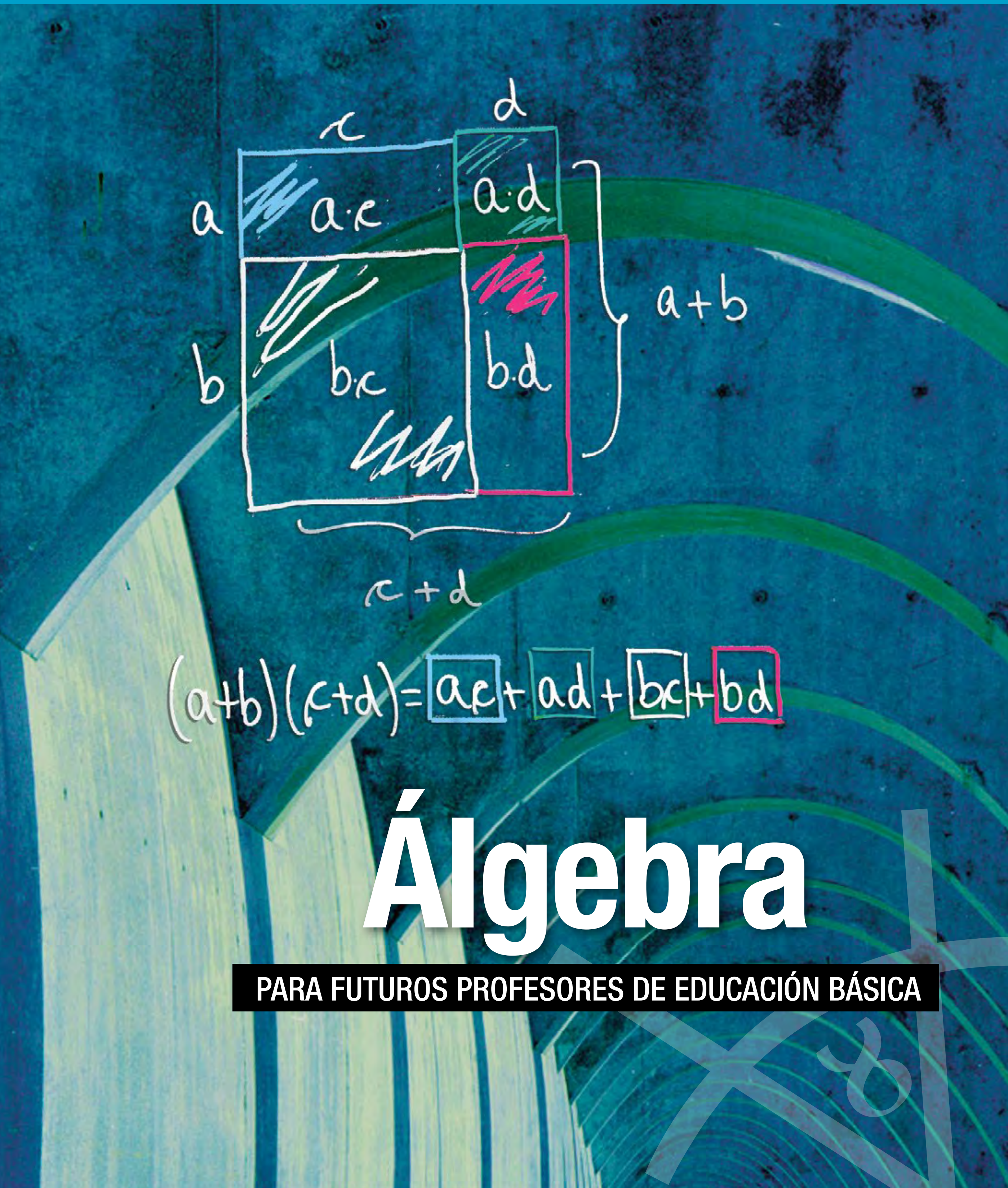
ReFIP Matemática

RECURSOS PARA LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

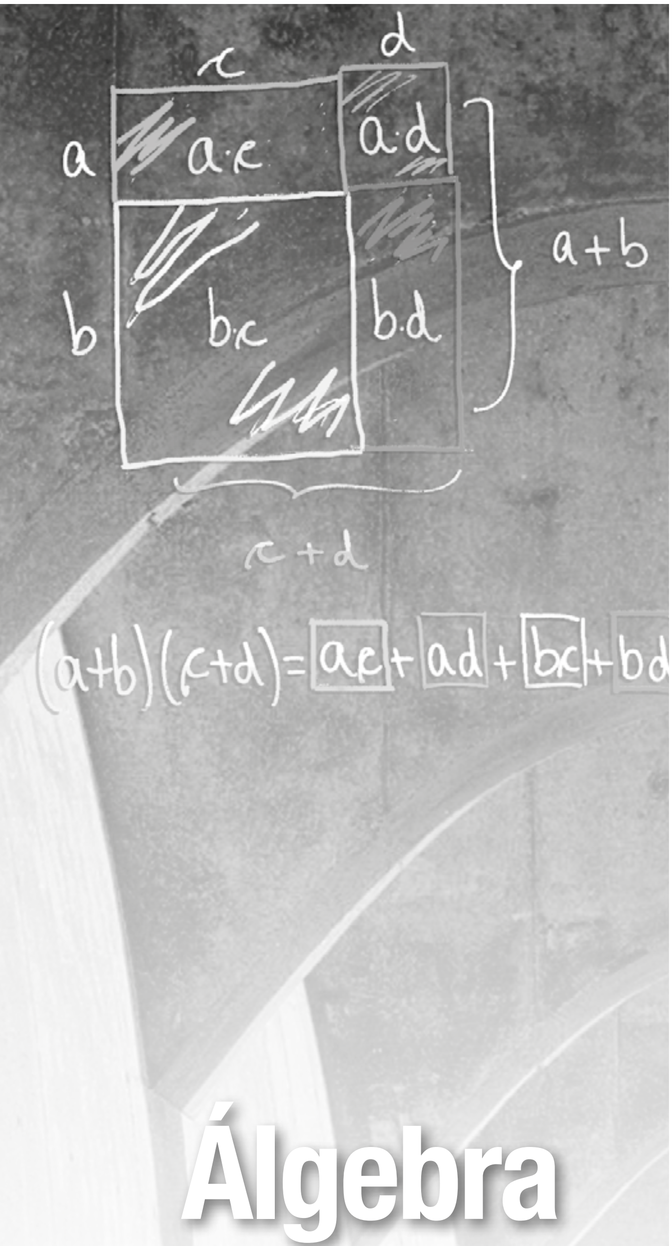


Álgebra

PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

ReFIP Matemática

RECURSOS PARA LA FORMACIÓN INICIAL
DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA



Álgebra

PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

AUTORAS:

Salomé Martínez,
Universidad de Chile

María Leonor Varas,
Universidad de Chile

COAUTORES:

Rubén López,
Universidad Católica de la Santísima Concepción

Andrés Ortiz,
Universidad Católica de la Santísima Concepción

Horacio Solar,
Universidad Católica de la Santísima Concepción

Proyecto FONDEF – CONICYT D09 I1023 (2011 – 2014)
Directora de Proyecto: Salomé Martínez
Autoras: Salomé Martínez
María Leonor Varas
Coautores: Rubén López
Andrés Ortiz
Horacio Solar

Registro de propiedad intelectual:
ISBN: 978-956-349-598-0
Depósito legal: 236451

Dirección editorial: Arlette Sandoval Espinoza
Corrección de estilo: María Paz Contreras Aguirre
Dirección de arte: Carmen Gloria Robles Sepúlveda
Coordinación diseño: Vinka Guzmán Tacla
Diseño Portada: José Luis Jorquera Dölz
Diagramación: María Carolina Alvarez Concha
Ilustración: Carlos Valentino Romero Cáceres
Producción: Andrea Carrasco Zavala

Primera edición: diciembre 2013

Coyancura 2283, oficina 2013,
Providencia. Santiago de Chile.

www.ediciones-sm.cl
Atención al cliente: 600 381 13 12

Impreso en Chile/ Printed in Chile

Recursos para la Formación Inicial de Profesores de Educación Básica en Matemática

Proyecto FONDEF - CONICYT D09 I1023 (2011 - 2014)

Directora:	Salomé Martínez, Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile
Director alterno:	Héctor Ramírez, Centro de Modelamiento Matemático, Universidad de Chile
Institución beneficiaria principal:	Centro de Modelamiento Matemático, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile
Institución beneficiaria asociada:	Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituciones asociadas:	Ediciones SM Chile Ministerio de Educación Fundación Luksic Academia Chilena de Ciencias

Cuando se incuba un sueño y nace una idea, el mundo se ensancha, se ponen en juego los recursos y se inicia un camino donde los obstáculos se presentan uno a uno. Cuando la idea es buena y el sueño es grande, nada detiene el ímpetu desatado.

La colección de libros que tengo el honor de presentar es el fruto de un sueño grande y del trabajo persistente de un equipo formado por matemáticos y educadores matemáticos, quienes, liderados por su directora, se abocaron a la tarea de escribir cuatro libros de matemática, sobre los temas centrales del currículo escolar: Números, Geometría, Álgebra y Datos y Azar.

Estos cuatro libros representan la culminación de un proceso de aprendizaje, reflexión y maduración que se inicia muy atrás, con las primeras iniciativas en educación en el Centro de Modelamiento Matemático, cuando se vislumbraba que era posible hacer un aporte a la educación desde la perspectiva de los matemáticos, pero no se sabía muy bien cómo. Fueron muchos los proyectos que se sucedieron y que fueron ayudando a comprender mejor el problema que se enfrentaba y ayudaron a apuntar con mayor precisión a una de nuestras principales debilidades en matemática escolar: las escasas oportunidades que nuestro sistema de formación de profesores brinda a los estudiantes de Pedagogía en Educación Básica de conocer la matemática escolar. Esta colección de libros apunta, con una potente fuerza de saber, al corazón del sistema formativo, proveyendo matemática en sus contenidos y la manera de enseñarlos.

Si estos libros representan la culminación de un proceso, también son solo un hito en el camino que se abre hacia el futuro con inmensos desafíos, algunos de los cuales son desatados por estos mismos. La incorporación en las aulas universitarias de la matemática escolar, con toda la potencialidad y riqueza que estos libros proponen, requiere de grandes esfuerzos de parte de las propias unidades formadoras, de los formadores de profesores y ciertamente de los estudiantes de pedagogía que sueñan con un aula escolar viva y ávida de conocimiento. Estos libros ponen de manifiesto la necesidad de formación académica de los formadores de profesores y llaman a la creación de material de apoyo complementario en otros formatos. Con una mirada de largo plazo, estos libros también muestran la necesidad de contar con académicos de alto nivel, conocedores de la matemática escolar, de su enseñanza y de su aprendizaje, en todas las unidades de formación de profesores.

El proceso que da vida a esta colección de libros, desde su concepción hasta la impresión final de sus páginas, tiene numerosos rasgos originales que quisiera destacar. Este es un proyecto que convoca a matemáticos interesados por la educación, expresando una realidad creciente en todo el mundo y también en nuestro país, que mueve a científicos investigadores de sus propias disciplinas a abordar problemas de la educación, con espíritu abierto y con el respeto que merecen. Expresiones de esta tendencia van en la línea de un cambio de parte de los científicos, que han ido comprendiendo la complejidad de los problemas de la educación, de la formación de profesores, de la escuela y la sala de clases. Pero este proyecto también convoca a educadores matemáticos que, por la naturaleza de su disciplina científica, tienen a la educación en toda su complejidad en el centro de su quehacer, pero que en muchas ocasiones han caminado por una vía paralela a los científicos. El proyecto que da origen a los libros que aquí presento es una muestra más de la importancia de acercar estos mundos y de la tendencia nacional a comprender que en la educación hay espacio para todos, que la incorporación de actores enriquece la discusión y mejora la calidad de los resultados. Estos libros son el fruto del trabajo conjunto de matemáticos y educadores matemáticos.

Estos libros no nacen del trabajo aislado de los expertos convocados, sino que en todo momento se ha tenido presente la realidad, expresada a través de la opinión de los actores que intervienen en la formación de los profesores de educación básica. Las necesidades, el sentir y las opiniones de los académicos formadores y de los estudiantes de pedagogía fueron recogidos en consultas y aplicaciones piloto a lo largo de todo el país. Esta es una experiencia inédita en Chile, que incorpora a los lectores en la redacción de libros de texto universitarios, basando las decisiones editoriales en la evidencia encontrada, sobre lo que es relevante para el profesor, y dando fuerza a las ideas que se presentan en sus páginas. Es interesante que en la búsqueda de información para apoyar la escritura de los libros, los autores tuvieron la oportunidad de dar una mirada nacional a la formación de los profesores de educación básica en cuanto a la matemática, la que les permitió levantar evidencia de investigación que resulta de extremo interés, más allá de su propósito original.

Estos libros sobre la matemática escolar son una herramienta poderosa para apoyar la formación de profesores, ya que enfocan los contenidos matemáticos conectados con su enseñanza y teniendo en cuenta el currículo nacional. Así como sus cuatro tomos van tomando uno a uno los temas centrales del currículo, con una mirada puesta en los contenidos escolares, proyectados en la sala de clases. Dan cuenta de la matemática escolar en todas sus dimensiones, las que muchas veces son minimizadas equivocadamente ignorando su complejidad. Una lectura de sus páginas nos lleva a comprender rápidamente que la tarea de enseñar matemática escolar es intelectualmente demandante y que requiere de una cuidadosa preparación, que va mucho más allá de unos cursos aislados. Estos libros muestran la importancia de la comprensión de los contenidos, teniendo presentes las diversas formas de enseñanza y de aprendizaje y el currículo escolar, y sugieren un cambio importante en el eje de las carreras de pedagogía, moviéndolo desde una mirada generalista desprovista de contenido a una mirada integradora del contenidos y su enseñanza.

En la línea de esta última reflexión, con la publicación de esta obra se plantean en forma concreta lineamientos respecto de cómo deberíamos formar a los profesores en Chile. Debemos transformar una cultura universitaria que considera que la disciplina que se enseña es secundaria frente a un saber pedagógico general y teórico, desde el cual sería posible deducir qué hay que hacer en el caso de cada disciplina. Debemos transformar una cultura universitaria que considera que en la formación de profesores, la preparación disciplinaria y pedagógica van en paralelo, dejando que el estudiante de pedagogía haga la integración. Es necesario movernos a una cultura de la integración entre las disciplinas y lo pedagógico, generando un compromiso de los formadores que abordan estos aspectos en forma coordinada e integrada. Ciertamente la formación de un profesor va más allá de lo disciplinario y lo pedagógico, pero si estos aspectos no están presentes con fuerza y en forma integrada, no tendremos un profesor o profesora con la potencialidad de proyectar el saber formador en su integridad.

Estos libros nacen en un contexto marcado por una creciente preocupación nacional por la educación, empujada por las demandas del movimiento estudiantil en sus múltiples expresiones. Esta preocupación pone énfasis en el acceso y la calidad de la educación, y demanda importantes recursos para la introducción de los cambios estructurales necesarios, que garanticen el acceso de todos los niños y niñas a la educación de calidad. Sin embargo, es necesario hacer notar que con una inyección importante de recursos y con una juiciosa reorganización administrativa, la calidad de la educación no queda garantizada. En este contexto, es importante mencionar que la colección de libros que presentamos nace en el seno del programa INICIA, lanzado en 2008 y que tiene como propósito el fortalecimiento de la formación inicial de los profesores. Estos libros nacen y se nutren de las experiencias adquiridas en la formulación de los estándares de matemática, que definen lo que como país esperamos que los futuros egresados de las carreras de pedagogía sepan y sepan hacer, y que se miden en la prueba INICIA. Los estándares y la prueba INICIA definen un marco de demandas para los formadores de profesores y para los estudiantes de pedagogía difíciles de lograr sin tener el apoyo del Estado, de las instituciones y de académicos preocupados por el avance de la calidad de la educación. Esta colección ofrece apoyo en el área de matemática e interpreta los estándares desde una perspectiva de la realidad nacional. Bienvenidos serán materiales complementarios que ayuden a formar mejores profesores y profesoras.

Me sumo con alegría a todos los que ven en estos libros una poderosa herramienta para seguir construyendo una mejor educación para todos nuestros niños y niñas, y a todos quienes levantan su voz para felicitar a la directora y a todos los autores de estos libros, quienes con su trabajo, talento y perseverancia nos ponen un desafío más en esta tarea de hacer de Chile un país con una educación justa y de calidad, donde todos los niños y niñas tengan acceso a una educación que les permita conocer las matemáticas, las ciencias, las humanidades, las artes y todas las expresiones de la cultura humana, para construir así un país mejor, un país desarrollado.

Patricio Felmer
Premio Nacional de Ciencias Exactas 2011
Académico de la Universidad de Chile

AGRADECIMIENTOS

La colección de textos ReFIP fue desarrollada como parte del proyecto FONDEF D09I1023 “Recursos pedagógicos para la implementación de los Estándares de Formación Inicial de profesores de Educación Básica en matemática” (ReFIP). Agradecemos el apoyo de Conicyt a través del programa FONDEF, el cual fue clave para la realización de esta colección. En particular, reconocemos el apoyo del Comité de Área de Educación de FONDEF, y muy especialmente la dedicación de Daniela Fuentes, ejecutiva a cargo del proyecto.

Expresamos también nuestra gratitud a la institución que albergó a este proyecto, el Centro de Modelamiento Matemático de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, en particular, al director del CMM, Alejandro Jofré, y a Francisco Brieva, decano de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, por proveernos el soporte que este proyecto necesitó. Asimismo, agradecemos todo el apoyo de la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile, y muy especialmente a su decano, Martin Chuaqui.

Las instituciones asociadas al proyecto han sido esenciales para su desarrollo, en particular, ellas apoyaron con decisión su presentación. Agradecemos a Ediciones SM, en particular a su gerente general, Francisco Tepper, y a su directora editorial, Arlette Sandoval. También queremos agradecer el patrocinio de Fundación Luksic, en especial a Monserrat Baranda, su gerente general. Agradecemos también a la directora del Centro de Perfeccionamiento e Investigaciones Pedagógicas del Ministerio de Educación (CPEIP), Paula Pinedo, y a Regina Silva, Coordinadora del Área de Educación Continua (CPEIP). Todo nuestro reconocimiento va también a la Academia Chilena de Ciencias y a su presidente, Juan Asenjo, por la permanente colaboración.

Un hito importante en el desarrollo de los textos fue la utilización de sus versiones preliminares en cursos de matemáticas de carreras de Pedagogía en Educación Básica. Estos pilotos se desarrollaron en 16 universidades: Pontificia Universidad Católica de Chile, Universidad Alberto Hurtado, Universidad Arturo Prat, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Universidad Católica de Temuco, Universidad de Concepción, Universidad de las Américas, Universidad del Bío-Bío, Universidad del Desarrollo, Universidad de Los Andes, Universidad de Magallanes, Universidad de Playa Ancha, Universidad de Viña del Mar, Universidad Diego Portales, Universidad Santo Tomás, Universidad San Sebastián y Universidad de los Andes. Estos pilotos no podrían haberse llevado a cabo sin el apoyo de las autoridades de estas universidades, quienes tuvieron una confianza enorme en nuestro equipo y nos apoyaron en todas las actividades de esta etapa. Agradecemos especialmente a sus académicos formadores y a los estudiantes de los cursos donde se probaron nuestros textos. Valoramos su generosidad y activa participación en las distintas actividades del proyecto.

Durante el desarrollo del proyecto contamos con la guía del Comité Asesor, conformado por Patricio Felmer, Miguel Díaz, Raimundo Olfos, María Aravena y Arturo Mena, quienes evaluaron versiones preliminares de los textos y orientaron nuestro trabajo. Valoramos sus aportes a lo largo del proyecto. En esta misma línea, agradecemos a Pablo Dartnell por sus valiosas contribuciones.

