cierta. Encontrar un número cuando se conocen varias unidades y hallar un número cuando se conoce una parte fraccionaria de él se representan por un modelo común, encontrar el número que representa una unidad cuando se conoce cierta cantidad de la unidad. Lo que difiere es la característica de la cantidad: con un divisor de número entero, la condición es que "la unidad se conoce varias veces", pero con un divisor fraccionario, la condición es que "se conoce una fracción de la unidad". Por ende, conceptualmente, estos dos enfoques son idénticos.

Este cambio de significado es particular del modelo partitivo puesto que en el modelo de medida y en el de factores y productos, la división por fracciones mantiene el mismo significado que el de la división por números enteros. Esto podría explicar porqué tantas de las representaciones de los profesores chinos, fueron partitivas.

Factores y producto: Encontrar un factor que multiplicado por $\frac{1}{2}$ dé $1\frac{3}{4}$

Tres profesores describieron un modelo más general de división, encontrar un factor donde el producto y el otro factor son conocidos. Los profesores lo expresaron como "encontrar un factor que cuando se multiplica por $\frac{1}{2}$ da $1\frac{3}{4}$":

> Como la operación inversa de la multiplicación, la división consiste en encontrar el número que representa un factor cuando se conocen el producto y el otro factor. Desde esta perspectiva, podemos obtener un problema de desarrollo como: "Dado que el producto de $\frac{1}{2}$ y otro factor es $1\frac{3}{4}$, ¿cuál es el otro factor?". (Sr. M).

> Sabemos que el área de un rectángulo es el producto del largo y el ancho. Digamos que el área de una pizarra rectangular es $1\frac{3}{4}$ metros cuadrados; su ancho es $\frac{1}{2}$ metro, ¿cuál es su largo? (Sr. A).

Estos profesores consideraron la relación entre la multiplicación y la división en una forma más abstracta. Ignoraron el significado particular del multiplicando y multiplicador en la multiplicación y los modelos de división relacionados. En lugar de eso, percibieron el multiplicando y el multiplicador como dos factores con el mismo estatus. Sin duda su perspectiva se vio legitimada por la propiedad conmutativa de la multiplicación.

El concepto de fracciones así como las operaciones con fracciones que se enseñan en China y los EE.UU. parecen diferentes. Los profesores norteamericanos tendieron a emplear enteros "reales" y "concretos" (generalmente formas circulares o rectangulares) y sus fracciones. A pesar de que los profesores chinos también usan estas formas cuando presentan el concepto de una fracción, cuando enseñan operaciones con fracciones tienden a usar enteros "invisibles" y "abstractos" (Ej.: el largo de un tramo particular de camino, el tiempo que toma terminar una labor, el número de páginas en un libro).

El significado de multiplicar por una fracción: La parte importante del paquete de conocimientos

Durante la discusión del significado de la división por fracciones, los profesores mencionaron varios conceptos que consideraban partes del paquete de conocimientos relacionado con el tema: el significado de la multiplicación de números enteros, el concepto de división como el inverso de la multiplicación, modelos de división por números enteros, el significado de la multiplicación con fracciones, el concepto de fracción, el concepto de unidad, etc. La Figura 3.2 entrega un esquema de las relaciones entre estos temas.

La agrupación de los conceptos matemáticos no es un viaje unidireccional. Aunque el concepto de división por fracciones lógicamente se basa en el aprendizaje previo de varios conceptos, éste a su vez desempeña un papel en el reforzamiento y profundización de aprendizajes previos. Por ejemplo, trabajar en el significado de la división por fracciones intensificará los conceptos previos de multiplicación de números racionales. En forma similar, al desarrollar versiones con números racionales de los modelos de división, la comprensión de uno de los modelos de números enteros se vuelve más acabada:

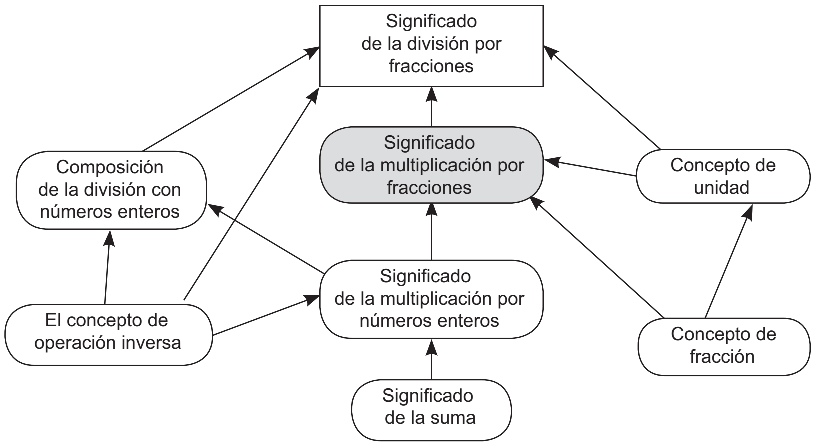


Fig. 3.2. Un paquete de conocimientos para entender el significado de la división por fracciones.

> Esto es lo que se llama "alcanzar nuevos conocimientos mediante la revisión de los antiguos". El aprendizaje actual se apoya en, pero también profundiza, los aprendizajes previos. El significado de división por fracciones parece complicado porque se construye sobre varios conceptos. Por otra parte, sin embargo, brinda una buena oportunidad a los alumnos para profundizar su aprendizaje previo de estos conceptos. Estoy bastante seguro de que, después de tratar el significado y los modelos de la división por fracciones, el aprendizaje previo de los alumnos sobre estos conceptos de apoyo será más acabado que antes. El aprendizaje es un proceso que avanza y retrocede. (Prof. Sun).

Desde esta perspectiva, el aprendizaje es un proceso continuo durante el cual el nuevo aprendizaje se apoya en el aprendizaje previo y éste se refuerza y profundiza con el nuevo.

Durante las entrevistas, "el significado de la multiplicación con fracciones" se consideró la parte clave del paquete de conocimientos. La mayoría de los profesores consideró que la multiplicación con fracciones era la "base necesaria" para comprender el significado de la división por fracciones:

> El significado de la multiplicación con fracciones es particularmente importante porque es de donde se derivan los conceptos de la división por fracciones... Dado que nuestros alumnos entienden muy bien que multiplicar por una fracción significa encontrar la parte fraccionaria de una

> unidad, seguirán esta lógica para entender cómo funcionan los modelos de su operación inversa. Por otro lado, si ellos no tienen una idea clara de lo que significa la multiplicación con fracciones, conceptos como la división por una fracción serán arbitrarios para ellos y difíciles de comprender. Por ende, para dejar que nuestros alumnos aprehendan el concepto de la división por fracciones debemos, primero que todo, dedicar un tiempo y esfuerzo importantes, cuando enseñamos la multiplicación con fracciones, para asegurarnos de que los alumnos entienden cabalmente lo que significa esta operación. . . Generalmente, mi enseñanza del significado de la división por fracciones comienza con un repaso del significado de la multiplicación con fracciones. (Prof. Xie).

> Los conceptos de división por fracciones, tales como, "encontrar un número cuando se conoce una parte fraccionaria" o "encontrar qué fracción es un número de otro", etc. suenan complicados. Pero, una vez que uno tiene una comprensión acabada del significado de la multiplicación con fracciones, uno encuentra que estos conceptos son lógicos y fáciles de entender. Por ende, para ayudar a los alumnos a entender el significado de la división por fracciones, muchos de nuestros esfuerzos no están dedicados directamente al tema sino más bien, a su cabal comprensión del significado de la multiplicación con fracciones y la relación entre división y multiplicación. (Prof. Wu).

El significado de la multiplicación con fracciones es también importante en el paquete de conocimientos porque éste "conecta varios conceptos relevantes":

> El concepto de la multiplicación con fracciones es como un "nudo" que "ata" varios conceptos importantes. Como la operación de multiplicación, está conectada con los conceptos de adición y división de números enteros. Más aún, en el sentido de que trata con números fraccionarios, se relaciona con el concepto de fracción y los de adición y división con fracciones. Aprehender el significado de la multiplicación con fracciones depende de la comprensión de varios conceptos. A la vez, refuerza sustancialmente los aprendizajes anteriores y contribuye a nuestro futuro aprendizaje. (Srta. I).

Sin duda, desde la perspectiva del profesor, la importancia de los conocimientos en matemáticas no es la misma. Algunos "pesan" más que otros puesto que son más significativos para el aprendizaje matemático del alumno. Además del "poder de apoyo" que hemos discutido antes, otro aspecto que contribuye a la importancia de un conocimiento es su "ubicación" en una red de conocimientos. Por ejemplo, la multiplicación con fracciones también es importante porque está en una "intersección" de varios conceptos matemáticos.

Las representaciones de los modelos de división por fracciones

La profunda comprensión que tienen los profesores chinos del significado de la división por fracciones y sus conexiones con otros modelos en matemáticas les brindó una base sólida sobre la cual construir su conocimiento disciplinario pedagógico del tema. Ellos emplearon su viva imaginación y se refirieron a temas que se podían explotar mucho para representar un solo concepto de la división por fracciones. Por otra parte, algunos profesores usaron un tema para generar varios problemas de desarrollo para representar distintos aspectos del concepto. Los profesores también se basaron en conocimientos de geometría básica (como el área del rectángulo) para representar la división.

Temas fructíferos en la representación del modelo partitivo

Aunque la operación de división tiene dos modelos, pareciera que los dos no reciben la misma atención. Para la mayoría de los profesores en nuestra investigación, el modelo partitivo era significativamente más impresionante que el de medición. Los profesores hicieron referencia a cerca de treinta temas cuando generaron más de sesenta problemas de desarrollo para representar la versión fraccionaria del modelo partitivo de la división. Además de los ya discutidos, acá presentamos otros ejemplos:

> Una fábrica que produce fresadoras usa ahora $1\frac{3}{4}$ de acero para hacer una fresadora, $\frac{1}{2}$ de lo que solían usar. ¿Cuánto acero usaba antes para producir una fresadora? (Srta. H).
>
> El tío Wang aró $1\frac{3}{4}$ mus[7] en $\frac{1}{2}$ día, con esta velocidad ¿cuántos mus puede arar en un día entero? (Prof. B).
>
> Ayer, fui en bicicleta del pueblo A al B. Me demoré $1\frac{3}{4}$ hora en hacer la $\frac{1}{2}$ del viaje. ¿Cuánto me demoré en hacer todo el viaje? (Prof. R).

7 "Mu" es una medida china de área. Quince mus son una hectárea.

> Una granja tiene $1\frac{3}{4}$ mus de campos experimentales de trigo y es $\frac{1}{2}$ del área del campo experimental donde crece algodón. ¿De qué porte es el campo de algodón? (Prof. N).
>
> En un río de poco caudal, un bote se demora sólo $\frac{1}{2}$ del tiempo en el sentido de la corriente de lo que se demora un bote río arriba en el mismo largo viaje. Ahora, tenemos un bote que fue río abajo y se demoró $1\frac{3}{4}$ en ir de A a B. ¿Cuánto le tomaría a un bote río arriba en llegar de B a A? (Prof. Mao).
>
> Dado que queremos saber cuánto aceite vegetal hay en una botella grande pero sólo tenemos una pesa pequeña. Sacamos $\frac{1}{2}$ del aceite de la botella, lo pesamos, y encontramos que pesa $1\frac{3}{4}$ kg. ¿Pueden decir cuánto pesaba todo el aceite de la botella original? (Srta. R).
>
> Un día, Xiao-Min fue al centro a ver una película. En el camino, se encontró con su tía y le preguntó: "¿sabe qué tan lejos está nuestra villa del centro?" Su tía le dijo: "no te daré el número pero te daré una pista. haz caminado $1\frac{3}{4}$ lis[8], lo que es exactamente $\frac{1}{2}$ la mitad de la distancia. Averigua tu mismo la respuesta". (Srta. K).

Mientras que los profesores norteamericanos tendieron a usar enteros concretos (como comida redonda) y sus partes para representar un entero y una fracción, la mayoría de los profesores chinos representaron estos conceptos de una forma más abstracta. Sólo 3 de los 72 profesores utilizó comida redonda como el tema de su representación. En muchos problemas de desarrollo creados por los profesores chinos, se trató a $3\frac{1}{2}$, el cuociente de la división, como una unidad y, se consideró al $1\frac{3}{4}$, el dividendo, como $\frac{1}{2}$ de la unidad.

Mientras que la comida y el dinero fueron los dos temas principales de las representaciones de los profesores norteamericanos, los que emplearon los profesores chinos fueron más diversos. Además de temas de la vida de los alumnos, también se incluyeron algunos relacionados con su vida como qué pasa en una granja, en una fábrica, en la familia, etc. El sólido conocimiento que tienen los profesores del significado de la división por fracciones los hacía usar cómodamente un amplio rango de temas en sus representaciones.

Varios enunciados con un solo tema

Entre los profesores que crearon más de un problema para ilustrar varios aspectos del concepto de división por fracciones, destacó la Srta. D. que generó tres enunciados para el mismo tema:

8 "Li" es una medida tradicional de distancia. Un li es medio kilómetro.

> La ecuación $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2} =$ se puede representar a partir de distintas perspectivas. Por ejemplo, podemos decir, aquí hay $1\frac{3}{4}$ kg de azúcar y queremos envolverlo en paquetes de $\frac{1}{2}$ cada uno. ¿Cuántos paquetes podemos hacer? También, podemos decir que tenemos dos paquetes de azúcar, uno de azúcar blanca y otro de azúcar morena. El azúcar blanca son $1\frac{3}{4}$ kg y la morena, es $\frac{1}{2}$ kg. ¿cuántas veces equivale el peso del azúcar blanca al de la morena? También, podemos decir que hay un poco de azúcar en la mesa que pesa $1\frac{3}{4}$ kg que corresponde a $\frac{1}{2}$ de toda el azúcar que tenemos en casa, ¿cuánta azúcar tenemos? Estos tres enunciados son acerca de azúcar y los tres representan $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$. Pero los modelos matemáticos que ilustran no son los mismos. Pondría los tres enunciados en la pizarra e invitaría a mis alumnos a comparar los distintos significados que representan. Después de la discusión, les pediría que hicieran sus propios problemas de desarrollo para representar los distintos modelos de la división por fracciones. (Srta. D).

Para hacer que los alumnos participen en la comparación de distintos conceptos asociados con $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, la Srta. D. creó varias representaciones con un solo tema. La similaridad de los temas y de los números incluidos en la operación hará que las diferencias en los modelos numéricos, que los enunciados representan, sean más obvias para los alumnos.

DISCUSIÓN

El cálculo: ¿Cómo reveló la comprensión de las Matemáticas que tienen los profesores?

La diferencia entre el conocimiento matemático que tienen los profesores norteamericanos y el de los chinos se hizo más evidente con el tema de la división por fracciones. El primer contraste se presentó en el cálculo. La pregunta de la entrevista de este capítulo le pedía a los profesores calcular $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$. El proceso de cálculo reveló características del conocimiento procedimental que tienen los profesores y de su comprensión de las matemáticas, así como su actitud hacia la disciplina.

En los dos capítulos anteriores, todos los profesores presentaron un sólido conocimiento procedimental. Esta vez, solo un 43% de los profesores norteamericanos realizó el cálculo con éxito y ninguno de ellos demostró una comprensión de la base lógica del algoritmo aunque la mayoría de ellos lo intentó. Muchos tendieron a confundir el algoritmo de la división por fracciones con los de la adición, sustracción o de multiplicación. El conocimiento procedimental de estos profesores no sólo era débil en la división con fracciones sino también en las otras operaciones con fracciones. Informaron que también se sentían poco seguros haciendo cálculos con números mixtos o fracciones impropias, mostrando que el conocimiento de estos profesores, de las características básicas de las fracciones, también era limitado.

Todos los profesores chinos lograron realizar el cálculo con éxito y muchos de ellos demostraron gran entusiasmo por el problema. Estos profesores no quedaron satisfechos con sólo calcular y obtener una respuesta. Disfrutaron presentando varias formas de hacerlo, usando decimales, números enteros, aplicando las tres propiedades básicas, etc. Avanzaron y retrocedieron entre los subconjuntos de números y entre distintas operaciones, añadieron y quitaron paréntesis y cambiaron el orden de las operaciones. Hicieron esto con increíble confianza y habilidades asombrosamente flexibles. Además, muchos profesores hicieron comentarios acerca de varios métodos de cálculo y los evaluaron. Su manera de "hacer matemáticas" mostró una significativa comprensión conceptual.

Otro aspecto interesante de las matemáticas de los profesores chinos es que tendieron a dar "demostraciones" de sus procedimientos de cálculo. La mayoría de los profesores justificó sus cálculos al mencionar la regla de que "dividir un número es equivalente a multiplicarlo por su inverso multiplicativo". Otros convirtieron la fracción $\frac{1}{2}$ en $1 : 2$ y demostraron paso a pasó que dividir por $\frac{1}{2}$ es equivalente a multiplicar por 2. Por otra parte, otros profesores utilizaron el significado de dividir por $\frac{1}{2}$ para explicar el procedimiento de cálculo. Su desempeño se parece al de los matemáticos en el sentido de que, para convencer a alguien de una verdad, se necesita demostrarla y no solo plantearla.

"Un nudo de conceptos": Porqué es importante

Además de su desempeño a la hora de "hacer matemáticas", los profesores chinos demostraron en otras formas un conocimiento de las fracciones marcadamente más sólido que el que tienen los profesores norteamericanos. Los profesores chinos estaban conscientes de las abundantes conexiones entre las fracciones y otros temas matemáticos. Estaban conscientes de cómo una fracción se puede escribir como una expresión de división en que el numerador es el dividendo y el denominador es el divisor. También estaban conscientes de la relación entre decimales y fracciones y fueron diestros al convertir números de una a otra forma numérica. Más aún, estaban conscientes de cómo los modelos de división por fracciones se conectan al significado de la multiplicación con fracciones y a los modelos de división de números enteros.

Al igual que en los capítulos anteriores, los profesores chinos no consideraban este tema una parte clave del paquete de conocimiento en el que está incluido. La parte clave del paquete era el significado de la multiplicación con fracciones. Los profesores lo consideran un "nudo" que une un conjunto de conceptos que apoyan la comprensión del significado de la división por fracciones. En los capítulos anteriores, nos dimos cuenta de que los profesores chinos tendían a prestar bastante atención al momento en que se presentaba por primera vez un concepto y lo consideraban una parte clave del paquete de conocimientos. Al lidiar con la parte clave del paquete de conocimientos de este capítulo, se mantuvieron pegados a este principio. No obstante, puesto que el tema matemático que se discute en este capítulo es más avanzado y complejo, el escalón que nos permite avanzar aquí no es un solo concepto sino, una conexión de varios.

Una de las razones por las que la comprensión que tienen los profesores norteamericanos del tema de la división de fracciones no estaba construida, podría ser que su conocimiento carecía de conexiones y enlaces. La comprensión que tiene la mayoría de los profesores norteamericanos se sustentaba en una sola idea, el modelo partitivo de la división de números enteros. Debido a que faltaban otros conceptos necesarios para la comprensión y sus conexiones con el tema, estos profesores no pudieron generar una representación conceptual del significado de la división por fracciones.

La relación entre el conocimiento disciplinario que tienen los profesores y sus representaciones

Generar representaciones para un concepto matemático es una labor común en la enseñanza. La mayoría de los profesores norteamericanos tendieron a representar el significado de la división por fracciones con un ejemplo del mundo real. Por otra parte, los temas que usaron los profesores chinos eran más amplios y más conectados con la vida de los estudiantes. No hay duda de que conectar las matemáticas del colegio con la vida de los alumnos fuera del colegio los ayuda a hacer más sentido de ellas pero, el "mundo real" no puede producir contenido matemático por sí mismo. Sin un conocimiento sólido de lo que se representa, no importa que tan rico sea el conocimiento de uno acerca de la vida de los alumnos, no importa cuán motivado se esté en conectar las matemáticas con sus vidas, uno no podrá producir una representación conceptualmente correcta.

RESUMEN

En este capítulo se investigó el conocimiento disciplinario que tienen los profesores de dos aspectos del mismo tema, la división por fracciones. Se les pidió a los profesores calcular $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ e ilustrar el significado de la operación, un aspecto del conocimiento disciplinario que no se abordó en los capítulos anteriores. El conocimiento que tienen los profesores norteamericanos de la división por fracciones era obviamente más débil que su conocimiento de los temas previos. Aunque el 43% de los profesores norteamericanos tuvo éxito al calcular correctamente una respuesta completa, ninguno mostró una comprensión de la base lógica que sustentaba sus cálculos. Sólo la Prof. Belle, una profesora experimentada, pudo generar exitosamente una representación que ilustraba correctamente el significado de la división por fracciones.

El desempeño de los profesores chinos en la tarea de este capítulo no fue notablemente distinto al de las tareas anteriores. Todos sus cálculos estuvieron correctos y unos pocos profesores fueron más allá para discutir la base lógica que sustenta el algoritmo. Algunos profesores generaron al menos una representación correcta y apropiada. Su habilidad para generar representaciones que empleaban una rica variedad de temas y distintos modelos de división por fracciones parecía basarse en su sólido conocimiento del tema. Por otra parte, los profesores norteamericanos, que no pudieron representar la operación, no pudieron explicar su significado. Esto sugiere que, para tener una representación pedagógicamente poderosa de un tema, un profesor debe primero tener una comprensión exhaustiva de éste.

Capítulo 4

Explorando nuevos conocimientos: La relación entre área y perímetro

Escenario

Imagine que una alumna de su curso llega a clases muy emocionada y le cuenta que ha descubierto una teoría que usted nunca le ha dicho al curso. Le explica que ha descubierto que a medida que aumenta el perímetro de una figura cerrada[1], el área también aumenta y le muestra este dibujo para demostrar lo que está haciendo:

Perímetro = 16 cm
Área = 16 cm cuadrados

Perímetro = 24 cm
Área = 32 cm cuadrados

¿Cómo le respondería a esta alumna?

Los alumnos traen ideas y postulados nuevos a sus clases de matemáticas. A veces los profesores saben si el postulado de un alumno es válido pero, a veces, no. El área y el perímetro de una figura son medidas distintas. El perímetro es una medida de la extensión del contorno de una figura (en el caso de un rectángulo, la suma de las medidas de los lados de la fi-

1 El término "figura cerrada" usado en este escenario pretendía invitar a los profesores a varios tipos de figuras. No obstante, durante las entrevistas, los profesores hablaron exclusivamente de cuadrados y rectángulos. Unos pocos profesores chinos dijeron que una figura cerrada es un concepto que se incluye en el nivel secundario en China así que prefirieron enfocar la discusión en la figura particular mencionada por la alumna.

gura) mientras que el área es la medida de la superficie de la figura. Puesto que el cálculo de ambas medidas se relaciona con los lados de la figura, la estudiante postula que están correlacionados.

La reacción inmediata de los profesores norteamericanos y chinos frente a este postulado fue similar. Para la mayoría de los profesores en este estudio, el enunciado de la alumna era una "teoría nueva" que escuchaban por primera vez y proporciones similares de profesores chinos y norteamericanos aceptaron la teoría inmediatamente. Todos los profesores sabían qué significaban las dos medidas y, la mayoría sabía cómo calcularlas. Sin embargo, a partir de aquí, los caminos de los profesores se separaron; exploraron estrategias distintas, llegaron a distintos resultados y le dieron respuestas diferentes a la alumna.

CÓMO EXPLORARON LA IDEA NUEVA LOS PROFESORES NORTEAMERICANOS

Las reacciones de los profesores ante la afirmación

Estrategia I: Consultar un libro. Mientras que dos de los profesores norteamericanos (9%) simplemente aceptó la teoría de la alumna sin ninguna duda, el resto no lo hizo. De entre los 21 profesores que sospecharon que la teoría era cierta, cinco dijeron que tendrían que consultar un libro. Cuatro de los cinco explicaron que necesitaban un libro porque no recordaban cómo calcular área y perímetro:

> [Pausa de unos 5 segundos] me olvidé del área y perímetro acá. [Frank miró atentamente el problema por unos 10 segundos] Bueno, veamos el área ahora... [pausa de unos 10 segundos] ... Tengo que buscarlo y regresaré con los alumnos. (Sr. Frank).
>
> Creo que buscaría fórmulas, primero. Para obtener la fórmula básica para el área y perímetro. Y después, ver si incluso dan algunos ejemplos del perímetro expandiéndose en una forma y ver cómo formularon el problema y ver si el de ella encaja con lo que tienen en el libro. Podría decir tal vez que podríamos contactar a alguien que tenga más experiencia en el área, otro profesor. (Srta. Fay).

Sin ninguna idea de cómo calcular el área y perímetro, estos profesores encontraron difícil investigar la afirmación acerca de la relación entre las dos medidas. Así que decidieron consultar un texto escolar u otra autoridad.

La Srta. Francesca, una profesora principiante, sí se sabía las fórmulas para calcular el área y el perímetro de un rectángulo. Creyendo que la afirmación de la alumna no era cierta en todos los casos, pensó que la única forma en que podría explicárselo a la alumna era "tomar otros ejemplos en que no se cumpliera". Sin embargo, explicó que puesto que no entendía por qué las fórmulas funcionaban, era difícil para ella desarrollar por sí misma un contraejemplo. Lo que haría sería encontrar a alguien que le dijera o "iría a mi casa, lo buscaría y lo revisaría".

> Veamos, el perímetro es [murmulla la fórmula para sí]. ¿Cómo le explicaría a ella que no es cierto? Creo que la única forma en que lo haría, ahora mismo, con lo que tengo en mi cabeza, es tomar otros ejemplos que no sean ciertos y le ilustraría que . . que no es cierto. Y no puedo recordar exactamente por qué ... Retrocedería y lo investigaría y averiguaría porqué y después volvería con ella y le mostraría. Y probablemente si, por si acaso, alguien llegara y me dijera esto inmediatamente. Porque, para ser honesta, me acuerdo de cómo calcular área y perímetro, pero no entiendo porqué ahora. Les diría, no creo que esto sea cierto pero, déjenme averiguar para asegurarme e iría por mí misma e investigaría y haría problemas y después, volvería y le diría porqué.

Era obvio que la Srta. Francesca sabía más acerca del tema que los otros cuatro profesores. Sin embargo, también se percató de que carecía del conocimiento relacionado con la afirmación. Recurriría a un libro escolar o a aquellos con más conocimiento, esperando que la ayudaran a encontrar una respuesta correcta para el problema.

Estrategia II: Pedir más ejemplos. Trece profesores norteamericanos propusieron otra estrategia para explorar la afirmación, pedir más ejemplos:

> No estoy segura. Probablemente diría que puede funcionar en algunos casos, pero puede que no funcione en otros. (Srta. Fiona).

> Lo que necesitaría hacer es probablemente tener ejemplos suficientes. (Prof. Blanche).

> Deberíamos hablar acerca de si funcionó en todos los casos, si es cierto en toda situación. (Srta. Florence).

Las respuestas de estos profesores a la afirmación, de que que necesitaban más ejemplos, se basaban en experiencia del día a día más que en un conocimiento matemático profundo. La mayoría de los adultos no se convencen de aceptar una propuesta con un solo ejemplo. Los comentarios de los profesores acerca de la teoría matemática de la alumna, de hecho, son equivalentes a enunciados generales como "aunque vea dos cisnes blancos, no creería que todos los cisnes son blancos". Sin embargo,

¿cuántos cisnes blancos necesitamos ver para creer que todos los cisnes son blancos?. Ellos mismos se preocupaban del número de ejemplos. Estos docentes ignoraban el hecho de que una afirmación matemática respecto a un número infinito de casos no se puede comprobar con un número finito de ejemplos, sin importar cuántos sino que, se debe comprobar con un argumento matemático. El papel de los ejemplos es ilustrar relaciones numéricas, más que demostrarlas.

Aunque los profesores pudieron señalar que un ejemplo no es suficiente para demostrar una teoría, no pudieron investigar la afirmación en forma matemática. Unos pocos sugirieron probar números arbitrarios, por ejemplo "del uno al diez" o "números raros como los tres y los sietes". Estas sugerencias se basaban en el sentido común más que en un conocimiento matemático profundo.

Estrategia III: Enfoques matemáticos. Los otros tres profesores investigaron el problema en forma matemática. La Srta. Faith fue la única que logró una solución correcta. Su estrategia era presentar un ejemplo que estuviera en desacuerdo con la teoría de la alumna:

> Diría "ahora dime qué pasa cuando tienes 2 cm en un lado y 16 cm en el otro". Le preguntaría cuál es el perímetro y después, que calculara el área. ¡Ajá!