Agradecemos también a los estudiantes, académicos formadores y evaluadores nacionales e internacionales que nos entregaron sugerencias y comentarios, que ayudaron a enriquecer la colección de textos. También reconocemos el valioso trabajo del equipo editorial de Ediciones SM en la etapa final de producción de los textos.

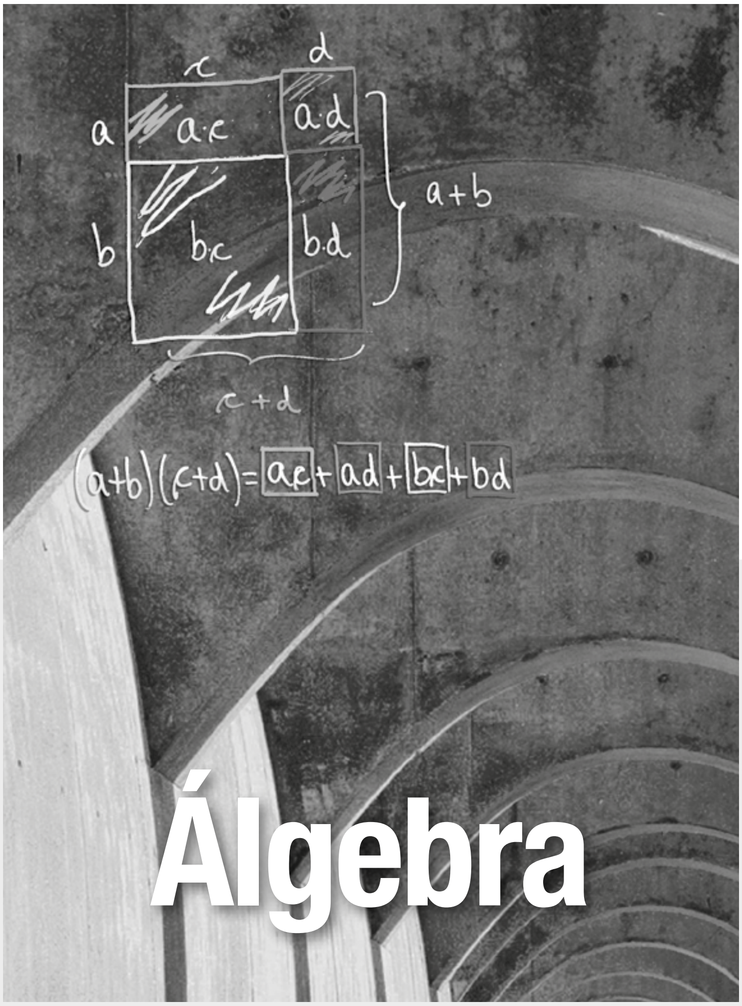
Queremos agradecer todo el apoyo en la gestión y administración del proyecto. Agradecemos a Erika Pino, Paulina Zavala y María Eugenia Heckmann de la Pontificia Universidad Católica de Chile, a Judith Figueroa, Eterin Jaña y Silvia Mariano de la Universidad de Chile, y muy especialmente a María Cecilia Cea de la Universidad de Chile. También agradecemos a Bárbara Salas por el apoyo en la difusión del proyecto.

Valoramos también la disposición de Carmen Montecinos y José Sánchez a ser parte del Comité Editorial de esta colección.

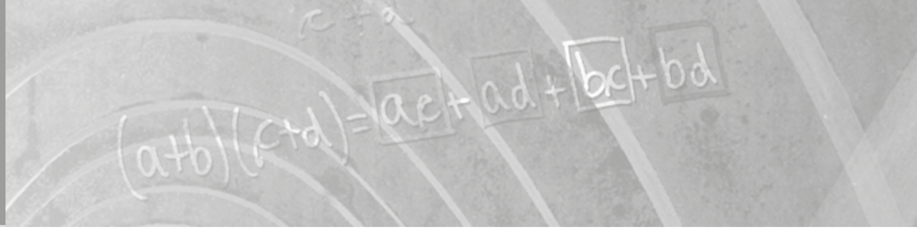
Finalmente, queremos expresar nuestra gratitud a dos connotados académicos que influyeron fuertemente en nuestro quehacer. A Sybilla Beckmann, académica de la Universidad de Georgia y autora de un reconocido libro de matemática para la formación de profesores en Estados Unidos, por sus valiosos consejos que fueron una guía durante todo el proyecto, y a Patricio Felmer, académico de la Universidad de Chile y referente nacional en temas relacionados con educación matemática, por su generosa ayuda.

Salomé Martínez
Directora del Proyecto
Fondef D09I1023

Héctor Ramírez
Director Alterno del Proyecto
Fondef D09I1023



Álgebra



ÍNDICE

El Álgebra es una rama fundamental de la matemática y su presencia en el currículo escolar se ha ido adelantando y aumentando. Esta tendencia incluye el reconocimiento de formas de pensamiento algebraico que son anteriores al uso de expresiones propiamente algebraicas. Temprano en el trabajo matemático escolar, en el reconocimiento de patrones, en el trabajo con expresiones numéricas, en la geometría escolar y en la aritmética, se producen razonamientos algebraicos cuya rigurosidad no se merma por la falta de formalismos. Este texto comparte ese enfoque y lo promueve.

El Álgebra nos permite trabajar de manera sencilla y sistemática problemas complejos, y describir de manera sintética las relaciones relevantes. Para ello es necesario introducir el lenguaje algebraico y desarrollar la capacidad de trabajar con él. Este paso, de lo concreto a lo abstracto, de lo particular a lo general, se apoya a lo largo del texto en representaciones, diagramas, modelos físicos y discusiones donde se explicitan las relaciones entre ellos y los argumentos que dan sentido a los procedimientos utilizados.

Este libro da profundidad a la matemática escolar y la conecta con su enseñanza. Las propiedades que sustentan los procedimientos algebraicos utilizados en la resolución de ecuaciones y de inecuaciones –como las propiedades de las operaciones, de la igualdad, de la desigualdad– son estudiadas y comentadas en detalle. El desafío pedagógico de enseñar Álgebra a nivel de Educación Básica recibe una atención permanente en este texto. Se explicitan y discuten las dificultades en el aprendizaje de cada uno de los temas abordados, así como los posibles errores a los que el profesor deberá estar atento para diagnosticar y enfrentar.

Este texto se organiza en cuatro capítulos. El primero de ellos se dedica a las expresiones algebraicas. En él se introduce el lenguaje algebraico y se muestran formas de trabajar con esta herramienta en distintos contextos: para describir propiedades generales, fórmulas, relaciones y regularidades. Se estudian las potencias, sus propiedades y distintas aplicaciones. El trabajo algebraico conlleva una abstracción que nos libere de los contextos y los casos particulares. Para facilitar este tránsito entre lo concreto y lo abstracto, nos preocupamos de que el uso de símbolos y el trabajo algebraico tengan sentido, dando significado a los procedimientos y razonamientos, y explicitando las razones de su validez. Para ello se usan diversas herramientas, como los diagramas, modelos, ejemplos, tablas y demostraciones.

El segundo capítulo se destina a las ecuaciones y las inecuaciones, con una especial preocupación por el modelamiento. En este contexto, el planteamiento de ecuaciones e inecuaciones cobra tanta relevancia como su resolución y la discusión de sus soluciones en el contexto del problema que las origina. Las manipulaciones que se realizan para transformar una ecuación en otra equivalente, en el proceso de resolución, se presentan conectadas con las propiedades de la igualdad que las justifican. Se estudian también en detalle las ecuaciones y los sistemas lineales, y se aborda el tránsito desde problemas aritméticos a ecuaciones y una variedad de representaciones basadas en modelos físicos y diagramas que permiten plantear y resolver ecuaciones. Con ello, se conectan los métodos algebraicos con el desarrollo de estrategias múltiples y pertinentes al problema que se desea resolver, además de mantener presente el sentido de procedimientos, cuyo propósito podría oscurecerse en complejidades puramente técnicas. Esto también muestra cómo un razonamiento algebraico intuitivo, pero riguroso, permite a niños en niveles escolares iniciales modelar matemáticamente, plantear y resolver ecuaciones, mucho antes de su formalización algebraica.

El capítulo tercero se dedica a patrones y secuencias. En él, se pone especial cuidado a distinguir habilidades de razonamiento *inductivo*, donde a partir de una regularidad observada se hace una predicción o conjetura, de las de razonamiento *deductivo,* que permiten justificar la validez de las regularidades observadas. Ambos razonamientos se fomentan promoviendo la discusión de las reglas en que se basan las predicciones a partir de un número finito de términos de una secuencia y su posterior generalización basada en propiedades conocidas, para demostrar su validez. En este capítulo se aborda el estudio de distintos tipos de patrones y secuencias numéricas, tales como progresiones aritméticas y geométricas y sus sumas asociadas, que son de gran interés en distintos tipos de problemas.

Las funciones se estudian en el último capítulo, donde se comienza por su definición matemática y formas de presentarlas, como fórmulas y tablas. Los gráficos merecen una especial atención como herramienta que permite sintetizar la información contenida en una función y también desplegarla para poder visualizar su comportamiento. Además, se estudia la interpretación de gráficos de manera cualitativa, poniendo el énfasis en sus características globales, como son el crecimiento, decrecimiento y cambios de tendencia, para luego interpretarlas en el contexto de la situación estudiada. Con especial detalle se estudia el concepto de *razón de cambio* y la *función lineal*, por su relevancia y utilidad.

El libro de Álgebra que tiene usted en sus manos es parte de la colección ReFIP Matemática "Recursos para la Formación Inicial de Profesores de Educación Básica", una serie de cuatro textos: Números, Geometría, Álgebra y Datos y Azar, enfocados en la matemática para enseñar que requieren los profesores de educación básica. Para cumplir este propósito, se diseñó un proceso de elaboración que le diera coherencia a la colección y que incorporó las necesidades de los usuarios a través de consultas y un extenso pilotaje de versiones preliminares.

En el caso de este texto de Álgebra, participaron en la redacción de las versiones que se pilotearon: Rubén López, Salomé Martínez, Andrés Ortiz, Horacio Solar y María Leonor Varas y se recibieron contribuciones de Renato Lewin. La redacción de la versión definitiva estuvo a cargo de Salomé Martínez y María Leonor Varas. Contribuyeron con cuidadosas evaluaciones Arturo Mena y Marisol Valenzuela. En la revisión y corrección final colaboró de manera significativa Alejandro López. A todos ellos, nuestros más calurosos agradecimientos. El carácter de producción colectiva es un importante sello de este libro y fuente de una vitalidad que esperamos se trasmita a quienes lo utilicen en su preparación para enseñar a niños y niñas, que puedan aprender con seguridad y entusiasmo un Álgebra llena de sentido y utilidad para comprender mejor fenómenos que nos rodean y nos asombran.

Capítulo
I

Expresiones algebraicas

Introducción

El gran aporte del álgebra es que nos permite describir de manera concisa y coherente relaciones generales facilitando su comprensión y estudio. Debido a esto, es una herramienta esencial para demostrar propiedades, describir patrones y resolver problemas. Al introducir el lenguaje algebraico pareciera que se agrega una complicación innecesaria, pero al desarrollar manejo algebraico nos damos cuenta de que el álgebra nos permite abordar de manera sencilla y sistemática problemas complejos. Para trabajar en álgebra, es necesario realizar una abstracción que nos libere de los contextos y casos particulares. Esto puede constituir una barrera. Para facilitar este tránsito entre lo concreto y lo abstracto, es necesario que el uso de símbolos y el trabajo algebraico tengan sentido, y dar significado a los procedimientos y razonamientos. Para esto usaremos diversas herramientas, como diagramas, modelos y también demostraciones.

Antiguamente, las fórmulas y propiedades se expresaban en lenguaje natural, como puede verse por ejemplo en el libro *al–Kitab almukhtasar fi hisab al–jabr wal–mukabal*, del matemático árabe Mohammed ibn Musa al–Khowarizmi (780–850 a.C.). En este libro se encuentra la siguiente fórmula:

La cosa y diez es multiplicado por la cosa menos diez, entonces esto es lo mismo que si se dijera la cosa multiplicada por la cosa, es un cuadrado positivo, y diez por la cosa es diez cosas positivas; menos diez por la cosa es diez cosas negativas, ahora restamos lo negativo de lo positivo, y solo queda un cuadrado. Menos diez multiplicado por diez es cien, que se debe sustraer del cuadrado. Por lo tanto, resulta un cuadrado menos cien.

Si expresamos la fórmula del texto usando lenguaje algebraico, donde la letra x representará “la cosa”, obtenemos:

$$(x + 10)\,(x - 10) = x \cdot x + 10x - 10x - 10 \cdot 10 = x^2 - 100.$$

La ventaja del lenguaje algebraico queda a la vista.

En la primera parte de este capítulo, aprenderemos a usar el lenguaje algebraico en distintos contextos: para describir propiedades generales, fórmulas, relaciones y regularidades. En la segunda parte, estudiaremos las potencias, sus propiedades y distintas aplicaciones.

1. Expresiones numéricas y algebraicas

El uso de símbolos (letras) nos permite expresar relaciones entre cantidades o magnitudes, de tal manera que en una sola expresión o *fórmula* podemos resumir muchos casos. Por ejemplo, podemos describir los números pares como aquellos que son el doble de un número natural. Esto se puede representar de manera algebraica con la expresión $2 \cdot n$, es decir 2 veces (o el doble de) un número natural n. Vemos que esta expresión es general, todos los números pares se escriben de esta forma. Así, $2 \cdot n$ *resume* la secuencia de pares: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,…

En geometría hay numerosos ejemplos de expresiones que involucran símbolos. Por ejemplo, el área de un rectángulo es su largo multiplicado por su ancho, lo cual se puede expresar como $A = l \cdot a$, donde A es el área del rectángulo, l es el largo y a es su ancho. Esta fórmula de área nos permite obtener el área de cualquier rectángulo, solo debemos conocer su largo y su ancho.

El lenguaje algebraico también nos permite expresar propiedades generales de los números y sus operaciones. Por ejemplo, la propiedad conmutativa de la suma la podemos expresar como sigue:

Para todos los números reales a *y* b, *se cumple que* $a + b = b + a$.

La frase anterior dice que cualesquiera sean los números a y b, siempre el resultado de la suma es el mismo, sin importar el orden en que se realice.

La clave en el uso de letras es que podemos representar con ellas un número cualquiera. Y así podemos plantear expresiones que pueden involucrar cantidades que desconocemos. Por ejemplo, analicemos el siguiente truco:

Piensa en un número, súmale 3*, multiplícalo por* 2*, réstale* 1*, súmale* 4*, divídelo por* 3 *y réstale* 4*. ¡Seguro terminaste con el mismo número que pensaste!*

La gracia del truco es que siempre funciona, independiente del número inicial escogido. Veamos por qué. Partimos por denotar como x el número pensado, el cual no conocemos:

Piensa en un número	x
Súmale 3	$x + 3$
Multiplícalo por 2	$(x + 3) \cdot 2 = x \cdot 2 + 3 \cdot 2 = x \cdot 2 + 6$
Réstale 1	$x \cdot 2 + 6 - 1 = x \cdot 2 + 5$
Súmale 5	$x \cdot 2 + 5 + 5 = x \cdot 2 + 10$
Divídelo por 2	$(x \cdot 2 + 10) : 2 = (x \cdot 2) : 2 + 10 : 2 = x + 5$
Réstale 5	$x + 5 - 5 = x$

Tabla I.1

Vemos que, luego de seguir los pasos del truco, el resultado es siempre el número pensado x. Probablemente algunos pasos del procedimiento no son del todo evidentes. Un diagrama puede ser muy útil para entender el truco y la validez de las expresiones que van describiendo la situación en cada paso.

Piensa en un número	?	x
Súmale 3	? 1 1 1	$x + 3$
Multiplícalo por 2	? 1 1 1 ? 1 1 1	$(x + 3) \cdot 2 = x \cdot 2 + 3 \cdot 2 = x \cdot 2 + 6$
Réstale 1	? 1 1 1 ? 1 1	$x \cdot 2 + 6 - 1 = x \cdot 2 + 5$
Súmale 5	? 1 1 1 1 1 ? 1 1 1 1 1	$x \cdot 2 + 5 + 5 = x \cdot 2 + 10$
Divídelo por 2	? 1 1 1 1 1	$(x \cdot 2 + 10) : 2 = (x \cdot 2) : 2 + 10 : 2 = x + 5$
Réstale 5	?	$x + 5 - 5 = x$

Tabla I.2

Vemos que usar la letra x en la descripción del truco no es esencial para comprenderlo, la clave fue ser capaces de representar el número desconocido. Como vemos en el ejemplo, usar la representación también nos ayuda a *traducir* el truco de manera algebraica y a comprender el sentido de x. Este tipo de representaciones son de gran utilidad al trabajar en álgebra, pero tienen algunas limitaciones. Por ejemplo, a través del razonamiento algebraico vemos que el truco siempre funciona, aunque el número pensado sea negativo, pero la representación utilizada para el número (como una barra de largo desconocido) no es adecuada. Otra limitación surge si los números involucrados en el problema son muy grandes (por ejemplo, si debemos multiplicar una cantidad desconocida por 12 y luego sumarle 30), en ese caso, la representación no es práctica. En la medida que se complejizan los problemas, se hace más evidente la utilidad del álgebra.

Como muestra el ejemplo, mediante un razonamiento algebraico pudimos probar la validez de la propiedad establecida en este truco. Para hacer este razonamiento tuvimos que: describir el problema de manera algebraica, mediante expresiones con símbolos; transformar estas expresiones (por ejemplo, cuando escribimos $(x + 3) \cdot 2 = x \cdot 2 + 3 \cdot 2 = x \cdot 2 + 6$ debido a la propiedad distributiva), e interpretar los resultados obtenidos. Estos tres pasos están presentes cuando se desea usar un razonamiento algebraico en diversas situaciones, como al resolver un problema con una cantidad desconocida o al justificar una propiedad.

Una de las complicaciones que tiene describir relaciones o propiedades de manera algebraica son las ambigüedades del lenguaje natural. En el ejemplo anterior, vemos que fue muy importante el uso correcto de paréntesis para expresar la situación descrita. En el lenguaje natural no se usan paréntesis y esto puede llevar a ambigüedades al escribir expresiones algebraicas. Por ejemplo, para representar algebraicamente el enunciado "el triple de, un número cualquiera más dos" la expresión es $3 \cdot (x + 2)$. Sin embargo, si no nos fijamos en la *coma* que separa las dos partes de la frase, podemos pensar que la expresión algebraica es $3 \cdot x + 2$; es decir, "el triple de un número cualquiera, más dos", que es distinta de la anterior, pues $3 \cdot (x + 2) = 3 \cdot x + 6$. Es evidente que podrían darse ambigüedades, sobre todo al escuchar este enunciado, ya que en el lenguaje oral las *comas* no siempre se aprecian con claridad. Por ello, para usar paréntesis de manera apropiada al traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico, se requiere de una lectura extremadamente cuidadosa.

Para pensar

Para expresar un número impar, Juan propone la expresión $2n + 1$, mientras que Sandra propone $2n - 1$. ¿Son correctas ambas expresiones?

Ejercicio

1. Explique mediante un razonamiento algebraico y con diagramas:
   a. ¿Por qué si se suma un número par y un número impar, el resultado es siempre impar?
   b. ¿Por qué si se suman dos múltiplos de tres, el resultado es múltiplo de tres?
   c. ¿Por qué si se suman tres números consecutivos, el resultado es siempre divisible por tres?