La alumna usó un cuadrado con lados de 4 cm y un rectángulo de ancho 4 cm y de 8 cm de largo para demostrar su afirmación. El perímetro del cuadrado era 16 cm y el del rectángulo, 24 cm. El área del primero era 16 cm cuadrados y el del último era 32 cm cuadrados. La alumna concluyó que "a medida que aumentaba el perímetro de una figura, el área aumentaba en forma correspondiente". La Srta. Faith le pediría que intentara con otro ejemplo, un rectángulo de 2 cm de ancho y de 16 cm de largo. El perímetro del rectángulo de la Srta. Faith era de 36 cm, 12 cm más largo que el del rectángulo de la alumna. Según la afirmación de la alumna, el área del rectángulo de la Srta. Faith debería ser mayor que la de la alumna. No obstante, eso no era cierto. El rectángulo de la Srta. Faith tenía la misma área que el de la alumna, 32 cm cuadrados. Con un solo contraejemplo, la Srta. Faith desestimó la afirmación.

La Srta. Francine también puso a prueba la afirmación usando un rectángulo largo y delgado; sin embargo, ella no tuvo tanto éxito como la Srta. Faith:

> Según la figura, diría que es cierto. Qué pasa si, en lugar de eso, dibujo otra, pero delgada, larga ... después demostrándole que puede que no siempre funcione... Así [dibuja algunas figuras en papel]. Cuatro y 8 … Estoy tratando…el área es cuando multiplicas, 32. Así, sí, está bien . . . Digamos esta, 4 por 4 y digamos que esto es 2 por 4. . . oh, oh, espera un

> segundo. No sé. No sé si está en lo cierto o no ... Supongo que tendremos que averiguar ... buscarlo en un libro.

La Srta. Francine estuvo cerca de encontrar un contraejemplo. No obstante, falló porque siguió el patrón del ejemplo de la alumna, cambiar el perímetro, cambiando un par de lados opuestos y manteniendo el otro par de lados. Redujo el perímetro reduciendo el largo de un par de lados opuestos de 4 cm a 2 cm pero, sin cambiar el otro par de lados. Contrario a lo que esperaba, la afirmación de la alumna se mantuvo correcta, el área de la nueva figura también disminuyó. Entonces, se confundió. Decidió dejar su propia estrategia y buscarlo en un libro, la reacción de una persona común más que de un matemático.

CUADRO 4.1

Las reacciones de los profesores de EE.UU. a la afirmación (N= 23)

Reacciones	%	*N*
Simplemente aceptó la afirmación	9	2
Sin investigación matemática	78	18
Investigó la afirmación	13	3

El Sr. Félix fue el tercer profesor en aplicar un enfoque matemático al problema. Él exploraría porqué la afirmación de la alumna era cierta:

> Yo … confirmaría que sin duda en el caso de los rectángulos y cuadrados, es cierto, que sí aumenta. Hablaría acerca de por qué ése es el caso. Cuál es la relación entre el área y el perímetro y cómo usar algo como un método de cuadriculado para hablar de cómo añadir perímetro extra, aumenta el área.

La estrategia del Sr. Félix explica porqué la Srta. Francine no pudo desacreditar la afirmación de la alumna. Cuando el aumento (o reducción) del perímetro es causado sólo por el aumento (o reducción) de sólo un par de lados opuestos, el área de la figura aumentará (o se reducirá) también. El área aumentada (o reducida) de la nueva figura es el producto del largo aumentado (o reducido) por el lado que no se cambió. Usando este patrón, uno puede generar infinitos ejemplos que sustentan la afirmación de la alumna.

No obstante, el Sr. Félix no examinó totalmente la afirmación. Se detuvo después de explicar porqué funcionaba en este caso y no investigó los casos en que no funcionaría. De los 23 profesores norteamericanos, la Srta. Faith, una profesora principiante, fue la única que examinó la afirmación de la alumna y llegó a una solución correcta. En la Tabla 4.1 se resumen las reacciones de los profesores norteamericanos frente a la afirmación de la alumna.

Respuestas de los profesores a la alumna

Ball (1988b) señaló tres actitudes que los profesores podían tomar para responder cuando se enfrentaban a una idea nueva propuesta por un alumno:

1. Evitar que el alumno busque ideas fuera de lo incluido en el currículum.
2. Encargarse de evaluar la veracidad de la afirmación del alumno.
3. Hacer que el alumno se dedique a explorar la veracidad de su afirmación.

Los profesores en el estudio escogieron la segunda y tercera alternativas. Aquellos que escogieron la segunda informaron que le "dirían" o "explicarían" la solución al alumno. Los profesores que escogieron la tercera informaron que invitarían al alumno a investigar o discutir más la afirmación. Además, la mayoría de los profesores explicó que primero le haría un comentario positivo al alumno. Por ende, las respuestas de los profesores caen en dos categorías principales: *halago con explicación y halago con invitación a explorar más.*

Dieciséis profesores norteamericanos (72%) describieron una intención de invitar al alumno a más pruebas de la afirmación. Sin embargo, ya que ellos mismos no comprendían la demostración, sus intentos por involucrar a los alumnos en esa discusión, sólo podrían ser superficiales. Tres profesores informaron que lo "buscarían con la alumna":

> Bueno, lo que yo haría sería ver con ella un libro de matemáticas y buscar perímetro, buscar área y cómo, cómo se relacionan el perímetro y el área y revisarlo juntas. (Srta. Frances).

> Creo que diría "no estoy totalmente segura pero busquémoslo juntas y, veamos, veamos si podemos encontrar un libro que nos muestre si tienes . . . si tu descubrimiento es cierto o no". (Srta. Fay).

Estos profesores fueron los que no recordaban cómo calcular las dos medidas de un rectángulo. Los que sugirieron que lo que la alumna debía hacer era lo mismo que ellos querían hacer, es decir, encontrar el conocimiento almacenado en un libro.

Seis profesores dijeron que le pedirían a la alumna que lo intentara o que les mostrara más ejemplos para demostrar su afirmación:

> Tiene razón. Dejemos que lo intente, alentémosla y digámosle, creo que estás en lo cierto y hacer que quizás se lo demuestre a la clase o a mí, que trate con ejemplos distintos y asegurarse de que puede sustentar su hipótesis. Ponerla en un postura de "realmente descubrí algo", hacerla sentir bien. (Srta. Fleur).

> Oh, lo más probable, oh sí. Ahora, sólo quiero asegurarme de que sea cierto. Bueno, la felicitaría por hacer trabajo en casa ... Después, usaría éstos como ejemplos en la pizarra. Quizás pedirle que sea mi asistente, dar otros ejemplos. (Prof. Belinda).

> Estaría emocionada. Realmente no tengo ningún comentario. Probablemente me gustaría que hiciera unos más para demostrarlo. (Prof. Beatrice).

Estos profesores simplemente le pidieron a los alumnos que probaran más ejemplos pero no pensaron el problema en forma matemática ni discutieron estrategias específicas. Cinco otros profesores ofrecieron probar otros ejemplos con la alumna pero tampoco mencionaron estrategias específicas:

> No estoy segura. Probablemente diría que puede funcionar en algunos casos, pero puede que no funcione en otros. Diría, bueno, mmm, esto es muy interesante. Probémoslo con otros números y veamos si funciona también. (Srta.Fiona).

> Creo que lo mejor, probablemente hay que revisarlo y empezar con, de nuevo, incluso un grupo distinto de números y guiarla todo el camino. En otras palabras, bueno, quizás funcionaría con un caso pero, no funcionaría con el otro. Así que quizás, mostrarle a la niña trabajando no sólo con 4 por 4 y después 4 por 8 sino, digamos, 3 por 3 y tratar con otros números. Bueno, digamos que continúa por esa senda... (Prof. Bernadette).

Cinco profesores mencionaron estrategias específicas para enfrentar el problema. Sin embargo, excepto por lo mencionado por la Srta. Faith, las estrategias no se basaban en un pensamiento matemático cuidadoso. Cuando sugirieron probar con “números distintos” o “números raros”, no estaban considerando casos distintos en una forma sistemática, como veremos que los profesores chinos hicieron. En lugar de eso, la estrategia que propusieron se basaba en la idea de que una afirmación matemática se debe demostrar con una gran cantidad de ejemplos. Este concepto erróneo, compartido por muchos profesores norteamericanos, probablemente confundiría a un alumno.

CÓMO EXPLORARON LA IDEA NUEVA LOS PROFESORES CHINOS

Los enfoques de los profesores frente al problema

Las primeras reacciones de los profesores chinos al problema fueron similares a las de los profesores norteamericanos. Casi la misma proporción de profesores chinos (8%) como de norteamericanos (9%) aceptó inmediatamente la afirmación, sin ninguna duda. Los otros profesores chinos no estaban seguros de si la afirmación era válida o no. Les tomó un tiempo pensarla antes de que comenzaran a responder. De las cuatro preguntas de la entrevista, ésta fue la que tomó más tiempo para pensar. Y una vez que comenzaron a discutir el problema, sus respuestas variaron considerablemente en comparación con las de su contraparte norteamericana.

Las respuestas de los profesores chinos y norteamericanos diferían en tres maneras: primero, muchos profesores chinos mostraron mucho interés en el tema (la relación entre el área y perímetro de un rectángulo), mientras que los profesores norteamericanos tendieron a preocuparse de sí la afirmación de que "a medida que aumenta el perímetro, aumenta también el área" era o no cierta.

Segundo, la mayoría de los profesores chinos hicieron investigaciones matemáticas legítimas mientras que la mayoría de sus contrapartes norteamericanas no lo hizo. Ningún profesor chino dijo que necesitaba consultar un libro o a otra persona[2] y ninguno terminó diciendo: "no estoy seguro". Sin embargo, las indagaciones de los profesores chinos no necesariamente los llevaron a las soluciones correctas. En consecuencia, la mayoría de los profesores norteamericanos que sostuvo una opinión de "no estoy seguro", evitó una respuesta incorrecta pero, el 22% de los profesores chinos, debido a sus estrategias problemáticas, entregó soluciones incorrectas. El otro 70% resolvió el problema en forma correcta.

Tercero, los profesores chinos demostraron un mejor conocimiento de la geometría elemental. Estaban muy familiarizados con las fórmulas de área y perímetro. Durante las entrevistas, muchos discutieron las relaciones entre varias figuras geométricas que ni siquiera mencionaron otros profesores. Por ejemplo, algunos profesores chinos dijeron que un cuadra-

2 Stigler, Fernandez, y Yoshida (1996) informaron acerca de una tendencia similar de parte de los profesores de enseñanza primaria japoneses.

do es un rectángulo especial. Algunos también señalaron que un rectángulo es una figura básica—que los cálculos del área y perímetro para varias otras figuras se basan en el uso de rectángulos[3].

En la Figura 4.1 se resumen las reacciones de los profesores de los dos continentes frente al problema.

Justificar una afirmación no válida: Conocimientos y escollos de los profesores. Dieciséis profesores chinos, que investigaron el problema en forma matemática, argumentaron que la afirmación de la alumna era cierta. Doce profesores justificaron la afirmación discutiendo *porqué* ese era el caso, los otros cuatro profesores se dedicaron al cómo era ese el caso. Estos profesores tendieron a construir sus argumentos sobre la correspondencia que se forma al identificar el largo, ancho y área de un rectángulo con los dos números de su producto.

> Creo que la alumna tiene razón. A medida que aumenta el perímetro de un rectángulo, su área también aumenta. Sabemos que el área del rectángulo es el producto de su largo por su ancho. En otras palabras, el largo y el ancho son dos factores que producen el área. Sin duda, a medida que aumentan los factores, el producto también aumentará. (Srta. H).

Su estrategia, aunque incorrecta, se basaba en principios matemáticos adecuados, aunque incorrectos. Primero, los profesores identificaron la afirmación de la alumna como una relación numérica, la relación entre dos factores y su producto en la multiplicación.

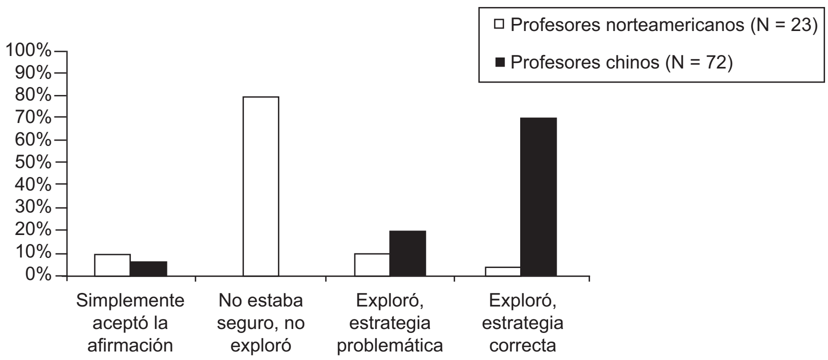


Fig. 4.1. Comparación de las reacciones de los profesores frente a la afirmación de la alumna.

3 En el curriculum chino las fórmulas del área para otras figuras como los cuadrados, triángulos, círculos y trapezoides se derivan de la de los rectángulos.

Después, se basaron en un principio fijo de esta relación, el de los factores y el producto, para demostrar la afirmación. Sin embargo, la falla fue que no se dieron cuenta de que la afirmación involucraba dos relaciones numéricas distintas, no sólo una multiplicativa. Mientras que la relación de largo, ancho y área de un rectángulo es multiplicativa, la de su largo, ancho y perímetro, es aditiva. El perímetro de un rectángulo puede aumentar mientras dos lados del rectángulo disminuyen su largo.

Los profesores que dijeron que la afirmación era cierta tenían explicaciones similares a las del Sr. Félix:

> La afirmación de la alumna es cierta. Veamos cómo es cierta. Si superponemos un cuadrado sobre un rectángulo, veremos que se descubre otro cuadrado. Ésa será el área aumentada. Un par de lados opuestos del área aumentada es realmente el ancho de las dos figuras originales, el otro par de lados opuestos del área aumentada es la diferencia entre el largo del rectángulo y el lado del cuadrado original. O, podemos decir que es el pedazo aumentado del largo. . . (Srta. B).

Al igual que el Sr. Félix, no consideraron todas las formas en que se puede aumentar el perímetro de un rectángulo. Por ende, sólo explicaron cómo era cierto el caso de la alumna pero, no exploraron el problema real: si es siempre cierto.

Aunque estos dieciséis profesores no llegaron a soluciones correctas, mostraron la intención de explorar el problema en forma matemática. En lugar de hacer comentarios generales acerca de la afirmación de la alumna, investigaron el problema y llegaron a sus propias conclusiones. Más aún, estos profesores estaban conscientes de una importante convención de la disciplina: cualquier proposición matemática tiene que ser demostrada y ellos tendieron a seguir esta convención. No opinaron simplemente "la afirmación es cierta", en lugar de eso, dieron pruebas de sus opiniones. Los argumentos que hicieron, aunque deficientes, se basaron en matemáticas legítimas. Además de un conocimiento sólido del cálculo de las dos medidas, estos profesores mostraron actitudes sólidas para la investigación matemática. Por supuesto, sus estrategias también revelaron una debilidad obvia, la falta de rigurosidad en su pensamiento.

Desmentir la afirmación: El primer nivel de comprensión. Cincuenta de los 72 profesores chinos dieron soluciones correctas pero sus estrategias diferentes mostraron varios niveles de comprensión. El primer nivel era desmentir la afirmación de la alumna. El enfoque de los 14 profesores chinos en este nivel fue similar al de la Srta. Faith, buscar contraejemplos:

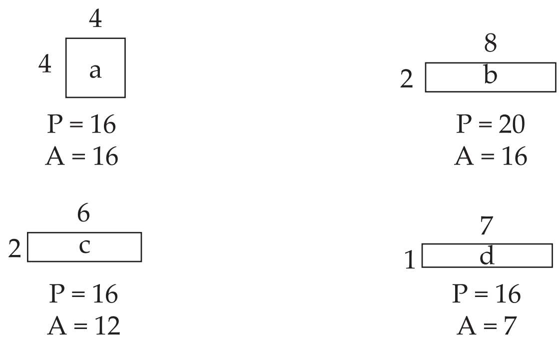
> Su afirmación no era cierta. No diría nada pero le mostraría a la alumna un contraejemplo. Por ejemplo, bajo su cuadrado (con lados de 4 cm),

> quizás dibujaría un rectángulo de largo 8 cm y de ancho 1 cm. Pronto descubriría que mi figura es de perímetro más largo pero de área más pequeña que la suya. Así, sin decirlo, su afirmación es errada. (Srta. I).
>
> Esta afirmación no es cierta en todos los casos. Es fácil encontrar casos que pueden desacreditar esta teoría. Por ejemplo, hay un rectángulo, su lado es 10 cm y su ancho es 2 cm. Su perímetro será el mismo que el del rectángulo de la alumna, 24 cm. Pero su área será de sólo 20 cm cuadrados, menor a la del rectángulo de la alumna. (Prof. R).

Para desacreditar la afirmación, los profesores crearon dos tipos de contraejemplos. Una consistió en figuras con mayor perímetro pero menor área o menor perímetro pero mayor área, que una de las figuras de la alumna. El otro tipo consistió en figuras con la misma área pero un perímetro distinto o, el mismo perímetro pero con área distinta, como en el caso de las figuras de la alumna.

Identificar las posibilidades: El segundo nivel de comprensión. Ocho profesores exploraron las varias relaciones posibles entre área y perímetro. Dieron distintos tipos de ejemplos que sustentaban y que también se oponían a la afirmación, para mostrar varias posibilidades.

> Le presentaré varias figuras para calcular su área y perímetro.



> Al comparar estas figuras, ella aprenderá que a medida que el perímetro aumenta, el área no aumenta necesariamente, como en el caso de las figuras a y b. También, cuando el perímetro se mantiene, el área podría no ser la misma, como en el caso de las figuras c y d. Así, ella sabrá que no existe una relación directa entre área y perímetro. Lo que ella ha descubierto es una de varias soluciones al problema. (Srta. E).
>
> Primero la alabaría por su pensamiento independiente. Pero, también le haría saber que podría haber otras dos situaciones así. Por ejemplo, cuando aumenta el perímetro, el área puede aumentar pero, también

> puede disminuir o mantenerse igual. Después, le mostraría un ejemplo de cada caso para compararlo con su rectángulo (con largo de 8 cm y ancho de 4 cm). Primero le daría un ejemplo de su afirmación con un rectángulo de largo 8 cm y de ancho 5 cm. El perímetro aumentará de 24 cm a 26 cm y el área aumentará de 32 cm cuadrados a 40 cm cuadrados. Ahora, el segundo ejemplo será de un rectángulo de largo 12 cm y de ancho 2 cm. Su perímetro aumentará a 28 cm pero su área disminuirá a 24 cm cuadrados, sólo tres cuartos del área de su rectángulo. Otro ejemplo podría ser el de una figura de largo 16 cm y ancho 2 cm. Su perímetro también aumentará a 36 cm pero el área se mantendrá igual que la de su rectángulo, 32 cm cuadrados. Así que le diría que su pensamiento matemático tiene que ser riguroso. Esta es una de las características de nuestro pensamiento que mejora cuando aprendemos matemáticas. (Sr. A).

El Sr. A reveló que aumentar el perímetro podría causar que el área aumente, disminuya o se quede igual. La Srta. E describió dos casos en que las dos medidas cambiaron en formas distintas, en que mientras el perímetro aumentaba, el área disminuía y otra en que, mientras el perímetro se mantenía, el área disminuía. En este nivel de comprensión, los profesores discutieron varias facetas de la relación entre el perímetro y el área de una figura. En particular, examinaron distintos tipos de cambios en el área de un rectángulo que se pueden causar por cambios en el perímetro. Los profesores no desacreditaron simplemente la afirmación de la alumna sino que, presentaron una perspectiva más amplia en que se incluyó la afirmación de la alumna.

Clarificar las condiciones: El tercer nivel de comprensión. Además de demostrar las varias posibilidades, 26 profesores clarificaron las condiciones bajo las cuales éstas se daban. Estos docentes tendieron a explorar relaciones numéricas entre el área y el perímetro y elaborar ejemplos específicos:

> Es obvio que en algunos casos, la afirmación es cierta pero, en otros casos no lo es. No obstante, ¿cuándo es cierta y cuándo no? En otras palabras, ¿bajo qué condiciones es cierta y bajo cuáles no? Mejor aclaremos nuestras ideas acerca de esto. Para clarificar las condiciones específicas que causan las numerosas posibilidades, podemos investigar primero las condiciones que causan un aumento del perímetro y explorar cómo estas condiciones afectan el cambio en el área. (Sr. D).

La Prof. R formuló la estrategia que ella y otros varios profesores usaron para explicar las condiciones bajo las cuales es cierta la afirmación de la alumna. Primero, examinaron el origen de la afirmación de la alumna, un aumento de perímetro. Investigaron las situaciones que podrían producir un aumento en el perímetro de un rectángulo y encontraron tres patrones. Luego, analizaron los cambios que estos patrones producirían en el área. Mediante un cuidadoso examen, el Sr. R obtuvo una imagen clara del cómo el área se puede ver afectada por un aumento en el perímetro en distintas formas:

> Diría que la afirmación de la alumna es válida bajo ciertas condiciones. Sabemos que los cambios en el largo y ancho de una figura pueden causar aumentos en el perímetro. Existen tres maneras de cambiar el largo y ancho de un rectángulo que causarán un aumento de su perímetro. La primera es aumentar el largo o el ancho pero dejando igual la otra medida. Bajo esta condición, el área de la figura aumentará como consecuencia. Por ejemplo, dado que el largo del rectángulo de la alumna aumenta a 9 cm y su ancho no cambia, el área original, 32 cm cuadrados, aumentará a 36 cm cuadrados o, dado que el ancho del rectángulo de la alumna aumenta a 5 cm y su ancho no cambia, el área original aumentará a 40 cm cuadrados. La segunda manera de aumentar el perímetro es aumentar el largo y el ancho a la vez. Bajo esta condición, el área también aumenta. Por ejemplo, dado que el largo del rectángulo aumenta a 9 cm y el ancho aumenta a 5 cm, el área del rectángulo aumentará a 45 cm cuadrados. La tercera condición que causa un aumento del perímetro, es aumentar el largo o ancho de una figura y disminuir la otra medida, pero con la cantidad aumentada mayor que la cantidad disminuida. Bajo esta condición, el perímetro también aumentará pero, el cambio en el área, puede ir en tres direcciones. Puede aumentar, disminuir o permanecer igual. Por ejemplo, dado que el largo del rectángulo aumenta a 6 cm y el ancho aumenta a 7 cm a la vez, el área del rectángulo aumentará de 26 cm cuadrados a 42 cm cuadrados. Dado que el largo aumenta a 10 cm y el ancho disminuyó a 3 cm, el perímetro también aumentará a 26 cm pero, el área disminuirá a 30 cm cuadrados. Dado que el largo aumenta a 16 cm y el ancho disminuyó a 2 cm, el perímetro también aumentará a 36 cm pero, el área permanecerá igual, 32 cm cuadrados. En breve, bajo las primeras dos condiciones, la afirmación de la alumna es cierta pero, bajo la última condición, no es necesariamente cierta. (Prof. R).

La solución a la que llegaron estos profesores fue: cuando el aumento del perímetro lo causa un aumento del largo o el ancho de un rectángulo, o ambos, como consecuencia el área aumentará pero, cuando el aumento del perímetro lo causa un aumento del largo y una disminución del ancho, o viceversa, el área no necesariamente aumentará. Unos dos tercios de los 26 profesores elaboraron su tercera discusión en el tema de la Prof. R. Ellos trataron ambas situaciones, cuando la afirmación es cierta y cuando no es cierta necesariamente. El otro tercio de los profesores, se enfocó en una de estas situaciones. Los profesores que llegaron a este nivel de comprensión no consideraban la afirmación ni absolutamente correcta ni absolutamente falsa. En lugar de eso, se refirieron al concepto de "condicional" y argumentaron que la proposición era cierta condicionalmente:

> Así que, ahora, podemos decir que la afirmación de la alumna no estaba absolutamente equivocada pero, es incompleta o condicional. Bajo ciertas condiciones, es sostenible pero, bajo otras condiciones, no necesariamente es cierta. Estoy contenta de que hayas propuesto el problema. Me he dado cuenta de algo nuevo hoy, algo en lo que no había pensado antes. (Sr. J).

> Después de la discusión, me gustaría hacerle una sugerencia para revisar su afirmación, confirmando ciertas condiciones. Podría querer decir que bajo las condiciones en que el aumento del perímetro es causado por el aumento del largo o el ancho pero con que el otro lado se mantenga igual o, por el aumento de tanto el largo como el ancho, el área del rectángulo también aumenta. Ésa sería una afirmación segura.(Srta. G).

Al aclarar las distintas condiciones bajo las cuales la afirmación de la alumna funcionaría o no, los profesores desarrollaron distintas relaciones entre el área y el perímetro de un rectángulo. No se abandonó simplemente la afirmación de la alumna sino que se revisó y se incorporó en una de las relaciones.

Explicar las condiciones: El cuarto nivel de comprensión. Seis de los profesores, que llegaron al tercer nivel de comprensión, fueron incluso más allá, explicando por qué ciertas condiciones apoyaban la afirmación de la alumna y porqué otras no. Sus estrategias variaron. Después de una discusión detallada y bien organizada de las condiciones bajo las cuales la afirmación de la alumna sería cierta, el Sr. Mao dijo:

> Al final, podemos examinar porqué estas condiciones son justificables. Imagina cómo cambia el área de una figura cuando cambia su perímetro. Bajo las primeras dos condiciones, el área original permanece igual pero se le agrega un área nueva. Por ejemplo, cuando el largo aumenta pero el ancho se mantiene, habrá un área extra expandiéndose en forma horizontal a partir de la original. Por otra parte, cuando el ancho aumenta pero el largo se mantiene, habrá un área extra expandiéndose en forma vertical a partir de la original. Si tanto el largo como el ancho aumentan a la vez, el área original se expandirá en ambas direcciones. En cualquiera de estos casos, el área original sigue ahí pero se le agrega otra área extra. Podemos dibujar figuras para exhibir los casos. De hecho, también se puede demostrar usando la propiedad distributiva. Por ejemplo, cuando el largo aumenta 3 cm, se convierte en (a + 3) cm[4]. El área será (a + 3)b = ab + 3b. Ahora,

4 En los textos escolares de matemáticas chinos, la a representa el largo de una figura mientras que la b representa su ancho.

> en comparación con el área original, ab, podemos ver por qué es más larga ya que 3b es la cantidad aumentada. Sin embargo, dado que una medida aumenta y la otra disminuye, el área original de la primera figura se destruirá. No hay razón que garantice que el área nueva será mayor que la anterior.

El Argumento del Prof. Mao se basó en una representación geométrica de la situación. También aplicó la propiedad distributiva para agregar otra prueba a su estrategia. El argumento del Prof. Xie acerca de por qué rectángulos con el mismo perímetro pueden tener áreas distintas también era muy profundo. Primero indicó, que para el mismo perímetro, uno puede formar muchos rectángulos de distintos largos y anchos, debido a que hay muchos pares distintos de sumandos para hacer la misma suma. Después, argumentó que cuando estos pares de sumandos se vuelven factores (como cuando se calcular el área de una figura), obviamente, generaran productos distintos. Finalmente, usando el hecho de que, mientras más cercanos sean los valores de dos factores, mayor será su producto, el afirmó que para un perímetro dado, el cuadrado es el rectángulo con el área mayor:

> El área de un rectángulo se determina por dos cosas, su perímetro y su forma. El problema de la alumna es que sólo vio la primera. En teoría, con el mismo perímetro, digamos 20 cm, podemos tener un número infinito de rectángulos siempre y cuando la suma de sus largos y anchos sea 10 cm. Por ejemplo, podemos tener 5+5=10, 3 + 7 = 10, 0.5 + 9.5 = 10, incluso 0.01 + 9.99 = 10, etc., etc. Cada par de sumandos pueden ser los dos lados del rectángulo. Como podemos imaginar, el área de estos rectángulos está en un rango muy amplio. El cuadrado con lados de 5 cm tendrá el área mayor, 25 cm cuadrados, mientras que el de largo 9,99 cm y ancho 0,01 cm casi no tendrá área. Porque en todos los pares de números con la misma suma, mientras más cercanos son los números, mayor será el producto que generarán . . . (Prof. Xie).

Los profesores Xie y Mao no se basaron en los mismos principios básicos de matemáticas para sus argumentos. Sin embargo, ambos desarrollaron argumentos sólidos. De hecho, un principio básico de las matemáticas puede sustentar varios modelos numéricos. Por otra parte, un modelo numérico puede también sustentarse en varios principios básicos. Una comprensión profunda de un tema matemático, finalmente, incluirá ciertos principios básicos de la disciplina en los que se sustenta el tema. Al pasar por varios niveles de comprensión de la afirmación de la alumna, los profesores se acercaron más y más a un argumento matemático completo.

Un mapa de cómo se sustentó la exploración de los profesores

Los profesores exploraron la afirmación de la alumna y alcanzaron una comprensión de los temas matemáticos en varios niveles conceptuales: encontrar un contraejemplo, identificar las posibles relaciones entre área y perímetro, clarificar las condiciones bajo las cuales esas relaciones se cumplen y explicar las relaciones. Mientras que en los tres capítulos anteriores, nos interesaba el conocimiento de las matemáticas escolares, que tienen los profesores , ahora nos interesa su capacidad para explorar una idea nueva. La tarea requería que el profesor "saltara" de su actual "lugar conocido" a un "sitio" nuevo para descubrir algo que nunca antes habían pensado.

La figura 4.2 representa cómo se sustentó el enfoque de los profesores hacia la relación entre área y perímetro. El rectángulo arriba representa la tarea: explorar una idea matemática nueva por uno mismo. Los rombos representan los factores afectivos. Los otros componentes de la figura representan aspectos del conocimiento disciplinario del profesor. El círculo representa conocimientos (cálculo de perímetro y área) estrechamente relacionados con la idea nueva. Los cuadrados representan lo que Bruner (1960/1977) consideraba ideas básicas de un tema, principios básicos (representados por cuadrados con esquinas rectas) y actitudes básicas (representadas por cuadrados con esquinas redondeadas).

Las exploraciones sobre la afirmación de la alumna, que hicieron los profesores, fueron afectadas por dos factores: *intención* y *estrategia*. Sin duda, la estrategia desempeña un rol importante en esta tarea. No obstante, las entrevistas revelaron que las intenciones de los profesores también cumplían un rol crucial. Los profesores que no pretendían examinar la afirmación no se molestaron en pensar una estrategia. La mayoría de los profesores norteamericanos no dio evidencias de ninguna intención de abordar la idea nueva por su cuenta así que no consideraron seriamente una estrategia.

La intención de los profesores de abordar la afirmación de la alumna por sí mismos se basaba en dos subfactores: su *interés* en una proposición matemática y su *confianza* en sí mismos en cuanto a su capacidad para entenderla. Los profesores que hicieron entusiastamente un estudio acabado de la afirmación de la alumna fueron aquellos que se interesaron especialmente en el tema matemático que surgió. Los guiaba una enorme curiosidad acerca de la relación entre el área y el perímetro de un rectángulo. Se pudo observar una fuerte motivación interna para enseñar matemáticas, en las respuestas de estos profesores. Por otra parte, los profesores que no se interesaron en la afirmación, no se motivaron para examinarla. No obstante, el interés por explorar una proposición matemática se sustenta en la propia actitud hacia la posibilidad de resolver un problema por uno mismo y se ve afectado por la confianza que uno tenga en resolver el problema.

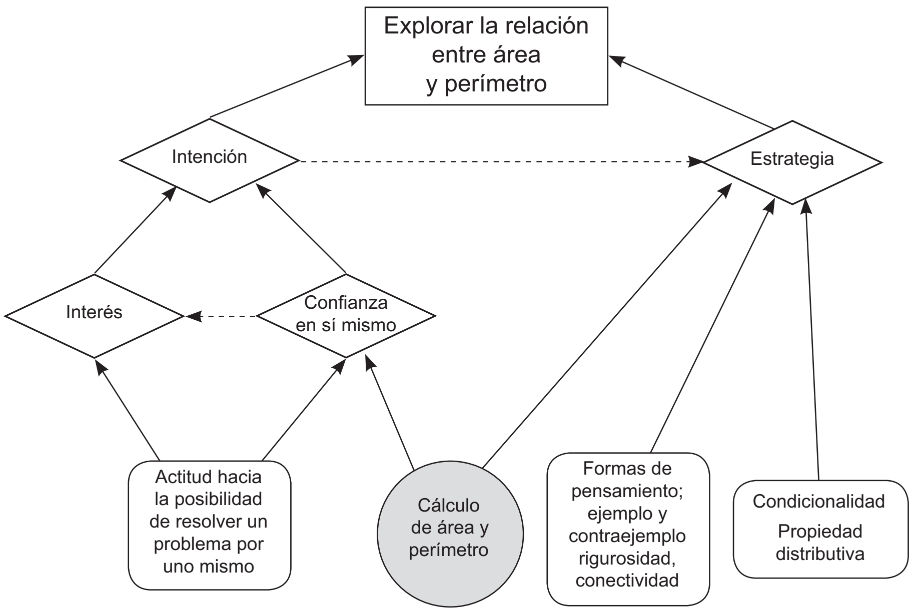


Fig. 4.2. Un mapa de cómo se sustentó la exploración de los profesores.

La confianza fue el otro factor determinante a la hora de que un profesor investigara o no la afirmación. Los profesores que no tenían confianza en su propia capacidad para resolver el problema, no lo intentaron. La confianza de los profesores se basaba en dos aspectos de su conocimiento disciplinario: sus *actitudes hacia la posibilidad de resolver problemas matemáticos por sí mismos y su conocimiento de los temas particulares relacionados a la proposición*. Aquellos que no creían que era posible resolver el problema solos o no sabían cómo calcular el área y el perímetro de una figura no exploraron más allá las relaciones entre área y perímetro. En consecuencia, sus intenciones de resolver el problema, si es que existían, se vieron inhibidas.

Las estrategias para investigar el problema se basaban en tres aspectos de su conocimiento disciplinario: su conocimiento de los temas particulares relacionados con la idea nueva, las *formas de pensar en matemáticas y los principios básicos de la disciplina relacionados con la estrategia*. Todos los profesores que completaron la tarea exitosamente mostraron familiaridad con las fórmulas para calcular el área y perímetro así como una comprensión de las bases lógicas que las sustentan. Su eficiencia en el cálculo, sin duda, apoyó sustantivamente sus investigaciones, que incorporaron varios procesos de cálculo.

El conocimiento del pensamiento matemático que tenían los profesores desempeñó un papel clave en ayudarlos a "despegar" de su conocimiento previo a este nuevo descubrimiento. No todos los profesores que sabían cómo calcular el área y perímetro de un rectángulo llevaron a cabo una estrategia matemática por su cuenta. Sin embargo, aquellos que también sabían cómo considerar la afirmación en forma matemática, lo hicieron. Aunque algunos no llegaron a una solución correcta, su conocimiento de cómo racionalizar la proposición en forma matemática, al menos los llevó a un enfoque válido. Al contrario, los profesores que sabían las fórmulas pero no consideraron la afirmación en forma matemática, no pudieron abordar el problema matemáticamente

Por último, el conocimiento que tenían los profesores de los principios matemáticos básicos, por ejemplo la condicionalidad de una proposición matemática, contribuyó significativamente a su enfoque. Nuevamente, estar familiarizados con la aplicación de la propiedad distributiva, mejoró las explicaciones de algunos profesores de las relaciones de suma y multiplicación conectadas con el tema.

Las respuestas de los profesores a la alumna

Las respuestas de los profesores chinos a la alumna caben en las mismas categorías que las de los profesores norteamericanos: halago con explicación y halago con motivación a explorar más. No obstante, puesto que la mayoría de los profesores chinos investigaron el problema, sus respuestas a la alumna fueron significativamente más sustanciales y relevantes que las de sus contrapartes norteamericanos. Dieron ejemplos más apropiados para ilustrar los diversos aspectos del tema e hicieron preguntas más apropiadas para guiar a la alumna hacia más descubrimientos.

Además, los dos grupos de profesores se distribuían claramente en dos categorías. Sólo dos profesores norteamericanos (9%) informaron que le darían una explicación a la alumna, uno inmediatamente y otro, después de "investigarlo". La mayoría de los profesores norteamericanos dijeron que explorarían la afirmación con la alumna que la propuso pero, generalmente no dieron ideas acerca de qué exploración sería esa. La mayoría de los profesores chinos (62%) después de obtener una solución clara, le daría a la alumna una explicación detallada del tema, en contraste con aquellos que la alentarían a descubrir resultados por sí misma (30%). La mayoría de las explicaciones de los docentes chinos durante las entrevistas fueron claras, bien organizadas y completas. Generalmente, una explicación venía después de una aseveración como “decirle a la alumna que la afirmación no era cierta” o “decirle a la alumna que su afirmación no era completa”. La mayoría de los profesores que justificaron la afirmación de la alumna también le explicaría por qué pensaban que estaba en lo cierto.

Los profesores chinos que harían que la alumna participara en más discusiones sobre la afirmación fueron los que presentaron una mejor comprensión y estaban más cómodos con su propia investigación del problema. La mayoría dijo que haría preguntas o daría otros ejemplos para llevar a la alumna a encontrar las limitaciones de su afirmación y llegar a una mayor comprensión de la relación entre el área y el perímetro de un rectángulo:

> En cuanto a la alumna, primero que todo, yo la alabaría. Haría comentarios amables acerca de su pensamiento independiente y la coherencia entre su afirmación y su ejemplo. Pero después, la llevaría a encontrar el problema de su afirmación. Primero le pediría que explicara por qué en su caso, a medida que aumenta el perímetro, el área también aumenta, pedirle que me muestre la parte aumentada del área y que me diga cómo se generó. Después diría, tu ejemplo demostró una situación en que un par de lados opuestos de la figura aumenta y el otro par de lados se mantiene igual. Esta es una situación que causa que el perímetro de un rectángulo aumente. ¿Has pensado en alguna otra situación en que el perímetro también aumente? ¿Sabes que pasaría en otras situaciones? Ahora sabemos que, en al menos una situación, tu afirmación es válida. Pero, para demostrar tu afirmación, debes asegurarte de que funciona en todas las situaciones y dar un ejemplo de porqué es válida. Podría encontrar fácilmente otras situaciones en las que el perímetro de un rectángulo aumentará. Muy probable, encontrará que cuando el otro par de lados aumenta o, cuando ambos pares de lados aumentan, el perímetro también lo hará. Y también podría descubrir que en esos casos, su afirmación será cierta. Luego, la guiaría a pensar en más situaciones. Probablemente, podrá descubrir que bajo ciertas condiciones, su afirmación no es válida. Si no puede pensar por sí misma en las otras condiciones, le daría algunos ejemplos y la dejaría pensar acerca de qué tipos de situaciones ilustran estos ejemplos y qué pasará bajo estas condiciones. En breve, la guiaría a investigar su afirmación por sí misma y la ayudaría cuando sea necesario. Al final, espero que tenga una idea clara de bajo qué condiciones su afirmación es válida y bajos

> cuáles no. También quiero ayudarla a ver que el problema con su enfoque es la falta de rigurosidad en su pensamiento. Así que terminaría la conversación haciendo énfasis en que es muy bueno que uno piense en forma independiente pero que, sin embargo, no es suficiente. Uno debe también aprender cómo pensar. Como en su caso, cómo pensar en forma rigurosa. (Prof. T).

La respuesta del Prof. T muestra varias características interesantes presentes en respuestas similares de varios profesores chinos. Primero que todo, se dio un sutil entretejido de alabanza y crítica. Aunque comenzó alabando el pensamiento independiente de la alumna, después de una discusión de las distintas facetas del tema, terminó la conversación indicando que la alumna debería trabajar en mejorar el aspecto de su pensamiento que los profesores alabaron, pensar en forma rigurosa. Este patrón se vio en las respuestas de unos pocos profesores más. Por ejemplo:

> Primero le daría una reacción positiva frente a su iniciativa, decirle que estoy contento por lo que ella ha encontrado. Después, sugeriría que tengamos más discusiones acerca de la afirmación. Basado en su rectángulo, le daría una serie de ejemplos que presentan distintas situaciones que pueden causar un aumento del perímetro y un cambio distinto en el área... [se omitieron los ejemplos]. Por último, la alentaría nuevamente por su espíritu de atreverse a iniciar un estudio y explorar una idea nueva por sí misma. Pero, a la vez, le indicaría que uno no sólo se debe atrever a pensar sino también aprender a ser bueno pensando. (Prof. Sun).

La mayoría de los profesores chinos informó que, primero que todo, alabarían el esfuerzo mental de la alumna, como por ejemplo, su "aguda observación", su" investigación hacia nuevos conocimientos" y "la iniciativa para explorar nuevos conocimientos por sí misma", etc. Sin embargo, se volverían pronto hacia una discusión de los aspectos problemáticos de la afirmación de la alumna, los que consideraron eran causados por cierta carencia en su forma de pensar. Al final, los profesores retrocederían hacia lo que alabaron, reafirmándolo e indicando qué se debe mejorar a continuación.

Más aún, las respuestas de los profesores chinos tendieron a entretejer otros elementos: decir, explicar, hacer preguntas y mostrar ejemplos. Este es el caso de un profesor que primero le diría a la alumna que su afirmación era problemática y después, la guiaría más allá:

> Tal vez querría decirle que su hallazgo no es completo. Porque sólo ilustra un tipo de relación entre área y perímetro. Le sugeriría que intente en otros casos, ¿Qué pasará si el ancho aumenta pero el largo se mantiene? ¿Qué pasará si tanto el largo como el ancho aumentan? ¿Qué

> pasará si el largo aumenta y el ancho disminuye, o viceversa? Le pediría que siguiera pensando acerca de estas situaciones y que volviera para contarme acerca de sus nuevos hallazgos. Si no puede encontrar la solución completa después de una nueva exploración, lo discutiría con ella y le mostraría otros ejemplos relevantes para revelar la solución paso a paso. Finalmente, para instarla a explorar más allá la relación entre área y perímetro de un rectángulo, probablemente le daría un problema para pensar. Con el mismo perímetro, ¿qué tipo de largo y ancho causará la mayor área? (Prof. S).

Aunque algunos profesores harían que la alumna explorara el problema por sí misma, también estarían preparados en cualquier momento para dar sugerencias específicas acerca de cómo abordarlo:

> Primero que todo, le pediría que mirara otra vez las figuras que trajo y que me dijera su idea de cómo se aumentó el área. Si no me puede decir, podría querer sugerir que imagine que el cuadrado se superpone al rectángulo y ver dónde está el área aumentada y pensar de dónde vino esta área. La generó un aumento del largo. Es obvio que mientras más aumente el largo, mayor será el área aumentada. También, un aumento en el largo causará un aumento en el perímetro. Después, le preguntaría si existen otras maneras en que se puede aumentar el área de un rectángulo. Siguiendo la lógica de nuestra discusión, ella probablemente diría que cuando aumenta el ancho, el área también aumenta. ¿qué pasa si tanto el largo como el ancho aumentan? Por supuesto que el área y el perímetro aumentarán. Ni siquiera necesitamos ejemplos aquí. Después, le preguntaría si conoce otra manera de aumentar el perímetro de un rectángulo. Esto sería un paso difícil para ella porque tendría que cambiar la forma en la que ha estado pensando. Podría pedirle que pensara acerca de eso en su casa y volviera a decirme al otro día. O, si siento que ella probablemente no lo descubrirá por sí misma, podría darle algunos ejemplos con perímetros mayores que el de la figura que trajo pero, con área menor o igual. Por ejemplo, un rectángulo con largo 10 cm y ancho, 2 cm. En este sentido, la orientaría hacia una discusión de las condiciones bajo las cuales su afirmación será cierta y las condiciones bajo las cuales no, y porqué. Después de aclarar eso, podríamos llegar a una discusión de cuál era el problema de su afirmación original y cómo se causó. (Prof. C).

Algunos profesores parecían ser especialmente buenos para usar ejemplos apropiados mientras que otros, eran buenos para hacer las preguntas apropiadas. Sin embargo, estos dos elementos estaban conectados:

> Primero, comentaría su actitud de pensamiento independiente. Luego, le preguntaría: "¿estás segura de que la teoría que descubriste a partir de las dos figuras es cierta en todos los casos? ¿Quieres probar con más ejemplos? Por ejemplo, ¿quieres dibujar rectángulos distintos con perí-

> metro de 24 cm y calcular sus áreas? Ve qué pasa y vuelve". Ella podría volver con números como 1 x 11, 2 x 10, 3 x 9, 4 x 8, 5 x 7, 6x6, etc. cada una con el área que calculó. [Chen dibujó algunos rectángulos en una hoja de papel]. Es muy probable que ella ya hubiera descubierto que con el mismo perímetro se obtienen figuras de distintas áreas. Esperaría que también pudiera descubrir por sí misma que con rectángulos del mismo perímetro, mientras más cercanos sean el largo y el ancho, mayor será el área. O, al menos, vería que el cuadrado tiene el área más grande y que el rectángulo más delgado [en su papel] tiene el área más pequeña. Luego, le preguntaría si puede ver algún patrón en la forma y el área de figuras con el mismo perímetro. Mediante la discusión, ella descubrirá por sí misma que el área y perímetro no aumentan a la vez. (Prof. Chen).

Mientras que el Prof. C guiaría a la alumna a reflexionar acerca de su pensamiento previo, el Prof. Chen guiaría a la alumna a investigar más el tema. Estas dos respuestas profundas se apoyaron enormemente en el conocimiento disciplinario de los profesores, su conocimiento de cómo investigar una idea nueva en matemáticas así como su conocimiento de temas matemáticos específicos relacionados a la idea.

DISCUSIÓN

Actitud frente a la disciplina: Promotora de la investigación matemática del profesor

Los profesores norteamericanos no mostraron debilidades manifiestas en sus cálculos del área y perímetro de rectángulos. No obstante, persistió una diferencia notable entre los profesores norteamericanos y sus contrapartes chinos. Sólo tres profesores norteamericanos (13%) realizaron investigaciones matemáticas por su cuenta y sólo uno llegó a una respuesta correcta. Por otra parte, 66 profesores chinos (92%) realizaron investigaciones matemáticas y 44 (62%) llegó a una respuesta correcta.

Dos factores importantes podrían haber impedido que los profesores norteamericanos realizaran una investigación matemática exitosa: su falta de eficiencia en el cálculo y su actitud de legos frente a las matemáticas. Aunque la mayoría de los profesores norteamericanos sabía cómo calcular las dos medidas, fueron mucho menos eficientes que sus contrapartes chinas. Unos pocos informaron que, aunque podían hacer los cálculos, no entendían su base lógica y que esta carencia entrababa seguir explorando. Este no fue el caso de los profesores chinos puesto que ninguno informó que la falta de conocimiento acerca de las fórmulas dificultara sus investigaciones.

El segundo factor, que puede ser incluso más significativo, fue la actitud de los profesores hacia las matemáticas. Al responder la novedosa afirmación de la alumna, respecto a la relación entre área y perímetro, los profesores norteamericanos se comportaron más como legos mientras que los profesores chinos se comportaron más como matemáticos. Esta diferencia exhibió sus distintas actitudes hacia las matemáticas. Al discutir la estructura de un tema, Bruner (1960/1977) escribió:

> El dominio de las ideas fundamentales de un campo no sólo involucra aprehender principios generales sino también, desarrollar una actitud hacia el aprendizaje y la investigación, hacia la adivinación y corazonadas, hacia la posibilidad de resolver problemas por uno mismo. (p. 20)

En este capítulo, vimos que todos los profesores que exploraron la afirmación demostraron actitudes sólidas hacia las matemáticas. Pueden haber llegado o no a una respuesta correcta pero, su actitud hacia la posibilidad de resolver un problema matemático en forma independiente y sus maneras de pensar matemáticamente promovieron sus investigaciones.

Estar aculturado a las matemáticas: ¿Debería ser unas características de los profesores de matemáticas?

Aunque la solidez de las actitudes de los profesores chinos hacia las matemáticas ha sido un foco particular en este capítulo, está también fue evidente en los otros capítulos. El lector puede haberse percatado de que en los cuatros capítulos, las citas de los profesores chinos han sido, generalmente más extensas que las de los profesores norteamericanos. De hecho, los profesores norteamericanos no dijeron menos que sus contrapartes chinas durante las entrevistas pero, lo que dijeron era menos relevante y menos organizado matemáticamente.

Una razón para la elocuencia de los profesores chinos podría ser su estilo de enseñanza puesto que tiende a ser más similar a una cátedra. Cada vez que enseñan un nuevo concepto o habilidad matemática, necesitan preparar una pequeña "charla", una presentación completa del concepto o habilidad. Estas pequeñas cátedras son transversales en su enseñanza de las matemáticas y componen un parte significativamente de ella, de hecho, los entrena para hablar de manera organizada.

Sin embargo, existe otro factor profundamente enraizado que aparentemente desempeña un papel aún más importante que es la aculturización de los profesores de matemáticas chinos con la disciplina. Obviamente, estos profesores no son matemáticos. La mayoría de ellos ni siquiera ha sido expuesta a alguna rama de las matemáticas más que álgebra y geometría elemental. No obstante, tendieron a pensar de manera rigurosa, a usar términos matemáticos para discutir un tema y a justificar sus opiniones con argumentos matemáticos. Todas estas características contribuyeron a la elocuencia matemática de los profesores chinos.

La relación entre el conocimiento disciplinario de los profesores y las respuestas positivas a las propuestas de los alumnos: ¿Cómo se puede promover y apoyar una investigación matemática?

El momento en que un alumno trae una idea, o afirmación nueva es una oportunidad especial para promover el aprendizaje e investigación matemática. Ciertamente es necesario hacerle comentarios positivos al alumno y alabar su iniciativa. Sin embargo, los comentarios positivos por sí mismos no son suficientes para promover un aprendizaje e investigación matemáticos significativos. El alumno necesitaría el apoyo particular de un profesor para continuar con el aprendizaje y la investigación matemática. En este capítulo, hemos visto que un profesor puede apoyar al alumno dándole explicaciones acerca de la afirmación, mostrándole cómo examinar la afirmación o guiándolo paso a paso en su propia investigación. No obstante, todas estas formas de apoyo para el aprendizaje de las matemáticas, se basan en el propio conocimiento del profesor sobre la investigación matemática. Los profesores que no sabían cómo conducir dicha investigación, aunque alabarían a la alumna y le pedirían que trajera más ejemplos, sólo mostraron formas de apoyo demasiado vagos y muy generales para promover un verdadero aprendizaje matemático. Para dotar a los alumnos con pensamiento matemático, los profesores deben primero, poseer ellos dicho pensamiento.

Según lo que he presentado en los cuatro capítulos de datos, uno podría esperar que concluyera que los profesores tendieron a no promover o quizás sean incapaces de promover un aprendizaje matemático más allá de su propia comprensión. ¿Es cierto que el aprendizaje matemático de los alumnos no puede ir más allá del conocimiento matemático de sus profesores? Le hice esta pregunta a la Srta. Lin, mi propia profesora de educación primaria. Aunque no fue incluida en mi investigación, me encontré con ella cuando visité mi escuela primaria al recolectar los datos para este estudio. Después de decirme orgullosamente que algunos de sus alumnos de sexto básico recién habían ganado un concurso matemático, dijo: "¡Lo lograron! Resolvieron problemas que nunca habían aprendido antes. ¡Resolvieron problemas que, incluso yo misma no sé hacer! Estoy orgullosa de ellos pero, también estoy orgullosa de mí. Porque estoy convencida de que soy yo la que alentó su capacidad para explorar nuevos problemas por sí mismos, ¡la capacidad para superar a su maestro!".

Si la Srta. Lin estaba en lo cierto, pareciera que alumnos que son capaces de explorar problemas por sí mismos, pueden a veces superar a su profesor. Sin embargo, ¿qué tipo de profesor puede promover en los alumnos la capacidad para explorar nuevos problemas matemáticos? ¿Deben dichos profesores tener primero esta capacidad? Hasta ahora, no se ha estudiado esta pregunta. A pesar de eso, mi conjetura es que sólo los profesores aculturados hacia las matemáticas pueden promover la capacidad de realizar investigación matemática en sus alumnos y que, para promover tal capacidad en los alumnos, los profesores deben tenerla primero.

RESUMEN

En este capítulo se investigó cómo los profesores abordaron una idea matemática nueva para ellos: la relación entre el perímetro y el área de un rectángulo. Dos aspectos del conocimiento disciplinario contribuyeron significativamente a una estrategia exitosa: el conocimiento de temas relacionados a la idea y las actitudes matemáticas. Al contrario de los capítulos anteriores, la presencia o ausencia de actitudes matemáticas fue un factor significativo para completar la labor de este capítulo.

Los profesores norteamericanos no mostraron mayores deficiencias en su conocimiento de temas relacionados a la idea nueva. Más de la mitad de ellos conocía las fórmulas para calcular el área y perímetro de un rectángulo. Sin embargo, los profesores norteamericanos fueron particularmente débiles en su actitud general hacia las matemáticas. La mayoría se comportó en forma no matemática al abordar la idea nueva y no investigó en forma independiente. Sólo la Srta. Faith, una profesora principiante, investigó la idea nueva y llegó a una solución correcta. Por el contrario, la mayoría de los profesores chinos investigó la idea nueva en forma independiente pero, cerca de una quinta parte no llegó a una solución correcta, debido a estrategias problemáticas.

Capítulo 5

Conocimiento disciplinario de los profesores: Comprensión profunda de las matemáticas fundamentales

En los cuatro capítulos anteriores se describió el conocimiento que tenían profesores chinos y norteamericanos sobre cuatro temas pertenecientes a las matemáticas elementales. Hubo un sorprendente contraste en el conocimiento de los dos grupos de profesores estudiados. Los 23 profesores norteamericanos "sobre el promedio" tendieron a enfocarse en el procedimiento. La mayoría demostró una sólida competencia, en cuanto a los algoritmos, en los dos temas iniciales (sustracción de números enteros y multiplicación) pero, tuvieron dificultades con los dos temas más avanzados la división por fracciones y el área y perímetro de un rectángulo). Por otra parte, los 72 profesores chinos, aunque venían de escuelas cuya calidad iba de excelente a mediocre, demostraron tanto competencia en los algoritmos como una comprensión conceptual de los cuatro temas. Este capítulo está dedicado a la discusión del conocimiento que poseen los profesores en estos cuatro temas.

Considerado como un todo, el conocimiento que tenían los profesores chinos parecía claramente coherente mientras que el de los profesores norteamericanos era claramente fragmentado. Aunque los cuatro temas de este estudio se encuentran en varios niveles y subáreas de las matemáticas elementales, mientras entrevistaba a los profesores chinos pude percibir interconexiones entre sus discusiones de cada tema. Por el contrario, a partir de las respuestas que dieron los profesores norteamericanos es difícil ver alguna conexión entre los cuatro temas. Curiosamente, la fragmentación del conocimiento matemático de los profesores norteamericanos coincide con la fragmentación del currículum y enseñanza de las matemáticas en los EE.UU. descubierta por otros investigadores como una de las mayores explicaciones para el aprendizaje poco satisfactorio de las matemáticas en ese país (Schmidt, McKnight, & Raizen, 1997; Stevenson & Stigler, 1992). No obstante, desde mi perspectiva, esta fragmentación y coherencia son efectos, no causas. Los currículos, la enseñanza y el conocimiento de los profesores reflejan los terrenos de la matemáticas elementales en los EE.UU. y en China. Lo que generó la coherencia del conocimiento de los profesores chinos, de hecho, es la sustancia matemática de su conocimiento.

UNA IMAGEN DEL CONOCIMIENTO DE LOS PROFESORES CHINOS A TRAVÉS DE LOS TEMAS ¿CUÁL ES SU SUSTANCIA MATEMÁTICA?

Veamos en perspectiva las respuestas que dieron los profesores chinos a las preguntas de la entrevista. Esto revelará que sus discusiones compartían algunas características interesantes que estaban presentes en todo su conocimiento matemático y se hallaron rara vez, si es que alguna vez, en las respuestas de los profesores norteamericanos.