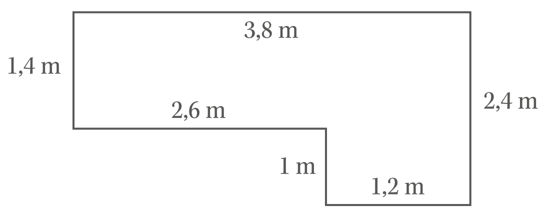
1.1 Expresiones numéricas

Desde pequeños, los niños se familiarizan con expresiones numéricas tales como $3 + 4$, $2 \cdot 3$, $24 : 8$. Estas nos acompañan toda la vida y muchas veces surgen al expresar las relaciones entre los datos de un problema. Por ejemplo, para calcular el precio de una compra que consiste en 3 kilos de papas y 1 litro de aceite, sabiendo que el kilo de papas cuesta \$659 y que el litro de aceite cuesta \$1.459, escribimos:

$$3 \cdot 659 + 1.459.$$

Ejemplos:

1) Se quiere cambiar el piso de una cocina, para lo cual hay que calcular su área. La superficie tiene forma de L, y las medidas se indican en la figura:



Al dividir la figura en dos rectángulos, podemos encontrar el área que buscamos por medio de la siguiente expresión:

$$1{,}4 \cdot 2{,}6 + 2{,}4 \cdot 1{,}2.$$

2) Daniel tenía 4 veces la cantidad de bolitas que tiene José, y luego le regalaron 5. Si José tiene 12 bolitas, ¿cuántas bolitas tiene ahora Daniel? La expresión que permite responder la pregunta es:

$$4 \cdot 12 + 5.$$

El uso de expresiones numéricas para describir situaciones cotidianas es un paso previo al trabajo con expresiones algebraicas. Si en el ejemplo anterior variamos la cantidad de bolitas que tiene José, suponiendo que tiene 13 en vez de 12, entonces la expresión numérica que describe el número de bolitas de Daniel es $4 \cdot 13 + 5$. En la siguiente tabla, podemos ver las distintas expresiones numéricas para la cantidad de bolitas de Daniel, al variar el número de bolitas de José en un cierto rango, suponiendo siempre que se cumple la relación: *Daniel tenía 4 veces el número de bolitas que tiene José, y luego le regalaron 5:*

Número de bolitas de José	Número de bolitas de Daniel
12	$4 \cdot 12 + 5$
13	$4 \cdot 13 + 5$
14	$4 \cdot 14 + 5$
15	$4 \cdot 15 + 5$
16	$4 \cdot 16 + 5$
17	$4 \cdot 17 + 5$

Tabla I.3

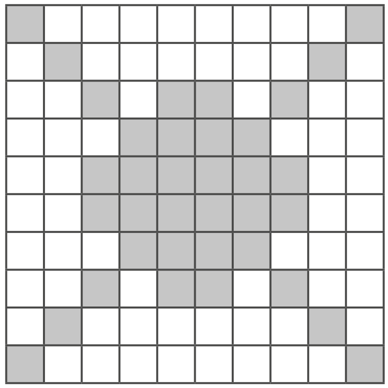
La expresión numérica describe la relación entre las bolitas de Daniel y José, y si no conocemos el número de bolitas que tiene José, de todas maneras, podemos proponer una expresión para la cantidad de bolitas que tiene Daniel, usando esta relación:

$$\text{número de bolitas de Daniel} = 4 \cdot j + 5,$$

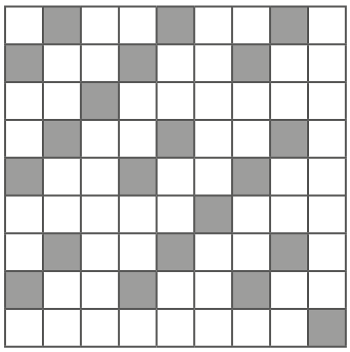
donde j es el número de bolitas de José.

Ejercicios

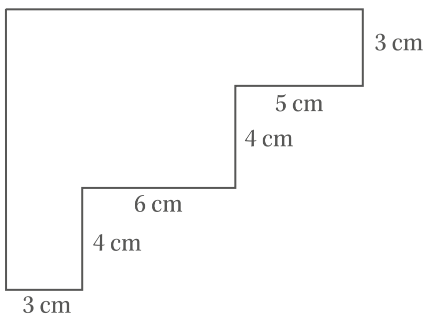
1. Escriba al menos 5 expresiones numéricas que le permitan calcular el área sombreada, suponiendo que el lado de cada cuadrado mide **1 cm**.



2. Escriba al menos 5 expresiones numéricas que entreguen el número de cuadros blancos de la figura.



3. Escriba 4 expresiones numéricas distintas para el área de la siguiente figura:



4. Plantee problemas donde las relaciones entre los datos estén dadas por las siguientes expresiones:

   a. $(27 - 5 \cdot 3)/4$

   b. $187 + 12 \cdot 187$

   c. $2 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot 5 - \dfrac{1}{2}$

1.2 Distintos usos de las expresiones algebraicas

Definición I.1	Una expresión algebraica es una secuencia de números y letras unidos mediante operaciones matemáticas.

Las letras en las expresiones algebraicas se denominan *variables* y siempre representan números. Por ejemplo, $x + y$ es una expresión algebraica que representa la suma de los números x e y. El tipo de número que representa una variable depende del contexto. Por ejemplo, si x e y representan la cantidad de habitantes de dos ciudades, entonces deberían ser números naturales; mientras que en otro problema podrían decirnos que x e y representan longitudes, por lo que deberían ser números reales positivos. También la naturaleza de la expresión puede poner restricciones a los valores que toman las variables. Por ejemplo, $\frac{1}{x}$ es una expresión algebraica que expresa 1 dividido por x o el inverso multiplicativo de x, en este caso x no puede ser 0.

El significado de las expresiones algebraicas puede no ser evidente; por ejemplo, ¿qué significa $x + y$ si no conocemos x ni tampoco y? Para comprender esta expresión, no debemos olvidar que representa un número, el cual podemos determinar si conocemos el valor de x y el valor de y.

Las letras que usamos en las expresiones algebraicas son arbitrarias y no importa qué letras usemos, siempre que seamos consistentes. Por ejemplo, la fórmula del área del rectángulo es el producto de las medidas de ambos lados. Si anotamos la medida del largo como l y del ancho como a, entonces el área será $a \cdot l$. Pero si denotamos x la medida del largo e y la medida del ancho, tendremos que el área será $x \cdot y$.

Habitualmente, usamos la letra x para representar una cantidad desconocida cuyo valor queremos determinar como solución a un problema, por ejemplo, cuando resolvemos una ecuación. Pero hay situaciones donde se necesita determinar dos cantidades desconocidas y no podemos usar la misma letra para representar números que podrían ser distintos. Por ejemplo, podríamos querer buscar todas las medidas para el ancho y el largo de un rectángulo de área $16\ \text{cm}^2$. Es decir, buscamos valores de x e y que satisfagan $x \cdot y = 16$. Es claro que hay infinitas parejas de valores de x e y que resuelvan nuestro problema. Pero si hubiésemos usado la misma letra x para denotar ambas cantidades (largo y ancho), lo cual es incorrecto, pues ambas cantidades pueden ser distintas, encontraríamos que solo el rectángulo cuyos lados miden ambos $4\ \text{cm}$ tiene área $x \cdot x = 16$. Así, encontraríamos una sola solución, lo cual no es correcto.

Al trabajar con expresiones algebraicas usaremos algunas convenciones. Al escribir multiplicaciones usaremos el punto $(\cdot)$ en lugar del signo $(\times)$, esto para no confundir expresiones como 2×3 con $2\,x\,3$. Más aún, para denotar *dos veces x o el doble de x* se utilizará indistintamente $2 \cdot x$ o $2x$, sin embargo, no podemos omitir el signo $(\cdot)$ cuando aparezcan multiplicaciones con números. Observamos que el orden en que se multiplican x y 2 no importa, debido a que la multiplicación es conmutativa, es decir, $x \cdot 2$ es lo mismo que $2 \cdot x$ (o $2x$). Por convención, en una multiplicación anotaremos primero los números y luego las letras, así, en este caso, lo usual es usar $2x$. También omitiremos el signo *por* ($\times$ o $\cdot$) cuando hay paréntesis en las expresiones. Así, $2\,(x + y)$ denota $2 \cdot (x + y)$. Es importante señalar que esto es solo una convención de escritura y no es incorrecto no usarla.

Definición I.2 Evaluar una expresión algebraica significa dar un valor numérico a las variables que en ella aparecen.

Por ejemplo, al evaluar la expresión $2a - \frac{2}{a}$ en $a = 2$, obtenemos $2 \cdot 2 - \frac{2}{2} = 3$. Observamos que debemos remplazar el valor 2 cada vez que aparece a en la expresión.

Al evaluar expresiones que involucran más de una variable, los valores considerados pueden ser iguales o distintos. Por ejemplo, podemos evaluar la expresión $4xy + x$ en $x = 1$ e $y = 1$, y obteniendo $4 \cdot 1 \cdot 1 + 1 = 5$, pero también la podemos evaluar en $x = 5$ e $y = -3$, lo que entrega:

$$4 \cdot 5\,(-3) + 5 = -60 + 5 = -55.$$

No siempre es posible evaluar una expresión algebraica en cualquier valor; por ejemplo, la expresión algebraica

$$\frac{3 - xy}{x - y},$$

no se puede evaluar cuando $x = y$, ya que para poder evaluarla, el denominador de la expresión debe ser un número distinto de 0. Por lo tanto, los valores numéricos asignados a x e y deben ser distintos.

Evaluar es esencial al trabajar con expresiones algebraicas. Muchas expresiones surgen de problemas concretos para describir relaciones entre cantidades desconocidas, y al evaluar estamos entregando un valor determinado a esas cantidades. También, al evaluar expresiones se pone de manifiesto que las variables siempre representan números.

Evaluar una expresión también nos ayuda a entender la validez de propiedades algebraicas y por qué un cierto resultado puede ser incorrecto. Por ejemplo, evaluar en distintos valores de x nos ayuda a comprender por qué $x + 2x + 1 = 3x + 1$, o por qué $x + 2x + 1$ no es igual a $4x$.

Ejercicios

1. Exprese los siguientes enunciados utilizando expresiones algebraicas:
   a. La cuarta parte de un número.
   b. El doble del doble de un número.
   c. Un múltiplo de 11.
   d. La suma de tres números naturales consecutivos.
   e. El triple de un número, menos la quinta parte de él.
   f. El producto entre dos números impares consecutivos.
   g. La suma de tres números pares consecutivos.
   h. La diferencia de dos números impares.
   i. El producto entre un número natural y el sucesor de él.

   Evalúe cada una de estas expresiones en 3, 5, 7, 9, para verificar que sus expresiones son válidas, y use un diagrama apropiado para explicar su expresión.

2. Exprese en lenguaje natural las siguientes expresiones:

a. $2a - 2$

b. $3(x + 4)$

c. $b + \frac{1}{2} - 2$

d. $(a + 2b)$

e. $(m + 1)(m + 2)$

3. En cada uno de los siguientes enunciados, escriba al menos dos expresiones que pueden representarlo y fundamente si dichas expresiones son iguales o no. En cada caso, explicite la relación entre la frase, el uso de paréntesis y la expresión resultante.

a. El doble de un número, menos su quinta parte.

b. Un número menos su mitad más su doble.

4. Al evaluar la expresión $\frac{3x}{x+5} \cdot 5$ en $x = 4$, un alumno obtuvo 3. ¿Qué posible error pudo cometer el alumno? ¿Cómo explicaría que el resultado obtenido es incorrecto?

En geometría aparecen numerosas expresiones algebraicas, debido a que ellas nos permiten expresar propiedades y fórmulas generales. Por ejemplo, el Teorema de Pitágoras se expresa como:

> *En un triángulo rectángulo de catetos con longitud* ***a*** *y* ***b*** *e hipotenusa con longitud* ***c***, se *tiene que* $a^2 + b^2 = c^2$.

Las expresiones algebraicas también nos permiten describir o modelar situaciones que provienen de distintos contextos, por ejemplo: "la edad de Isabel hace tres años" se puede representar mediante la expresión $i - 3$, donde i representa la edad de Isabel. Veamos otro ejemplo.

Ejemplo

Antonia tenía inicialmente L lápices, de los cuales c eran de cera y el resto de palo. Ella pierde 1/3 de sus lápices de cera, 1/4 de sus lápices de palo y luego le regalan una caja de 20 lápices de cera. ¿Cuántos lápices tiene ahora Antonia?

Para encontrar el número de lápices que tiene Antonia, primero notamos que ella inicialmente tiene $L{-}c$ lápices de palo. Ella pierde $\frac{1}{3}c$ lápices de cera y $\frac{1}{4}(L-c)$ lápices de palo, por lo que le quedan $\frac{2}{3}c$ lápices de cera y $\frac{3}{4}(L-c)$ lápices de palo. Como le regalan 20 lápices de palo, ella tiene un número total de lápices dado por $\frac{2}{3}c + \frac{3}{4}(L - c) + 20$.

Este ejemplo también nos ayuda a comprender la necesidad de usar distintas letras para distintas variables y que tenemos libertad de decidir cuáles variables identificaremos. En el problema del ejemplo, se habla de la cantidad de lápices, de la cantidad de lápices de cera y de la cantidad de lápices de palo. Tal como identificamos las dos primeras cantidades con las letras L y c, podríamos haber identificado también la cantidad de lápices de palo con la letra p y escribir la relación que cumplen estas cantidades, así: $L = c + p$. Dado que siempre se puede determinar p si se conoce L y c, omitimos asignar una nueva variable p al número de lápices de palo y usamos directamente que el número de estos lápices es $L - c$.

Ejercicios

1. Resuelva el problema del ejemplo anterior, usando como variables la cantidad de lápices de cera y la cantidad de lápices de palo.

2. Encuentre expresiones algebraicas para describir las siguientes situaciones:
   a. La edad de Juan en 5 años más.
   b. n filas de 6 sillas cada una.
   c. 54 personas repartidas equitativamente en n buses.
   d. La edad de Pedro más 7 veces la de Agustín.

3. Explique cómo usar expresiones algebraicas para describir las siguientes situaciones:
   a. En un colegio, por cada profesor o profesora hay b alumnos, ¿cuál es el número total de alumnos en el colegio?
   b. Marcela anda en bicicleta todos los días, ella siempre anda 1 km más que Susana. Entre las dos ¿qué distancia recorren en 1 mes?
   c. Juan leyó un libro. Él leía cada día la misma cantidad de páginas y lo terminó en d días. ¿Cuántas páginas diarias leía Juan?

4. Para cada una de las siguientes expresiones algebraicas, escriba un problema con contexto tal que su respuesta se exprese con dicha expresión:
   a. El 55% de a
   b. $4x + 2$
   c. $\sqrt{a^2 + 1}$
   d. $(i + 5) - 100$
   e. $0{,}125b + 3$
   f. $(a - 1) / b$

5. Explique cómo deducir una fórmula para el área de un trapecio a partir del área de un paralelogramo.

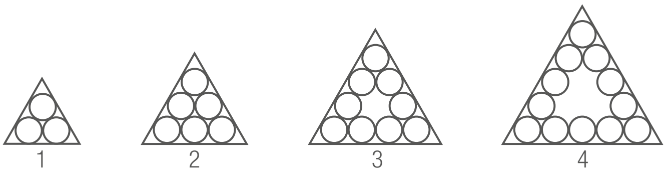
6. Para cada una de las siguientes expresiones, escriba una situación que pueda ser descrita por ella. Luego, evalúe cada expresión en $a = 36$, en el contexto de la situación propuesta. Asegúrese de que su situación tenga sentido para este valor de a.
   a. $a - 6$
   b. $5 + a$
   c. $a : 4$
   d. $100 - a$
   e. $5a$
   f. $\sqrt{a}$
   g. $2a - 2$

7. A partir de la fórmula para el área de un triángulo de base b y altura h, encuentre una fórmula para calcular el área de todos los triángulos de altura 5.

Las expresiones algebraicas también permiten expresar regularidades o patrones. Este uso, en el que una expresión surge a partir de casos particulares para expresar una regla general, ayuda a dar sentido y a motivar el trabajo con las expresiones algebraicas, enfatizando que nos permiten generalizar.

Ejemplo:

A continuación, se muestran los primeros cuatro términos de una secuencia de figuras formadas por círculos, que se ordenan como triángulos equiláteros.



Si la secuencia se continúa siguiendo este mismo patrón, ¿cuántos círculos se necesitan para formar el triángulo número 10? ¿Cuántos para el número 154? y ¿cuántos para el *n*-ésimo triángulo?

Para dar respuesta a las preguntas, debemos describir la regularidad o patrón, tal como se expresa en el problema, debemos suponer que la regla de formación de los triángulos se mantiene. En este caso, observamos que al pasar de un triángulo al siguiente debemos agregar un círculo a cada lado del triángulo, y suponemos que los siguientes triángulos se construyen de la misma manera. En la siguiente tabla, anotamos el número de círculos usados siguiendo esta regla:

N° del triángulo	N° de círculos en el triángulo
1	3
2	3 + 3 = 6
3	3 + 3 + 3 = 9
4	3 + 3 + 3 + 3 = 12

Así, el triángulo 10 tiene $3 \cdot 10 = 30$ círculos, el número 154 tendrá $3 \cdot 154 = 462$ círculos, y el triángulo n – ésimo (número n) tendrá $3 \cdot n$ triángulos.

En este ejemplo, la clave fue expresar la regla de formación del patrón. Esto se hizo primero a través de expresiones numéricas para distintos casos, a partir de las cuales se llega a una expresión algebraica que generaliza los casos anteriores.

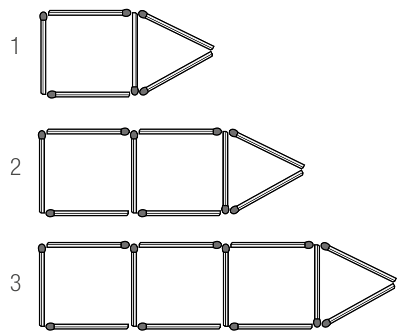
Es importante notar que una misma expresión algebraica puede aparecer en distintas fórmulas. Su sentido dependerá del contexto. Por ejemplo, la expresión $4a$ puede expresar el perímetro de un cuadrado de lado a, o puede ser el área de un triángulo de base a y altura 8, o bien puede ser el precio de cuatro dulces de valor a pesos cada uno.

En resumen

- El uso del lenguaje algebraico nos facilita describir situaciones sin las ambigüedades del lenguaje natural.
- La propiedad fundamental de las expresiones algebraicas es que nos permiten generalizar. Así, mediante ellas podemos:
  – expresar fórmulas
  – describir propiedades
  – describir situaciones provenientes de distintos contextos
  – expresar regularidades.
- Las letras o variables siempre representan números.
- Las variables pueden ser denotadas por distintas letras, sin que cambie su significado.
- Evaluar una expresión es dar valor a sus variables. Evaluar nos ayuda a entender la validez de propiedades y de manipulaciones algebraicas.
- El uso de las expresiones algebraicas para describir situaciones provenientes de diversos contextos nos ayuda a dar sentido al estudio de estas.

Ejercicios

1. Considere la secuencia de figuras formadas por palitos de fósforo, tal como se muestra en la figura:



Si se continúa la misma secuencia de ir agregando cuadrados, a la izquierda de la figura anterior, ¿cuántos palitos de fósforos se usarían en la figura 10? ¿Cuántos para la figura 74? ¿Cuántos para la figura n? Explique cómo se expresa la regla de formación de este patrón, haciendo referencia al paso desde la expresión numérica a la expresión algebraica.

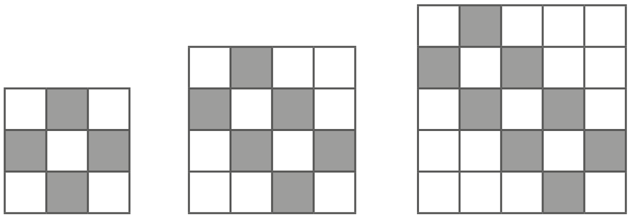
2. En el problema anterior, dos personas escribieron las siguientes respuestas para determinar la cantidad de palitos que tiene la figura n:

Respuesta 1: $4 + 3\,(n - 1) + 2$

Respuesta 2: $n + n + (n + 1) + 2$

¿Cuáles cree usted que fueron los razonamientos utilizados para llegar a dichas expresiones?