Encontrar la base matemática de un algoritmo

Durante sus entrevistas, los profesores chinos a menudo citaron un antiguo dicho para introducir más discusiones acerca de un algoritmo, "saber cómo y también saber porqué". Al adoptar este dicho, que alienta a la gente a descubrir una razón detrás de una acción, los profesores le dan un sentido nuevo y específico: *saber cómo realizar un algoritmo y saber porqué tiene sentido matemáticamente*. En la aritmética hay varios algoritmos, de hecho, a menudo se enseña que saber aritmética significa ser diestro para usar estos algoritmos pero, no obstante, desde la perspectiva de los profesores chinos, saber un conjunto de reglas para resolver un problema en un número finito de pasos dista mucho de ser suficiente, pues uno también debe saber porqué la secuencia de pasos en el cálculo tiene sentido. Para el algoritmo de la resta con reserva, mientras la mayoría de los profesores norteamericanos estaba satisfecha con la seudoexplicación de "pedir prestado", los profesores chinos explicaron que la base del cálculo es "descomponer una unidad de mayor valor"[1]. En el tema de la multiplicación con

[1] En la enseñanza, los profesores chinos tienen a utilizar términos matemáticos en sus explicaciones verbales. Términos como *sumando, minuendo, sustraendo, diferencia, multiplicando, multiplicador, producto, producto parcial, dividendo, divisor, cuociente, operación inversa* y *componer* y *descomponer,* se usan frecuentemente. Por ejemplo, los profesores chinos no expresan la versión aditiva de la propiedad conmutativa como "no importa el orden en que se suman dos números" . Sino que, dicen "al sumar dos sumandos, si intercambiamos sus lugares en la expresión, la suma permanecerá igual".

varias cifras, mientras la mayoría de los profesores norteamericanos estaba contenta con la regla de "alinear con el número por el que estás multiplicando", los profesores chinos exploraron los conceptos de valor posicional y sistema de valor posicional para explicar porqué los productos parciales no se alinean en la multiplicación como los sumandos en la adición. Para el cálculo de la división por fracciones, para el que los profesores norteamericanos empleaban "invertir y multiplicar", los profesores chinos se refirieron a "dividir por un número es equivalente a multiplicar por su inverso multiplicativo" como la base lógica para este algoritmo aparentemente arbitrario.

La preferencia por preguntar "¿por qué tiene sentido?" es el primer peldaño para una comprensión conceptual de las matemáticas. Más aún, explorar las razones matemáticas que fundamentan los algoritmos llevó a los profesores chinos hacia ideas más importantes de la disciplina. Por ejemplo, la base lógica de la resta con reserva, "descomponer una unidad de mayor valor" se conecta con la idea de "componer una unidad de mayor valor" que es la base lógica de la suma con reserva. Por ende, una mayor investigación de la composición y descomposición de una unidad de mayor valor, podría llevar a la idea de "tasa de composición y descomposición de una unidad de mayor valor", que es una idea básica de la representación numérica. En forma similar, el concepto de valor posicional está conectado con ideas más profundas como el sistema de valor posicional y la unidad básica de un número. Así, explorar el "porqué" que subyace al "cómo" lleva paso a paso hacia las ideas básicas del núcleo de las matemáticas.

Justificar una explicación con una derivación simbólica

Por otro lado, la explicación verbal de una razón matemática que sustenta un algoritmo, les pareció necesaria, pero no suficiente a los profesores chinos. Como se mostró en los capítulos anteriores, después de dar una explicación, los profesores chinos tendieron a justificarla con una derivación simbólica. Por ejemplo, en el caso de la multiplicación con varias cifras, algunos de los profesores norteamericanos explicaron que el problema 123 x 645 se puede separar en tres "problemas pequeños". 123 x 600, 123 x 40 y 123 x 5. Los productos parciales entonces, son 73800, 4920 y 615 en lugar de 738, 492 y 615. En comparación con el énfasis en la "alineación" que puso la mayoría de los profesores norteamericanos, esta explicación es conceptual. Sin embargo, los profesores chinos dieron explicaciones que eran incluso más rigurosas. Primero, tendieron a señalar que la propiedad distributiva[2] es la base que sustenta el algoritmo. Luego, como se describió en el capítulo 2, mostraron cómo se puede derivar el algoritmo a partir de la propiedad distributiva, ilustrando cómo funciona dicha propiedad en esta situación y porqué tiene sentido:

$$\begin{aligned} 123 \times 645 &= 123 \times (600 + 40 + 5) \\ &= 123 \times 600 + 123 \times 40 + 123 \times 5 \\ &= 73800 + 4920 + 615 \\ &= 78720 + 615 \\ &= 79335 \end{aligned}$$

Para el tema de la división por fracciones, las representaciones simbólicas, que elaboraron los profesores chinos, fueron aún más sofisticadas. Se basaron en conceptos que "los alumnos han aprendido" para demostrar la equivalencia de $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ y $1\frac{3}{4} \times \frac{2}{1}$ de varias formas. La siguiente es una demostración basada en la relación entre una fracción y una división ($\frac{1}{2} = 1 : 2$).

$$\begin{aligned} 1\tfrac{3}{4} : \tfrac{1}{2} &= 1\tfrac{3}{4} : (1 : 2) \\ &= 1\tfrac{3}{4} : 1 \times 2 \\ &= 1\tfrac{3}{4} \times 2 : 1 \\ &= 1\tfrac{3}{4} \times (2 : 1) \\ &= 1\tfrac{3}{4} \times \tfrac{2}{1} \end{aligned}$$

2 En el currículum matemático chino, las versiones aditivas de las propiedades conmutativa y asociativa se presentan primero en tercero básico. Las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la multiplicación se presentan en cuarto básico, como alternativas al método estándar. Por ejemplo, el texto escolar dice de la propiedad conmutativa de la suma: "cuando dos números se suman, si se intercambian las posiciones de los sumandos, la suma permanece igual. Esto se llama propiedad conmutativa de la suma. Si las letras *a* y *b* representan dos sumandos arbitrarios, podemos escribir la propiedad conmutativa de la suma como: $a+ b= b+ a$. El método que aprendimos de revisar una suma intercambiando el orden de los sumando se basa en esta propiedad. (Beijing, Tianjin, *Shangai*, y Zhejiang Associate Group for Elementary Mathematics Teaching Material Composing, 1989, pp. 82-83). El texto escolar ilustra cómo ambas propiedades se pueden usar como "una forma rápida de cálculo". Por ejemplo, los alumnos aprenden que una forma más rápida de resolver 258 + 791 + 642 es transformarlo en (258 + 642) + 791, una forma más rápida de resolver1646 - 248 - 152 es transformarlo en 1646 - (248 + 152):

Una demostración basada en la regla de "mantener el valor del cuociente" es:

$$1\tfrac{3}{4} : \tfrac{1}{2} = (1\tfrac{3}{4} \times \tfrac{2}{1}) : (\tfrac{1}{2} \times \tfrac{2}{1})$$

$$= (1\tfrac{3}{4} \times \tfrac{2}{1}) : 1$$

$$= 1\tfrac{3}{4} \times \tfrac{2}{1}$$

$$= 3\tfrac{1}{2}$$

Más aún, como se ilustró en el capítulo, los profesores chinos emplearon frases matemáticas para ilustrar varias formas no estándares de resolver el problema $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$, así como a derivar estas soluciones. Las representaciones simbólicas se usan ampliamente en las aulas chinas. Como informó la Prof. Li, sus alumnos de primero básico emplearon frases matemáticas para describir su propia forma de reagrupación: 34 – 6 = 34 – 4 – 2 = 30 – 2 = 28. Otros profesores chinos en este estudio también hicieron referencia a incidentes similares.

Los investigadores han descubierto que los alumnos de enseñanza primaria de los EE.UU. a menudo ven el signo de igualdad como "una señal para hacer algo" (ver por ejemplo Kieran, 1990, p 100). Esto me recuerda una discusión que tuve con una profesora de enseñanza primaria norteamericana. Le pregunté por qué aceptaba que los alumnos trabajaran como " 3 + 3 x 4 = 12 = 15." Ella me dijo: "bueno, hicieron bien el orden del cálculo y llegaron a la respuesta correcta, ¿qué tiene de malo?" No obstante, desde la perspectiva de los profesores chinos, la semántica de la operaciones matemáticas se debe representar rigurosamente. Es inaceptable tener dos valores distintos a ambos lados de un signo igual. Como le dijo una vez mi profesora de enseñanza primaria a su curso: "el signo igual es el alma de las operaciones matemáticas". De hecho, cambiar uno o ambos lados de un signo igual para ciertos propósitos mientras se conserva la relación de "igualdad" es el "secreto" de las operaciones matemáticas.

Los profesores eran hábiles para agregar y quitar paréntesis y para cambiar el orden de las operaciones en una frase matemática. Basándose en unas pocas propiedades simples como las tres propiedades básicas, la regla de conservar el valor del cuociente y el significado de las fracciones, desarrollaron inteligentes justificaciones simbólicas de los algoritmos aritméticos que vieron en las entrevistas.

Como Schoenfeld (1985) indicó, la "demostración", como forma de explicación, es obligatoria, un estándar aceptado de la disciplina matemática.

Los profesores chinos tendieron a justificar las afirmaciones matemáticas tanto en forma verbal como simbólica. Las justificaciones verbales tendieron a preceder a las simbólicas pero las últimas, tendieron a ser más rigurosas. Después de que los profesores chinos informaron sus investigaciones sobre la afirmación de la alumna, como se discutió en el capítulo 4, todos justificaron sus ideas. Todos aquellos que presentaron una idea no válida sólo dieron justificaciones verbales. Si hubieran utilizado representaciones simbólicas, sospecho que algunos hubieran evitado o al menos habrían descubierto la falla de sus argumentos.

Varios enfoques para un procedimiento de cálculo: Flexibilidad enraizada en la comprensión conceptual

Aunque las demostraciones y explicaciones deben ser rigurosas, las matemáticas no son rígidas. Los matemáticos usan y valoran distintos enfoques para resolver problemas (Polya, 1973) incluso los de aritmética. Dowker (1992) les pidió a 44 matemáticos profesionales que calcularan mentalmente los resultados de productos y cuocientes de 10 problemas de multiplicación y división con números enteros y decimales. El resultado más sorprendente de su investigación "fue el número y la variedad de estrategias específicas de cálculo que usaron los matemáticos". "Los matemáticos tendieron a usar estrategias que involucran la comprensión de las propiedades y relaciones aritméticas" y "rara vez la estrategia de proceder según el algoritmo". "

"Resolver un problema de varias maneras" es también una actitud de los profesores chinos. Para los cuatro temas, discutieron tanto estrategias estándares como alternativas. Para el tema de la resta, describieron al menos tres formas de reagrupar, incluyendo la reagrupación de los sustraendos. Para el tema de la multiplicación con varias cifras, mencionaron al menos dos explicaciones del algoritmo. Un profesor mostró seis formas de alinear los productos parciales. Para el tema de la división con fracciones, los profesores chinos demostraron al menos cuatro maneras para demostrar el algoritmo estándar y tres métodos alternativos de cálculo.

Para todos los temas aritméticos, los profesores chinos indicaron que, aunque el algoritmo estándar se puede usar en todos los casos, puede no ser el mejor método para cada caso. Aplicar un algoritmo y sus varias versiones en forma flexible le permite a uno obtener la mejor solución para cada caso. Por ejemplo, los profesores chinos señalaron que existen varias formas de calcular $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$. Usar decimales, la propiedad distributiva u otras ideas matemáticas, todas estas alternativas eran más rápidas y más fáciles que el algoritmo estándar. Poder calcular de muchas maneras significa que uno ha trascendido la formalidad de un algoritmo y ha llegado a la esencia de la operación matemática, los principios e ideas matemáticas que lo subyacen. La razón, por la que un problema se puede resolver de varias formas, es que las matemáticas no consisten en reglas aisladas, sino ideas conectadas. Poder y tender a resolver un problema en más de una forma, por ende, revela la capacidad y preferencia por hacer conexiones entre las áreas y temas matemáticos.

Abordar un tema de varias maneras, elaborar argumentos para varias soluciones, comparar las soluciones y encontrar la mejor, de hecho, es una fuerza constante en el desarrollo de las matemáticas. Una operación o rama matemática avanzada ofrece generalmente una forma más sofisticada de resolver problemas. Por ejemplo, la multiplicación es una operación más sofisticada que la suma para resolver algunos problemas. Algunos métodos algebraicos para resolver problemas son más sofisticados que los aritméticos. Resolver un problema de varias maneras sirve como un lazo que conecta varios conocimientos matemáticos. La visión que tienen los profesores chinos de las cuatro operaciones aritméticas básicas muestra cómo ellos logran unificar todo el campo de las matemáticas elementales.

Relaciones entre las cuatro operaciones básicas: La "Red de caminos" que conecta el campo de las matemáticas elementales

La aritmética, "el arte del cálculo", consiste en operaciones numéricas. Empero, los profesores norteamericanos y chinos parecían ver estas operaciones en forma distinta. Los profesores norteamericanos tendían a enfocarse en el algoritmo particular asociado a una operación, el algoritmo de la resta con reserva, el algoritmo de la multiplicación con varias cifras y el algoritmo de la división por fracciones. Los profesores chinos, por otra parte, estaban más interesados en las operaciones mismas y sus relaciones. Particularmente, estaban interesados en formas más rápidas y más fáciles de hacer un determinado cálculo, cómo se conectaban los significados de las cuatro operaciones y cómo el significado y la relación de las operaciones se representan en un subconjunto de números (números enteros, fracciones y decimales).

Cuando enseñan la resta con descomposición de una unidad de mayor valor, los profesores chinos parten de la suma con composición de una unidad de mayor valor. Cuando discutieron la "regla de alineación" en la multiplicación con varias cifras, la compararon con la regla de alineación de la adición con varias cifras. Al representar el significado de la división, describieron cómo los modelos de división derivan del significado de la multiplicación. Los profesores también notaron cómo la introducción de nuevos conjuntos de números, las fracciones, trae consigo nuevas características de las operaciones aritméticas que previamente estaban restringidas a los números enteros. En sus discusiones de la relación entre el área y perímetro de un rectángulo, los profesores chinos nuevamente conectaron el tema de la entrevista con operaciones aritméticas.

En las discusiones de los profesores chinos, se hicieron aparentes dos tipos de relaciones que conectan las cuatro operaciones básicas. Una podría llamarse "operación derivada". Por ejemplo, la multiplicación es una operación derivada de la operación de adición. Resuelve ciertos tipos complicados de adición, de forma más fácil[3]. La otra relación es operación inversa. El término "operación inversa" nunca fue mencionado por los profesores norteamericanos pero, los profesores chinos lo usaron a menudo. La resta es la inversa de la suma y la división es la inversa de la multiplicación. Estos dos tipos de relaciones conectan estrechamente las cuatro operaciones. Puesto que todos los temas de las matemáticas elementales se relacionan con las cuatro operaciones, la comprensión de las relaciones entre las cuatro operaciones se vuelve un sistema de caminos que conecta todas las matemáticas elementales[4]. Con este sistema de caminos, uno puede ir a cualquier parte dentro del campo.

PAQUETES DE CONOCIMIENTOS Y SUS PARTES CLAVES: ENTENDER LA COHERENCIA LONGITUDINAL EN EL APRENDIZAJE

Otra característica del conocimiento de los profesores chinos, que no se encontró en los norteamericanos, fue sus bien desarrollados "paquetes de conocimientos". Las cuatro características antes mencionadas se relacio-

3 Aunque las cuatro preguntas de la entrevista no dieron espacio para discutir la relación entre suma y multiplicación, de hecho, los profesores chinos lo consideran un concepto muy importante en su enseñanza cotidiana.

4 Los dos tipos de relaciones entre las cuatro operaciones básicas, de hecho, se aplican también a todas las operaciones avanzadas de la disciplina matemática. Por ende, La "red de caminos" de las matemáticas elementales, es el epítome de la "red de caminos" de toda la disciplina.

nan con la comprensión del área de las matemáticas elementales, que tienen los profesores. Por el contrario, los paquetes de conocimientos revelan la comprensión que tienen los profesores, de los procesos longitudinales de apertura y cultivo de dicha área en la mente de los alumnos. La aritmética, como área intelectual, fue creada y cultivada por los seres humanos. Enseñar y aprender aritmética, crear condiciones para que jóvenes seres humanos puedan reconstruir esta área en sus mentes, es la preocupación de los profesores de matemáticas. Los sicólogos se han dedicado a estudiar cómo los alumnos aprenden matemáticas. Los profesores de matemáticas tienen su propia teoría acerca del aprendizaje de las matemáticas.

Los tres modelos de paquetes de conocimientos, derivados de las discusiones de los profesores chinos, de la resta con reserva, la multiplicación con varias cifras y la división por fracciones, comparten una estructura similar. Todos tienen una secuencia en el centro y un “círculo” de temas relacionados conectados a los temas de la secuencia. La secuencia del paquete de resta va de la suma y resta dentro de la decena, a la suma y resta dentro de la veintena, a la resta con reserva de números entre 20 y 100 y, después, a la resta de números grandes con reserva. La secuencia del paquete de multiplicación incluye la multiplicación por números de una cifra, multiplicación por números de dos cifras y la multiplicación por números de tres cifras. La secuencia del paquete del significado de la división por fracciones va desde el significado de la suma, al significado de la multiplicación con números enteros, al de la multiplicación con fracciones y al del significado de la división con fracciones. Los profesores creen que estas secuencias son las rutas principales a través de las que se desarrolla el conocimiento y la habilidad para los tres temas.

No obstante, dichas secuencias lineales no se desarrollan solas sino que se sustentan en otros temas. Por ejemplo, en el paquete de la resta, la “suma y resta dentro de la decena” se relaciona con otros tres temas: la composición de 10, componer y descomponer unidades de mayor valor y la suma y resta como operaciones inversas. “La resta con reserva de números entre 20 y 100”, el tema que surgió en las entrevistas, también se sustenta en cinco puntos: composición de números dentro de la decena, tasa de composición de una unidad de mayor valor, composición y descomposición de una unidad de mayor valor, suma y resta como operaciones inversas y resta sin reserva. A la vez, un elemento del círculo se puede relacionar con varias partes del paquete. Por ejemplo, el “componer y descomponer una unidad de mayor valor” y la “suma y resta como operaciones inversas” están ambas relacionadas a las otras cuatro partes. Con el apoyo de estos temas, el desarrollo de las secuencias centrales se vuelve más significativo matemáticamente y se enriquece en forma conceptual.

Los profesores no consideran que todos los elementos tengan el mismo estatus. Cada paquete contiene partes "clave" que "pesan" más que otros miembros. Algunas de las partes claves se ubican en la secuencia lineal y otras están en el "círculo". Los profesores dieron varias razones por las que consideraron ciertas partes del conocimiento como "claves". Prestaron particular atención a la primera ocasión en que se presenta un concepto o capacidad. Por ejemplo, el tema de "adición y sustracción dentro de la veintena" se considera un concepto clave para aprender la resta con reserva. El tema de la "multiplicación por números de dos cifras" se consideró un paso importante en el aprendizaje de la multiplicación con varias cifras. Los profesores chinos creen que si un alumno aprende un concepto en forma acabada la primera vez que se presenta, uno "obtendrá el doble de resultado con la mitad del esfuerzo en aprendizajes posterior". De otra manera, uno "obtendría la mitad del resultado con el doble de esfuerzo".

Otro tipo de parte clave de un paquete de conocimiento es un "nudo conceptual". Por ejemplo, al referirse al significado de la división por fracciones, los profesores chinos se refirieron al significado de la multiplicación con fracciones. Ellos creen que éste ata cinco conceptos importantes relacionados con el significado de la división por fracciones: significado de la multiplicación, modelos de división por números enteros, concepto de fracción, concepto de entero y el significado de multiplicación con números enteros. Una comprensión acabada del significado de la multiplicación con fracciones, entonces, permitirá a los alumnos alcanzar una comprensión del significado de la división por fracciones. Por otra parte, los profesores también creían que explorar el significado de la división por fracciones es una buena oportunidad para repasar y profundizar la comprensión de estos cinco conceptos.

En los paquetes de conocimiento, los temas procedimentales y conceptuales estaban entretejidos. Los profesores que tenían una comprensión conceptual del tema y trataron de promover el aprendizaje conceptual de los alumnos no ignoraron para nada el conocimiento procedimental. De hecho, desde su perspectiva, una comprensión conceptual nunca está separada de los procedimientos correspondientes donde "vive" la comprensión.

Los profesores chinos también creen que es muy importante para un profesor conocer el campo completo de las matemáticas elementales, así como todo el proceso de su aprendizaje. El Prof. Mao dijo:

> *Como profesor de matemáticas, uno necesita saber la ubicación de cada parte del conocimiento en todo el sistema matemático, su relación con los conocimientos previos.* Por ejemplo, este año estoy enseñando a alumnos de cuarto básico. Cuando abro el texto escolar, debería saber cómo se conectan

> los temas que allí aparecen con el conocimiento que se enseña en primero, segundo y tercero básico. Cuando enseño multiplicación con tres cifras, sé que mis alumnos han aprendido las tablas de multiplicación, multiplicación con una cifra dentro de la centena y multiplicación con multiplicador de dos cifras. Puesto que han aprendido a multiplicar con un multiplicador de dos cifras, cuando enseño multiplicación con un multiplicador de tres dígitos, sólo los dejo explorarla por sí mismos. Primero les doy varios problemas con un multiplicador de dos cifras. Luego, presento un problema con multiplicador de tres dígitos y hago que los alumnos piensen cómo resolverlo. Hemos multiplicado por un dígito en el lugar de las unidades y en el de las decenas, ahora vamos a multiplicar por un dígito en el lugar de las centenas, ¿qué podemos hacer? ¿dónde vamos a poner el producto y por qué? Dejémoslos pensar acerca de eso. Luego, el problema se resolverá fácilmente. Dejaría que ellos, en lugar de mí, explicaran el problema. *Por otra parte, tengo que saber qué conocimiento se construirá sobre lo que estoy enseñando hoy* (se agregaron las cursivas).

LAS MATEMÁTICAS ELEMENTALES COMO MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

La discusión de los profesores chinos presentó una visión sofisticada y coherente de las matemáticas elementales. Mostró que las matemáticas elementales no son una simple colección de hechos numéricos y algoritmos de cálculo. Mucho más que eso, es un campo intelectualmente exigente, desafiante y emocionante, fundamento sobre él cual mucho se puede construir. Las matemáticas elementales son las matemáticas fundamentales. El término *fundamental* tiene tres significados asociados: fundacional, primario y elemental. Las matemáticas son un área de las ciencias que se preocupa de las relaciones espaciales y numéricas, en la que el razonamiento se basa en estas relaciones. Históricamente, la aritmética y la geometría eran las ramas principales de la disciplina matemática. Hoy en día, aunque el número de ramas de la disciplina ha aumentado y el área de la disciplina se ha expandido, el estatus fundacional de la aritmética y la geometría en las matemáticas, no ha cambiado. Ninguna de las nuevas ramas, ya sea pura o aplicada, opera sin las reglas y habilidades matemáticas básicas que se establecen en la aritmética y la geometría. Las matemáticas de educación básica, que se componen de aritmética y geometría primarias, son por ende la base de la disciplina sobre las que se construyen las ramas avanzadas.

El término *primaria* se refiere a otra característica de las matemáticas elementales. Ellas contienen los rudimentos de muchos conceptos importantes en ramas más avanzadas de la disciplina. Por ejemplo, el álgebra es una manera de reagrupar elementos conocidos y desconocidos de una ecuación de manera de poder conocer la incógnita. Como hemos visto en los capítulos anteriores, las tres propiedades básicas con las que se resuelven estas ecuaciones (conmutativa, distributiva y asociativa) tienen naturalmente una raíz en la aritmética. Las ideas de conjunto, correspondencia uno a uno y orden están implícitas en el contar. Las operaciones de conjuntos como la unión y el producto cartesiano se relacionan al significado de la suma y multiplicación de números enteros. Las ideas básicas de Cálculo están implícitas en la base lógica del cálculo del área de un círculo en geometría elemental[5].

No obstante, los rasgos fundacionales y primarios de las matemáticas se presentan en un formato elemental ya que se encuentran al comienzo del aprendizaje matemático de los alumnos, por eso parece tan sencillo y fácil. Las ideas aparentemente simples enclavadas en la mente de los alumnos en esta etapa, durarán a lo largo de su aprendizaje matemático. Por ejemplo, en aprendizajes posteriores, los alumnos nunca borrarán los conceptos de ecuación aprendidos de "1 + 1 = 2", aunque sean cambiados y enriquecidos.

Desde la perspectiva de la obtención de una competencia matemática, enseñar matemáticas elementales, no significa llevar a los alumnos meramente al final de la aritmética o al principio de la etapa previa al álgebra. Más bien, significa darles una base sobre la que construir futuros aprendizajes matemáticos.

Los académicos norteamericanos han afirmado que los conceptos avanzados se pueden presentar de manera intelectualmente confiable a los alumnos de enseñanza primaria. Hace tres décadas, Bruner afirmó que las ideas de las matemáticas avanzadas tales como topología, geometría proyectiva, teoría de las probabilidades y teoría de conjuntos se pueden presentar a alumnos de enseñanza primaria (Bruner1960/1977). Su propuesta fue nue-

5 Cuando los profesores chinos enseñan la fórmula para calcular el área de un círculo, llevan un disco de papel a la clase. La mitad del disco tiene un color y la otra mitad, otro. Primero, se corta el disco en dos mitades. Luego, las dos mitades se cortan en pedazos pequeños con forma de porciones de torta con los extremos conectados. Los dos medios círculos se abren y se calzan para formar una región similar a un rectángulo: . Los profesores inspiran a los alumnos para que imaginen que subdividen el disco en más rebanadas para que la región se parezca más a un rectángulo. Después, basándose en la fórmula del área del rectángulo, los estudiantes aprenden la base lógica de la fórmula del área de un círculo. Este método de aproximar el área de un círculo se conoció en el siglo XVII (ver Smith & Mikami, 1914, p. 131).

vamente enunciada hace poco por Hirsch (1996). Kaput, Steen y sus colegas han sugerido una “organización por ejes” de las matemáticas escolares (Kaput & Nemirovsky, 1995; Steen, 1990). Ellos criticaron la organización tradicional “por capas” puesto que “recoge muy pocos ejes” (Ej.: aritmética, geometría y álgebra) y los organiza en forma horizontal para formar el currículum” (Steen, p.4). En su lugar, propusieron una estructura longitudinal “con una mayor continuidad vertical para conectar las raíces de la matemáticas con sus ramas, en la experiencia educacional de los niños” (Steen, p. 4) ilustrada por un árbol con raíces que representan temas como “dimensión”, “espacio”, “cambio y variación”, etc. (Kaput & Nemirovsky, p. 21).

No obstante, los profesores con una comprensión conceptual en este estudio, pueden no ser tan radicales como Kaput y Steen. Como se mostró en las entrevistas hechas a los profesores, las matemáticas elementales, constituidas por la aritmética y la geometría primaria, ya contienen importantes ideas matemáticas. Para estos profesores, un “currículum organizado en forma horizontal” puede poseer también “continuidad vertical”. La aritmética puede tener también “múltiples representaciones”, “matemáticas serias” y “conversaciones verdaderamente matemáticas”[6]. Considero que es más precisa la metáfora que los profesores chinos utilizaron para ilustrar las matemáticas escolares. Ellos creen que las matemáticas elementales son la base para el futuro aprendizaje matemático y contribuirán a la vida futura de los estudiantes. El aprendizaje posterior de los alumnos es como un edificio con varios pisos, puede que los cimientos sean invisibles desde los pisos superiores pero ellos son los que los sustentan y hacen que todos los pisos (ramas) sean coherentes. La aparición y desarrollo de nuevas matemáticas no debe considerarse una negación de las matemáticas fundamentales, sino nos debe guiar a una comprensión aún mejor de las matemáticas elementales, de su poderoso potencial, así como de las semillas conceptuales de las ramas avanzadas.

COMPRENSIÓN PROFUNDA DE LAS MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

Sin duda, es la sustancia matemática de las matemáticas elementales lo que permite su comprensión coherente. No obstante, la comprensión de las matemáticas elementales no siempre es coherente. Desde una perspec-

6 Las “representaciones múltiples”, las “conversaciones genuinamente matemáticas” y la “comprensión cualitativa de los modelos matemáticos” son características de la enseñanza matemática que defienden Kaput y sus colegas (Kaput & Nemirovsky, 1995).

tiva procedimental, los algoritmos tienen poca o ninguna conexión con otros temas y están aislados entre sí. Considerando los cuatro temas estudiados como ejemplos, la resta con reserva no tiene nada que ver con la multiplicación con varias cifras ni con la división por fracciones o con el área y perímetro de un rectángulo.

La figura 5.1 ilustra una típica comprensión procedimental de los cuatro temas. Las letras R, M, D y G representan los cuatro temas: resta con reserva, multiplicación con varias cifras, división con fracciones y el tema de geometría (cálculo de área y perímetro). Los rectángulos representan conocimiento procedimental de estos temas. Los óvalos representan otros conocimientos procedimentales relacionados con estos temas. Los trapezoides debajo de los rectángulos representan comprensiones seudoconceptuales de cada tema. Las líneas punteadas representan elementos que faltan. Nótese que las comprensiones de los distintos temas no están conectadas.

En la figura 5.1 los cuatro temas son esencialmente independientes y se incluyen pocos elementos en cada paquete de conocimientos[7]. Las explicaciones seudoconceptuales de los algoritmos son una característica de comprensión que es sólo procedimental. Algunos profesores inventaron explicaciones arbitrarias, otros simplemente verbalizaron el algoritmo. Pero, incluso inventar o citar una explicación seudoconceptual requiere familiaridad con el algoritmo. Los profesores que apenas podían realizar un algoritmo tendieron a no ser capaces de explicarlo o conectarlo con otros procedimientos, como se vio en algunas respuestas para la división por fracciones y los temas de geometría. Con paquetes de conocimiento aislados y subdesarrollados, la comprensión matemática de un profesor con una perspectiva procedimental es fraccionaria.

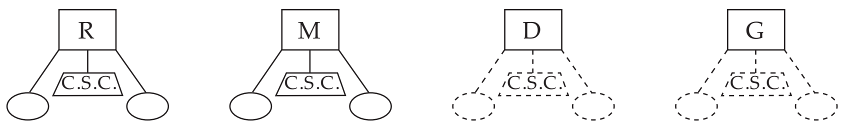


Fig. 5.1. Conocimiento procedimental
que tienen los profesores de los cuatro temas.

7 Dado un tema, un profesor tiende a ver otros que se relacionan con su aprendizaje. Si es procedimental, un profesor podría ver una explicación para él, en cambio, si es conceptual, el profesor podría ver un procedimiento o concepto relacionados. Esta tendencia inicia la organización de un "paquete de conocimientos" bien desarrollado. Por ende, uso aquí el término "paquete de conocimientos" para el grupo de temas que los profesores tienden a ver alrededor del tema que enseñan.

No obstante, desde una perspectiva conceptual, los cuatro temas están conectados, relacionados por los conceptos matemáticos que comparten. Por ejemplo, el concepto de valor posicional fundamenta los algoritmos de la resta con reserva y de la multiplicación con varias cifras. El concepto de valor posicional, entonces, se vuelve una conexión entre los dos temas. El concepto de operaciones inversas contribuye a la base lógica de la resta con reserva así como también a la explicación del significado de la división por fracciones. Así, el concepto de operaciones inversas conecta la resta con reserva con la división por fracciones. Algunos conceptos, como el significado de la multiplicación, los comparten tres de los cuatro temas. Algunos, como el de las tres propiedades básicas, los comparten los cuatro temas. La figura 5.2 ilustra cómo se relacionan los temas matemáticos desde una perspectiva conceptual.

Aunque no se incluyen todos los conceptos que comparten los cuatro temas, la figura 5.2 ilustra cómo las relaciones entre estos cuatro temas los convierten en una red. Algunos elementos no se relacionan directamente con los cuatro temas. Sin embargo, sus distintas asociaciones se superponen y entrelazan. Las tres propiedades aparecieron en las discusiones que tuvieron los profesores chinos sobre todos los temas.

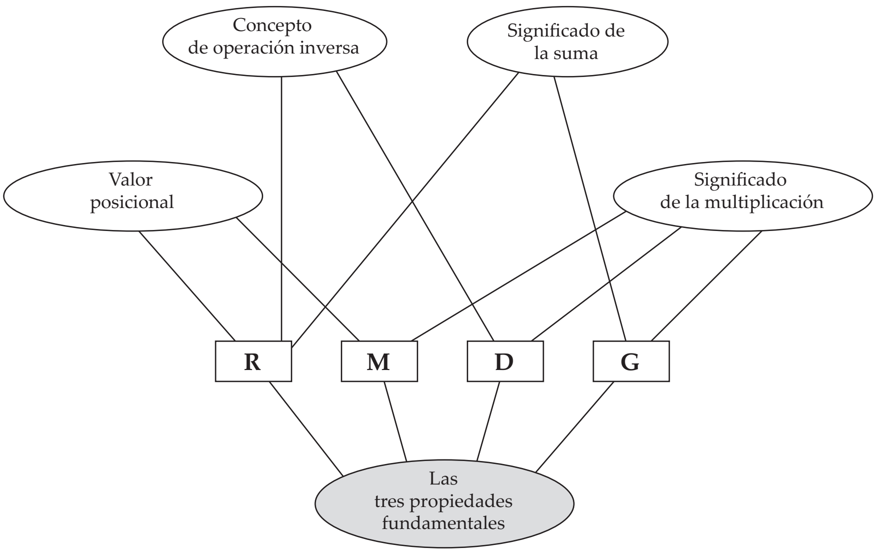


Fig. 5.2. Unos pocos conceptos compartidos conectan los cuatro temas.

Al contrario de la visión procedimental de los cuatro temas que se ilustra en la figura 5.1, la figura 5.3 muestra una comprensión conceptual de los cuatro temas. Los cuatro rectángulos de arriba en la figura 5.3 representan los cuatro temas. Las elipses representan piezas de conocimientos en los paquetes de conocimientos. Las elipses blancas representan temas procedimentales, las de color gris claro, representan temas conceptuales.

Las de color gris oscuro representan los principios básicos y las con líneas punteadas representan actitudes generales hacia las matemáticas.

Cuando se compone de paquetes de conocimientos bien desarrollados e interconectados, el conocimiento matemático forma una red sólidamente sustentada por la estructura del tema. La figura 5.3 extiende el modelo de una comprensión conceptual de un tema dado en la figura 1.4 e ilustra la amplitud, profundidad, conectividad y cabalidad de la comprensión conceptual de matemáticas, de un profesor. Puesto que los cuatro temas se encuentran en varias subareas de las matemáticas elementales, este modelo también sirve como miniatura de la comprensión conceptual del área de las matemáticas elementales.

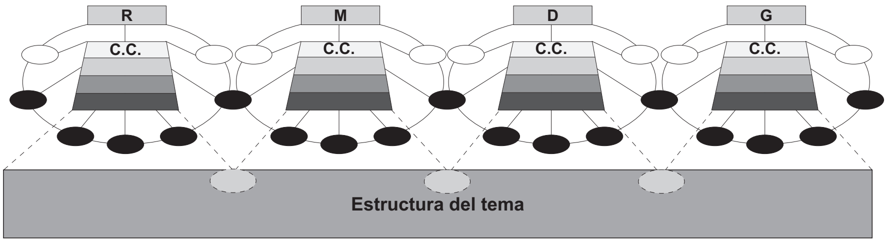


Fig. 5.3. Conocimiento conceptual de los profesores acerca de los cuatro temas.

Las elipses con márgenes punteados (actitudes generales hacia las matemáticas) no se incluyen generalmente en los paquetes de conocimientos de temas particulares. Sin embargo, contribuyen significativamente a la coherencia y solidez del conocimiento matemático de un profesor. Las actitudes básicas hacia un tema pueden ser aún más penetrantes que sus principios básicos puesto que un principio básico puede no sustentar todos los temas pero, una actitud básica puede presentarse en relación a todos los temas. Las actitudes básicas hacia las matemáticas mencionadas por los profesores durante las entrevistas, tales como "justificar una afirmación con un argumento matemático, "conocer tanto cómo así como porqué", "mantener la consistencia de una idea en varios contextos" y "enfocar un tema en varias formas", pertenecen a todos los temas de las matemáticas elementales[8].

8 Ambas dimensiones de la estructura —los principios y actitudes básicos (Bruner 1960/1977)— son poderosos a la hora de establecer conexiones. Desafortunadamente, la figura 5.3 es demasiado simple para ilustrar bien las muchas relaciones entre los principios o actitudes generales y los conceptos o temas matemáticos.

Llamo al conocimiento disciplinario ilustrado en la figura 5.3, comprensión profunda de las matemáticas fundamentales (CPMF). Por comprensión profunda, me refiero a una comprensión del terreno de las matemáticas fundamentales que es profunda, amplia y acabada. Aunque el término *profundo* se considera, a menudo, que significa profundidad intelectual, sus tres connotaciones: *profundo*, *basto* y *acabado*, están interconectadas.

Duckworth, una ex alumna y colega de Jean Piaget, cree que debemos seguir aprendiendo de las matemáticas elementales y la ciencia en forma "profunda" y "compleja" (1987, 1991). Inspirado por la preocupación de Piaget acerca de *hasta dónde,* en lugar de *qué tan rápido* debe ir la enseñanza, ella postuló la noción de "aprendizaje con profundidad y amplitud" (1979). Luego de una comparación entre la construcción de una torre, "con un ladrillo sobre otro" y "una base amplia o cimientos amplios", Duckworth señaló:

> ¿Cuál es el equivalente intelectual de un edificio, en amplitud y profundidad? Creo que es un asunto de hacer conexiones: la amplitud se puede considerar como las muy distintas esferas de experiencias que se pueden relacionar entre sí, la profundidad se puede considerar como los muchos tipos distintos de conexiones que se pueden hacer entre distintas facetas de nuestra experiencia. No estoy segura de si se pueden o no separar la amplitud y la profundidad, excepto cuando se habla de ellos. (p. 7)

Coincido con Duckworth en que la amplitud y la profundidad intelectuales son "un asunto de hacer conexiones" y que ambos están entrelazados. No obstante, su definición de amplitud y profundidad intelectual es demasiado general para utilizarla al discutir el aprendizaje matemático[9]. Es más, ella no explica cuál es la relación entre ellas.

Basada en mi investigación, defino la *comprensión de un tema en profundidad* como la conexión de éste con las ideas, conceptualmente más poderosas del tema. Mientras más cercana es una idea a la estructura de la disciplina, más poderosa será, por ende, podrá sustentar más temas. *Comprender un tema en su amplitud*, por otra parte, es conectarlo con

9 Para los investigadores de la educación, la profundidad del conocimiento disciplinario de los profesores pareciera ser sutilmente intrigante. Por una parte, la mayoría coincide con que la comprensión de los profesores debe ser profunda (Ball, 1989; Grossman, Wilson, & Shulman, 1989; Marks, 1987; Steinberg, Marks, & Haymore, 1985; Wilson, 1988). Por otra parte, puesto que el término profundidad es "vago" y "escurridizo en cuanto a su definición y medidas" (Ball, 1989; Wilson, 1988), ha sido lento progresar en su comprensión. Ball (1989) propuso tres "criterios específicos" para el conocimiento sustantivo de los profesores: corrección, significado y conectividad, para evitar el término profundidad que considera un descriptor vago del conocimiento disciplinario de los profesores.

aquellos temas con similar o menor poder conceptual. Por ejemplo, consideremos el paquete de conocimientos de la resta con reserva. Conectar la resta con reserva con los temas de suma con reserva, resta sin reserva y suma sin reserva, es un tema de amplitud. Conectarlo con conceptos como la tasa de composición o descomposición de una unidad de mayor valor o el concepto de que la suma y la resta son operaciones inversas es un asunto de profundidad. Empero, la amplitud y la profundidad, dependen de la rigurosidad, la capacidad de "pasar a través" de todas las partes del área, para entretejerlas juntas. Sin duda, es esta rigurosidad la que "pega" los conocimientos matemáticos para formar un todo coherente.

Por supuesto, la razón por la que una comprensión profunda de las matemáticas elementales es posible es que, primero que todo, las matemáticas elementales son un campo de profundidad, amplitud y rigurosidad. Los profesores con esta comprensión profunda, vasta y acabada no inventan conexiones entre las ideas matemáticas pero, las revelan y representan en términos de enseñanza y aprendizaje matemáticos. Esta enseñanza y aprendizaje tiende a tener las siguientes cuatro propiedades:

Conectividad. Un profesor con una CPMF tiene la intención general de establecer conexiones entre los conceptos y procedimientos matemáticos, desde conexiones simples y superficiales entre conocimientos individuales a conexiones complicadas y fundamentales entre las distintas operaciones y subdominios matemáticos. Cuando se refleja en la enseñanza, esta intención impide que el aprendizaje de los alumnos sea fragmentado. En lugar de aprender temas aislados, los alumnos aprenderán un cuerpo unificado de conocimientos.

Perspectivas múltiples. Aquellos que han alcanzado una CPMF aprecian distintas facetas de una idea y varios enfoques para una solución, así como sus ventajas y desventajas. Además, son capaces de brindar explicaciones matemáticas de estas varias facetas y enfoques; de esta forma, los profesores pueden guiar a sus alumnos a una comprensión flexible de la disciplina.

Ideas básicas. Los profesores con una CPMF muestran actitudes matemáticas y están especialmente conscientes de los "simple pero poderosos conceptos y principios de las matemáticas" (Ej.: la idea de una ecuación). Tienden a repasar y reforzar estas ideas básicas. Al enfocarse en estas ideas básicas, los estudiantes no sólo son alentados a abordar problemas, sino que son guiados a realizar una verdadera actividad matemática.

Coherencia Longitudinal[10]. Los profesores con una CPMF no están limitados al conocimiento que se debe enseñar en un cierto nivel sino que, han alcanzado una comprensión fundamental de todo el currículum de las matemáticas elementales. Con una CPMF, los profesores están listos en cualquier momento para explotar una oportunidad para repasar conceptos cruciales que los alumnos han estudiado previamente. Ellos también saben qué aprenderán los alumnos después y aprovechan oportunidades para poner los cimientos adecuados para ellos.

Estas cuatro propiedades están interrelacionadas. Mientras que la primera propiedad (conectividad) es una característica general de la enseñanza de las matemáticas de alguien con CPMF, las otras tres (perspectivas múltiples, ideas básicas y coherencia longitudinal) son los tipos de conexiones que llevan hacia distintos aspectos de la comprensión significativa de las matemáticas, amplitud, profundidad y rigurosidad.

Desafortunadamente, un modelo estático como el de la figura 5.3 no puede graficar las dinámicas de estas conexiones. Cuando enseñan, los profesores organizan sus paquetes de conocimiento de acuerdo al contexto de enseñanza y las conexiones entre los temas cambian con el flujo de enseñanza. Una parte clave en un paquete de conocimiento de un tema puede convertirse en una parte marginal del paquete de conocimiento de otro y viceversa.

El realizar entrevistas para mi estudio, me hizo pensar en cómo la gente conoce el pueblo o la ciudad en que vive. La gente conoce su ciudad en formas distintas. Algunas personas, por ejemplo gente recién llegada, sólo conocen el lugar donde está su casa. Algunos conocen sus barrios bastante bien pero rara vez van más allá. Algunos saben cómo llegar a algunos lugares dentro del pueblo, por ejemplo, donde trabajan, ciertas tiendas donde compran o los cines donde van a ver una película pero, puede que conozcan sólo una forma de llegar a esos lugares y nunca se molesten en encontrar rutas alternativas. Sin embargo, otras personas, por ejemplo los taxistas, conocen todas las calles de su ciudad muy bien. Son muy flexibles y confiados a la hora de ir de un lugar a otro y conocen varias rutas alternativas. Si usted es un visitante nuevo, pueden tomar la ruta que mejor le muestre la ciudad. Si está apurado, a cualquier hora del día, conocen la ruta que lo llevará más rápido a su destino. Pueden incluso encontrar un lugar sin tener la dirección completa. Al hablar con los profesores, noté ciertos paralelos entre una cierta manera de cono-

10 Kaput (1994) empleó este término para describir los currículos; aquí, yo lo uso para describir el dominio correspondiente del conocimiento del profesor. Este dominio se relaciona a un aspecto de lo que Shulman (1986) llama conocimiento curricular

cer las matemáticas escolares y una cierta manera de conocer las calles en una ciudad. La forma en que los profesores con una CPMF conocen las matemáticas escolares me pareció en algunos casos muy similar a la forma en que un taxista eficiente conoce una ciudad. Puede que también haya un mapa de la ciudad en desarrollo en la mente del taxista, no obstante, el mapa de las matemáticas escolares de un profesor debe ser más complicado y flexible.

RESUMEN

En este capítulo se contrastó la comprensión general que tienen los profesores chinos y norteamericanos de los cuatro temas discutidos en los capítulos anteriores. Las respuestas de los dos grupos de profesores sugieren que las matemáticas elementales se construyen en forma muy distinta en China y los EE.UU. Aunque los profesores norteamericanos se preocupaban de enseñar para lograr una comprensión conceptual, sus respuestas reflejaron una visión común en los EE.UU.: que las matemáticas elementales son "básicas", una colección arbitraria de hechos y reglas en las que hacer matemáticas significa seguir procedimientos fijos paso a paso para llegar a las respuestas (Ball, 1991). Los profesores chinos estaban preocupados con saber porqué los algoritmos tenían sentido, así como saber porqué hacerlos. Sus actitudes eran similares a las de los matemáticos en ejercicio. Tendieron a justificar una explicación con una derivación simbólica, dar varias soluciones para un problema y discutir relaciones entre las cuatro operaciones básicas de la aritmética.

Para cada uno de los temas de la entrevista que enseñaron, los profesores chinos describieron un "paquete de conocimientos", una red de temas procedimentales y conceptuales que sustentan o son sustentados por el aprendizaje del tema en cuestión. Los temas de un paquete de conocimientos difieren en estatus, las primeras ocasiones en que se presentó un concepto particular, se consideraron "partes claves" y recibieron más énfasis durante la enseñanza. Por ejemplo, la "suma y resta con reserva dentro de la veintena", se considera una parte clave del paquete de conocimientos de la resta con reserva porque es la primera ocasión en que se utiliza el concepto de componer y descomponer una decena.

Las matemáticas elementales se pueden ver como matemáticas "básicas", una colección de procedimientos, o como matemáticas fundamentales. Las matemáticas fundamentales son elementales, fundacionales y primarias. Son elementales porqué están al comienzo del aprendizaje matemático. Es primaria porque contiene los rudimentos de conceptos matemáticos más avanzados. Es fundacional porque brinda una base para el futuro aprendizaje matemático de los alumnos.

La comprensión profunda de las matemáticas fundamentales (CPMF) es más que una comprensión sólida de las matemáticas elementales, es tener conciencia de la estructura conceptual y las actitudes básicas hacia las matemáticas inherentes a las matemáticas elementales y la capacidad de dar una base a la estructura conceptual e inculcar dichas actitudes básicas en los alumnos. Una compresión profunda de las matemáticas tiene amplitud, profundidad y rigurosidad. La amplitud en la comprensión es la capacidad para conectar un tema con temas con un poder conceptual similar o menor. La profundidad en la comprensión es la capacidad para conectar un tema con aquellos de mayor poder conceptual. La rigurosidad es la capacidad para conectar todos los temas.

La enseñanza de un profesor con una CPMF tiene conectividad, promueve múltiples estrategias para resolver un problema dado, repasa y refuerza ideas básicas y tiene coherencia longitudinal. Un profesor con una CPMF es capaz de revelar y representar a los alumnos, conexiones entre los conceptos y procedimientos matemáticos. Él o ella aprecia distinta facetas de una idea y varios enfoques hacia una solución así como sus ventajas y desventajas, y es capaz de darle a los alumnos explicaciones para esas varias facetas y enfoques. Un profesor con una CPMF está consciente de las "simples pero poderosas" ideas matemáticas y tiende a repasarlas y reforzarlas. Él o ella tiene una comprensión fundamental de todo el currículum de matemáticas elementales, por ende, está preparado para explotar una oportunidad para repasar conceptos que los alumnos hayan estudiado previamente o para cimentar las bases de un concepto que se estudiará después.

Capítulo 6

Comprensión profunda de las matemáticas fundamentales: Cuándo y cómo se logra

Al final de mi estudio, realicé una breve exploración de dos partes acerca de cuándo y cómo logra un profesor una CPMF. Primero, para obtener una idea general acerca de cuándo uno podría adquirir una CPMF, entrevisté en China a dos grupos de estudiantes que no habían sido profesores utilizando las mismas preguntas que le hice a los profesores. Un grupo era una clase de 26 estudiantes de pedagogía. El otro grupo estaba conformado por 20 alumnos de noveno grado[1]. Los primeros, fueron examinados por su conocimiento al final de su programa de formación pedagógica y, los últimos, por el tipo de conocimiento que un alumno puede tener al ingresar a un programa de formación pedagógica.

En la segunda parte de la exploración, busqué cómo se obtiene una CPMF. Entrevisté a tres profesores, que identifiqué tenían una CPMF. En las entrevistas se exploraron dos cuestiones principales: Lo que los profesores creían debía ser el conocimiento disciplinario matemático de un profesor y cómo adquirieron su propio conocimiento matemático. Las respuestas a la pregunta de cuál debiera ser el conocimiento matemático de un profesor se discutieron en el capítulo anterior. En la segunda parte de este capítulo se discuten las descripciones realizadas por los profesores de cómo sus condiciones laborales apoyaron y siguen apoyando el crecimiento de su conocimiento matemático y su organización para la enseñanza.

1 Los niveles secundarios bajos chinos(7º-9º grado, equivalentes a 7º,8º y 1º Medio en Chile) difieren significativamente en calidad. Los estudiantes que entrevisté provenían de una escuela mediocre en Shangai donde, a lo más, la mitad de los alumnos podría pasar las pruebas de ingreso a la universidad.

¿CUÁNDO SE LOGRA UNA COMPRENSIÓN PROFUNDA DE LAS MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES?: LO QUE SABÍAN LOS GRUPOS DE ESTUDIANTES ACERCA DE LOS CUATRO TEMAS

Diferencias entre los dos grupos de estudiantes chinos

Los dos grupos de estudiantes no mostraron diferencias obvias en su capacidad para ejecutar los algoritmos. Todos sus cálculos para los problemas de resta, multiplicación y división por fracciones estuvieron correctos, excepto por un alumno de noveno grado que cometió un error al sumar los productos parciales del problema del multiplicación con varias cifras. Sus investigaciones del postulado acerca de la relación entre área y perímetro mostraron que ambos grupos sabían muy bien las fórmulas para calcular el área y perímetro de un rectángulo. El 88% de los futuros profesores y el 60% de los alumnos de noveno grado pensaron que la afirmación "cuando el perímetro de una figura aumenta, aumenta su área" no sería cierta en todos los casos. La mayoría dio un contraejemplo para probar que era falsa y unos pocos elaboraron los varios posibles casos.

No obstante, cuando representaron el concepto de división por fracciones, los dos grupos de estudiantes de pedagogía revelaron algunas diferencias interesantes. Los futuros profesores tendieron a dar respuestas correctas pero, desde una perspectiva más estrecha. Por otra parte, los alumnos tenían una perspectiva más amplia pero, cometieron más errores.

El 85% de los futuros profesores, y sólo el 40% de los alumnos de noveno grado, crearon un problema de desarrollo conceptualmente correcto para representar el significado de $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$. De los 22 futuros profesores que dieron al menos una solución correcta al problema, 20 (92%) representó el modelo partitivo (es decir, encontrar un entero dado que la mitad es $1\frac{3}{4}$). Sólo dos (9%) representaron el modelo de medición (es decir, encontrar cuántas mitades hay en $1\frac{3}{4}$). No obstante, entre los ocho alumnos que pudieron crear una representación, los modelos estaban distribuidos en forma equitativa. Cuatro representaron el modelo partitivo y los otros cuatros representaron el modelo de medición.

Todos los futuros profesores que no dieron un enunciado dijeron que no eran capaces de hacerlo. En los futuros profesores no se halló ningún enunciado que mostrara concepciones erradas. Los doce alumnos de enseñanza media, que no pudieron dar una representación conceptualmente correcta, no obstante, se mostraron más "valientes" y menos "cautos". Exploraron el tema desde varias direcciones. Ocho crearon un enunciado que representaba el significado de $1\frac{3}{4} \times 2$, un subprocedimiento en el cálculo. Tres elaboraron un enunciado que representaba $1\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ y uno dijo que no podía elaborar un enunciado.

La diferencia entre los dos grupos en la representación del significado de la división por fracciones parecía reflejar la influencia del programa de formación pedagógica en el conocimiento matemático de los futuros profesores. Parecía que su conocimiento del tema se había "limpiado", eliminando las concepciones erróneas. No obstante, este proceso puede haber estrechado sus perspectiva. Debido a su cuidado acerca de lo que es correcto e incorrecto, tendieron a no probar formas alternativas cuando se estancaron.

Otra diferencia entre los dos grupos fue que los futuros profesores mostraron preocupación por la enseñanza y el aprendizaje cuando discutieron un tema matemático. Ellos tendieron a brindar una explicación luego de un cálculo, a pesar de que la mayoría de sus explicaciones fueron muy limitadas y breves. Por ejemplo, al responder la pregunta acerca del error de los alumnos en la multiplicación por varias cifras, los alumnos de noveno grado tendieron, simplemente, a declarar que los alumnos estaban equivocados y demostraron él cálculo correcto. Por el contrario, las respuestas de los estudiantes de pedagogía, a menudo incluían tres pasos. Primero, el problema fue que los alumnos no habían alineado los productos parciales en forma correcta. Segundo, los futuros profesores dijeron que habrían explicado a los alumnos la base lógica subyacente al algoritmo. Tercero, harían que los alumnos hicieran más ejercicios. Aunque sólo un estudiante de pedagogía discutió específicamente la base lógica y ninguno discutió extensamente qué tipo de ejercicios les daría a los alumnos, los futuros profesores estaban claramente preocupados por enseñar y aprender.

En resumen, aunque los alumnos de pedagogía y los alumnos de noveno grado tenían una competencia similar a la hora de resolver el algoritmo, mostraron dos diferencias importantes. Primero, los futuros profesores parecían haber "limpiado" sus conceptos matemáticos, a la vez que su enfoque matemático parecía más estrecho. Segundo, a diferencia de los alumnos, los futuros profesores estaban preocupados por enseñar y aprender.

Diferencias entre los profesores norteamericanos y los dos grupos de estudiantes chinos

Veamos ahora la diferencia entre los profesores norteamericanos y los dos grupos de estudiante chinos. Para los temas de resta con reserva y multiplicación por varias cifras, los tres grupos mostraron un éxito similar en su competencia para resolver el algoritmo. No obstante, los dos grupos chinos mostraron una mayor comprensión conceptual. Por ejemplo, en sus explicaciones de la regla de alineamiento de la multiplicación con varias cifras, todos mostraron una comprensión de la base lógica que fundamenta el algoritmo.

El desempeño de los dos grupos chinos en los temas más avanzados fue marcadamente mejor que el de los profesores norteamericanos. Todos los miembros de los grupos chinos pudieron calcular $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ y conocían las fórmulas para calcular el área y perímetro. Empero, sólo el 43% de los profesores norteamericanos realizó exitosamente el cálculo de la división por fracciones y un 17% de los profesores norteamericanos informaron que no conocían las fórmulas de área y perímetro. En el caso de las dos preguntas conceptualmente más exigentes, la diferencia fue aún mayor: El 85% de los futuros profesores chinos y el 40% de los alumnos de noveno grado chinos crearon un problema de desarrollo conceptualmente correcto para representar el significado de la división por fracciones pero, sólo el 4% de los profesores norteamericanos lo hizo. El 85% de los futuros profesores chinos y el 60% de los alumnos chinos mostró una estrategia correcta para abordar la relación entre área y perímetro de un rectángulo. Nuevamente, sólo el 4% de los profesores norteamericanos tuvo éxito. Pareciera que mientras más avanzados los temas y más pensamiento conceptual se requería, los profesores norteamericanos se desempeñaban en forma menos competente. En la figura 6.1 se resumen las diferencias en el caso de los dos temas avanzados.

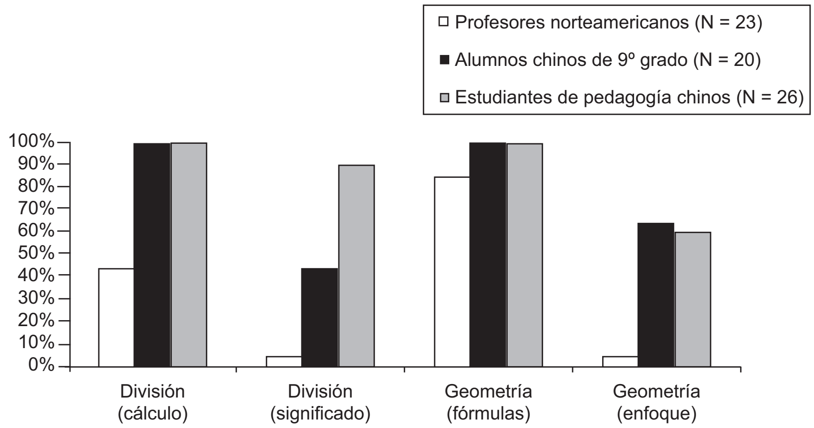


Fig. 6.1. Diferencias entre los profesores norteamericanos y los dos grupos de estudiantes chinos en el conocimiento de los dos temas avanzados.

Diferencias entre los profesores chinos y los dos grupos de estudiantes de pedagogía

Las diferencias en el conocimiento matemático entre los profesores chinos y los dos grupos de estudiantes chinos fueron de otro tipo. Su competencia para ejecutar los algoritmos, indicador del conocimiento matemático desde la perspectiva de una *persona común*, fue similar. En términos de las características del conocimiento matemático de un *profesor*, no obstante, los dos grupos de estudiantes tuvieron diferencias significativas en comparación con el grupo de profesores.