3. Considere la siguiente secuencia de baldosas cuadradas que se muestra en la figura:



Describa cómo continuar la secuencia siguiendo el mismo patrón. Según su descripción, determine: ¿cuántos cuadrados coloreados negros tiene la baldosa 10? ¿Cuántos cuadrados blancos tiene la baldosa 10? ¿Cuántos cuadrados negros y cuadrados blancos tiene la figura n? Explique cómo se expresa la regla de formación de este patrón, haciendo referencia al paso desde la expresión numérica a la expresión algebraica.

4. Proponga dos secuencias de figuras cuyo término n involucre las expresiones $(n + 2) + 1$ y $2\,(n - 1)$, respectivamente.

Al trabajar con expresiones algebraicas, siempre debemos tener presente que las variables representan números y, por lo tanto, las propiedades de las operaciones, tales como la conmutatividad, asociatividad y distributividad, son válidas. Dada la importancia de estas propiedades, las volveremos a enunciar y veremos cómo se deducen otras propiedades conocidas a partir de ellas.

1.3 Propiedades de las operaciones

Sean x, y, z números reales, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- Conmutatividad de la adición: $x + y = y + x$.
- Asociatividad de la adición: $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- Elemento neutro de la adición: $x + 0 = x$.
- Inverso aditivo de la adición: para cada número existe un número que denotaremos $-x$, tal que $x + (-x) = 0$.
- Conmutatividad de la multiplicación: $xy = yx$.
- Asociatividad de la multiplicación: $x\,(yz) = (xy)\,z$.
- Elemento neutro de la multiplicación: $1 \cdot x = x$.
- Inverso multiplicativo: para cada número x distinto de cero, existe un número que denotamos por x^{-1} o $\frac{1}{x}$, tal que $xx^{-1} = 1$.
- Distributividad de la multiplicación respecto a la suma: $x\,(y+z) = xy + xz$.

La propiedad asociativa de la adición dice que no necesitamos usar paréntesis para sumar tres números, ya que podemos sumarlos en cualquier orden. Así, sin lugar a confusión, podemos escribir $(x + y) + z$ o $x + (y + z)$, como $x + y + z$. Análogamente, la propiedad asociativa de la multiplicación permite escribir$(xy)\,z$ o $x\,(yz)$, como xyz.

Ejemplo

> Verifiquemos que $15x(3+y)=45x+15xy$. Primero, usando la propiedad distributiva, tenemos que $15x(3+y)=(15x)3+(15x)y$; luego, por la propiedad conmutativa de la multiplicación, tenemos que $(15x)3+(15x)y=3(15x)+(15x)y$, y por la propiedad asociativa de la multiplicación, tenemos que $3(15x)+(15x)y=45x+15xy$; así, $15x(3+y)=45x+15xy$.

A partir de las propiedades mencionadas arriba, se pueden deducir otras, por ejemplo:

Para todo número real x, $x\cdot 0=0$.

Esta propiedad se conoce como la *propiedad absorbente* del 0. La podemos deducir a partir de las propiedades de las operaciones enunciadas anteriormente, las cuales sabemos que son ciertas. Llamaremos *teorema* a una propiedad que se puede demostrar a partir de propiedades ya conocidas.

Teorema I.1

Para todo número real x, $x\cdot 0=0$.

Demostración

Sabemos que $0+0=0$. Si multiplicamos esta igualdad por un número real x, obtenemos que $x\cdot(0+0)=x\cdot 0$, y usando la propiedad distributiva, se tiene que $x\cdot 0+x\cdot 0=x\cdot 0$.

Finalmente sumando a ambos lados el inverso aditivo de $(x\cdot 0)$, se tiene

$-(x\cdot 0)+x\cdot 0+x\cdot 0=-(x\cdot 0)+x\cdot 0$.

Usando la propiedad asociativa obtenemos que $[-(x\cdot 0)+x\cdot 0]+x\cdot 0=[-(x\cdot 0)+x\cdot 0]$,

y aplicando propiedad del inverso aditivo obtenemos finalmente que $x\cdot 0=0$.

Ejercicio

Indique qué propiedades se están utilizando para obtener las siguientes igualdades:

a. $4(x+2y)=4x+8y$

b. $\dfrac{x+z}{4}+\dfrac{x}{12}=\dfrac{x}{3}+\dfrac{z}{4}$

c. $(3x)(5y)=15xy$

d. $0xy=0$

e. $-(15xy)=-15xy$

f. $(15x^2)z+zy=z(15x^2+y)$

La regla de los signos

La propiedad distributiva es clave para entender la denominada *regla de los signos*, resumida en el *dictum* “menos por menos da más”, que memorizamos desde niños y que muchas veces no comprendemos cabalmente, porque nos resulta contraintuitiva.

A menudo, esta regla se explica usando metáforas o analogías que incluyen enemigos, amigos, enemigos de los enemigos, etc. Lo cierto es que operar con números negativos no es un problema trivial: los más grandes matemáticos de occidente tuvieron serias dificultades con esto durante 400 años. No fue sino hasta comienzos del siglo XIX que la regla de los signos fue plenamente aceptada para los números, si bien ya se usaba libremente para expresiones algebraicas. Existían hasta ese momento dos operatorias: una para los números, sin la regla de los signos; y otra para las letras, en donde sí valía la regla. Esta dificultad se debió, probablemente, al profundo arraigo entre los matemáticos de la idea del número como magnitud geométrica, de modo que tenía poco sentido considerar números negativos, ya que no hay magnitudes geométricas negativas. Los números negativos aparecieron en la India, probablemente en el contexto del comercio, donde hay haberes y deudas. Como dijimos, su adopción en occidente fue difícil. Lo cierto es que la regla de los signos es el resultado necesario de exigir que las operaciones con números negativos verifiquen las mismas reglas que las operaciones con números positivos.

La regla de los signos se expresa en el siguiente teorema, el cual demostraremos a partir de las propiedades de las operaciones. Esta demostración nos da razones de por qué la regla es correcta, lo que nos ayuda a entenderla.

Teorema I.2

La regla de los signos.

Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son números reales, entonces $(-a)\,(-b) = ab$ y $(-a)\,b = -\,(ab)$.

Demostración

Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son dos números reales, por la propiedad distributiva se tiene que

$$(-a)\,(-b) + (-a)\,b = (-a)\,(-b+b),$$

usando la propiedad del inverso aditivo obtenemos $-b + b = 0$, por lo que

$$(-a)\,(-b) + (-a)\,b = (-a)\,(0),$$

y usando la propiedad absorbente del 0, tenemos que $(-a)\,(-b) + (-a)\,b = 0$.

Por otra parte, usando la propiedad distributiva tenemos que $ab + (-a)\,b = (a + (-a))\,b$, y usando la propiedad del inverso aditivo y la propiedad absorbente del 0 tenemos que

$$ab + (-a)\,b = (a + (-a))\,b = 0b = 0.$$

Ahora, tenemos que $ab + (-a)\,b = 0$ y $(-a)\,(-b) + (-a)\,b = 0$, es decir, ambas expresiones son iguales a cero y, por lo tanto, son iguales entre sí. Así,

$$(-a)\,(-b) + (-a)\,b = ab + (-a)\,b$$

y si sumamos a ambos lados de la igualdad $-\,(-a)\,b$, la igualdad se mantiene y obtenemos

$$(-a)\,(-b) = ab.$$

Dejamos como ejercicio al lector probar que $(-a)\,b = -\,(ab)$.

Vemos que para demostrar la regla de los signos solo hemos usado las propiedades de las operaciones. Así, la regla de los signos es cierta independientemente de nuestras intuiciones.

Visualización de las propiedades de las operaciones

El uso de diagramas o modelos nos ayuda a visualizar y comprender la validez de algunas propiedades de las operaciones.

Las operaciones con números tienen dos visualizaciones clásicas. La primera es a través de piedras o fichas[1], y es adecuada para operar números naturales. De hecho, la palabra cálculo proviene del latín *calculus,* que significa "piedra". En la primera visualización, para sumar dos números n y m, representados por montones o bolsitas con las respectivas cantidades de piedras, las juntamos en un solo montón o bolsa. Para visualizar la multiplicación de n y m, hacemos un arreglo con n filas por m columnas de piedras. Por ejemplo, para visualizar la multiplicación de 3 por 4, hacemos un arreglo de 3 filas por 4 columnas, como en la **Figura I.1** a continuación, y tenemos que $3 \cdot 4 = 12$ es la cantidad de bolitas en el arreglo.

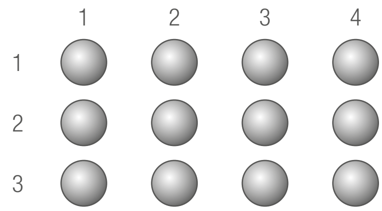


Figura I.1

También se puede visualizar la multiplicación 3 y 4 usando un arreglo rectangular, en el que cada número se representa como una barra compuesta de cuadrados de área unitaria. El producto es, entonces, el número de cuadrados del arreglo, como se muestra en la figura.

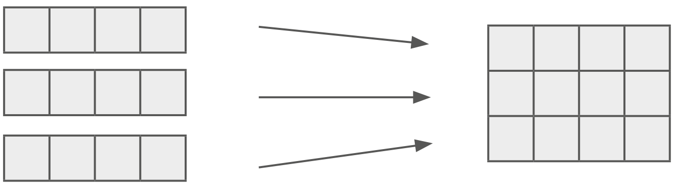


Figura I.2

Este tipo de representación para la multiplicación es muy útil cuando se quiere ilustrar propiedades como la conmutatividad de la multiplicación y la distributividad para números naturales. Por ejemplo, para mostrar que $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$, solo debemos rotar en 90° el arreglo y ver que el número de cuadrados no cambia.

Hay otras formas de representar la multiplicación $3 \cdot 4$, por ejemplo, como 3 grupos de cuatro objetos:

Figura I.3

Si bien esta representación nos ayuda en la definición de la multiplicación como suma iterada, no permite visualizar de manera evidente que $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$. Es muy importante que los niños y niñas desde temprana edad se planteen las preguntas de por qué esta propiedad es cierta, y entregarles un modelo que les permita responder esta pregunta.

1 Ver el Capítulo I del libro *Números* de esta colección

Otra manera de visualizar la suma y la multiplicación de dos números positivos es usando segmentos[2]. A diferencia de las piedras, esta es especialmente adecuada para números reales positivos, los que representaremos como variables.

La suma de dos segmentos de largos respectivamente a y b consiste, simplemente, en poner uno a continuación del otro, como lo ilustra la **Figura I.4**.

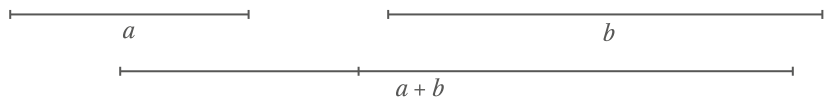


Figura I.4

Para multiplicarlos, construimos un rectángulo de lados a y b, como en la **Figura I.5**.

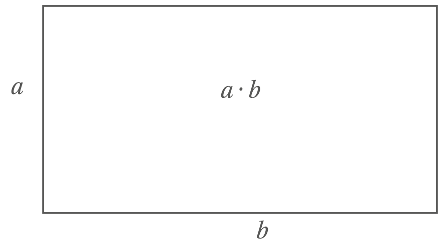


Figura I.5

Insistiremos especialmente en esta última. La representación geométrica del producto como el área de un rectángulo nos permite verificar visualmente algunas propiedades de la multiplicación. Por ejemplo, el área de los rectángulos de la **Figura I.6**

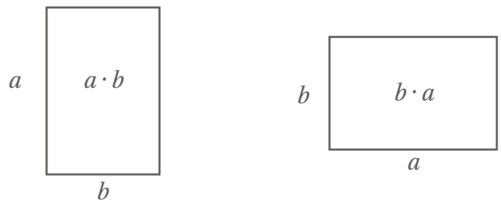


Figura I.6

representa los productos ab y ba. Las dos áreas son iguales, ya que una figura se obtiene de la otra rotándola en **90°**. Esto ilustra la conmutatividad del producto, es decir, la identidad $ab = ba$.

Usando el diagrama de la **Figura I.7**, podemos visualizar la propiedad distributiva:

$$a\,(b + c) = ab + ac.$$

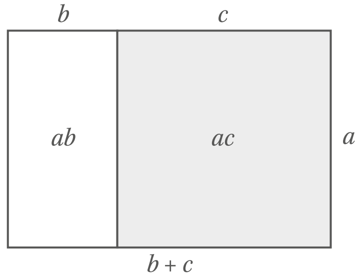


Figura I.7

2 Ver el Capítulo I y X del libro *Números* de esta colección

Para pensar

¿Qué tipo de representación se puede usar para visualizar la asociatividad de la multiplicación?

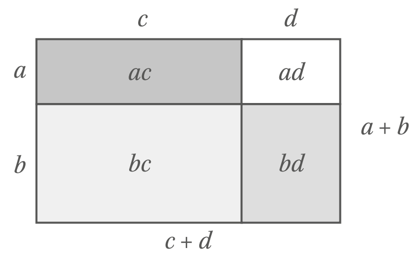
Es importante hacer notar que las representaciones usadas permiten ilustrar las propiedades de las operaciones y no constituyen demostraciones de estas propiedades, ya que estas no se demuestran: son propiedades básicas que gobiernan las operaciones. Sin embargo, estas visualizaciones sirven como inspiración y ayudan a ver con nuestros propios ojos que estas propiedades son intuitivamente correctas: así esperamos que se comporten las operaciones con los números. Cabe señalar que las propiedades de las operaciones no se demuestran utilizando áreas, sino que la misma noción de área descansa sobre las propiedades de las operaciones. Así, si se pretende usar áreas de figuras como justificación de dichas propiedades, se cae en un círculo vicioso.

En resumen

- Debido a que las variables en las expresiones algebraicas representan números, al realizar operaciones con expresiones algebraicas son válidas todas las propiedades de las operaciones aritméticas.
- La visualización de identidades mediante el uso de diagramas que se apoyan en conceptos geométricos, aunque no constituye una demostración, nos ayuda a comprender su validez.

Ejercicios

1. Demuestre la fórmula: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ indicando las propiedades que utiliza. Usando el diagrama de abajo, visualice la igualdad cuando a, b, c y d son positivos.



2. Use un diagrama para visualizar la asociatividad de la suma.

1.4 Operaciones entre expresiones algebraicas

Las propiedades de las operaciones se usan cada vez que operamos con expresiones algebraicas. Por ejemplo, para multiplicar $(3 + x)(y + 2)$ usamos la propiedad distributiva y obtenemos:

$$(3 + x)(y + 2) = 3(y + 2) + x(y + 2) = 3y + 6 + xy + 2x.$$

Para entender el desarrollo anterior, evaluemos la expresión en $x = 10$ e $y = 20$, y veamos que podemos proceder de la misma manera,

$$(3 + 10)(20 + 2) = 3(20 + 2) + 10(20 + 2) = 3 \cdot 20 + 6 + 10 \cdot 20 + 10 \cdot 2,$$

obteniendo una expresión numérica que corresponde a evaluar

$$3y + 6 + xy + 2x \text{ en } x = 10, y = 20.$$

También podemos sumar expresiones algebraicas, por ejemplo:

$$(3x + 3y + 5) + (4y - 2 + 2x) = 3x + 3y + 5 + 4y - 2 + 2x = 3x + 2x + 3y + 4y + 5 - 2 = 5x + 7y + 3,$$

para lo cual hemos utilizados diversas propiedades de las operaciones (¿cuáles?). Al igual que en el ejemplo anterior, evaluando podemos ilustrar que el procedimiento utilizado para realizar la suma es análogo a lo que se realiza para sumar números, por ejemplo para $x = 99$ e $y = 75$ obtenemos:

$$(3 \cdot 99 + 3 \cdot 75 + 5) + (4 \cdot 75 - 2 + 2 \cdot 99) = 3 \cdot 99 + 3 \cdot 75 + 5 + 4 \cdot 75 - 2 + 2 \cdot 99 = 5 \cdot 99 + 7 \cdot 75 + 3.$$

Cuando nos piden sumar dos expresiones, como $(3x + 3y + 5) + (4y - 2 + 2x)$, está implícito que debemos escribir la expresión resultante simplificando los términos que se pueden agrupan. En este caso observamos que reemplazamos $2x + 3x$ por $5x$, y $3y + 4y$ por $7y$. Esto se puede hacer gracias a la propiedad distributiva, ya que $2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$, y $3y + 4y = (3 + 4)y = 7y$.

Para operar con expresiones algebraicas que involucran fracciones, procedemos de igual modo. Por ejemplo, para calcular $\frac{1}{xy} + \frac{1}{x}$ partimos encontrando un denominador común, por ejemplo, $xy \cdot x = x^2y$, así:

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2y} + \frac{xy}{x^2y} = \frac{x+xy}{x^2y}.$$

Esta expresión puede ser simplificada, notando que $x + xy = x(1 + y)$ (¿por qué?), es decir, x es un factor del numerador, así:

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{x} = \frac{x+xy}{x^2y} = \frac{x(1+y)}{x \cdot x \cdot y} = \frac{1+y}{xy}.$$

Podríamos haber obtenido la misma expresión observando que xy es un denominador común y, por lo tanto:

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{x} = \frac{1}{xy} + \frac{y}{xy} = \frac{1+y}{xy},$$

que es la misma expresión que obtuvimos anteriormente luego de simplificar. El último procedimiento utilizado es igual al que usamos para sumar las fracciones:

$$\frac{1}{13 \cdot 7} + \frac{1}{13} = \frac{1+7}{13 \cdot 7}.$$

Ejercicio

Realice las siguientes operaciones explicando las similitudes de los procedimientos utilizados:

a. $\frac{2}{3\cdot 5}\cdot\frac{5}{7}$; $\frac{2}{xy}\cdot\frac{y}{7}$

b. $\frac{1}{(x+5)(x+3)}+\frac{3}{x+5}$; $\frac{1}{y(x+3)}+\frac{3}{y}$

c. $(x^2+3x+1)(x+5)$; $(100+30+1)(10+5)$

Factorización

Factorizar es, de alguna manera, el proceso inverso de distribuir, es decir, escribir una expresión algebraica como un producto de expresiones. Cuando escribimos $a(b+c)=ab+ac$, decimos que estamos multiplicando a y $(b+c)$, mientras que cuando escribimos $ab+ac=a(b+c)$, decimos que estamos factorizando $ab+ac$ con a y $(b+c)$ como factores. Así, la factorización no es sino una consecuencia de la propiedad distributiva. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos

1) Factoricemos la expresión $3x+6y$. Como en ambos términos hay un factor 3, podemos escribir

$$3x+6y=3x+3\cdot 2y=3(x+2y).$$

2) Factoricemos x^2y+xy^2. Procedemos de manera similar al ejemplo anterior. Vemos que xy es un factor, pues $x^2y=xxy=(xy)x$ y $xy^2=xyy=(xy)y$, así

$$x^2y+xy^2=(xy)x+(xy)y=xy(x+y).$$

En el último ejemplo, es igualmente legítimo factorizar x^2y+xy^2 como $x^2y+xy^2=x(xy+y^2)$, ya que ambos términos comparten el factor x. En general, cuando se indica "factorizar la expresión", tácitamente se está pidiendo factorizar de la primera manera y no de la segunda, es decir, extrayendo el factor común más complejo posible. Sin embargo, ambas son factorizaciones correctas, así como también $x^2y+xy^2=(x^2+xy)y$.

Factorizar nos puede ayudar a simplificar expresiones, por ejemplo:

$$\frac{x^2y+2xy}{xy}=\frac{xy(x+2)}{xy}=(x+2),$$

lo que es particularmente útil si se desea evaluarla, o sumar $\frac{x^2y+2xy}{xy}+x+y$.

También podemos simplificar expresiones numéricas usando los métodos de factorización. Por ejemplo,

$$\frac{39^2+39}{16-4}=\frac{39(39+1)}{4^2-4}=\frac{39\cdot 40}{4\cdot 3}=\frac{\cancel{3}\cdot 13\cdot\cancel{4}\cdot 10}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}}=130.$$

Dependiendo de las expresiones consideradas, factorizar puede ser muy complejo, pues los factores pueden involucrar sumas de expresiones y no ser evidentes. En estos casos, podemos factorizar basados en la siguiente propiedad, que se deduce de la propiedad distributiva:

$$(a + b)\,(c + d) = a\,(c + d) + b\,(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Expliquemos cómo se usa esta fórmula. Si queremos factorizar la expresión de la derecha, es decir $ac + ad + bc + bd$, lo que hacemos es agrupar formando dos grupos $(ac + ad)$ y $(bc + bd)$. Del primer grupo, podemos extraer el factor común a y obtenemos $a\,(c + d)$. Del segundo grupo, podemos extraer el factor común b y obtenemos $b\,(c + d)$. Por lo tanto, obtenemos $a\,(c + d) + b\,(c + d)$. Claramente, de esta expresión podemos extraer el factor común $(c + d)$ y obtenemos $(a + b)(c + d)$.

Ejemplo

Factoricemos la expresión $xy - y + 2x - 2$. Probaremos varias agrupaciones y veremos cuáles nos permiten factorizar la expresión.

1ra. agrupación: agrupamos de la siguiente forma $(xy - y) + (2x - 2)$. Extrayendo el factor común y del primer grupo, y 2 del segundo grupo obtenemos:

$$(xy - y) + (2x - 2) = y\,(x - 1) + 2\,(x - 1) = (y + 2)\,(x - 1).$$

Por lo tanto:

$$xy - y + 2x - 2 = (y + 2)\,(x - 1).$$

2da. agrupación: agrupamos de la siguiente forma $(xy + 2x) - (y + 2)$. Extrayendo el factor común x del primer grupo y -1 del segundo grupo, obtenemos:

$$(xy + 2x) - (y + 2) = (x - 1)\,(y + 2),$$

y, por lo tanto:

$$xy - y + 2x - 2 = (x - 1)\,(y + 2).$$

3ra. agrupación: agrupamos de la siguiente forma $(xy - 2) + (2x - y)$. Claramente, no podemos extraer factores comunes de los dos grupos. Por lo tanto, esta agrupación no es adecuada para factorizar la expresión.

Del último ejemplo, vemos que para factorizar un polinomio mediante agrupación hay que escoger la agrupación de manera adecuada. Determinar qué agrupación es la apropiada depende de cada caso.

Ejercicios

1. Observe que si se suma el cuadrado de un número natural con el número, el resultado es siempre par. Por ejemplo: $9 + 3 = 12$, $49 + 7 = 56$. ¿Por qué esto es cierto?

2. Explique por qué funciona el siguiente truco: “piensa en tres números consecutivos, multiplica el tercero por el segundo, y también el segundo por el primero. Resta estos dos números. Dime qué obtuviste y te adivino los tres números”.

3. Evalúe la expresión $\frac{5x+1}{x+3}\left(2x+6\right)+\frac{1}{3x+9}$, en $x = 2$.

4. Evalúe la expresión

$$2y+\left(25+5x\right)\frac{x+3}{x+5}, \text{ en } x = 12 \text{ e } y = 2.$$

5. Factorice las siguientes expresiones:

 a. $5x^2 - 10x + xy - 2y$

 b. $x^3 + x^2 + x + 1$ (recuerde que $x^3 = x \cdot x \cdot x$)

 c. $x\,(x - y) + z\,(y - x)$

1.5 Identidades

Muchas expresiones algebraicas que lucen distintas pueden representar siempre los mismos números, por ejemplo $(x + 4)\,(x - 4)$ y $x^2 - 16$ siempre son iguales, ya que para cualquier x podemos aplicar las propiedades de las operaciones (¿cuáles?) y verificar que se cumple la igualdad:

$$(x + 4)\,(x - 4) = x\,(x - 4) + 4\,(x - 4) = x^2 - 4x + 4x - 16 = x^2 - 16.$$

Definición I. 3 Dos expresiones algebraicas son iguales, si se puede transformar una en la otra usando las propiedades de las operaciones. Una igualdad entre dos expresiones se llamará *identidad*.

Observamos que al evaluar una identidad en cualquier valor de sus variables, obtenemos el mismo resultado.

Ejemplos

1) Veamos algunas identidades indicando para qué valores de las variables se cumple la igualdad:

 a. Las expresiones $\frac{x}{x}$ y 1 toman los mismos valores, siempre que $x \neq 0$. Esta restricción se impone para que exista el inverso de x, que es $\frac{1}{x}$.

 b. $(-x)^2 = x^2$ es una identidad, ya que

 $$(-x)^2 = (-x)\,(-x) = (-1{\cdot}x)\,(-1{\cdot}x) = (-1)\,(-1)x \cdot x = x^2.$$

 ¿Qué propiedades usamos para probarla?

2) Las expresiones $(a + b)^2$ y $a^2 + b^2$ no son iguales. Por ejemplo, si evaluamos ambas expresiones en $a = 1$ y $b = 1$, obtenemos en la primera expresión $(1 + 1)^2 = 4$ y en la segunda, $1^2 + 1^2 = 2$.

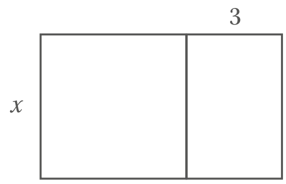
Evaluar identidades nos puede ayudar a hacer cálculos de manera más sencilla. Por ejemplo, si evaluamos directamente $(x + 4)\,(x - 4)$ en $x = 20$, debemos calcular $24 \cdot 16$, pero si usamos la identidad $(x + 4)\,(x - 4) = x^2 - 16$, podemos calcular fácilmente $24 \cdot 16$, ya que es igual a:

$$20^2 - 16 = 20 \cdot 20 - 16 = 400 - 16 = 384.$$

Si bien las manipulaciones algebraicas necesarias para obtener identidades están basadas en propiedades generales conocidas, muchas veces pierden su significado y se perciben como una receta que se sigue para obtener el resultado deseado. Visualizar las identidades mediante diagramas y también evaluarlas nos ayuda a comprender su validez, entregando significado a los argumentos algebraicos usados para obtenerlas.

Ejercicio

Considere la siguiente figura compuesta por un cuadrado de lado x y un rectángulo de lados 3 y x.



a. Escriba una identidad que pueda ser visualizada a partir de este diagrama.

b. Varias personas propusieron las siguientes expresiones para el área de la figura compuesta anterior. En cada ítem, conjeture cómo se encontró el área y por qué se cometió un error, en caso de que la expresión sea incorrecta.

$x^2 + 3$	$x\,(x + 3)$
$(x + 3)^2$	$x^2 + 3x$

c. Determine la expresión que representa el perímetro de la figura compuesta. Los ítemes siguientes representan expresiones propuestas para el perímetro de la figura. Para cada caso, conjeture cómo se encontró el perímetro y por qué se cometió un error, en caso de que la expresión sea incorrecta.

$3\,(x + 3)$	$4x + 6$
$5x + 6$	$2x + 2\,(x + 3)$

Productos notables

Vamos a distinguir ciertas identidades que serán muy útiles en distintos contextos, y las denominaremos *productos notables*.

a) Cuadrado del binomio: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) Cubo del binomio: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

c) Suma por la diferencia: $(a - b)\,(a + b) = a^2 - b^2$

Recordamos que si x es un número, entonces denotamos $x^2 = xx$, $x^3 = xxx$, $x^4 = xxxx$, y así sucesivamente. En la próxima sección abordaremos en profundidad el tema de las potencias.

La palabra *binomio*, que aparece en los nombres de estas dos primeras identidades, se usa para denominar una expresión algebraica que es la suma de otras dos más simples, en este caso, las expresiones a y b.

Los productos notables también nos entregan factorizaciones, si leemos las identidades como:

a) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

b) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

c) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

vemos que se pueden interpretar como factorizaciones.

Demostremos que se cumple la identidad a). Para esto, recordemos que:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b).$$

Usamos la propiedad distributiva para hacer esta multiplicación y obtenemos:

$$(a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = aa + ab + ba + bb.$$

Luego, denotando $aa = a^2$, $bb = b^2$ y usando que, por la conmutatividad del producto, se tiene $ab = ba$, obtenemos:

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Ejercicios

1. Explique por qué se cumple:

   a. $(6 + 8)^2 = 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 8 + 8^2$

   b. $(a + 3)^2 = a^2 + 2 \cdot 3 \cdot a + 3^2$

   c. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Demuestre los productos notables b) y c) explicando en cada paso qué propiedades de las operaciones se utilizan. Explique la demostración evaluando la expresión, como en el ejercicio anterior.

A partir de estas igualdades, es posible obtener otras. Por ejemplo, usando a) podemos obtener

d) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Para probar la propiedad d), se puede usar una técnica de demostración que consiste en utilizar una propiedad ya conocida. Por ejemplo, observamos que de la propiedad a) obtenemos:

$$(a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

ya que $2a(-b) = -2ab$, y $(-b)^2 = b^2$. Como $(a + (-b))^2 = (a - b)^2$, se cumple la igualdad deseada.

La técnica de demostración utilizada se conoce coloquialmente como el "Principio de la tetera" y proviene del siguiente cuento:

Se le plantea el siguiente problema a un matemático y a un físico: "Ante usted, hay una tetera vacía y una cocina a gas apagada, ¿qué haría para hervir agua?". El matemático contesta: "Hay que echar agua en la tetera, prender el gas y poner la tetera sobre el fuego". "¿Y si ahora la tetera tiene agua y el fuego está encendido?"; el físico dice: "Muy fácil, solo hay que poner la tetera a calentar". "¡De ninguna manera!", exclama el matemático. "Hay que apagar la cocina, vaciar la tetera, y así llegamos al primer problema… que ya sabemos resolver".

Ejemplos

Determinemos los siguientes productos

1) $(x + 4)^2$

2) $(x + y)(x^2 + y^2)(x - y)$

3) $(3 - 9x^2)(1 - 3x^2)$

Usaremos los productos notables que hemos visto.

1) Usamos la fórmula del binomio al cuadrado: $(x + 4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$.

2) Primero, usamos la propiedad conmutativa para obtener que:

$$(x + y)(x^2 + y^2)(x - y) = (x + y)(x - y)(x^2 + y^2).$$

Ahora, por la fórmula de suma por diferencia, sabemos que $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$. Aplicando esta fórmula de nuevo, llegamos a que:

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x^2)^2 - (y^2)^2 = x^4 - y^4.$$

Así, concluimos que:

$$(x + y)(x^2 + y^2)(x - y) = [(x + y)(x - y)](x^2 + y^2) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = x^4 - y^4.$$

3) Notemos que $(3 - 9x^2) = 3(1 - 3x^2)$, por lo tanto:

$$(3 - 9x^2)(1 - 3x^2) = 3(1 - 3x^2)(1 - 3x^2) = 3(1 - 3x^2)^2.$$

Y usando la fórmula del binomio nos queda:

$$3(1 - 3x^2)^2 = 3[1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3x^2 + (3x^2)^2] = 3(1 - 6x^2 + 9x^4) = 3 - 18x^2 + 27x^4.$$

La fórmula del cuadrado del binomio: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ puede ser visualizada para números positivos, como se muestra en la **Figura I.8**. Vemos que el área del cuadrado completo es $(a + b)^2$ y se descompone en el área de cuatro rectángulos (recordemos que todo cuadrado es, en particular, un rectángulo) de áreas a^2, ab, ab y b^2. Así:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

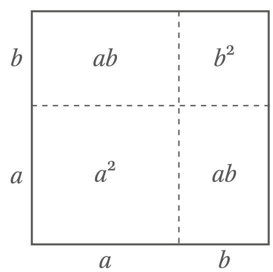


Figura I.8

La fórmula de la suma por diferencia, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, también puede ser ilustrada cuando a, b, $a - b$ son positivos. El siguiente diagrama, de la **Figura I.9**, permite visualizar esta identidad. Se deja al lector que explique cómo usar este dibujo para ilustrarla.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

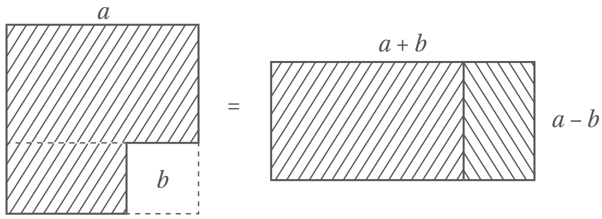


Figura I.9

En particular, en la **Figura I.10** se ilustra la igualdad: $5^2 - 2^2 = (5 - 2)(5 + 2)$

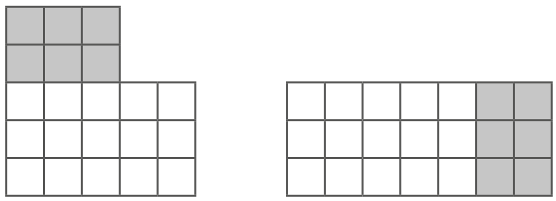
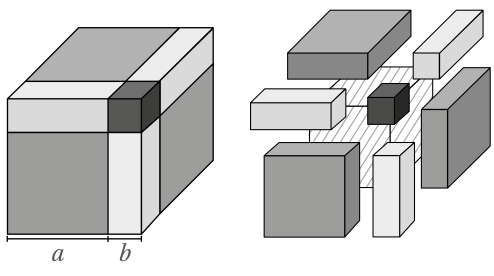


Figura I.10

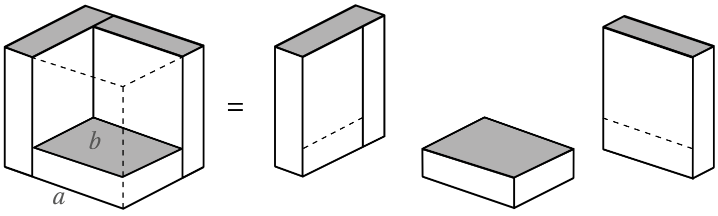
Ejercicios

1. Determine los siguientes productos:
   a. $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)(x^3 - 8y^2)$　　b. $(3 - 9x^2)(1 - 3x^2)$
2. Utilizando los siguientes dibujos, explique cómo se puede visualizar el cubo del binomio.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$



3. Demuestre la fórmula $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Usando los siguientes dibujos, explique cómo podemos visualizarla.



$$a^3 - b^3 \quad = \quad a^2(a - b) \quad + \quad b^2(a - b) \quad + \quad ab(a - b)$$

Los productos notables nos pueden facilitar el cálculo de operaciones aritméticas, que resultan al evaluar una expresión algebraica. Por ejemplo, si para calcular $31 \cdot 29$ escribimos $31 = 30 + 1$ y $29 = 30 - 1$, usando suma por diferencia obtenemos que:

$$31 \cdot 29 = (30 + 1)(30 - 1) = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 899.$$

También podemos calcular fácilmente 99^2. Para esto, usamos la fórmula del cuadrado de binomio observando primero que $99 = 100 - 1$. Así,

$$99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 + 1 = 10.000 - 200 + 1 = 9.800 + 1 = 9.801.$$

Ejemplo

Calculemos 1.001^2 usando productos notables. Para tal efecto, escribimos la expresión como una diferencia de cuadrados. Entonces, restamos y sumamos 1 a la expresión aritmética. Claramente, esta operación no cambia su valor. Después usamos la factorización mediante la diferencia de cuadrados. Vemos estas operaciones en la siguiente cadena de igualdades:

$$1.001^2 = (1.001^2 - 1) + 1 = (1.001 - 1)(1.001 + 1) + 1 =$$

$$1.000 \cdot 1.002 + 1 = 1.002.000 + 1 = 1.002.001.$$

Queda propuesto para el lector calcular 1.001^2, escribiendo $1.001^2 = (1.000 + 1)^2$ y usando el cuadrado de binomio.

Ejercicios

1. Calcule mentalmente describiendo el procedimiento utilizado:

   a. $12 \cdot 13$

   b. $19 \cdot 21$

   c. $65^2 - 63^2$

   d. 19^2

   e. 9.999^2

2. Considere la siguiente tabla:

$5 \cdot 5 = 25$	$6 \cdot 4 = 24$
$6 \cdot 6 = 36$	$5 \cdot 7 = 35$
$7 \cdot 7 = 49$	$6 \cdot 8 = 48$
$8 \cdot 8 = 64$	$7 \cdot 9 = 63$

   ¿Qué patrón observa? Demuestre la validez de su conjetura.

3. Factorice las siguientes expresiones:

   a. $x^4 - 1$

   b. $x^4 + 2x^2 + 1$

   c. $(x - y)^2 - (x + y)^2$

4. Pruebe que $(n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$. Usando esta identidad, demuestre que si se restan dos cubos de números naturales consecutivos y al resultado se le resta 1, obtenemos un número divisible por 6.

En resumen

- Para operar con expresiones algebraicas usamos las propiedades de las operaciones.
- Factorizar nos puede ayudar a simplificar expresiones y a demostrar propiedades generales. Factorizar es una aplicación de la propiedad distributiva.
- Una identidad es una igualdad entre expresiones algebraicas. Evaluar y usar diagramas nos puede ayudar a entender la validez de identidades.
- Los productos notables son identidades que nos pueden ayudar a multiplicar y factorizar expresiones, y también a realizar cálculos y demostrar propiedades.

Ejercicios de la sección

1. Encuentre una fórmula para el área de un triángulo equilátero de lado a.

2. Juan tiene una colección de autitos y C cajas, en cada una de las cuales puede guardar 3 autitos. Juan ocupa todas sus cajas para guardar sus autitos, pero le quedan 5 sin guardar. Escriba una fórmula, en términos del número de cajas, para el número de autitos que tiene Juan.

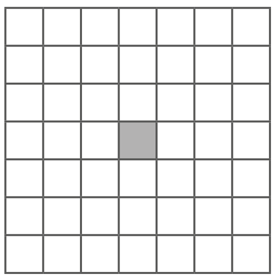
3. María tiene un 24% más lápices que Tomás, escriba una fórmula para representar esta situación.

4. Escriba un problema de enunciado para cada una de las siguientes expresiones algebraicas:

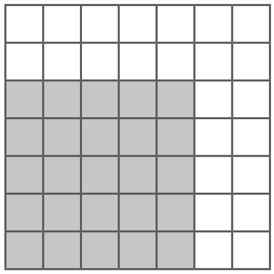
   a. $4c - 0{,}5b$ b. $\frac{3}{4}\left(b+35\right)+b$ c. $4\sqrt{b^2+1}+5$

5. Invente un truco en el que el resultado sea el doble del número pensado.

6. Escriba dos expresiones para el número total de cuadrados blancos en la siguiente figura:

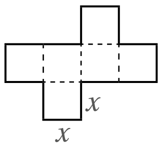


7. Escriba dos expresiones para el número total de cuadrados blancos en la siguiente figura:



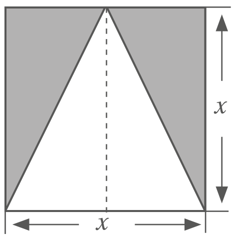
8. Utilice lenguaje algebraico para expresar la información que se pide de cada figura.

a. **Figura 1:**



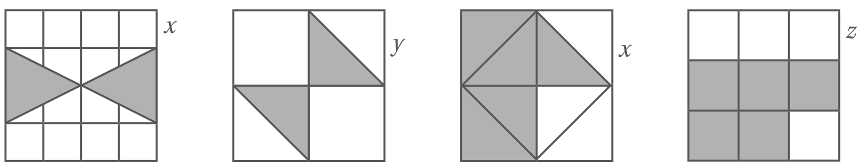
- El volumen del cubo que se puede formar con esta red.
- El área de la figura.
- El perímetro de la figura.

b. **Figura 2:**



- El área de la parte blanca de esta figura.
- El área de uno de los triángulos sombreados de la figura.
- La mitad del perímetro del cuadrado.

c. El área de cada figura sombreada (todas las figuras que parecen cuadrados lo son).