Entrevistar a futuros profesores y alumnos de noveno grado tomo mucho menos tiempo que entrevistar a los profesores, aunque las preguntas fueron las mismas. Muchos futuros profesores tendieron a dar explicaciones para un algoritmo pero sus explicaciones fueron muy breves. Los estudiantes no pensaron en dar explicaciones pero le dedicaron más tiempo a la representación de la división por fracciones y la relación entre área y perímetro. Ninguno de los dos grupos de estudiantes brindó una discusión elaborada de ninguno de los cuatro temas. Ninguno de los dos grupos discutió conexiones entre los temas matemáticos, múltiples soluciones para un problema[2] o ideas básicas de la materia relacionadas con los temas.

2 Después de que se les pidiera dar más de un enunciado si es que podían, seis futuros profesores dieron más de una representación pero, todas eran de un modelo partitivo similar.

La CPMF como un tipo de conocimiento disciplinario perteneciente a los profesores no siempre está delimitada claramente y, en muchos casos, es difícil decir que un profesor tiene o no tiene una CPMF. Por ejemplo, se identificó que cerca de la décima parte de los profesores chinos entrevistados tenía una CPMF. Todos eran profesores con muchos años de experiencia educativa. Muchos de ellos habían enseñando todos los cursos de las matemáticas elementales y muchos, más de una vez. Cerca de la décima parte de los profesores chinos se podía catalogar como que no tenía para nada una CPMF. No obstante, la mayoría de los otros profesores estaba en un sector gris entre los dos extremos. Algunos mostraron una comprensión amplia, profunda y rigurosa de la subárea de las matemáticas elementales que enseñaban pero no de toda el área. Por ejemplo, algunos profesores estaban particularmente familiarizados con el contenido de los cursos inferiores y otros, con los de los cursos superiores. Así, sostuvieron discusiones elaboradas de los temas en las áreas con las que estaban familiarizados, pero no del resto. De hecho, durante las entrevistas, aquellos que elaboraron las discusiones más detalladas de los dos primeros temas, generalmente enseñaban en los cursos inferiores y, aquellos que discutieron los otros dos temas en forma más elaborada, generalmente enseñaban en los cursos superiores.

Parece que la CPMF, que hallé en un grupo de profesores chinos, se desarrolló después de que se convirtieran en profesores, que se desarrolló durante su carrera docente. El problema es, entonces, ¿cómo desarrollaron su CPMF los profesores chinos después de volverse profesores? Para analizar esta pregunta, entrevisté a tres profesores que consideré tenían una CPMF.

COMPRENSIÓN PROFUNDA DE LAS MATEMÁTICAS ELEMENTALES: ¿CÓMO SE LOGRA?

Por conveniencia en la recolección de datos, entrevisté al Prof. Mao, Prof. Wang y al Prof. Sun, todos los cuales enseñaban matemáticas elementales en la misma escuela básica en Shangai en los cursos superiores, intermedios e inferiores, de las matemáticas respectivamente. Al igual que la mayoría de los profesores que entrevisté[3], estos profesores sólo enseñaban matemáticas a la hora de la entrevista. (Algunos profesores se alternaban

3 Los doce profesores del colegio rural enseñaban todos los ramos.

los ramos pero esto es poco frecuente ahora). En general, en una escuela con profesores especializados, la nueva especialización del profesor se determina según las necesidades de la escuela, las notas del nuevo profesor en los exámenes docentes y el propio interés del profesor.

A diferencia de los profesores norteamericanos, el Prof. Mao, el Prof. Wang y el Prof. Sun enseñaban entre tres y cuatro clases de 45 minutos al día. Cuando no enseñaban, corregían trabajos de los alumnos o preparaban lecciones en las oficinas que compartían con sus colegas.

Estudiar intensamente los materiales pedagógicos

Cuando les pregunté cómo habían logrado su conocimiento matemático de "forma sistemática", estos profesores se refirieron a "estudiar intensamente los materiales pedagógicos [*zuanyan jiaocai*] al enseñarlo":

> Primero que todo, tienes que enseñarlo personalmente y tienes que estudiar materiales pedagógicos intensamente cuando lo enseñas. En una escuela normal, tomas cursos como "El contenido y los métodos de enseñanza de las matemáticas elementales". Pero eso no es ni apenas suficiente. Sólo obtienes una idea breve y rudimentaria de lo que son las matemáticas elementales pero eso no es relevante en la enseñanza real. Sólo a través de la verdadera enseñanza en un nivel se logra conocer realmente lo que se enseña en él. Más aún, no debes quedarte enseñando sólo en un nivel sino que se debe enseñar de ciclo a ciclo La gente divide a la educación básica en varios ciclos pequeños. En nuestra escuela, tenemos el primer ciclo, que incluye de primero a tercero básico y el segundo ciclo, que incluye del cuarto al quinto grado. En cada ciclo, se conectan varios niveles y se cubre una subarea de las matemáticas elementales. Si has enseñado el primer ciclo, te familiarizas con la imagen de lo que enseña en los tres primeros niveles y cómo se conectan. Si has enseñando en el segundo ciclo, te familiarizas con la imagen de lo que se enseña en los dos niveles siguientes. Si has enseñando en los dos ciclos, conoces toda la panorámica del currículum de las matemáticas elementales escolares. Mientras más veces hayas enseñado un ciclo, más familiarizado te vuelves con su contenido. Pero simplemente enseñar no es suficiente. Sólo te hace conocer el contenido pero no necesariamente conocerlo bien. Para lograr esto, tienes que estudiar intensamente los materiales pedagógicos durante la enseñanza. (Prof. Sun).

Los tres elementos a los que hace referencia el Prof. Sun (enseñar y enseñar ciclo a ciclo y estudiar intensamente materiales pedagógicos cuando se enseña) también fueron mencionados por los otros profesores. Puede que a un público fuera de China no le cueste entender el enseñar y enseñar ciclo a ciclo pero, puede que tengamos que explicar más a qué se refieren estos profesores con "estudiar intensamente materiales pedagógicos [*zuanyan jiaocai*]", un término que uno escucha frecuentemente cuando habla con un profesor chino.

Probablemente cualquiera que conozca Chino e Inglés traduciría el término chino *jiaocai* como "materiales pedagógicos" porque *jiao* literalmente significa "enseñar" y cai significa "materiales"*. Pero yo diría que, en realidad, *jiaocai* es más parecido a lo que significa "currículum" en los EE.UU. Generalmente, cuando los profesores chinos se refieren a *zuanyan jiaocai*, el término consiste de tres componentes principales: el *Marco de Enseñanza y Aprendizaje* (*jiaoxue dagang*), los textos escolares (*keben*) y los manuales de profesores (*beike fudao cailiao*).

El *Marco de Enseñanza y Aprendizaje* lo publica el Departamento Nacional de Educación y estipula lo que los alumnos deben aprender en cada nivel y los estándares de su aprendizaje. Es un documento similar, en cierto sentido, a los Estándares de Matemática Escolar del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los EE.UU. (NCTM, 1989) o documentos estatales como el *Marco Matemático de las Escuelas Públicas de California* (Departamento de Educación de California, 1985, 1992). En China, se pretende que los textos escolares interpreten y contengan el *Marco de Enseñanza y Aprendizaje*. El Departamento Nacional de Educación publicó en el pasado un solo set de textos escolares para todas las escuelas públicas en EE.UU. En la última década, distintas series de textos escolares se han producido interpretando el marco en formas más relevantes, para las distintas situaciones locales. Sin embargo, la calidad de los textos todavía se controla estrictamente por el gobierno central y local y las distintas versiones son, de hecho, muy similares. Cada set de libros viene con una serie de manuales para el profesor que le brindan a los docentes antecedentes del conocimiento en cada libro y sugerencias acerca de cómo enseñarlo. Tanto los textos escolares como los manuales los componen cuidadosamente profesores experimentados y expertos en currículum escolar reconocidos en todo el país. Considerando la definición de currículum de Walker (1990) "el contenido y propósito de un programa educacional junto con su organización" (p. 5), podemos decir que en cierto sentido los tres materiales se pueden considerar como los tres componentes que constituyen el currículum nacional chino.

Los profesores chinos estudian los tres tipos de materiales en distintas formas. Durante el verano o antes del comienzo de un semestre, los

* N. de la T.: para este libro, se tradujo del inglés "teaching materials" al español "material pedagógico". La palabra curriculum se tradujo directamente del inglés porque es equivalente al español *currículum.*

profesores, generalmente estudian el *Marco de Enseñanza y Aprendizaje*. Al estudiar el marco, especialmente la parte relacionada con el nivel que enseñarán o están enseñando, los profesores deciden metas generales para el año escolar y cada semestre. Los profesores no "negocian" con este documento sino que lo siguen. Consideran que una de sus tareas principales es ayudar a los alumnos a lograr los estándares de aprendizaje estipulados en el marco.

El texto escolar es el material en el que los profesores chinos pasan la mayor parte del tiempo y dedican sus mayores esfuerzos a "estudiarlo intensamente". Lo estudian constantemente a lo largo del año escolar cuando lo enseñan. Primero que todo, trabajan por una comprensión del "qué". Estudian cómo interpreta e ilustra las ideas en el *Marco de Enseñanza y Aprendizaje*, porqué los autores estructuraron el libro en cierta manera, cuáles son las conexiones entre los contenidos, cuáles son las conexiones entre el contenido de un cierto texto escolar y sus predecesores o sucesores, qué es nuevo en un texto escolar en comparación con una versión más antigua y porqué se han hecho cambios, etc. En un nivel más detallado, estudian cómo se organiza cada unidad de los textos escolares, cómo presentaron el contenido los autores y porqué. Estudian qué ejemplos están en una unidad, porqué se seleccionaron estos ejemplos y porqué los ejemplos se presentaron en un cierto orden. Repasan los ejercicios en cada sección de una unidad, el propósito de cada sección y así en adelante. Sin duda, realizaron una investigación muy cuidadosa y crítica de los textos escolares. Aunque finalmente los profesores encuentran las ideas de los autores ingeniosas e inspiradoras, también encuentran a veces partes de los libros que son insatisfactorias desde su punto de vista o ilustraciones inadecuadas de ideas en el marco.

Los textos escolares en China (y otros países asiáticos) son muy distintos a los norteamericanos. Stevenson y Stigler (1992) los describieron como:

> Volúmenes separados que rara vez contienen más de cien páginas y cubren el trabajo semestral de cada ramo. Las portadas son atractivas pero, las páginas interiores tienen pocas ilustraciones y tienen principalmente texto. Las ilustraciones tienden a presentar sólo el punto central de la lección y hay muy poca información que no sea necesaria para el desarrollo de los conceptos a considerar. Presentan la esencia de la lección, con la expectativa de que el profesor elaborará y complementará la información con otros materiales (p. 139).

Por ejemplo, los dos textos escolares para los dos semestres de matemáticas de tercero básico tienen menos de 120 páginas cada uno. Juntos pesan sólo 170 gramos. Los once temas que abarcan[4] se encuentran organizados cuidadosamente, cada uno conectado con el otro y "existe poca información que no sea necesaria para el desarrollo de los conceptos a considerar". Tal compacta pero rigurosa estructura ayuda a los profesores a estudiar minuciosamente el contenido y aprehenderlo en forma sólida.

Además de una investigación cuidadosa de "qué enseñar", los profesores estudian "cómo enseñarlo" o, usando su lenguaje, "cómo manejar el material pedagógico [*chuli jiaocai*][5]. Sin duda, en la investigación del " qué" también se incluye y está implícito siempre el "cómo enseñarlo". Después de todo, un texto escolar se escribe con el propósito de enseñarlo. Yendo directo al problema de "cómo manejar el material pedagógico", los profesores consideran al texto escolar desde una perspectiva de cómo enseñarlo, es decir, cómo van a presentar el material, explicar un tema, diseñar un ejercicio adecuado para los alumnos, etc., en resumen, como dijo el Prof. Mao "cómo promover el máximo aprendizaje en el menor tiempo, cómo beneficiar a todos los alumnos en un curso, tanto a los avanzados como a los más lentos, lo más posible". En el proceso de estudiar qué está en un texto de clases y cómo manejarlo, ocurren interacciones entre "qué ense-

---

4 Los once temas (con los subtemas en paréntesis) son:

1. División con divisor de un dígito (dividir con un divisor de un dígito, división cuando el cuociente tiene cero dentro o al final del número, problemas que incluyen la división continua y multiplicación, repaso).
2. Problemas con operaciones combinadas y problemas de desarrollo (oraciones numerales, problemas de desarrollo, repaso).
3. Leer y escribir números con varias cifras
4. Suma y resta con números de varias cifras (suma con números de varias cifras, propiedad conmutativa y asociativa en la suma, resta con números de varias cifras, relación entre suma y resta, cómo las propiedades conmutativa y asociativa pueden facilitar algunas operaciones con la suma y la resta, repaso).
5. Reconocimiento del kilómetro.
6. Reconocimiento de la tonelada, kilogramo y gramo.
7. Multiplicación con multiplicadores de dos cifras (multiplicar un multiplicador de dos cifras, multiplicación cuando el multiplicando o multiplicador terminan en ceros, repaso).
8. División con divisores de dos cifras (dividir con un divisor de dos cifras, relación entre multiplicación y división, repaso).
9. Problemas con operaciones combinadas y problemas de desarrollo (frases numéricas, problemas de desarrollo, repaso).
10. Año, mes y día.
11. Perímetro de cuadrados y rectángulos (líneas y segmentos lineares, ángulos, características de los rectángulos y cuadrados, calcular el perímetro de rectángulos y cuadrados).

Después de los once temas, el libro tiene un "Repaso de todo el año".

5 Cuando los profesores se refieren a *chuli jiaocai*, quieren decir "manejar el texto escolar". Aunque en un sentido amplio, jiaocai incluye al texto escolar, el manual del profesor y el Marco de Enseñanza y Aprendizaje, en la práctica, generalmente se refiere al texto escolar.

ñar" y "cómo enseñar". Es fácil ver que a través de dichas interacciones se desarrollará el conocimiento disciplinario de un profesor, estimulado por una preocupación por cómo enseñar.

Entre los tres materiales pedagógicos descritos anteriormente, los profesores chinos toman menos en serio el manual para el profesor. Aunque muchos profesores, especialmente los nuevos, los encuentran muy útiles como una exploración de qué enseñar y cómo enseñar, generalmente se sugiere que uno no debe confiarse en el manual para el profesor ni limitarse por él. En la práctica, los manuales del profesor generalmente se estudian como complementos para un texto escolar.

Los manuales del profesores no fueron una parte del estudio descrito en este libro. No obstante, al igual que los profesores en mi estudio, utilicé manuales cuando fui profesora de educación primaria. La siguiente descripción de los manuales del profesor se basa en esa experiencia.

Estos manuales brindan información básica para las matemáticas en los textos escolares correspondientes y sugerencias de cómo enseñarla. La introducción de un típico manual para el profesor da una visión general del texto escolar: sus temas principales, la base lógica de la organización del texto, la relación entre los temas del texto escolar y los temas de los volúmenes anteriores y siguientes. La parte principal del manual es una discusión por sección de cada tema y subtema del libro escolar. La discusión de cada tema se enfoca en estas preguntas:

¿Cuál es el concepto conectado con el tema?
¿Cuáles son los puntos difíciles de enseñar el concepto?
¿Cuáles son los puntos importantes de enseñar el concepto?
¿Cuáles son los errores y confusiones que los alumnos suelen tener al aprender este tema?

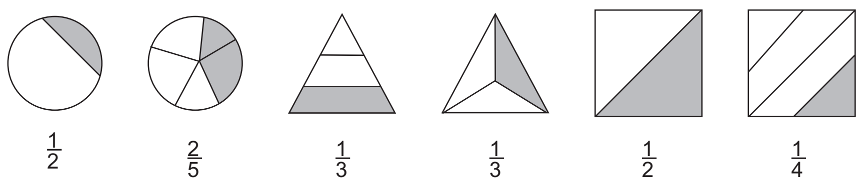
Después de discutir estas preguntas, a veces se sugieren soluciones para problemas pedagógicos. Por ejemplo, esta es parte de la discusión del "Significado y propiedades de las fracciones" del manual para el profesor para el texto escolar de cuarto básico (Shen & Liang. 1992).

> Primero que todo, debemos dejar que los alumnos entiendan el significado de las fracciones, es decir, "cuando un entero "1" se divide equitativamente, el número que expresa una o más de estas partes se llama "fracción". Aquí, los puntos difíciles en el aprendizaje de los alumnos son comprender el concepto de un entero "1" y la unidad fraccionaria de una fracción. El punto importante es explicar claramente el concepto de "equitativamente" (p. 70).

El manual dice que los profesores se deben asegurar de revelar el concepto de que un entero "1" no siempre representa un solo objeto como un círculo, un rectángulo o una manzana, si no que puede representar también un grupo de objetos como un curso, una canasta de manzanas, una pila de libros. El manual continúa diciendo:

> Al comienzo de la enseñanza del concepto de "dividir equitativamente", los materiales pedagógicos más adecuados son las formas circulares porque es más fácil ver la relación entre el todo y sus partes desde una forma circular dividida equitativamente y sus sectores. Luego de eso, otras formas, se pueden usar como ayuda didáctica para fortalecer y solidificar el concepto. Por ejemplo, podría preguntarles a los alumnos que doblen un rectángulo en cuatro partes iguales y que pinten un cuarto y tres cuartos de él para ayudarlos a construir el concepto de ¼ y ¾ . Luego les pediría que cortaran el rectángulo en cuartos y que peguen los cuartos en la pizarra para ilustrar que ¾ se compone de tres cuartos. La unidad fraccionaria de ¾ es ¼. Empleando la misma estrategia, uno puede revelar que $\frac{4}{7}$ se compone de 4 séptimos, la unidad fraccionaria de $\frac{4}{7}$ es $\frac{1}{7}$, etc. De esta forma, el punto difícil de la enseñanza, la "unidad fraccionaria" se resolverá (p. 71).

Después de una mayor discusión de las siguientes formas que se pueden emplear para ayudar a los alumnos a aprehender el concepto de unidad fraccionaria, el manual concluye (p. 71):



> Si los alumnos pueden identificar el valor de una fracción y su unidad fraccionaria, significa que tienen una comprensión preliminar del significado de una fracción. Los profesores pueden darles algunas figuras para que sigan estableciendo diferencias. Por ejemplo, preguntarle a los alumnos cuáles de estas partes sombreadas representan correctamente la fracción bajo ella, cuáles son incorrectas y por qué.

Unos pocos profesores con experiencia, dijeron que no utilizaban el manual para el profesor en forma frecuente porque ya "sabían lo que contiene". No obstante, para los profesores principiantes e incluso para profesores experimentados que enseñan en un nivel por primera vez, el manual les brinda un marco para pensar acerca de lo que enseñarán además de información, que es una plataforma para una comprensión más profunda.

Todos los profesores que entrevisté sentían que "estudiar los materiales pedagógicos intensamente" era muy importante para ellos.

> Estudiar los materiales pedagógicos es extremadamente importante, pues estudiarlos es estudiar lo que debemos enseñar y cómo enseñarlo a nuestros alumnos, en otras palabras, encontrar conexiones entre el conocimiento y los alumnos. Los profesores estudiantes de escuelas normales, que hacen su práctica conmigo, generalmente no entienden por qué pasamos tanto tiempo estudiando los materiales pedagógicos y qué podemos aprender del estudio. Para ellos, parece demasiado simple y sencillo para estudiarlo: solo hay muchos problemas de ejemplo que puedes resolver en un minuto y explicarlo a los alumnos en dos. Pero les dije que, incluso después de enseñar por más de treinta años, cada vez que estudio un texto escolar, veo algo nuevo. Cómo inspirar la mente de los alumnos, cómo explicar de manera clara, cómo gastar menos tiempo y hacer que los alumnos se beneficien más, cómo motivar a los alumnos para que aprendan estos temas... sus respuestas para todas estas preguntas se sustentan en una comprensión profunda y amplia de lo que se trata el material pedagógico y, cada vez que lo estudias, obtienes una mejor idea de lo que es y cómo enseñarlo. Nunca sentirás que no tienes nada más que aprender al estudiar materiales pedagógicos. (Prof. Mao).

"Estudiar materiales pedagógicos" ocupa un espacio importante en el trabajo de un profesor chino. A veces se usa como sinónimo de "planificación de clases":

> Siempre paso más tiempo preparando una clase que enseñando, a veces tres, hasta cuatro veces más. Paso el tiempo estudiando los materiales pedagógicos. ¿Qué voy a enseñar en esta lección? ¿Cómo presentaré el tema? ¿Qué conceptos o habilidades han aprendido los alumnos, en los que me pueda basar? ¿Es un conocimiento clave sobre el que se construirán otros o se construye sobre otros conocimientos? Si es un conocimiento clave, ¿cómo puedo enseñarlo de manera que los alumnos lo aprehendan en forma lo bastante sólida como para sustentar aprendizajes posteriores? Si no es un conocimiento clave, ¿Cuál es el concepto o procedimiento en el que se basa? ¿Cómo voy a extraer ese conocimiento y asegurarme de que mis alumnos están conscientes de él y de la relación entre el conocimiento antiguo y el tema nuevo? ¿Qué tipo de repaso necesitarán mis alumnos? ¿Cómo debería presentar el tema paso a paso? ¿Cómo responderán los alumnos después de plantearles cierta pregunta? ¿Dónde deberé explicar extensamente y dónde debería dejar que los alumnos aprendan por sí mismos? ¿Cuáles son los temas que los alumnos aprenderán, que se basan directa o indirectamente en este tema? ¿Cómo puede mi lección sentar una base para el aprendizaje del tema siguiente y para los temas relacionados que aprenderán en el futuro? ¿Qué espero que aprendan los estudiantes

> avanzados de esta lección? ¿Qué espero que aprendan los alumnos lentos? ¿Cómo puedo alcanzar estas metas? Etc. En una palabra, una cosa es estudiar a quién le estás enseñando y otra, estudiar el conocimiento que enseñas. Si puedes entretejer las dos cosas bien, tendrás éxito. Pensamos constantemente en estas dos cosas cuando estudiamos los materiales pedagógicos. Créeme, parece simple cuando hablo de ello pero, cuando realmente lo haces, es muy complicado, sutil y toma mucho tiempo. Es fácil ser un profesor de enseñanza primaria pero, es difícil ser un buen profesor de enseñanza primaria. (Prof. Wang).

De las afirmaciones anteriores podemos ver cómo ocurren las interacciones entre "el qué" y "cómo enseñarlo" en la mente de los profesores antes de que enseñen una lección o un tema. Mediante este proceso, crece tanto su conocimiento de qué enseñar como el de cómo enseñar.

La comprensión de la base lógica de la resta con reserva es un ejemplo sorprendente de cómo los profesores chinos mejoraron su conocimiento de las matemáticas escolares a través del estudio de lo que ellos llaman "materiales pedagógicos". Aunque vimos en este estudio que la mayoría de los profesores chinos explicó la resta con reserva como "descomponer una unidad de mayor valor" a fines de los setenta, la mayoría de los profesores chinos usaba el "préstamo". Mientras se la entrevistaba acerca de la resta, una profesora informó que los padres de algunos de sus alumnos seguían enseñándoles este concepto a sus hijos. No obstante, la versión del *Marco de Enseñanza y Aprendizaje* y la serie de textos escolares publicada a principios de los ochenta eliminó el concepto de préstamo y lo reemplazó con el de "descomponer una unidad de mayor valor" y la mayoría de los profesores usa ahora este último.

Aprender matemáticas de los colegas

Los profesores chinos no sólo estudian materiales pedagógicos en forma individual, sino que también lo hacen con sus colegas. Existen también interacciones entre los colegas acerca del entendimiento de las matemáticas escolares.

Los profesores chinos se organizan en *jiaoyanzu* o "grupos de investigación docente" (para mayor información ver Paine & Ma, 1993). Estos grupos se reúnen generalmente una vez a la semana por cerca de una hora, en forma formal, para compartir sus ideas y reflexiones acerca de la enseñanza. Durante este tiempo, una actividad principal es el estudio de los materiales pedagógicos. Además, puesto que los profesores chinos no tienen su propia mesa dentro de una sala de clases, comparten una oficina con sus colegas, generalmente con otros miembros de sus grupos de investigación Los profesores leen y corrigen los trabajos de los alumnos, preparan sus clases, tienen conversaciones individuales con los alumnos y pasan el tiempo en que no están enseñando en sus oficinas. Por ende, tienen interacciones informales importantes con los compañeros de oficina fuera de las reuniones formales de los grupos de investigación docente.

Cuando se le preguntó a la Prof. Wang si había aprendido algo de matemáticas con sus colegas, se refirió inmediatamente a su experiencia cuando empezó a enseñar.

> He aprendido mucha matemática de otros profesores. Cuando recién llegué a la escuela, el profesor Xie[6] fue mi mentor. Era un muy buen profesor de matemáticas y ahora está jubilado. Me gustaba escucharlo a él y a otros profesores discutir cómo resolver un problema, pues generalmente tenían varias formas de hacerlo. También me impresionó que podían utilizar ideas aparentemente muy simples para resolver problemas complicados. Fue por ellos que comencé a ver la belleza y el poder de las matemáticas.

De hecho, no sólo los profesores jóvenes aprenden de la cooperación profesional, los profesores experimentados también se benefician de ella. El Prof. Mao dijo:

> Las discusiones con mis colegas son generalmente muy inspiradoras, especialmente cuando compartimos cómo cada uno trata cierto tema, diseña prácticas de aula, maneja el ritmo de enseñanza, qué tarea elige cada uno y porqué, etc. En mi grupo de investigación docente, soy el mayor y el que ha enseñado por más tiempo, sin embargo, he aprendido mucho de mis colegas jóvenes. Son generalmente de mente más abierta que yo en su manera de resolver problemas. Por ejemplo, Jianqiang es un profesor joven que sólo ha enseñado por tres años. A menudo resuelve los problemas en su propia forma ingeniosa, que es muy inspiradora. La gente mayor tiene una rica experiencia pero, generalmente, tenemos una forma fija de resolver un problema. Cómo lo enseñé antes, puede limitar mi mente pero, los profesores jóvenes no tienen estos hábitos tan fijos sino que, tienden a pensar desde varias dimensiones, así que podemos estimularnos mutuamente.

La Prof. Sun había enseñado en dos colegios así que le pedí que comparara la cooperación profesional en ambos.

> Llegué a este colegio hace tres años, cuando me volví a mudar a Shanghai. Antes, enseñé en un colegio en el condado de Jiading en la provincia de Zhejiang. Donde también tuvimos relaciones muy estrechas en nuestro grupo de investigación docente. Creo que un grupo de investigación docente es siempre útil porque necesitas estimulación de otra persona cuando tratas de tener una mejor comprensión de algo.

6 Este no fue el profesor Xie que participó en el estudio.

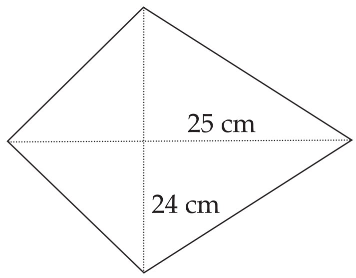
> Cómo otros profesores interpretan el *Marco de Enseñanza y Aprendizaje*, cómo entienden tus colegas cierto tema que tú debes enseñar y cómo lo enseñan, etc., son generalmente inspiradores. Más aún, compartir tus ideas con otros te empuja a hacer tus ideas más claras y explícitas. Siempre siento que mis ideas nunca se habrían desarrollado lo suficiente si no las hubiera compartido con mis colegas.

De hecho, como se sugirió en la discusión del Prof. Sun, aprender algo específico de los colegas de uno es sólo uno de los beneficios de la cooperación profesional. Otra, el compartir ideas con los colegas, aumenta la motivación para estudiar y hacer las ideas más claras y más explícitas. Además, una discusión grupal es un contexto donde uno se inspira fácilmente. Las interacciones entre "el qué" y "cómo enseñarlo" parecen dar la fuerza conductora para el crecimiento del conocimiento de las matemáticas escolares perteneciente a los profesores chinos, a la vez que la cooperación profesional acumula velocidad para el proceso.