9. Considere dos secuencias numéricas, en la primera el término n está dado por la expresión $2n + 3$, y en la segunda el término n está dado por $3n - 2$, cuando n es un número natural y $n \geq 1$.

a. En una tabla escriba los primeros 10 términos de cada una de las secuencias.

b. Se sabe que el número 783 es un término de una de las dos secuencias. Determine de cuál de las dos.

c. El número 352 es un término de la segunda secuencia, calcule el término siguiente a 352.

10. El propósito de este ejercicio es encontrar una fórmula para la suma de los k primeros números naturales. Se dice que Gauss, un matemático, resolvió este problema cuando era muy joven usando el siguiente procedimiento que ilustramos, para $k = 10$:

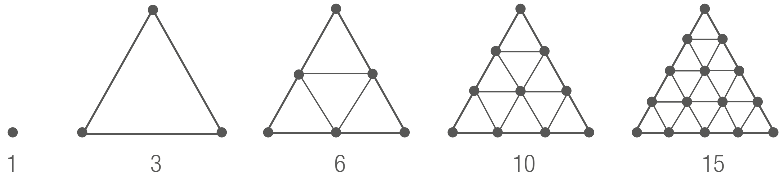
$$\begin{array}{r}
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\
+\ 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\
\hline
= 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 \\
= 10 \cdot 11.
\end{array}$$

Es decir, si desplegamos dos veces la suma de los números del 1 al 10 y sumamos los números de a dos, tal como se muestra arriba, entonces obtenemos que la suma total es $10 \cdot 11$. Ahora, como duplicamos los números, debemos dividir el resultado obtenido entre 2 y así la suma buscada es $10 \cdot 11 : 2 = 5 \cdot 11 = 55$.

a. Determine la suma de los números del 1 al 12, del 1 al 13 y del 1 al 20.

b. Proponga una expresión para la suma de los números del 1 al n.

11. Los números triangulares 1, 3, 6, 10, 15 se construyen de la siguiente forma:



a. Describa el patrón que observa.

b. Continuando la secuencia según el patrón descrito, haga una tabla que muestre los 10 primeros números triangulares.

c. Encuentre una fórmula para el número triangular n. Para esto, le será útil el ejercicio anterior.

12. La secuencia 7, 9, 11, 13, … tiene su término n dado por $2n + 5$.

a. Evalúe los primeros 10 términos de esta secuencia.

b. ¿Cuál es la expresión para el término $n + 1$?

c. Si uno calcula el segundo término menos el primero, se obtiene $9 - 7 = 2$. Calcule la resta entre el término 3 y el 2; el término 4 y el 3; el término 5 y el 4.

d. Determine una expresión para la diferencia entre el término $n + 1$ y el término n de la secuencia.

13. Explique cómo calcular, sin usar calculadora, la expresión numérica:

$$\frac{33}{81}\cdot\frac{27}{11}+\frac{19}{5}-3\;\frac{7}{4}.$$

14. Explique por qué el siguiente procedimiento usado para calcular $\frac{30\cdot 48}{42}$ es incorrecto

$$\frac{\cancel{30}\cdot\cancel{48}}{\cancel{42}}=\frac{40}{7}.$$

15. Explique cómo podría calcular $5.674.567.893^2$ con lápiz, papel y una calculadora que solo muestra 11 dígitos.

16. Calcule mentalmente:

a. $1.002^2 - 2.004^2$

b. $11^3 - 11^2$

c. 999^2

d. $1 + 11^2 + 101^2$

e. $\dfrac{25^2 - 125}{29^2 - 1}$

17. Evalúe las siguientes expresiones:

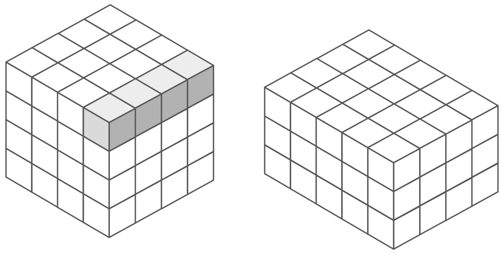
a. $\dfrac{x^2 + xy + yx^2 + x^3}{x^2y + xy}$, en $x = 11, y = 3$

b. $-x + x^2 + x^3 - x^4$, en $x = 101$

18. Demuestre la identidad:

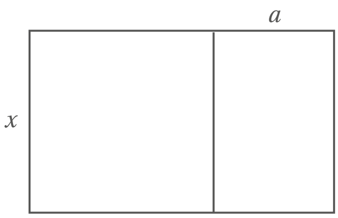
$$a^3 - a = a(a-1)(a+1).$$

Proponga un diagrama para ilustrar esta identidad. Le puede ser útil usar el siguiente dibujo, que permite visualizar la igualdad $4^3 - 4 = 3 \cdot 4 \cdot 5$.

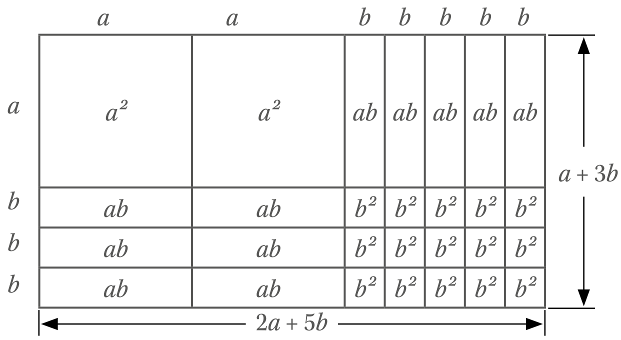


19. ¿Qué identidades se pueden deducir de los siguientes diagramas?

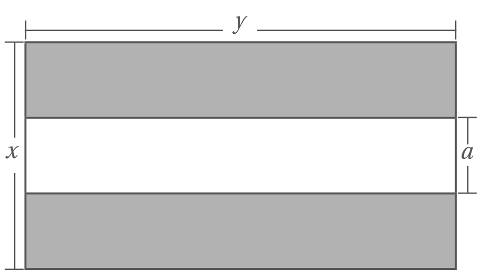
a.



b.



c.



2. Potencias

En esta sección estudiaremos un tipo especial de expresiones algebraicas y numéricas denominadas potencias. Hemos usamos algunas potencias en la sección anterior, como el cuadrado de un número $x^2 = x \cdot x$, y el cubo de un número $x^3 = x \cdot x \cdot x$. Tal como ilustran estos ejemplos, las potencias son muy útiles como notación abreviada de multiplicaciones repetidas.

Las potencias aparecen en diversos contextos, por ejemplo, en la notación posicional. El número 503 se expresa usando potencias de 10, como:

$$503 = 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0,$$

donde hemos usado las convenciones (que discutiremos más adelante) $10^1 = 10$ y $10^0 = 1$. También las potencias se usan en la llamada "notación científica", la cual permite escribir de manera concisa números muy grandes o muy chicos con respecto a la unidad.

También aparecen las potencias en la descomposición en factores primos[1], en que cada número se escribe como una multiplicación de factores que son potencias de números primos. Dicha descomposición se puede usar para calcular el máximo común divisor y mínimo común múltiplo entre dos números.

Aquí estudiaremos las propiedades de las potencias de manera general y diversos usos. También abordaremos el estudio de las raíces y su conexión con las potencias.

2.1 Definición de potencia

Como vimos anteriormente, si a es un número cualquiera se define

$$a^3 = a \cdot a \cdot a.$$

Esto lo podemos generalizar a cualquier número de factores, de tal manera que si multiplicamos a por sí mismo n veces, escribiremos

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}_{n\ veces}.$$

Por ejemplo, $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

La potencia a^n se lee "a a la n" o también "a elevado a la n–ésima potencia" o algo intermedio como "a elevado a n". En particular, a^2 y a^3 se leen "a al cuadrado" y "a al cubo", respectivamente, a^4 se lee "a a la cuarta" y a^5 se lee "a a la quinta".

Las distintas partes de una potencia también reciben nombres, como vemos a continuación:

$$\text{base} \rightarrow a^{n} \leftarrow \text{exponente}$$

Es decir, si escribimos 5^3, diremos que la base es 5 y que el exponente es 3.

Para pensar

¿Por qué a^2 se lee "a al cuadrado" y a^3 se lee "a al cubo"?

1 Ver Capítulo V del libro *Números* de esta colección.

Las potencias no siempre se escribieron como lo hacemos actualmente. El primer intento sistemático de anotar potencias corresponde a Rafael Bombelli en 1572. Para indicar que la incógnita estaba elevada al cuadrado, él dibujaba una semicircunferencia con la potencia correspondiente sobre el coeficiente. Por ejemplo, lo que actualmente escribimos como $5x^2$, Bombelli lo representaba como

$$\overset{\overset{2}{\smile}}{5}\,.$$

Por razones de espacio, en la edición impresa de sus manuscritos, escribía

$$5\,\overset{2}{\smile}.$$

Esta notación fue modificada levemente por Stevinus en 1586, quien sustituyó la semicircunferencia por una circunferencia completa. En 1592, Vieta escribe *A*, *A cuad*, *A cub* para representar A, A^2, A^3, Harriot en 1631 escribe *A*, *AA*, *AAA*. En 1634, P. Herigonous escribe *A*, *A2*, *A3* para representar lo que actualmente denotamos como A, A^2, A^3. La notación actual es introducida por Descartes en 1637, aunque solo para potencias naturales. En 1659, Wallis utiliza índices negativos y fraccionarios tales como A^{-1} y $A^{½}$ y finalmente es Newton quien, en 1676, utiliza la notación A^x con x un número sin restricciones.

Lo anterior es un ejemplo de cómo la escritura usada en matemática evoluciona hasta encontrar una forma clara y práctica. Desde Descartes, la notación de potencias se ha mantenido intacta. Si esto no es argumento suficiente y el lector aún duda de las bondades de la notación actual, un buen ejercicio es tratar de escribir alguna de las propiedades de potencias que se presentan en secciones posteriores usando alguna de las notaciones antiguas.

Ejemplos

1) Escribamos los siguientes productos en forma de potencias:

   a. $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^7$

   b. $(0{,}3)\cdot(0{,}3)\cdot(0{,}3)\cdot(0{,}3) = (0{,}3)^4$

   c. $(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4) = (-4)^5$

   d. $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = {\frac{2}{3}}^{6}$

2) Escribamos las siguientes potencias en forma de productos:

   a. $4^6 = 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 4.096$

   b. $\left(1\tfrac{1}{3}\right)^3 = 1\tfrac{1}{3}\cdot 1\tfrac{1}{3}\cdot 1\tfrac{1}{3} = \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4\cdot 4\cdot 4}{3\cdot 3\cdot 3} = \frac{64}{27}$

   c. $(-0{,}15)^3 = (-0{,}15)\cdot(-0{,}15)\cdot(-0{,}15) = -0{,}003375$

   d. $(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16$

Observamos, en los dos últimos ítems del ejemplo anterior, que al calcular potencias donde la base es negativa, el signo del resultado dependerá del exponente. Para analizar cómo afecta el exponente al signo del resultado, calculemos $(-1)^n$ para diversos valores de n. Por ejemplo, para $n = 3$ tenemos:

$$(-1)^3 = (-1)\cdot\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1} = (-1)\cdot 1 = -1.$$

Si $n = 4$, entonces:

$$(-1)^4 = \underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}\cdot\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1} = 1.$$

Ejercicio

Calcule $(-1)^n$ para $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$. ¿Qué patrón observa?

Probaremos que, en general, $(-1)^n = 1$ si n es par y $(-1)^n = -1$, si n es impar. Para demostrar esto, observamos que si n es par, podemos escribirlo como el doble de un número natural k, es decir, $n = 2k$. En este caso, siguiendo el procedimiento anterior, ya que tenemos un número par de factores, vemos que:

$$(-1)^n = (-1)^{2k} = \underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1} = \underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{k \text{ veces}} = 1.$$

Si n es impar, es decir, si n es de la forma $n = 2k + 1$, tenemos que:

$$(-1)^n = (-1)^{2k+1} = \underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}(-1) = \underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{k \text{ veces}}\cdot(-1) = -1,$$

ya que el número de factores es impar.

Para obtener estos resultados, hemos usado repetidamente la regla de los signos: *el producto de dos números del mismo signo es positivo y el producto de dos números de signos contrarios es negativo*. Si cambiamos -1 por otro número negativo, tendremos que calcular los productos que evitamos en el ejemplo anterior al usar 1, pero el signo del resultado solo dependerá de si el exponente es par o impar. Por ejemplo, agrupando de dos en dos los factores, para usar la regla de los signos tendremos que:

$$(-2)^5 = \underbrace{(-2)\cdot(-2)}_{4}\cdot\underbrace{(-2)\cdot(-2)}_{4}\underbrace{(-2)}_{-2} = -32,$$

y en cambio:

$$(-3)^4 = \underbrace{(-3)\cdot(-3)}_{9}\cdot\underbrace{(-3)\cdot(-3)}_{9} = 81.$$

Del mismo modo, podemos resolver los ejercicios que siguen.

Ejercicios

1. Justifique los cálculos que siguen, en particular, el signo del resultado:

   a. $(-0{,}3)^2 = (-0{,}3)\,(-0{,}3) = 0{,}09$

   b. $-(-5)^3 = -(-5^3) = -(-125) = 125$

   c. $\dfrac{(-2)^5}{(-4)^2} = \dfrac{-2^5}{4^2} = \dfrac{-32}{16} = -2$

2. Calcule:

   a. $(-3)^2\,(-2)^3$

   b. $-\dfrac{(-3)^3}{(-2)^6}$

En resumen, podemos establecer la siguiente relación entre la paridad del exponente, el signo de la base y el signo de la potencia.

Teorema I.3

Sea a un número real y n un número natural. Si n es par, entonces $a^n \geq 0$.

Si n es impar, entonces el signo de a^n depende del signo de la base:

- Si $a \geq 0$, entonces $a^n \geq 0$.
- Si $a < 0$, entonces $a^n < 0$.

Demostración

Si n es par, entonces $n = 2k$ para algún k natural y podemos agrupar de dos en dos todos los factores de a^n como sigue:

$$a^n = a^{2k} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a}_{a^2} \cdot \underbrace{a \cdot a}_{a^2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a}_{a^2}}_{k \text{ veces}}.$$

Es claro que, sin importar el signo de a, gracias a la regla de los signos, $a \cdot a = a^2$, será siempre positivo y, por lo tanto, a^n será el producto de k factores positivos. Así a^n será siempre positivo, excepto que $a = 0$, caso en el que todos los factores son nulos y también lo será a^n.

Si n es impar, entonces existe un natural k tal que $n=2k+1$. Entonces, al agrupar los factores de a^n de dos en dos quedará uno sobrante:

$$a^n = a^{2k+1} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a}_{a^2} \cdot \underbrace{a \cdot a}_{a^2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a}_{a^2}}_{k \text{ veces}} \cdot a.$$

Tal como argumentamos antes, el factor que corresponde a k–veces a^2 multiplicado por sí mismo será siempre positivo, independientemente del signo de a, por lo que el signo de esta expresión será igual al signo del último factor, es decir, al signo de a.

Es importante tener mucho cuidado con el uso de paréntesis. Por ejemplo, -2^4 y $(-2)^4$ son distintos. En efecto:

$$-2^4 = -(2^4) = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$$

$$(-2)^4 = (-2)\,(-2)\,(-2)\,(-2) = 16$$

Pueden ocurrir errores exclusivamente por una desprolijidad en la escritura, suponiendo que hay paréntesis donde no los hay. Otras posibles confusiones se originan en recuerdos poco precisos de propiedades que se aplican descuidadamente, como por ejemplo:

"$-2^4 = 16$ porque una base negativa elevada a un exponente par es positiva", suponiendo un paréntesis inexistente que permitiría considerar a (-2) como base, o

"$-\,(-2)^4 = 16$ porque menos por menos da más y $+\,2^4 = 16$", lo que también se relaciona con un descuido en la comprensión del rol que juega el paréntesis en este caso.

2.2 Propiedades de las potencias

Observemos que al multiplicar 5^3 por 5^6 obtenemos

$$5^3 \cdot 5^6 = (5 \cdot 5 \cdot 5)\,(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^9$$

ya que hay 9 factores iguales a 5, es decir, 5 aparece 9 veces. Estas 9 veces resultan de sumar las 3 veces que aparece el factor 5 en 5^3, más las 6 veces que aparece el factor 5 en 5^6. Esto lo podemos generalizar en un teorema que se refiere a varias operaciones con potencias.

Teorema I.4: Propiedades de las operaciones con potencias de igual base

Dados un número a distinto de cero y dos números naturales n y m, se tiene que:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
3) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, si $n \geq m$ y $\dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{1}{a^{m-n}}$ si $n < m$

Demostración

Probemos 1)

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\ veces} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m\ veces} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n+m\ veces}.$$

Vemos que se trata de un producto de a multiplicada por sí misma $n + m$ veces, luego $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. Demostremos la propiedad 2)

$$(a^n)^m = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\ veces} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\ veces} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\ veces}}_{m\ veces}.$$

En este caso, se trata de un producto de a multiplicada por sí misma $n \cdot m$ veces, luego $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$. Finalmente, probemos la propiedad 3)

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n\ veces}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ veces}} = \frac{\overbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}^{n-m\ veces}\overbrace{(\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a})}^{m\ veces}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}_{m\ veces}}.$$

Notamos que si $n > m$, hay más factores a en el numerador que en el denominador, de modo que si cancelamos uno a uno estos factores, quedarán $n-m$ en el numerador, por lo tanto $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$. Queda como ejercicio demostrar el caso $n<m$.

Ejercicios

1. ¿Qué propiedades del **Teorema I.4** son válidas para $a = 0$?

2. Explique las propiedades 1), 2) y 3) del **Teorema I.4**, para los casos:

   a. $a = 5$, $n = 4$, $m = 3$.

   b. a un número cualquiera (distinto de 0 para la propiedad 3)), $n = 4$ y $m = 3$.

   c. a un número cualquiera (distinto de 0 para la propiedad 3)), n y m como en el teorema.

La definición de potencia como multiplicación reiterada no nos permite definir a^1. Sin embargo, las propiedades del **Teorema I.4** obligan a establecer que $a = a^1$, pues es la única opción razonable. En efecto, si queremos que la propiedad 1) sea cierta para a^1, debemos tener que:

$$a^1 \cdot a^2 = a^3 = aaa = aa^2.$$

Así, la única posibilidad para a^1, es $a^1 = a$.

Definición I.4	Para cualquier número a, se define $a^1 = a$.

Tampoco a^0 tiene sentido como multiplicación reiterada y necesitamos una definición para ella. La misma propiedad 1) del **Teorema I.4** podría servir para definir a^0 de la única manera razonable. Si queremos que la propiedad 1) se cumpla en el caso del exponente nulo, entonces:

$$a^n \cdot a^0 = a^{n+0} = a^n$$

y dividiendo por a^n en ambos lados de la igualdad, obtenemos que $a^0 = 1$.

El razonamiento anterior requiere que $a^n \neq 0$ (para asegurarnos de no dividir por cero), lo cual se cumple solo cuando $a \neq 0$.

Definición I.5	Para cualquier número $a \neq 0$, se define $a^0 = 1$.

Otra forma de justificar esta definición resulta de extender la regla de la división de potencias al caso $n = m$:

$$a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}} = \frac{\overbrace{(\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a})}^{n}}{\underbrace{(\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a})}_{n}} = 1.$$

Por lo tanto, $a^0 = a^{n-0} = 1$. También en este razonamiento hay que excluir el caso $a = 0$.

Ejercicio

Verificar que todas las propiedades del **Teorema I.4** son ciertas para para $n = 0$, $n = 1$, $m = 0$ o $m = 1$.

Para pensar

¿Qué pasaría si en el razonamiento anterior no se considera que $a \neq 0$? ¿Existe un único valor posible para 0^0 de tal manera que se cumpla la propiedad $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$?

Estableceremos otras propiedades relacionadas con la multiplicación de potencias, pero esta vez las potencias que multiplicaremos tendrán el mismo exponente y distinta base. Estas propiedades se deducen de la definición de potencia y de propiedades de la multiplicación, tales como la conmutatividad y la asociatividad, como veremos en la demostración.

Teorema I.5: Propiedades del producto y la división de potencias con igual exponente

Dados dos números a y b, donde b es distinto de cero y n es un natural $n \geq 1$, se tiene:

4) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

5) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Demostración

Observemos que por definición $a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\ veces} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n\ veces}$.

Usando la asociatividad y la conmutatividad de la multiplicación, podemos reordenar los factores, obteniendo:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n\ veces} = (ab)^n.$$

Probemos ahora 2). Por definición de potencia, tenemos que:

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n\ veces}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n\ veces}}$$

y usando ahora las propiedades de la multiplicación de fracciones, obtenemos:

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n\ veces} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Ejercicios

1. Para $a = 3$, $b = 4$ y $n = 2$, evalúe $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

2. Para $a = 2$, $b = 4$ y $n = 3$, evalúe $\frac{a^n}{b^n} = \frac{a}{b}^{\,n}$.

3. Verifique que se cumplen todas las propiedades establecidas por ambos teoremas bajo las siguientes condiciones:

   a. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$, cuando $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $n = 0$.

   b. $\frac{a^n}{b^n} = \frac{a}{b}^{\,n}$, cuando $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $n = 0$.

   c. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, cuando $a \neq 0$, $n = 0$ y m es cualquier número natural.

   d. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, cuando $a \neq 0$, $m = 0$ y n es cualquier número natural.

4. Las potencias de números naturales crecen de manera muy rápida, a medida que aumentamos el exponente. Para verificar esto, calcule 2^n y n^2 para distintos valores de $n \geq 10$.

5. Muchos errores se originan en el mal uso de las propiedades de las potencias, como se muestra en los siguientes desarrollos:

   a. $(3 \cdot b)^n = 3 \cdot b^n$

   b. $8 \cdot \frac{1}{4}^{\,2} = 2^2$

   c. $3^{13} + 3^{13} + 3^{13} = 3^{13+13+13} = 3^{39}$

   Para cada uno de estos errores, proponga una explicación de cuál es la posible confusión de quien los cometió. ¿Cómo podría explicarle a una persona la razón de que los desarrollos anteriores sean incorrectos?

En resumen

- Las potencias nos ayudan a expresar de manera sintética productos iterados de un número.
- Las propiedades de las potencias de exponente natural son consecuencia de las propiedades de la multiplicación.
- Se definen las potencias de exponente 0 y 1 a partir de las propiedades de las potencias, de tal manera que haya consistencia.

2.3 Potencias con exponente negativo

Tal como lo hicimos para definir potencias con exponente 1 o con exponente 0, donde la idea de multiplicación reiterada no tenía sentido, usaremos las propiedades de las potencias para definir potencias de exponente negativo. Es decir, queremos que las propiedades del **Teorema I.4** valgan para todos los exponentes enteros, positivos, negativos y cero. Para que la propiedad 1) del teorema sea válida para $a \neq 0$ en el caso del exponente -1, necesitamos que:

$$a^{-1} \cdot a = a^{-1} \cdot a^{1} = a^{-1+1} = a^{0} = 1.$$

De aquí resulta claro que si $a \neq 0$, entonces debemos definir $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Observemos que para que esto funcione, a debe ser distinto de cero, ya que 0 no tiene inverso multiplicativo.

Para obtener una definición razonable de a^{-2}, podemos usar nuevamente la propiedad 1) del **Teorema I.4**, es decir, queremos que:

$$a^{-1} \cdot a^{-1} = a^{(-1)+(-1)} = a^{-2}$$

como ya hemos definido que $a^{-1} = \frac{1}{a}$, siempre que $a \neq 0$, tendremos que

$$a^{-2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^{2}}.$$

Otra alternativa habría sido razonar como lo hicimos para obtener a^{-1}, es decir,

$$a^{-2} \cdot a^{2} = a^{-2+2} = a^{0} = 1,$$

de donde obtenemos que $a^{-2} = \frac{1}{a^{2}}$.

Ejercicio

Deducir que $a^{-3} = \frac{1}{a^{3}}$

Estos casos motivan la definición general de potencia con exponente entero.

Definición I.6 Si a es un número distinto de cero y n es un número entero positivo, entonces:

$$a^{-n} = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{n \text{ veces}}.$$

Por la forma en que llegamos a la definición de potencia con exponente entero, resulta natural esperar que en este caso también valgan las propiedades de las potencias con exponente natural y obtenemos una extensión de los teoremas que vimos.

Teorema I.6

Sea a un número distinto de cero, n y m enteros, entonces:

4) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

5) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

6) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Demostración

Si n y m son enteros positivos, entonces la propiedad 1) está garantizada por el teorema anterior. Si m es un entero negativo, entonces $a^m = \dfrac{1}{a^{-m}}$, notando que $-m$ es positivo y aplicando el teorema mencionado, se tendrá que $a^n a^m = \dfrac{a^n}{a^{-m}} = a^{n-(-m)} = a^{n+m}$.

Del mismo modo, se puede demostrar el caso en que n es un entero negativo y m es un entero positivo. Si tanto n como m son enteros negativos, usando el teorema y la definición anteriores se tendrá:

$$a^n a^m = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{a^{-m}} = \frac{1}{a^{-n} \cdot a^{-m}} = \frac{1}{a^{(-n)+(-m)}} = \frac{1}{a^{-(n+m)}} = a^{n+m}.$$

Si $m = 0$, entonces $a^m = 1$ y $a^n \cdot a^m = a^n \cdot 1 = a^n \cdot a^0 = a^{n+0} = a^{n+m}$, independientemente del signo de n o de si n es nulo. La demostración de las partes 2) y 3) queda como ejercicio para el lector.

Observaciones:

- En la demostración anterior, reiteradamente se deben revisar casos dependiendo del signo del exponente, donde este se representa por una letra. Se debe tomar en cuenta que en a^{-m} el exponente $-m$ puede ser positivo o negativo. Por ejemplo, si $m = -2$, se tiene que $a^{-m} = a^2$.

- El uso del exponente negativo puede producir confusión. En trabajos escolares es común encontrar afirmaciones como: $2^{-4} = -16$. Es necesario considerar la posibilidad de este error cuando se planifique la enseñanza de potencias con exponentes negativos.

Una manera de ilustrar la definición de potencias de exponente negativo o cero proviene de la siguiente regularidad:

$$3^3 = 27$$

$\downarrow$ dividimos entre 3

$$3^2 = 9$$

$\downarrow$ dividimos entre 3

$$3^1 = 3$$

$\downarrow$ dividimos entre 3

$$3^0 = 1$$

$\downarrow$ dividimos entre 3

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$\downarrow$ dividimos entre 3

$$3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$$

Esta regularidad no remplaza el razonamiento deductivo que hicimos antes, pero es interesante como complemento. Puede servir también en la tarea de enseñanza, para recordar que 3 es igual a 3^1 y para enfrentar el error común que ya mencionamos: la creencia de que al elevar un número positivo a uno negativo el resultado es negativo.

Tal como advertimos antes, el teorema que establece las propiedades de potencias con distinta base y exponente natural tiene también una versión más general, para exponentes enteros.

Teorema I.7

Dados dos números a y b, donde b es distinto de cero, y un entero n se tiene:

1) $a^n b^n = (ab)^n$

2) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

La demostración se deja como ejercicio para el lector. Recuerde considerar todos los casos posibles para el exponente n, en cada una de las propiedades.

A continuación mostramos varios ejemplos donde se aplican propiedades estudiadas anteriormente, algunas veces con el fin de calcular y otras veces con el propósito de mostrar expresiones más sencillas o simplemente alternativas. En lo que sigue: a, b, x, y, z son números reales con a, b, x no nulos.

Ejemplo

1) $2^3 \cdot 2^{-4} \cdot 2^{-1} = 2^{3-4-1} = 2^{-2}$

2) $(-2)^4 \cdot (-3)^2 \cdot (-4)^2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 4^2 = 16 \cdot 9 \cdot 16 = 2.304$

3) $\dfrac{x^3 \cdot x^{-2} \cdot x^4}{x \cdot x^3} = \dfrac{x^{3-2+4}}{x^{1+3}} = \dfrac{x^5}{x^4} = x^{5-4} = x^1 = x$

4) $x^6\, y^{12}\, z^6 = x^6\, (y^2)^6\, z^6 = (xy^2z)^6$

5) $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-3} = \left(\dfrac{-1}{5}\right)^{-3} = (-5)^3 = -125$

6) $\left(-\dfrac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-5} = -\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^5 = -\left(\dfrac{a}{b}\right)^8$

Es interesante notar aquí que, a pesar de que el exponente resultante es par, el signo menos no desapareció. Esto se debe a que el exponente 8 se obtuvo como la suma de los exponentes de la potencias de igual base $\frac{a}{b}$, y que esta suma de exponentes no se pudo hacer antes, cuando las bases eran distintas: $\frac{-a}{b}$ y $\frac{b}{a}$.

7) $2^{5^{3^0}} = 2^{5^1} = 2^5 = 32$

En el último ejemplo vemos que no es lo mismo $2^{5^{3^0}}$ que $((2^5)^3)^0 = 1$. En la notación del ejercicio 7), el exponente es en sí una potencia y se resuelve primero el exponente de "arriba hacia abajo".

Ejercicios

1. Calcule como en los ejemplos anteriores:
   a. $(-2)^3 \cdot (-2)^{-4} \cdot (-2)^{-1}$
   b. $(((xy)^2)^{-3})^4$

2. Calcule el signo de $(-2)^{-1}$, $(-2)^{-2}$ y $(-2)^{-3}$. ¿Puede enunciar una regla acerca del signo del resultado y la paridad del exponente? Justifique su afirmación.

3. Calcule 2^5, 2^8, 2^{10}. A partir de estos, calcule mentalmente:
   a. $2^{10} \div 64$
   b. $64 \cdot 2^{-3}$
   c. $1.024 \div 64$
   d. $(64 \cdot 256) \div 2^{10}$
   e. $512 \div 16$

2.4 Notación científica y sus aplicaciones

Si hacemos la siguiente multiplicación con una calculadora

$$123.456.789{,}123 \times 987.654.312{,}456$$

la respuesta que entregará es:

$$1{,}21932631290413 \text{ e} + 17.$$

Esto significa $1{,}21932631290413 \cdot 10^{17}$ escrito en *notación científica*. Esta notación es una convención que nos ayuda a visualizar la magnitud de números grandes y pequeños, y también nos facilita los cálculos y comparaciones.

El matemático y filósofo griego Arquímedes (287 a. C. – 212 a. C.) fue el primero en intentar representar números extremadamente grandes con respecto a la unidad. Él estimó que el número de granos de arena en el universo era de 10^{63} (que es un número igual a un 1 seguido de 63 ceros).

Otro número extremadamente grande es la distancia de la tierra al sol, que aproximadamente es de 150.000.000.000 metros. Un número extremadamente pequeño es el diámetro de un átomo, que es, aproximadamente, 0,00000000010586 metros.

Para pensar

Los números grandes o pequeños ponen a prueba nuestro sentido numérico. Dibuja una recta numérica en tu cuaderno y marca en un extremo el 0 y en el otro 1.000.000. ¿Dónde se ubicaría el 1.000?

En notación científica, un número real N se escribe en la forma:

$$N = a \cdot 10^{n},$$

donde a es un número decimal que tiene exactamente un dígito distinto de cero a la izquierda de la coma decimal, llamado coeficiente, y n es un número entero llamado exponente u orden de magnitud.

En los textos escolares, cuando se escribe un número en notación científica, usualmente se usa el signo × en lugar del signo ·, así se denota $N = a \times 10^{n}$.

Podemos escribir los números de los ejemplos anteriores en notación científica como: $1{,}5 \cdot 10^{11}$ y $1{,}0586 \cdot 10^{-10}$, respectivamente. Los números $15 \cdot 10^{10}$; $0{,}10586 \cdot 10^{-9}$; $32{,}84567 \cdot 10^{-11}$ y $0{,}25739 \cdot 10^{3}$ no están escritos en notación científica.

Ejemplo

1) Veamos cómo escribir números en notación científica.

a. $34.000.000 = 34.000.000{,}0 = 3{,}4 \cdot 10^7$. Notamos que la coma se desplaza siete espacios hacia la izquierda del número y este número es el exponente.

b. $0{,}000068 = 6{,}8 \cdot 10^{-5}$. Observamos que la coma se desplaza cinco espacios hacia la derecha del número y, en este caso, el exponente es -5.

c. $523{,}4 \cdot 10^8 = (5{,}234 \cdot 10^2) \cdot 10^8 = 5{,}234 \cdot 10^{10}$

d. $0{,}0000125 \cdot 10^{50} = (1{,}25 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{50} = 1{,}25 \cdot 10^{45}$

2) En el vacío, la luz recorre 1 metro en aproximadamente 0,000000003 segundos. Calculemos en cuánto tiempo la luz recorre la distancia de la tierra al sol.

Como dijimos anteriormente, la distancia de la tierra al sol es de aproximadamente $1{,}5 \cdot 10^{11}$ metros. Por lo tanto, el tiempo que tarda la luz en recorrer el camino de la tierra al sol es $(1{,}5 \cdot 10^{11}) \cdot (3 \cdot 10^{-9})$ segundos, es decir, $4{,}5 \cdot 10^2$ segundos. Sabemos que un minuto tiene 60 segundos y, por lo tanto, la luz tarda en recorrer de la tierra al sol aproximadamente:

$$4{,}5 \cdot 10^2 \div 60 = \frac{4{,}5 \cdot 10^2}{6 \cdot 10} = \frac{4{,}5}{6} \cdot 10 = 0{,}75 \cdot 10 = \left(7{,}5 \cdot 10^{-1}\right) \cdot 10 = 7{,}5 \text{ minutos.}$$

Ejercicios

1. Calcule:

a. $567.000.000.000 \div 0{,}000000032$

b. $0{,}00056^{-6}$

c. $0{,}0000000678 \cdot 0{,}000078$

d. $2{,}89056 \cdot 10^7 \cdot (0{,}00045)^4$

2. Calcule, escribiendo el resultado en notación científica:

a. $2{,}43 \cdot 10^4 \cdot 4{,}18 \cdot 10^7$

b. $\dfrac{1{,}3 \cdot 10^{12}}{5{,}2 \cdot 10^9}$

c. $2{,}4 \cdot 10^9 + 3{,}654 \cdot 10^{12}$

3. Describa cómo multiplicar, dividir y calcular potencias de números escritos con notación científica. La notación científica ¿simplifica la realización de sumas y restas?

4. Escriba en notación científica:

a. 1 millón.

b. 100.000 millones.

c. 1 billón.

d. 1 milésimo.

Las siguientes tablas nos muestran ejemplos de números grandes y pequeños provenientes de distintos contextos:

Número de moléculas en un gramo de agua	$\simeq 3 \cdot 10^{22}$
Radio de la Tierra	$\simeq 6 \cdot 10^{6}$ m
Distancia a la Luna	$\simeq 4 \cdot 10^{8}$ m
Distancia al Sol	$1{,}5 \cdot 10^{11}$ m
Masa de la Tierra	$\simeq 6 \cdot 10^{24}$ kg
Edad de la Tierra	$\simeq 5 \cdot 10^{9}$ años
Edad del Universo	$\simeq 1{,}5 \cdot 10^{10}$ años
Cantidad de personas en la Tierra (dato 2010)	$\simeq 6{,}9 \cdot 10^{9}$
Promedio de la vida de una persona	$\simeq 2 \cdot 10^{9}$ segundos
Cantidad de cabellos de una persona	$\simeq 1{,}5 \cdot 10^{5}$

Tabla I.3

Masa de una molécula de agua	$\simeq 3 \cdot 10^{-23}$ g
Masa del protón	$\simeq 1{,}7 \cdot 10^{-24}$ g
Umbral de aplicación de las leyes físicas conocidas	$\simeq 10^{-33}$ m
Longitud de una onda luminosa (luz roja)	$\simeq 7 \cdot 10^{-7}$ m
Tamaño de un glóbulo rojo	$\simeq 7{,}5 \cdot 10^{-6}$ m
Tamaño de una célula	$\simeq 10^{-5}$ m
Longitud de una doble cadena de ADN	$\simeq 2{,}4 \cdot 10^{-9}$ m
Longitud de una bacteria	$\simeq 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ m

Tabla I.4

Ejercicio

La velocidad del sonido en el aire es de 33.100 centímetros por segundo. Escriba esta velocidad en notación científica y transfórmela a kilómetros por hora.

Algunos prefijos del Sistema Internacional de Unidades que se refieren a potencias de 10, sus símbolos y sus significados se encuentran en la tabla siguiente:

Prefijo	Símbolo	Significado
Peta	P	$10^{15} = 1.000.000.000.000.000$
Tera	T	$10^{12} = 1.000.000.000.000$
Giga	G	$10^{9} = 1.000.000.000$
Mega	M	$10^{6} = 1.000.000$
Kilo	k	$10^{3} = 1.000$
Hecto	h	$10^{2} = 100$
Deca	da	$10^{1} = 10$ $10^{0} = 1$
Deci	d	$10^{-1} = 0{,}1$
Centi	c	$10^{-2} = 0{,}01$
Mili	m	$10^{-3} = 0{,}001$
Micro	μ	$10^{-6} = 0{,}000\ 001$
Nano	n	$10^{-9} = 0{,}000\ 000\ 001$
Pico	p	$10^{-12} = 0{,}000\ 000\ 000\ 001$
Femto	f	$10^{-15} = 0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 001$
Atto	a	$10^{-18} = 0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001$

Tabla I.5

Ejemplo

Indicaremos el número de metros de las siguientes unidades de medida: cm, mm, km y Gm.

Usando la tabla anterior:

$$1 \text{ cm} = 1\ \underline{\textit{centí}}\text{metro} = 10^{-2}\ \text{m} = \frac{1}{10^{2}}\ \text{m} = \frac{1}{100}\ \text{m} = 0{,}01\text{m}$$

$$1 \text{ mm} = 1\ \underline{\textit{milí}}\text{metro} = 10^{-3}\ \text{m} = \frac{1}{10^{3}}\ \text{m} = \frac{1}{1.000}\ m = 0{,}001\text{m}$$

$$1 \text{ km} = 1\ \underline{\textit{kiló}}\text{metro} = 10^{3}\ \text{m} = 1.000\ \text{m}$$

$$1 \text{ Gm} = 1\ \underline{\textit{gigá}}\text{metro} = 10^{9}\ \text{m} = 1.000.000.000\ \text{m}$$

Ejercicio

Las unidades de memoria de un computador no se expresan en notación científica. 1 KB (kilobyte) es 210 bytes, 1 MB (megabyte) es 210 KB, 1 GB (gigabyte) es 210 MB y 1 TB (terabyte) es 210 GB.

a. Indique cuántos bytes tiene un CD de 700 MB, un pendrive de 8 GB y un disco externo de 1 TB.

b. El prefijo kilo está asociado a 10^3. ¿Por qué cree que se usa este prefijo en este contexto?

Una forma muy empleada para comparar las magnitudes de dos objetos muy diferentes es considerar su cociente, en lugar de su diferencia. Dicho cociente puede ser estimado mediante su *orden de magnitud*, que es el número de veces que hay que multiplicar o dividir por 10 para convertir una magnitud en la otra. Cada factor de 10 es considerado un orden de magnitud. Si tenemos las magnitudes expresadas en notación científica, podemos compararlas solo fijándonos en las potencias de 10, lo que es una ventaja de esta notación.