Aprender matemáticas de los alumnos

No esperaba que los profesores me dijeran que habían aprendido matemáticas de los alumnos pero, lo hicieron. El ejemplo más impresionante lo dio el Prof. Mao:

> Un buen profesor puede aprender de sus alumnos para enriquecerse. A veces, la manera de resolver un problema que propone un alumno es una que nunca había pensado antes, aunque haya enseñado en un colegio básico por varias décadas. Puedo contarle algo que pasó hace apenas unos días. Estábamos en la "unidad del triángulo" y le pregunté a mi curso que tratara de calcular el área de la siguiente figura:

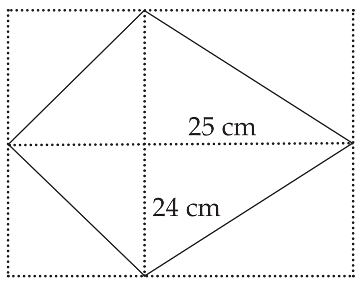


> La mayoría de los alumnos pensaba que era imposible resolver este problema puesto que no conocían las alturas de ninguno de los triángulos. La forma en que generalmente enseño esto es hacer referencia a la fórmula del área del triángulo y a la propiedad distributiva. Ge-

neralmente le digo a los alumnos "miren, esta figura, de arriba hacia abajo, consiste en dos triángulos. Estos tienen algo en común, ¿qué es?" Los alumnos descubrirán que los dos triángulos tienen una base en común. Luego, de izquierda a derecha, la figura también consiste en dos triángulos que también tienen una base en común. "Comencemos por los triángulos superior e inferior. Puesto que hemos aprendido cómo usar una letra para representar un número, ¿por qué no tratamos de usar letras para representar las alturas desconocidas? Dado que escribimos la altura desconocida de este triángulo superior como h_1 ¿cómo podemos representar la altura del triángulo inferior?, h_2. Bien, ahora, ¿cómo podemos escribir la fórmula para calcular sus áreas? Un alumno diría para el área del triángulo superior tendríamos 25 x h_1 : 2 y para el triángulo inferior, 25 x h_2: 2. Entonces el área de toda la figura sería $25 \times h_1 \div 2 + 25 \times h_2 \div 2$. Puesto que hemos aprendido la propiedad distributiva, sabemos que el factor común 25, se puede eliminar y también se puede eliminar: 2. Así que podemos reorganiza el problema de esta forma:

$$25 \times h_1 \div 2 + 25 \times h_2 \div 2 = 25 \times (h_1 + h_2) \div 2$$

En este paso, los alumnos verán repentinamente la luz. ¡Sabemos cuánto es $h_1 + h_2$! ¡Son 24 cm! Entonces, el problema se resolverá. Pero esta vez, antes de mi explicación, un alumno levantó la mano y dijo que podía resolver el problema. Dijo: "yo dibujaría un rectángulo alrededor de la figura:



El largo del rectángulo es 25 cm y el ancho es 24 cm. Su área es 25 x 24. Nuestra figura original en el medio del rectángulo es justo la mitad de él. Así que, simplemente divido 25 x 24 por dos y tendré el área de la figura". Como puede ver, su método era mucho más simple que el mío. ¡Nunca había pensado siquiera en esta forma inteligente! Pero entendí inmediatamente su idea. La mayoría de mis alumnos estaban confundidos. Tuve que guiarlos para que entendie-

> ran cómo y porqué funcionaría. Le dije al curso, "es una idea muy buena. Por favor miren, ¿cuántos rectángulos pequeños hay en este rectángulo grande?" "Cuatro". "Bien". Señalé uno de esos rectángulos pequeños y pregunté "¿qué es esta línea en este rectángulo?" "La diagonal". "Entonces, ¿qué pasa con el área de los dos triángulos pequeños divididos por la diagonal?". "Tienen la misma área". Entonces los alumnos pronto descubrieron que cada rectángulo pequeño estaba dividido en dos partes. Teníamos cuatro partes adentro y cuatro afuera; las de adentro, que formaban la figura original, tenían la misma área que las de las cuatro de afuera. Por ende, el área de nuestra figura original era exactamente la mitad de la del rectángulo grande...

Pero, para captar nuevas ideas de los alumnos como ésta en el aula, hay que tener una buena comprensión de las matemáticas. Tienes que captarla en un momento en que todo el curso está esperando que lo guíes.

La Prof. Wang también mencionó que había aprendido de sus alumnos y dijo que estaba convencida de que algunos estudiantes avanzados son más entendidos de lo que era ella cuando recién llegó a enseñar. La Prof. Sun describió lo que aprendió de alumnos en los cursos menores:

> Los estudiantes son muy creativos, me han enseñado mucho. Solía enseñar a estudiantes de niveles superiores en otra escuela. En esta, querían que enseñara a niveles menores. Los pequeños me han sorprendido tantas veces. Por ejemplo, el problema de la resta con descomposición acerca del que me entrevistó. Nunca había pensado que se podía resolver de tantas formas. Fueron mis alumnos los que propusieron las formas no tradicionales. De hecho, sus propuestas profundizaron mi comprensión del algoritmo.

Estas discusiones que realizaron los profesores acerca de cómo han aprendido de sus alumnos me recordaron una conversación que tuve con otra profesora hace muchos años que dijo:

> En cuanto a la resolución de problemas matemáticos, algunos de mis alumnos son, incluso, más capaces que yo. Algunos problemas de la competencia de matemáticas del distrito escolar, son muy complicados de resolver para mí. Pero, algunos de los alumnos de mi curso los pueden resolver. Estoy contenta de que mis alumnos puedan ir más allá de donde estoy yo pero, también sé que soy yo, mi enseñanza, la que los ha habilitado.

Creo que ella tenía razón, puesto que un contexto de enseñanza y aprendizaje creativo fomenta a los alumnos creativos. Sin duda, es un profesor quien crea tal contexto, quien prepara a los alumnos para que se conviertan en los maestros de sus profesores.

Aprender matemáticas haciéndolas

Hacer matemáticas fue un tema candente para estos profesores chinos. "Resolver un problema de varias maneras [*yiti duojie*]" les parecía un indicador importante de la capacidad de hacer matemáticas. Los profesores me dijeron que era una forma que se probaban a sí mismos. La Prof. Wang dijo que era una de las principales maneras en que había mejorado su conocimiento matemático:

> Mi conocimiento matemático mejoró significativamente luego de hacerme profesora. Cuando recién llegué a este colegio en 1980, tenía muy poco conocimiento de las matemáticas elementales. Puesto que pasé mi educación primaria y media durante la Revolución Cultural, cuando las escuelas no le enseñaban seriamente a los alumnos. Al principio, fui la asistente del profesor Xie en su sexto básico. Mi trabajo era corregir los trabajos de los alumnos y ayudar a los alumnos lentos. En esa época, sentía que muchos alumnos en el curso de Xie eran más inteligentes que yo. Me sorprendí cuando vi lo capaces que eran los alumnos rápidos para resolver problemas complicados. Yo no podía, para nada. Al otro año, me asignaron para enseñar tercero básico. Después, segundo, después tercero y después, tercero, tercero, cuarto, quinto y sexto. En los últimos años, he estado enseñando a los grados superiores. Una manera en la que he mejorado mi conocimiento matemático es a través de la resolución de problemas matemáticos. Realmente me sorprendió la forma inteligente en que los profesores experimentados como Xie, Pan y Mao e incluso aquellos estudiantes avanzados resolvían problemas matemáticos. Para mejorar, primero que todo, hice previamente, todos los problemas que le pedí hacer a mis alumnos. Luego, estudié cómo explicar y analizar los problemas para niños. Para hacer más problemas matemáticos, he revisado libros de compilados de problemas matemáticos y hago los problemas en ellos. No sé cuántos problemas matemáticos he hecho después de que me volví profesora, muchos, muchos, no se pueden contar. Actualmente, estoy estudiando un compilado de problemas de competencias matemáticas. Estos problemas son más complicados que los que enseño en el colegio pero, a través de su estudio, siento que he mejorado. Comparto la forma en que resuelvo problemas difíciles con otros profesores, generalmente Jianqiang. A él también le gusta hacer problemas matemáticos complicados así que nos gusta discutir varias formas de resolverlos.

"Hacer matemáticas" es la actividad principal de los matemáticos. Lange (1964) escribe:

> La mayoría de los miembros de la comunidad matemática, que es una comunidad notablemente mundial poseedora de una universalidad

> poco frecuente en otras áreas de la labor humana, preferiría hacer matemáticas y no preocuparse excesivamente con la pregunta de qué es lo que están haciendo. (p. 51)

Mientras que los matemáticos "no se preocupan de la pregunta de qué es lo que hacen", los profesores que enseñan matemáticas no pueden ignorar la pregunta de qué es lo que enseñan. Sin embargo, un profesor de matemáticas debe mantener también su entusiasmo por hacer matemáticas. Pareciera que un profesor de matemáticas debe ir y venir entre ambos: hacer matemáticas, así como aclarar qué es lo que está haciendo o enseñando. A través de esta interacción, se desarrolla el conocimiento disciplinario del profesor.

En las discusiones de los tres profesores acerca de cómo desarrollaron su comprensión de las matemáticas escolares, vemos un proceso con una serie de interacciones: entre consideraciones de lo que uno debe enseñar y cómo enseñarlo; entre colegas; entre profesores y estudiantes y entre el interés en matemáticas de uno como profesor y como persona común o matemático. Aunque estas interacciones contribuyen al desarrollo y la construcción del conocimiento disciplinario matemático de un profesor, la interacción entre la consideración de qué enseñar y cómo, parece ser el "eje" que dirige la "rueda" mientras que la cooperación profesional entre profesores sirve como los rayos que conectan todas las partes.

El conocimiento disciplinario de matemáticas de un profesor, que se desarrolla bajo la preocupación por la enseñanza y el aprendizaje, será relevante para enseñar y probablemente se usará en la enseñanza. En otras palabras, los profesores chinos desarrollan y profundizan su conocimiento disciplinario de las matemáticas elementales al prepararse para las clases, enseñar el material y reflexionar acerca del proceso. Por ende, lo que aprenden contribuirá y se usarán en la enseñanza.

RESUMEN

En este capítulo se discutieron los resultados de dos estudios breves que exploraron cuándo y cómo se logra la CPMF. Para investigar cuando, probablemente, adquiere un profesor una CPMF, entrevisté dos grupos de personas que no eran profesores: alumnos de noveno grado y estudiantes de pedagogía, haciéndoles las mismas preguntas que antes les hice a los profesores. Ambos grupos mostraron una comprensión conceptual y competencia para ejecutar los algoritmos. Al contrario de los alumnos de noveno grado, las respuestas de los futuros profesores a los cuatro escenarios mostraron una preocupación por enseñar y aprender. Ninguna respuesta mostró una CPMF: no hubo discusiones de las conexiones entre los temas matemáticos, múltiples soluciones de un problema, principios básicos de las matemáticas o coherencia longitudinal.

Todos los miembros de los grupos de estudiantes chinos mostraron una mayor comprensión conceptual que los profesores norteamericanos; por ejemplo, todos mostraron una comprensión de la base lógica de la multiplicación. Los grupos de estudiantes chinos también mostraron un mayor conocimiento procedimental: todos hicieron los cálculos correctamente (con la excepción de un pequeño error) y todos conocían las fórmulas del área y perímetro de un rectángulo. El 85% de los futuros profesores, pero sólo el 40% de los alumnos de noveno grado, crearon un problema de desarrollo que representaba correctamente el significado de la división por fracciones. El 85% de los estudiantes de pedagogía y el 60% de los alumnos de noveno grado llegaron a una solución correcta en sus discusiones de la relación entre el área y perímetro de un rectángulo. Al contrario, el 13% de los profesores norteamericanos hizo bien el cálculo de la división por fracciones. Sólo uno de los profesores norteamericanos (4%) creó un problema de desarrollo que representaba correctamente el significado de la división por fracciones. Sólo uno de los profesores norteamericanos llegó a una solución correcta al discutir la relación entre el área y el perímetro de un rectángulo y el 17% informó que no sabía las fórmulas de área y perímetro.

En el segundo estudio se investigó cómo logran la CPMF los profesores chinos. Para esto, entrevisté profesores con una CPMF, preguntándoles cómo habían adquirido su conocimiento matemático. Los profesores mencionaron varios factores: aprender de los colegas, aprender matemáticas de los alumnos, aprender matemáticas haciendo problemas, enseñar y enseñar ciclo por ciclo y estudiar intensamente los materiales pedagógicos.

En los veranos y al principio de los semestres escolares, los profesores chinos estudian el *Marco de Enseñanza y Aprendizaje*, un documento similar en cierto modo a los *Estándares de Matemáticas Escolares* del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 1989) o documentos estatales como el *Marco Matemático para las Escuelas Públicas de California* (Departamento de Educación de California, 1985, 1992). Los profesores lo estudian y discuten durante el año escolar a medida que van enseñando. En comparación, se dedica poco tiempo a estudiar los manuales para los profesores, aunque a los profesores nuevos les resultan útiles.

Los dos estudios sugieren que, aunque su formación contribuye a una base sólida para ella, los profesores chinos desarrollan una CPMF durante sus carreras docentes, estimulados por una preocupación de qué enseñar y cómo, inspirados y apoyados por sus colegas y los materiales pedagógicos.

Capítulo 7
Conclusión

Como señalé al comienzo de este libro, la motivación inicial de mi estudio era explorar algunas causas probables para los insatisfactorios logros matemáticos de los alumnos norteamericanos, en contraste con sus contrapartes en algunos países asiáticos. Para concluir, quisiera volver a mi preocupación inicial acerca de la educación matemática de los niños en los EE.UU. Habiendo considerado en profundidad el conocimiento de las matemáticas escolares que tienen los profesores, sugiero que para mejorar la educación matemática de los alumnos, una acción importante a tomar es mejorar la calidad del conocimiento de las matemáticas escolares que tienen los profesores.

Aunque la intención de mi estudio no era evaluar el conocimiento matemático de los profesores norteamericanos y chinos, éste reveló algunas diferencias importantes en su conocimiento de las matemáticas escolares. No parece ser accidental que ningún profesor, de un grupo de docentes norteamericanos sobre el promedio, mostrara una comprensión profunda de las matemáticas elementales. De hecho, la brecha de conocimiento entre los profesores norteamericanos y chinos va en paralelo con la brecha en el aprendizaje de los alumnos de ambos países que otros académicos han revelado (Stevenson et al, 1990; Stevenson & Stigler, 1992). Dado que el paralelo entre ambas brechas no es mera coincidencia, se desprende que *mientras queremos trabajar en mejorar la educación matemática de los alumnos, también necesitamos mejorar el conocimiento que tienen los profesores de las matemáticas escolares*. Como se indicó en la introducción, la calidad del conocimiento disciplinario del profesor afecta directamente el aprendizaje del alumno y, se puede abordar en forma inmediata,

El conocimiento disciplinario de los profesores se desarrolla en un proceso cíclico como se ilustra en la figura 7.1.

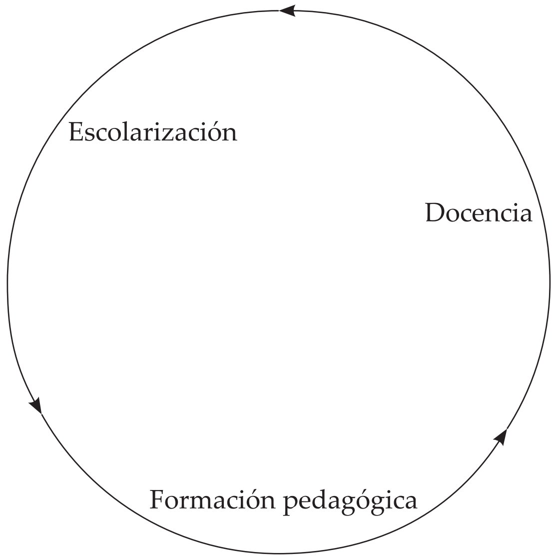


Fig. 7.1. Tres períodos durante los que se desarrolla el conocimiento disciplinario de los profesores.

En la figura 7.1. se ilustran tres períodos durante los cuales se puede promover el conocimiento disciplinario de las matemáticas escolares que tienen los profesores. En China, este ciclo asciende en espiral. Cuando los profesores aún son alumnos, logran la competencia matemática. En los programas de formación docente, su competencia matemática comienza a conectarse con una preocupación primaria por enseñar y aprender matemáticas escolares. Por último, durante sus carreras docentes, cuando dotan a los alumnos con competencia matemática, desarrollan el conocimiento disciplinario de un *profesor*, al que yo llamo, en su forma más elevada, CPMF.

Desafortunadamente, este no es el caso en los EE.UU. Parece que una educación de baja calidad en las matemáticas escolares y un conocimiento docente de baja calidad de estas, se refuerzan mutuamente. Los profesores que no adquieren una competencia matemática durante la escolaridad tienen pocas probabilidades de tener otra oportunidad para hacerlo. El estudio del NCRTE (1991) de los programas de educación docente indica que la mayoría los programas de formación docente norteamericanos se enfocan en cómo enseñar matemáticas más que en las matemáticas en sí. Después de la formación docente, se espera que los profesores sepan cómo y qué enseñarán y que no necesiten más estudio (Schifter, 1996a). Este supuesto se refleja en la estructura educacional norteamericana. La Comisión Nacional de Enseñanza y el Futuro de América (1997) no encontró ningún sistema vigente que asegurara que los profesores accedieran al conocimiento que necesitan. Esta carencia puede ser un impedimento importante para la reforma. En 1996, después de dos años de intenso estudio, la comisión concluyó que, "La mayoría de los colegios y profesores no pueden alcanzar las metas establecidas en los nuevos estándares educacionales, no por falta de voluntad sino porque no saben cómo y el sistema en el que trabajan no los apoya para hacerlo" (p.1).

Al reflexionar en la educación matemática china, uno puede notar que la espiral ascendentes no está ahí por sí misma sino que se cultiva y sustenta en la sólida sustancia de las matemáticas escolares en China. Si el ramo que enseñan no tuviera profundidad y amplitud, ¿cómo podrían los profesores chinos desarrollar una comprensión profunda de éste? De hecho, puede que exista otra espiral ascendente en China, entre matemáticas elementales generales y una sólida educación matemática. Esto contrasta con los sostenidos bajos niveles en los EE.UU., donde las matemáticas elementales inadecuadas ("habilidades básicas", "aritmética de almacén") refuerzan y se refuerzan con una educación matemática insatisfactoria. En los EE.UU. se acepta ampliamente que las matemáticas elementales son "básicas", superficiales y entendidas por todos[1]. Los datos en este libro exploran este mito. Las matemáticas elementales no son para nada superficiales y, cualquiera que las enseñe tiene que estudiar arduamente para entenderlas en forma exhaustiva.

¿Cómo se pueden romper estas relaciones que se autoperpetúan, entre el aprendizaje insatisfactorio de los alumnos y el conocimiento inadecuado de los profesores, entre una instrucción matemática insatisfactoria y unas matemáticas elementales inadecuadas? ¿Cómo se pueden lograr las metas de la reforma? Concluyo con ciertas recomendaciones.

ABORDAR, A LA VEZ, EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR Y EL APRENDIZAJE DE LOS ALUMNOS

Primero que todo, quisiera señalar que, aunque considero la brecha en el conocimiento de los profesores como un factor en la brecha del aprendi-

1 Otros académicos, por ejemplo Ball (1988d) también han revelado la falsedad del supuesto de que las matemáticas elementales son entendidas por todos.

zaje de los alumnos, no considero que mejorar el conocimiento docente preceda necesariamente el aprendizaje de los alumnos. Más bien, creo que ambos se deben abordar simultáneamente y que, trabajar en uno debería sustentar el mejoramiento del otro. Puesto que son procesos interdependientes, no podemos esperar mejorar primero el conocimiento matemático de los profesores y, al hacerlo, mejorar automáticamente la educación matemática de los alumnos.

Como vimos en el capítulo anterior, el conocimiento disciplinario de las matemáticas escolares que tiene un profesor es producto de la interacción entre la competencia matemática y la preocupación por enseñar y aprender matemáticas. La calidad de la interacción depende de la calidad de cada componente. Dado que su propia formación escolar no les brinda, aún a los futuros profesores, una fuerte competencia matemática, su base para desarrollar una enseñanza sólida está debilitada. Como muestran mis datos, el grupo de alumnos chinos de noveno grado era más competente en matemáticas elementales que el grupo de profesores norteamericanos, y además mostró una mayor comprensión conceptual. Esto sugiere que, aunque los profesores chinos desarrollan una CPMF durante sus carreras docentes, su formación escolar contribuye a una base sólida para ella. Los candidatos a profesores en los EE.UU. no tendrán esta base sólida si no se aborda el aprendizaje de los alumnos.

La segunda razón por la que mejorar el conocimiento disciplinario de las matemáticas que tienen los profesores no se puede aislar de la mejora en la enseñanza de las matemáticas escolares es que, como he revelado, el período clave en que los profesores chinos desarrollan un conocimiento disciplinario de un profesor de matemáticas escolares es cuando las enseñan, dado que tienen la motivación para mejorar su enseñanza y la oportunidad de hacerlo. Si esto es cierto, parecería poco real esperar que el conocimiento disciplinario que tienen los profesores norteamericanos de las matemáticas escolares mejore antes de que se mejore la educación matemática en los colegios. Así, mejorar el conocimiento disciplinario de los profesores y mejorar la educación matemática son procesos interconectados e interdependientes que deben ocurrir en forma simultánea. Entonces, lo que se necesita es un contexto de enseñanza en el que sea posible que los profesores mejoren su conocimiento de las matemáticas escolares a medida que mejora su enseñanza de estas.

MEJORAR LA INTERACCIÓN ENTRE EL ESTUDIO QUE HACEN LOS PROFESORES DE LAS MATEMÁTICAS Y EL CÓMO ENSEÑARLAS

He indicado que el período clave en el que los profesores chinos desarrollan su comprensión profunda de las matemáticas escolares es cuando las enseñan. Sin embargo, este hallazgo puede no ser cierto para los profesores norteamericanos. Los profesores norteamericanos en este estudio no rindieron más que sus colegas nuevos en cuanto a conocimiento disciplinario. Este hallazgo concuerda con el del Centro Nacional de Investigación Docente (NCRTE, 1991). La pregunta, entonces es: ¿por qué la enseñanza de matemáticas no produjo una CPMF en este país?

He observado que la enseñanza de matemáticas en los EE.UU. carece de una interacción entre el estudio de las matemáticas que se enseñan y cómo enseñarlas. Varios factores hacen difícil que los profesores estudien cuidadosamente las matemáticas escolares que enseñan. Uno es la presunción que ya he discutido, de que las matemáticas elementales son "básicas", superficiales y que todo el mundo las entiende.

Otra suposición, que los profesores no necesitan más estudios sobre el tema para enseñar, también dificulta que los profesores sigan estudiando las matemáticas escolares. Schifter escribió:

> La noción de que, incluso los profesores experimentados, pueden y se les debe exigir que sigan aprendiendo en sus propias aulas contrasta agudamente con el supuesto de que convertirse en profesor marca una suficiencia de aprendizaje. No es una gran exageración decir que, según las convenciones de la cultura escolar, los profesores, por definición, ya saben, conocen el dominio del contenido que debe enseñar, la secuencia de las lecciones a través de las que lo enseñarán y las técnicas para imponer orden una sala llena de alumnos. (1996a, p. 163)

Incluso si los profesores tuvieran el tiempo y la inclinación por estudiar matemáticas escolares, ¿qué estudiarían? Ball (1996) escribió, "no está claro si la mayoría de las personas que desarrollan el currículum escriben teniendo como meta el aprendizaje de los profesores". H. Burkhardt (comunicación personal, 11 mayo, 1998) dijo, "los que desarrollan profesionalmente el currículum, aunque abogan por un enfoque constructivista para los niños, permiten sólo gradualmente que los profesores aprendan en forma constructivista".

Los manuales de los textos escolares ofrecen a los profesores poca orientación (Armstrong & Bezuk, 1995; Schmidt, 1996, p.194) posiblemente porque no se espera que los profesores los lean. Burkhardt (comunicación personal, 11 mayo 1998) señaló:

> Los textos escolares de matemáticas otorgan un guión (con acotaciones) para que el profesor lo use al explicar el tema y guiar la lección, se espera que los alumnos sólo lean y hagan los ejercicios al final del capítulo. Nadie lee las "guías para el profesor" excepto en los cursos de maestros.

Aunque los resultados del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias indican que las lecciones de matemáticas elementales en los EE.UU. tienden a basarse en el texto escolar (Schmidt, 1996, p. 104), poca investigación se enfoca en cómo los profesores usan exactamente los textos escolares (Freeman & Porter, 1989, pp. 67-88; Sosniak & Stodolsky, 1993). Esta investigación indica que puede haber una amplia variación en la selección de temas de los profesores, énfasis de los contenidos y secuencia de instrucción. Rara vez se siguen los textos escolares de principio a fin (Schmidt, McKnight, & Raizen, 1997). El estudio de casos sugiere que el conocimiento de los profesores desempeña un papel muy importante en cómo se seleccionan e interpretan los contenidos de los textos escolares (Putnam, Heaton, Prawat, & Remillard, 1992). Incluso la enseñanza de un tema puede tener una amplia variación. Como hemos visto en los primeros tres capítulos de este libro, distintos profesores pueden construir el mismo tema en formas muy distintas.

En China, enseñar un curso se considera como actuar en una obra de teatro. Aunque un actor tiene que conocer una obra muy bien y la puede interpretar de una forma original, él o ella no puede escribir (o reescribir) la obra. Sin duda, una obra bien escrita no limitará la puesta en escena o creatividad del actor sino que, las estimulará e inspirará.

Lo mismo se puede decir de los profesores. La enseñanza puede ser una actividad socialmente cooperativa. Necesitamos buenos actores así como buenos dramaturgos. Un texto compuesto en forma minuciosa y cuidadosa brinda sabiduría acerca del currículum con la que los profesores pueden "dialogar" y que los puede inspirar e iluminar. En China, los textos escolares se consideran no sólo para los alumnos sino también para que los profesores aprendan las matemáticas que enseñan. Los profesores estudian los textos cuidadosamente, los investigan en forma individual y grupal, conversan acerca de qué significan los textos escolares, resuelven los problemas juntos y conversan acerca de ellos. Los manuales docentes brindan información acerca del contenido y la pedagogía, el pensamiento de los alumnos y la coherencia longitudinal.

El tiempo es aquí un problema. Si los profesores deben descubrir por sí mismos qué enseñar en su limitado tiempo fuera de aula y decidir cómo enseñarlo, entonces, ¿dónde está el tiempo para que estudien cuidadosamente lo que deben enseñar? Los profesores norteamericanos tienen menos tiempo laboral fuera del aula que los profesores chinos (McKnight et al, 1987; Stigler & Stevenson, 1991) pero, necesitan hacer mucho más en ese tiempo limitado. Entonces, lo que se espera que logren los profesores norteamericanos es imposible. Está claro que no tienen el tiempo suficiente ni el apoyo adecuado para pensar detenidamente en lo que deben enseñar y, sin una idea clara de qué enseñar ¿cómo puede uno determinar cómo enseñarlo reflexivamente?

REORIENTAR LA FORMACIÓN PEDAGÓGICA

Yo sostengo que la formación docente es un período estratégicamente crítico durante el que se pueden hacer cambios. Como señala el informe de la Conferencia acerca de la Preparación Matemática de Profesores de Educación Primaria:

> Tiene sentido atacar los problemas de las matemáticas de la educación primaria en la universidad. Todos los profesores van a la universidad, que es donde esperan aprender a enseñar. Más aún, la labor es casi manejable a nivel universitario... sólo una cantidad limitada de universidades educan a los profesores. (Cipra, 1992, p. 5)

Aunque mis datos no muestran que los profesores chinos desarrollan su CPMF durante su formación docente, esto no significa que se debe minimizar el rol de la formación docente en la mejora del conocimiento de matemáticas elementales de un profesor. Por el contrario, en el círculo vicioso formado por una educación matemática de baja calidad y un conocimiento docente de las matemáticas escolares también de baja calidad, una preparación docente por parte de terceros podría servir como una fuerza que rompa el ciclo.

No obstante, reorientar la formación docente crea otra labor importante para la investigación educacional, reconstruir matemáticas escolares sólidas y sustanciales para que los alumnos y profesores las aprendan. Lo que deberíamos hacer es reconstruir unas matemáticas escolares sustanciales con una comprensión más exhaustiva de la relación entre las matemáticas fundamentales y las nuevas ramas avanzadas de la disciplina. Reconstruir unas matemáticas escolares sustanciales para hoy es una labor para investigadores de educación matemática. Indudablemente, a menos que se desarrollen matemáticas escolares tales, no se podrá deshacer el reforzamiento mutuo entre bajos niveles de contenido y enseñanza.

COMPRENDER EL PAPEL QUE PODRÍAN DESEMPEÑAR LOS MATERIALES PEDAGÓGICOS, INCLUIDOS LOS TEXTOS ESCOLARES, EN LA REFORMA

Al igual que los textos escolares, los documentos de la reforma como el Marco de California (1985) y los Estándares (1989) del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) se prestan para muchas interpretaciones (Putnam et al., 1992) que dependen del conocimiento y creencias acerca de las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje del lector.

Los *Estándares Profesionales de la Enseñanza de las Matemáticas* (NCTM, 1991, p. 32) dicen que "los textos escolares pueden ser recursos útiles para los profesores pero que, los profesores también deben ser libres para seguir o alejarse del texto si las ideas y conjeturas de los alumnos ayudan a dar forma a la navegación que hace el profesor del contenido". Ferrucci (1197) señaló que descontinuar el uso de los textos escolares se puede ver como ser consecuente con esta afirmación. Otros caracterizan a los profesores de la reforma como que "utilizan el texto escolar como un complemento del currículum", para las tareas, práctica y revisión, por el contrario, los profesores tradicionales dependen del texto para guiar el alcance y secuencia del currículum (Kroll & Black, 1993, p. 431).

Debido a la insatisfacción con los textos escolares (Ball, 1993b; Heaton, 1992; Schifter, 1996b) o a que fueron alentados a hacerlo en los programas de práctica (Ball & Feiman-Nemser, 1988), algunos profesores con mentalidad de reforma, organizan sus currículos en forma independiente, hacen sus propios materiales e implementan lecciones que han diseñado (Heaton, 1992; Shimahara & Sakai, 1995; Stigler, Fernández, & Yoshida, 1996, p. 216; a partir de narrativas de profesores de matemáticas de verano, ver Schifter, 1996c, 1996d). Bali y Cohen (1996) escribieron:

> Los educadores a menudo menosprecian los textos escolares y muchos profesores orientados hacia la reforma los repudian, exclamando desdeñosamente que no usan los textos. Esta idealización de la autonomía profesional conduce a la visión de que los buenos profesores no siguen los textos escolares sino que, elaboran su propio currículum... Esta hostilidad hacia los textos y la imagen idealizada del individuo profesional, han inhibido una consideración cuidadosa del rol constructivo que el currículum podría desempeñar. (p. 6)

Los profesores no necesitan tener una relación antagónica con los textos escolares. Mis datos ilustran cómo los profesores pueden utilizar tanto el libro como ir más allá de él. Por ejemplo, los paquetes de conocimiento de los profesores chinos son consistentes con el currículum nacional. Pero la idea del alumno que el Prof. Mao "captó" (capítulo 6) y los métodos no tradicionales de resta con reserva, multiplicación con varias cifras y división por fracciones, que describieron los profesores chinos no estaban en el texto escolar.

Los manuales de los profesores pueden explicar las intenciones y razones de quienes desarrollan el currículum para la forma de seleccionar y secuenciar los temas. Los manuales también brindan información muy específica acerca de la naturaleza de las respuestas de los alumnos a actividades particulares (Magidson, 1994 April; Stigler, Fernández, &Yoshida, 1996). La información acerca de las respuestas de los alumnos puede apoyar a los profesores que se enfocan en el pensamiento del alumno. No obstante, dicha información puede ser inútil, si los profesores no reorganizan su importancia o no tienen tiempo ni energía para estudiar cuidadosamente los manuales (Magidson, 1994 Abril).

ENTENDER LA CLAVE DE LA REFORMA: CUALQUIERA SEA LA FORMA DE INTERACCIÓN EN EL AULA, ÉSTA SE DEBE ENFOCAR EN MATEMÁTICAS SERIAS

Al igual que el uso de los textos escolares, el tipo de enseñanza que promueven en los documentos de la reforma está sujeto a distintas interpretaciones. Por ejemplo, Putnam y sus colegas (1992) entrevistaron profesores de California y educadores de matemáticas del estado y del distrito. Algunos pensaban que el enfoque principal del *Marco de California* de 1985 era enseñar "contenido matemático importante", otros pensaban que era cómo enseñar, un "llamado a usar material manipulativo y grupos cooperativos" (p.22- 214). Durante 1992 y 1993, el *Proyecto de Reforma de Reconocimiento y Documentación* de la *Reforma en Educación Matemática* estudió escuelas en todo los EE.UU. Los miembros del proyecto Ferrini-Mundy y Johnson (1994) notaron que los esfuerzos superficiales pueden pasar por cambio. "Las clases de matemáticas pueden *parecer* orientadas hacia los estándares, con calculadoras a la vista, estudiantes trabajando en grupos, material manipulativo disponible y discusión de problemas interesantes" (p. 191) pero, los investigadores necesitan una comprensión más profunda de lo que pasa en esas aulas.

Esta dicotomía se agudiza cuando consideramos las aulas de los profesores chinos. Por una parte, la enseñanza de las matemáticas en un curso chino, incluso por un profesor con una CPMF, parece muy "tradicional", contraria a lo que aboga la reforma. La enseñanza de las matemáticas en China se basa claramente en el texto escolar. En las aulas chinas, los alumnos se sientan en filas mirando al profesor, que es obviamente el líder y el que organiza el programa y la dirección del aprendizaje en el aula. Por otra parte, uno puede ver en las aulas chinas, particularmente en aquellas de profesores con una CPMF, rasgos que aboga la reforma: enseñar para lograr una comprensión conceptual, entusiasmo de los alumnos y oportunidades para expresar sus ideas y su participación y contribución para sus propios procesos de aprendizaje. ¿Cómo pueden estos rasgos aparentemente contradictorios, algunos atacados y otros defendidos por la reforma, estar presentes al mismo tiempo? ¿Qué podría implicar este intrigante contraste a los esfuerzos reformistas en los EE.UU.?

La perspectiva de Cobb y sus colegas (Cobb, Wood, Yackel, & McNeal, 1992) ayuda a explicar este misterio. Cobb y sus asociados ven la esencia de la reforma actual como un cambio de la tradición de las clases de matemáticas y argumentan que la instrucción tradicional y la de la reforma difieren en la "calidad de los significados que se supone son compartidos o son normativos y las prácticas de matemáticas" más que en "caracterizaciones retóricas".

En su estudio de casos de dos aulas, una con "una tradición de matemáticas escolares" en donde el conocimiento se "transmitía" del profesor a los "alumnos pasivos" y otra con una "tradición de matemáticas indagativas" en que "el aprendizaje matemático se veía como un proceso interactivo, constructivo y centrado en el problema", los académicos hallaron que en ambas, los profesores y los alumnos contribuían activamente al desarrollo de su aula con tradición matemática, a la vez, los profesores de ambas aulas expresaron su "autoridad institucionalizada" durante el proceso Cobb y sus asociados sugieren que el "aprendizaje significativo" puede ser mera retórica en la educación matemática porque "la actividad de seguir instrucciones procedimentales puede ser significativa para los alumnos" en ciertas tradiciones matemáticas de aula. La metáfora de la transmisión que describe la enseñanza de las matemáticas tradicionales como un intento por transmitir conocimiento desde el profesor a estudiantes pasivos podría ser apropiada sólo en el "contexto político de la reforma" (p.34).

En este sentido, aunque la enseñanza de las matemáticas, en las aulas de los profesores chinos no calza con algunas "caracterizaciones retóricas" de la reforma, calza en la realidad con la tradición matemática de aula que aboga la reforma actual. De hecho, aunque el aula de un profesor chino con CPMF se pueda ver muy "tradicional", trasciende la forma en muchos aspectos; se basa en el texto escolar pero no se limita a los libros;

el profesor es el líder pero, las ideas e iniciativas de los alumnos se alientan y aprecian enormemente.

Por otra parte, ¿qué tipo de "enseñar para comprender" podemos esperar de un profesor que no puede dar una explicación matemática al algoritmo de la resta con reserva, la multiplicación con varias cifras o la división por fracciones? ¿o un profesor que no puede dar una representación correcta para el significado de una operación aritmética como la división por fracciones? ¿o un profesor que no está motivado por explorar nuevas afirmaciones matemáticas?

Para establecer más claramente este punto podemos pensar acerca de aulas como la de Ball (1993a, 1993b, 1996), considerada por algunos como un modelo de la reforma actual:

> En el aula centrada en el pensamiento y discusión de los alumnos, el aula ideada por los reformadores de la educación matemática, los niños generalmente se dispersan en grupos donde trabajan juntos resolviendo problemas mientras que el profesor se pasea por la sala atento a problemas matemáticos importantes y considerando qué tipos de intervención, si es que interviene, son apropiados. Cuando los niños se vuelven a juntar para comparar sus ideas y soluciones, sus preguntas facilitan la discusión.(Schifter, 1996b, p. 3)

Las aulas chinas están organizadas totalmente distintas. No obstante, lo que quiero señalar es que, aunque se ven distintas, la diferencia es superficial. Si se ve cuidadosamente al tipo de matemáticas que los alumnos chinos hacen y el tipo de pensamiento al que los alientan, y a la forma en que las interacciones con los profesores promueven ese tipo de proceso mental y matemático, los dos tipos de aula son, de hecho, más similares de lo que aparentan. Por otro lado, a pesar del hecho de que las aulas de muchos profesores de educación primaria norteamericanos se parecen a las descritas por Ball,con niños en grupos frente a frente y usando material manipulativo, así y todo, ni las matemáticas ni el pensamiento matemático que hacen los alumnos ni lo que el profesor trata de hacerles entender son lo mismo. El verdadero pensamiento matemático que ocurre en un aula, de hecho, depende enormemente de la comprensión que tiene el profesor de matemáticas.

Otro punto que me gustaría señalar, es que el cambio de una tradición de aula matemática puede no ser una "revolución" que simplemente elimina la antigua y adopta la nueva. Más bien, puede ser un proceso en que algunas características se desarrollan a partir de la tradición antigua. En otras palabras, las dos tradiciones pueden no ser totalmente antagonistas. Más bien, la nueva tradición abarca la antigua así como un nuevo paradigma en la investigación científica no excluye completamente uno antiguo, sino que lo incluye como un caso especial.

En la enseñanza real del aula, puede que ambas tradiciones no se distingan claramente o pueden no ser tan "puras" como se ha descrito. Por ejemplo, mi estudio indica que los profesores con una CPMF nunca ignoran el rol del "aprendizaje procedimental", sin importar cuánto enfaticen la "comprensión conceptual".

Más aún, esta investigación sugiere que el conocimiento disciplinario matemático de los profesores puede contribuir a una tradición matemática del aula y a su cambio. Una "comprensión matemática que se supone compartida" que marca una tradición de aula no puede ser independiente del conocimiento matemático de la gente en el aula, especialmente el del profesor que está a cargo del proceso de enseñanza. Si el conocimiento matemático del mismo profesor de educación primaria se limita a los procedimientos, ¿cómo podríamos esperar siquiera que su curso tenga una tradición de investigación matemática? El cambio que esperamos puede ocurrir sólo si trabajamos en cambiar el conocimiento matemático de los profesores. Me gustaría terminar con una cita de Dewey (1902/1975):

> Pero aquí viene el esfuerzo del pensamiento. Es más fácil ver las condiciones en su separación, insistir en una a expensas de la otra, hacerlas antagonistas, que descubrir una realidad a la cual cada una pertenece (p. 91).

Anexo

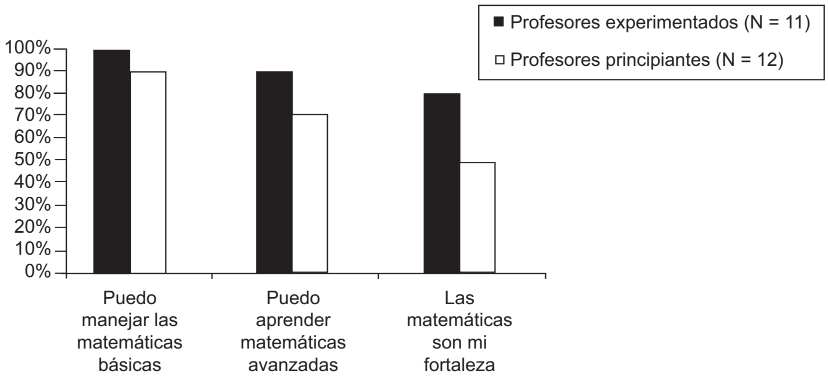


Fig. A.1.Visión de los profesores norteamericanos de su propio conocimiento matemático.

CUADRO A.1 **Años de experiencia de los profesores experimentados**		
	Años enseñados	
	Escuela primaria	**Liceo**
Prof. Baird	14	
Prof. Barbara	5	
Prof. Barry	23	
Prof. Belinda	12	
Prof. Belle	19	
Prof. Bernadette	17	
Prof. Bernice	8	
Prof. Beverly	15	
Prof. Blanche	1	
Prof. Brady	19	
Prof. Bridget	2	14

Nota. Ninguno de los profesores informó experiencia en jardines o kindergarten.

备课辅导材料	*beike fudao cailiao*	*Manuales de los profesores*
处理教材	*chuli jiaocai*	*Manejar el material docente*
教研组	*jiaoyanzu*	*Grupos de investigación docente*
教学大纲	*jiaoxue dagang*	*Marco de enseñanza y aprendizaje*
借一当十	*jie yi dang shi*	*Pedir prestado 1 unidad de las decenas y considerarla 10 unidades*
进率	*jin lu*	*Tasa de descomposición de una unidad mayor*
进一	*jinyi*	*Descomponer una unidad de mayor valor*
课本	*keben*	*Textos escolares*
退一	*tui yi*	*Descomponer una unidad de mayor valor*
一题多解	*yiti duojie*	*Resolver problemas de varias formas*
知其然，知其所以然	*zhi qi ran, zhi qi suoyi ran*	*Saber cómo y saber por qué*
钻研教材	*zuanyan jiacocai*	*Estudiar intensamente los materiales pedagógicos*

Fig. A.2.

Referencias

Armstrong, B., & Bezuk, N. (1995). Muitiplication and division of fractions: The search for meaning. In J. Sowder & B. Schappeiie (Eds.), Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades (pp. 85-119). Albany: State University of New York Press.

Ball, D. (1988a). Mount Holyoke College, South Hadley, Massachusetts Summermath for teachers program and educational leaders in mathematics project. In National Center for Research on Teacher Education, Dialogues in teacher education (pp. 79-88). East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Education.

Ball, D. (1988b). Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective,teachers bring to teacher education. Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University, East Lansing.

Ball, D. (1988c). The subject matter preparation of prospective teachers: Challenging the myths. East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Education.

Ball, D. (1989). Teaching mathematics for understanding: What do teachers need to know about the subject matter. East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Education.

Ball, D. (1990), Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. Journal for Research in Mathematics Education, 21(2), 132-144.

Ball, D. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation. In J. Brophy (Ed.), Advances in research on teaching (Vol. 2, pp. 1-48). Greenwich, CT: JAI Press.

Ball, D. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of math education. American Educator, 16(1), 14-18, 46-47.

Ball, D. (1993a). Halves, pieces, and twoths: Constructing and using representational contexts in teaching fractions. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), Rsitwnal numbers: An integration of research (pp. 157-195). Hillsdale, Nf: Lawrence Eribaum Associates.

Ball, D. (1993b). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. Elementary School journal, 93(4), 373-397.

Ball, D. (1996). Connecting to mathematics as a part of teaching to learn. In D. Schifter (Ed.), What's happening in math class?: Reconstructing professional identities (Vol. 2, pp. 36-45). New York: Teachers College Press.

Ball, D., & Cohen, D. (1996). Reform by the book: What is—or what might be—tht role of curriculum materials in teacher learning and instructionai reform? Educational Researcher, 25(9), 6-8, 14.

Ball, D., & Feiman-Nemser, S. (1988). Using textbooks and teachers' guides: A dilemma for beginning teachers and teacher educators. Curriculum Inquiry, 18, 401-423.

Beijing, Tianjin, *Shangai*, and Zhejiang Associate Group for Elementary Mathematics Teaching Material Composing (1989). Shuxuc, Diwuce [Mathematics Vol. 5]. Beijing, China: Beijing Publishing House.

Bruner, J. (1960/1977). The process of education, Cambridge, MA: Harvard University Press.

California State Department of Education. (1985). Mathematics framework for California public schools: Sacramento, CA: California State Department of Education.

California State Department of Education. (1992). Mathematics framework for California public schools. Sacramento, CA: California State Department of Education.

Chang, L., & Ruzicka, J. (1986). Second international mathematics study, United States, Technical report I. Champaign, IL: Stipes.

Cipra, B. (Ed.). (1992). On the mathematical preparation of elementary school teachers. Report of a two-part conference held at the University of Chicago in January and May, 1991.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics tradidons: An interactional analysis. American Educational Research Journal, 29(3), 573-604.

Cohen, D. K. (1991). A revolution in one classroom: The case of Mrs. Oublier. Educational Evaluation and Policy Analysis; 12, 311-330.

Coleman, J. S. (1975). Methods and results in IEA studies of effects of school on learning.Review of Educational Research, 45(3), 355-386.

Crosswhite, F.J. (1986). Second international mathematics study: Detailed rejwrt for the United States. Champaign, IL: Stipes.

Crosswhite, F. J., Dossey, J., Swafford, J., McKnight, C, & Cooney, T. (1985). Second international mathematics study. Summary report for the United Slates. Champaign, IL: Stipes.

Dewey, J. (1902/1975), The child and the curriculum. In M. Dworkin (Ed.), Dewey on education:Selections (pp. 91-111). New York: Teachers College Press.

Dowker, A. (1992). Computational strategies of professional mathematicians. Journal for Research in Mathematics Education, 23(1), 45-55.

Driscoll, M.J. (1981). Research within reach: Elementary school mathematics. Reston, VA: NationalCouncil of Teachers of Mathematics.

Duckworth, E. (1979, June). Learning with breadth and depth. Presented as the Catherine Molony Memorial Lecture, City College School of Education, Workshop Center for Open Education, New York.

Duckworth, E. (1987). Some depths and perplexities of elementary aridimetic. Journal of Mathematical Behavior, 6, 43-94.

Duckworth, E. (1991). Twenty-four, forty-two, and I love you: Keep it complex. Harvard Educational Review, 61, 1-24.

Ferrini-Mundy, J., & Johnson, L. (1994). Recognizing and recording reform in mathematics: New questions, many answers. Mathematics Teacher, 87(3), 190-193.

Ferrucci, B. (1997). Institutionalizing mathematics education reform: Vision, leadership, and the Standards. In J. Ferrini-Mundy & T. Schram (Eds.), The Recognizing and Recording Reform in Mathematics Education Project: Insights, issues, and implications (pp. 35-47). Journal for Research in Mathematics Education Monograph No. 8.

Freeman, D. J., & Porter, A. C. (1989). Do textbooks dictate the content of mathematics instruction in elementary schools? American Educational Research Journal, 26(3), 403-421.

Fuson, K. C, Smith, S. T., & Lo Cicero, A. M. (1997). Supporting Latino first graders' ten-structured thinking in urban classrooms. Journal for Research in Mathematics Education, 28(6), 738-766.

Gear y D., Siegler, R., & Fan, L. (1993). Even before formal instruction, Chinese children outperform American children in mental addition. Cognitive Development, 8(4), 517-529.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. Grouws (Ed.), Handbook of mathematics leaching and learning (pp. 276-295). New York: Macmillan.

Grossman, P., Wilson, S., & Shulman, L. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. In M. Reynolds (Ed.), Knowledge, base, for the beginning teacher (pp.23-36). New York: Pergamon Press.

Heaton, R. (1992). Who is minding the mathematics content?: A case study of a fifth grade teacher. Elementary School Journal, 93(2), 153-162.

Hiebert, J. (1984). Children's mathematics learning: The struggle to link form and understanding. Elementary School Journal, 84, 497-513.

Hirsch, E. D., Jr. (1996). The schools we need and why we don't have them. New York: Doubleday.

Husen, T. (1967a). International study of achievement in mathematics (Vol. 1). New York: Whey.

Husen, T. (1967b). International study of achievement in mathematics (Vol. 2). New York: Wiley.

Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. In A. Schoenfeld (Ed.), Mathematical thinking and problem solving (pp. 77-156)., Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J., & Nemirovsky, R. (1995). Moving to the next level: A mathematics of change theme throughout the K-16 curriculum. UME Trends, 6(6), 20-21.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics and cognition: A research synthesis Iry the International Group for the Psychology of Mathematics education (pp. 96-112). Cambridge, England: Cambridge University Press.

Kroll, L, & Black, A. (1993). Developmental theory and teaching methods: A pilot study of a teacher education program. Elementary School Journal, 93(4), 417-441.

Lange, L. (1964). The structure of mathematics. In G. Ford & L. Pugno (Eds.), The structure of knowledge and the curriculum (pp. 50-70). Chicago, IL: Rand McNaliy.

LaPointe, A. E., Mead, N. A., & Philips, G. W. (1989). A world of differences: An international assessment of mathematics and science. Princeton, NJ: Educational Testing Service.

Lee, S. Y., Ichikawa, V., & Stevenson, H. W. (1987). Beliefs and achievement in mathematics and reading: A cross-national study of Chinese, Japanese, and American children and their mothers. In D. Kleiber & M. Maehr (Eds.), Advances in motivation (Vol. 7, pp. 149-179). Greenwich, CT: JAI Press.

Leinhardt, G. (1987). Development of an expert explanation: An analysis of a sequence of subtraction lessons. Cognition and Instruction, 4(4), 225-282.

Leinhardt, G.; & Greeno, J. (1986). The cognitive skill of mathematics teaching. Journal of Educational Psychology 78 (2) 75-95.

Leinhardt, G., Putnam, R., Stein, M., & Baxter, J. (1991). Where subject matter knowledge matters. In J. Brophy (Ed.), Advances in research on teaching (Vol. 2, pp. 87-113). Greenwich, CT: JAI Press.

Leinhardt, G., & Smith, D. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. Journal of Educational Psychology, 77(3), 247-271.

Lindquist, M. (1997). NAEP findings regarding the preparation and classroom practices of mathematics teachers. In P. Kenney & E. Silver (Eds.), Results from the sixth mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress (pp. 61-86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lynn, R. (1988). Educational achievement in Japan: Lessons for the West. NY: Sharpe.

Magidson, S. (1994, April). Expanding horizons: From, a researcher's development of her own instruction to the implementation of that material by others. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Marks, R. (1987). Those who appreciate: A case study of Joe, a beginning mathematics teacher (Knowledge Growth in a Profession Publication Series). Stanford, CA: Stanford University, School of Education.

McKnight, C, Crosswhite. F., Dossey, J., Kifer, E., Swafford, J., Travers, K., & Cooney, T. (1987). The under-achieving curriculum: Assessing U.S. schools from an international perspective. Champaign, IL: Stipes.

Miura, L, & Okamoto, Y. (1989). Comparisons of American and Japanese first graders' cognitive representation of number and understanding of place value, journal of Educational Psychology, 81, 109-113.

National Center for Education Statistics. (1997). Pursuing excellence: A study of U.S. fourth-grade mathematics and science achievement in international context (NCES 97-255). Washington, DC: U.S. Government Printing Office.

National Center for Research on Teacher Education. (1988). Dialogues in teacher education. East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Education.

National Center for Research on Teacher Education. (1991). Findings from the teacher education and learning to teach study; Final ref/ort. East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Education.

National Commission on Teaching and America's Future. (1997). Doing what matters most: Investing in quality teaching. New York: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation: Standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). Professional standards for teaching mathematics. Reston, VA: Author.

Paine, L., & Ma, L. (1993). Teachers working together: A dialogue on organizational and cultural perspectives of Chinese teachers. International Journal of Educational Research, 19(8), 675-718.

Polya, G. (1973). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton N[: Princeton University Press (2nd printing).

Putnam, R. (1992). Teaching the "hows" of mathematics for everyday life: A case study of a fifth-grade teacher. The Elementary School Journal, 93(2), 163-177.

Putnam, R., Heaton, R., Prawat, R., & Remillard, J. (1992). Teaching mathematics for understanding: Discussing case studies of four fifth-grade teachers. Elementary School Journal, 93(2), 213-228.

Resnick, L. B. (1982). Syntax and semantics in learning to subtract. In T. Carpenter, P. Moser, & T. Romberg (Eds.), Addition and subtraction: A cognitive perspective (pp. 136-155). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Robitaille, D. F., & Garden, R. A. (1989). The IEA study of mathematics II: Contexts and outcomes of school mathematics. New York: Pergamon.

Schifter, D. (1996a). Conclusion: Throwing open the doors. In D. Schifter (Ed.), Wiat's happening in math class?: Reconstructingprofessional identities (Vol. 2, pp. 163-165). New York: Teachers College Press.

Schifter, D. (1996b). Introduction: Reconstructing professional identities. In D. Schifter (Ed.),What's happening in math class?: Reconstructing professional identities (Vol. 2, pp. 1-8). New York: Teachers College Press.

Schifter, D. (Ed.). (1996c). Wiat's happening in math class?: Envisioning new practices through teacher narratives (Vol. I). New York: Teachers College Press.

Schifter, D. (Ed.). (1996d). What's happening in math class?: Reconstructing professional identities (Vol. 2). New York: Teachers College Press.

Schmidt, W. (Ed.). (1996). Characterizing pedagogical flow: An investigation of mathematics and science teaching in six countries. Boston: Kluwer,

Schmidt, W., McKnight, C, K Raizen, S. (1997). A splintered vision: An investigation of U.S. science and mathematics education. Boston: Kluwer.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. Orlando, FL: Academic Press.

Schram, P., Nemser, S., & Ball, D. (1989). Thinking about teaching subtraction with regrouping: A comparison of beginning and experienced teachers' responses to textbooks. East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Education.

Shen, B., & Liang, J. (1992). Xiao xueshu xwjiao xuefa [Teaching elementary mathematics - A teacher's manual]. *Shangai*, Beijing: The Press of East China Normal University.

Shimahara, N., & Sakai, A. (1995). Learning to teach in two cultures: Japan and the United States. New York: Garland Publishing.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15, 4-14.

Simon, M. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. Journal for Research in Mathematics Education, 24(3), 233-254.

Smith, D., & Mikami, Y. (1914). A history of Japanese mathematics. Chicago: Open Court Publishing Company.

Sosniak. L., & Stodolsky, S. (1993). Teachers and textbooks: Materials use in four fourth-grade classrooms. Elementary School Journal, 93(3), 2549-275.

STEEN, L. (1990). Pattern. In L. Steen (Ed.), On the shoulders of giants (pp. 1-10). Washington, DC: National Academy Press.

STEIN, M., BAXTER, J., & LEINHARDT, G. (1990). Subject matter knowledge and elementary instruction: A case from functions and graphing. American Educational Research Journal, 27(4), 639-663.

STEINBERG, R., MARKS, R.,& HAYMORE, J. (1985). Teachers' knowledge and structure content in mathematics (Knowledge Growth in a Profession Publication Series). Stanford, CA: Stanford University, School of Education.

STEVENSON, H.W., AZUMA, H., & HAKUTA, K. (Eds.). (1986). Child Development and education in Japan. New York: W.H. Freeman.

STEVENSON, H. W., LEE, S., CHEN, C, LUMMIS, M., STIGLER, J., FAN, L., & GE, E. (1990). Mathematics achievement of children in China and the United States. Child Development, 61, 1053-1066.

STEVENSON, H. W., & STIGLER, J. W. (1992). The learning gap. New York: Summit Books.

STIGLER, J. W., FERNÁNDEZ, C, & YOSHIDA, M. (1996). Cultures of mathematics instruction in Japanese and American elementary classrooms. In T. Rohlen & G. LeTendre (Eds.), Teaching and learning in Japan (pp. 213-247). Cambridge, England: Cambridge University Press.

STIGLER, J. W., LEE, S. Y., & STEVENSON, H. W. (1986). Mathematics classrooms in japan, Taiwan, and the United States. Child Development, 58(5), 1272-1285.

STIGLER, J. W., & PERRY, M. (1988a). Cross-cultural studies of mathematics teaching and learning: Recent findings and new direction. In D. Grouws & T. Cooney (Eds.), Perspectives on research on effective mathematics teaching (Vol. 1), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

STIGLER, J. W., & PERRY, M. (1988b). Mathematics learning in Japanese, Chinese, and American classrooms. New directions for child development, 41, 27-54.

STIGLER, J. W., & STEVENSON, H. W. (1991). How Asian teachers polish each lesson to perfection. American Educator, 14(4), 13-20, 43-46,

WALKER, D. (1990). Fundamentals of curriculum. Santiago, Chile: Harcourt Brace Jovanovich.

WILSON, S. (1988). Understanding historical understanding: Subject matter knowledge and the teaching of U.S. history. Unpublished doctoral dissertation, Stanford University, Stanford, CA.

Índice de autores

F

G

H - I

J - K

R

S - T

W - Y

Índice temático

A - B

C

D

E - F

I

J - K

M - N

O, P

R

S - T

U - V - Z