Para pensar

¿Por qué para comparar el orden de magnitud de dos números expresados en notación científica solo debemos restar los exponentes de las potencias de 10?

Por ejemplo, el radio del Universo observable es de aproximadamente 10^{26} metros y el radio de nuestro Sistema Solar es aproximadamente de 10^{12} metros, por lo tanto, vemos que el cociente del radio del Universo observable y el radio de nuestro Sistema Solar es $10^{26-12} = 10^{14}$. Es decir, el radio del Universo observable es 10^{14} veces más grande que el radio de nuestro Sistema Solar. En este caso, decimos que el radio del Universo observable es catorce órdenes de magnitud más grande que el radio de nuestro Sistema Solar.

Ejemplo

El concepto de orden de magnitud nos permite entender mejor la escala Richter, que fue creada por el científico Charles Richter (1900–1885) en 1935, para comparar las magnitudes de los terremotos en términos de la energía liberada. La escala Ritcher mide el orden de magnitud de las diferencias entre los terremotos. Por ejemplo, un terremoto de escala 4,5 con respecto a otro terremoto de escala 2,5 tiene un orden de magnitud de 4,5 – 2,5 = 2. Es decir, el primer terremoto es $10^2 = 100$ veces más fuerte que el segundo.

Magnitud	Lugar	Año
9,5	Valdivia, Chile	1960
9,2	Prince William Sound, Alaska, Estados Unidos	1964
9,1	Sumatra, Indonesia	2004
9,0	Kamchatka, Rusia	1952
9,0	Prefectura de Miyagi, Japón	2011
8,8	Cobquecura, Chile	2010
8,8	Esmeraldas, Ecuador	1906
8,7	Islas Andreanof, Alaska, Estados Unidos	1965
8,6	Islas Nías, Sumatra, Indonesia	2005
8,6	Tíbet, China	1950

Tabla I.6

Comparar órdenes de magnitud puede ser algo muy importante a la hora de modelar, pues permite discutir cuán razonable puede ser un resultado y cuestionar el modelo, en caso de que se obtengas resultados insensatos. Cuando nos proponemos modelar matemáticamente, lo que buscamos es describir una situación mediante el uso de la matemática, por ejemplo, usando una expresión. Un interesante ejemplo se encuentra en el siguiente modelo de crecimiento de bacterias, que se reproducen dividiéndose en dos.

Ejemplo

Experimentos muestran que una población de bacterias del tipo *Escherichia coli* se duplica cada 20 minutos. Es decir, en 1 hora, una población inicial de N_0 bacterias se habrá duplicado 3 veces. Así, si N_1 es la población de bacterias al cabo de 1 hora, entonces $N_1 = 2^3 N_0$. Por lo tanto, si ha ocurrido un contagio con una población de N_0 bacterias, al cabo de un día, es decir, después de 24 horas, tendremos que la población se ha duplicado $24 \cdot 3 = 72$ veces y la población será de

$$N_{24} = 2^{72} \cdot N_0.$$

El número 2^{72} parece ser muy grande. En efecto,

$$2^{72} = 2^{2+70} = 2^2 \cdot 2^{70} = 4 \cdot (2^{10})^7 = 4 \cdot (1.024)^7 > 4 \cdot (1.000)^7 = 4 \cdot (10^3)^7 = 4 \cdot 10^{21}.$$

Por otro lado, las bacterias son muy chicas. Supongamos que el contagio ha ocurrido con una población inicial de mil bacterias, es decir, N_0=1.000. Estas bacterias tienen una forma cilíndrica, de radio aproximado de 0,4 μm y largo 2 μm, así el volumen de 1 bacteria se puede aproximar por:

$$\pi \cdot (0{,}4)^2 \cdot 2\ \mu m \approx 1\ \mu m^3 = 10^{-3}\ mm \cdot 10^{-3}\ mm \cdot 10^{-3}\ mm = 10^{-9}\ mm^3,$$

y como 1 mm = 0,001 m = 10^{-3} m, el volumen de 1 bacteria será aproximadamente de

$$10^{-9} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}\ m^3 = 10^{-18}\ m^3.$$

Así, al cabo de un día, el volumen que ocupará la población de bacterias, que denotamos V_{24}, será:

$$V_{24} = 2^{72} \cdot N_0 \cdot 10^{-18}\ m^3,$$

y, como vimos, $2^{72} > 4 \cdot 10^{21}$, por lo tanto, $V_{24} > 4 \cdot 10^{21} \cdot 10^{-18} \cdot N_0 = 4 \cdot 10^3 \cdot N_0$. Como dijimos que la población inicial del contagio es $N_0 = 1.000 = 10^3$ bacterias, tendremos que al cabo de un día la población de bacterias ocupará un volumen aproximado de:

$$V_{24} > 10^6\ m^3,$$

es decir, ocupará un volumen mayor al de un cubo de $10^2 = 100$ metros de lado, lo que es completamente insensato. Este modelo, en el cual las bacterias se duplican, solo es válido para cierto rango del tamaño de la población, ya que a partir de un umbral las bacterias saturarán el medio en que se alojan, el cual dejará de proveerles las condiciones para su desarrollo. Por el análisis que hemos visto aquí, concluimos que la bacteria *Escherichia coli* no puede duplicarse según el modelo durante un período de 24 horas.

Para pensar

¿Qué efectos cree que hay que considerar en un modelo de crecimiento de bacterias? ¿Cómo piensa que se podrían incorporar estos efectos en un modelo matemático?

En resumen

- Las potencias nos permiten expresar números grandes y pequeños de manera concisa.
- La notación científica es una convención para expresar números, haciendo explícito su orden de magnitud.

Ejercicios

1. Suponga que multiplica un número de 5 dígitos por otro de 9 dígitos. ¿Cuántos dígitos tendrá el resultado? ¿Cuáles serán los exponentes de cada uno de estos tres números en notación científica?

2. En una calculadora cuya pantalla no puede mostrar más que 12 dígitos de un número, se hace el siguiente cálculo: 666.666 · 7.777.777 y como resultado aparece 5,1851795E12 ¿Por qué no es cierto que 666.666 · 7.777.777 = 5.185.179.500.000? Utilice la notación científica en una estrategia que le permita calcular el resultado correcto de esta multiplicación, aprovechando lo que entregó la calculadora. No haga el cálculo completo; use la información de la calculadora.

3. Un laboratorio tiene 1 gramo de una sustancia radioactiva que tiene una vida media de 100 años. O sea, en 100 años se reduce a la mitad y en 200 años a la mitad de la mitad, es decir, queda la cuarta parte. ¿Cuántos cientos de años deben pasar para quede menos de una cien millonésima parte de gramo de esa sustancia?

4. Cuando se deposita dinero en un banco, el interés corresponde al porcentaje del monto ahorrado que el banco pagará. El interés se calcula por períodos fijos, por ejemplo, una vez al año, por cuatrimestre o mensualmente. Supongamos que el interés es pagado de manera anual, entonces, si se deposita x, después de un año el monto será $x\,(1 + r)$, donde r es la tasa de interés (porcentual). Si se mantiene el dinero por un segundo período y la tasa de interés es la misma, el interés se aplicará al nuevo $x\,(1 + r)$, así, al final del segundo, el monto que se tendrá en el depósito será $x\,(1 + r)\,(1 + r)$.

   a. Suponga que el interés es un 5% anual y que se depositan $2.000.000. Describa una expresión que nos permita calcular el monto de dinero en el depósito después de n años.

   b. El banco A ofrece a sus ahorrantes una tasa de interés de 5% anual, mientras que el banco B ofrece un 2,5% cada 6 meses. ¿Qué banco conviene elegir?

2.5 Raíces

Las raíces están íntimamente ligadas con las potencias. Por ejemplo, definimos la raíz cuadrada de 2 como el único número real positivo x que satisface $x^2 = 2$. A primera vista, no es evidente la existencia de este número, pero usando una construcción geométrica vemos que corresponde a la medida de la diagonal de un cuadrado de lado de largo 1. En efecto, por el Teorema de Pitágoras se tiene que en el triángulo rectángulo ABC de la **Figura I.11**, $AB^2 + BC^2 = AC^2$ y si los lados del cuadrado son de largo 1, es decir, si $AB = BC = 1$, entonces $AC^2 = 2$.

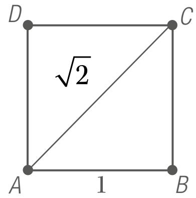


Figura I.11

La ecuación $x^2 = 2$ complicó por muchos años a los antiguos griegos, pues, a pesar de que corresponde a la medida de la diagonal de un cuadrado de lado de largo 1, no es un número racional como todos los que ellos conocían, que eran razones entre dos magnitudes. La primera demostración de que la raíz de 2 no es un número racional se atribuye al pitagórico Hipaso de Metaponto. Tanto fue el revuelo que causó este resultado y su divulgación que se tejieron historias en torno a su muerte en un naufragio, en circunstancias misteriosas. Algunos dicen que se suicidó como autocastigo y otros afirman que fue asesinado por un grupo de pitagóricos.

En este texto no nos ocuparemos de la existencia de las raíces, supondremos que siempre existen, y nos concentraremos en sus propiedades, relacionándolas con las propiedades de las potencias.

Definición I.7	Sea a un número no negativo y n un natural mayor o igual que 2. La raíz n–ésima de a es un número no negativo x solución de $x^n = a$. El número x se denota por $\sqrt[n]{a}$. Es decir: $x = \sqrt[n]{a}$ si $x^n = a$ y $x \geq 0$.

Cuando $n = 2$ se habla de la raíz cuadrada y cuando $n = 3$ se habla de la raíz cúbica. Cuando no se escribe el índice n en la raíz, se supone que $n = 2$, es decir, $b = \sqrt{a}$ *si* $b^2 = a$ y $b \geq 0$.

Por ejemplo, $2 = \sqrt{4}$ pues 2 es positivo y $2^2 = 4$.

Un error, que se produce al olvidar que la raíz se define como un número no negativo, lleva a que frecuentemente los alumnos escriban cosas como $\sqrt{9} = \pm 3$ para indicar que $9 = 3^2$ y también $9 = (-3)^2$. Si bien estas dos últimas igualdades son ciertas, es falso que $\sqrt{9} = -3$, ya que -3 es un número negativo y la raíz de un número positivo es, por definición, un número positivo.

Utilizando las propiedades de las potencias y la definición de raíz se pueden demostrar las siguientes propiedades de las raíces.

Teorema I.8

Si a es un número no negativo, b es número positivo y n y m son números naturales mayores o iguales a 2, se tiene que:

a. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

b. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

c. $\sqrt[n]{a^{-1}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$

d. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Demostración

a. Si llamamos $x = \sqrt[n]{a}$, $y = \sqrt[n]{b}$, tendremos que $x^n = a$, $y^n = b$, y con ello concluimos que: $ab = x^n y^n = (xy)^n$.

De la definición de raíz y de las propiedades de las potencias, se tendrá que $\sqrt[n]{ab} = xy = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

b. Se propone como ejercicio.

c. Usando la propiedad anterior, se obtiene que $\sqrt[n]{a^{-1}} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

d. Sea $x = \sqrt[m]{a}$, es decir, $x^m = a$, y sea $y = \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$. Entonces $y^n = x$, y por lo tanto $a = \left(y^n\right)^m = y^{nm}$, es decir, $\sqrt[nm]{a} = y = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$.

Para pensar

En la definición que dimos solo consideramos las raíces de números positivos. Esta restricción no es necesaria cuando en $\sqrt[n]{a}$, n es impar. Muestre que: $\sqrt[3]{-1} = -1$, adaptando la definición de raíz n–ésima de modo de considerar por separado el caso en que n es impar y el caso en que n es par.

Ejercicios

1. Completar la demostración anterior.

2. Simplificar las expresiones utilizando las propiedades de las raíces:

   a. $\sqrt[3]{81}$

   b. $\sqrt{8}$

   c. $\dfrac{\sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[2]{\sqrt[3]{2}}}$

3. Suponga que en una mudanza debe meter una barra de largo L en una caja cúbica. ¿Cuál es el menor tamaño de la caja en el que cabrá la barra? Suponga ahora que también dispone de cajas cuyo largo es igual al de la caja cúbica de menor tamaño donde cabe la barra, cuyo ancho es la mitad del largo y cuya altura es el doble del largo. ¿Cabrá la barra en este tipo de cajas?

4. Explique por qué para calcular $\sqrt[4]{10}$ con una calculadora basta con usar la tecla $\sqrt{}$ dos veces. ¿Para qué otros valores de n podemos calcular $\sqrt[n]{10}$ solo usando la tecla $\sqrt{}$?

5. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera?

   a. Si $\sqrt{a} = b$, entonces $b^2 = a$.

   b. Si $b^2 = a$, entonces $\sqrt{a} = b$.

6. Encuentre soluciones para las siguientes ecuaciones:

   a. $2^{2n} = 2048$

   b. $\sqrt[3]{3n} = 56$

   c. $n^4 = 81$

   d. $\sqrt[5]{\dfrac{3}{n}} = 35$

Para pensar

A veces se anota $a^{\frac{1}{2}}$ en lugar de $\sqrt{a}$. Es decir, se entiende que $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Aunque no lo desarrollaremos en este libro, podemos también extender la definición de potencia al caso de exponentes racionales, esta vez, pidiendo que la regla de la potencia de la potencia, es decir, $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, sea válida también para los exponentes racionales. En otras palabras, para definir $a^{\frac{1}{2}}$ pediremos que también se cumpla la propiedad mencionada y que, por lo tanto:

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a.$$

Si denotamos $x = a^{\frac{1}{2}}$ y pedimos $x \geq 0$, la ecuación anterior quedaría $x^2 = a$, y su solución sería $x = \sqrt{a}$.
Explique, usando este razonamiento, cómo debemos definir $a^{\frac{1}{3}}$ y $a^{\frac{1}{4}}$.

Ejercicios

1. Desarrolle todas las demostraciones propuestas como ejercicio, justificando cada paso.

2. Determine el signo de las siguientes expresiones:

   a. $(-23)^{-9.999^5+1.111^5}$

   b. $\dfrac{(-1)^{23}(-2)^{101^3}}{\left(5^3-3^5\right)^{11^{20}-1}}$

   c. $(-1)^{n^2+n}$, con n natural.

3. Simplifique las expresiones:

   a. $\dfrac{32 \cdot 49}{48}$

   b. $\dfrac{6^3}{27 \cdot 32}$

4. Justifique la propiedad $a^n \cdot b^n = (ab)^n$, cuando n es un número natural. Parta explicando la validez de esta propiedad en los casos: $7^4 \cdot 5^4$, $7^4 \cdot a^4$, $7^n \cdot a^n$. Explique por qué es cierta la propiedad general.

5. Encuentre números naturales m y n, de manera que se cumplan las siguientes igualdades:

a. $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{m\ veces} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\ veces} = 125$

b. $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{m\ veces} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\ veces} = 400$

c. $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{m\ veces} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\ veces} = 0{,}02$

d. $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{m\ veces} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\ veces} = 2{,}5 \times 10^{100}$

6. Simplifique las siguientes potencias:

a. $5^3 \cdot 5 \cdot 5^2$

b. $(-3)^5$

c. $\dfrac{x^{15}}{x^9}$

d. $\dfrac{a^{-3} \cdot a^3}{a^{-5}}$

e. $2^{3^{6^0}}$

f. $x^6 y^6 z^6$

g. $x^6 y^{18} z^6$

h. $(x^5 y^3)^2$

i. $-\dfrac{1}{5}^{-3}$

j. $\dfrac{a^2 x}{y}^{3} \quad \dfrac{x^3}{a^4 y^{-1}}^{-2}$

7. Simplifique las siguientes expresiones, donde m y n son números naturales:

a. $\dfrac{6^{3^2} \cdot 5^{3n} \cdot 18^5 \cdot 15^7}{3^n \cdot 60^{2n}}$

b. $\dfrac{(x^2 y)^6 \cdot x^{12} \cdot xy^{22}}{x^{-5} \cdot y^2 \cdot (xy^{-3})^{14}}$

c. $\dfrac{5^5 \cdot 125^{-m}}{5^2 \cdot (5^{-1})^m}$

8. Exprese los siguientes números usando notación científica:

a. $2{,}7 \cdot 10^5 + 3{,}44 \cdot 10^4 - 0{,}9 \cdot 10^5$

b. $(1{,}3 \cdot 10^9) \cdot (3{,}5 \cdot 10^{-7}) \cdot (5{,}4 \cdot 10^{32})$

c. $(2 \cdot 10^6)^4$

d. $(12.000.000)^{-8}$

e. $0{,}00000067 \cdot (1{,}5 \cdot 10^5)^{-6}$

9. Simplifique las siguientes expresiones indicando las propiedades usadas:

a. $\sqrt[5]{96}$

b. $\sqrt{2^6 \cdot 16^{-8} \cdot 3^5}$

c. $\dfrac{\sqrt{7^8 a^4}}{\sqrt[3]{27 \cdot 5^{-3}}}$

10. Encuentre soluciones para las siguientes ecuaciones

a. $n^3 = 81$

b. $n^8 = 256$

c. $2\sqrt{n} = 25$

3. Dificultades y errores asociados al trabajo con expresiones algebraicas y potencias

En esta sección, abordaremos algunas dificultades y errores asociados al trabajo con expresiones algebraicas y potencias que vimos en el capítulo. Algunos de estos errores y dificultades aparecen en educación básica, otros en educación media y muchos persisten inclusive en la educación universitaria.

Una de las primeras tareas que niños y niñas desarrollan cuando comienzan a estudiar álgebra tiene relación con traspasar información del lenguaje común al lenguaje algebraico. Por ejemplo, al describir la relación "en un paseo el número de niños es tres veces el número de adultos" de manera algebraica, es común que surja la respuesta errónea: $n \cdot 3 = a$, con n el número de niños y a el de adultos. Una explicación posible de este error es que se hace un traspaso literal del lenguaje natural al algebraico sin pensar en el sentido de la frase.

Una concepción errónea que puede surgir al trabajar con variables es pensar en las letras como objetos. Esta asociación es muy natural, pues las expresiones algebraicas muchas veces surgen de problemas donde las variables están asociadas a números de objetos y, para denotarlas, se usan letras asociadas a los nombres de los objetos. Este error también se induce al usar explicaciones como la siguiente para la suma de expresiones: "$2m + 4m$ es como sumar 2 manzanas con 4 manzanas lo que da 6 manzanas". Si bien el resultado es correcto, esta explicación refuerza la asociación de la variable a un objeto. Esto provoca problemas al tratar de dar sentido a la suma $2m + 6p$, siguiendo con misma lógica, esta se podría interpretar como sumar "dos manzanas y seis peras", lo que carece de sentido. Es importante enfatizar que las letras de una expresión algebraica siempre representan números. Así, en el primer ejemplo, $2m + 4m$ puede representar 2 veces el número de manzanas más 4 veces el número de manzanas y, en el segundo ejemplo, la suma de 2 veces el número de manzanas con 6 veces el número de peras, que sí tiene sentido, pues estamos sumando números. Evaluar expresiones también es una manera de reforzar el hecho de que las variables son números y de ayudar a dar sentido a las expresiones. Por ejemplo si tenemos 12 manzanas y 13 peras, entonces $2m + 6p$ es $2 \cdot 12 + 6 \cdot 13 = 102$.

La asociación incorrecta entre la variable y el objeto también se fomenta con algunas analogías que muchas veces se usan para explicar procedimientos incorrectos. Por ejemplo, para tratar de explicar por qué al sumar $3a + a + 2$ no se obtiene $6a$, se dice que esto es incorrecto pues "no se pueden sumar peras con manzanas", dando a entender que a $4a$ no se le puede sumar 2 por tratarse de objetos distintos. Esta explicación es incorrecta, las variables son siempre números y, por tanto, sí se pueden sumar; lo que no se puede hacer es reducir la expresión.

Al sumar expresiones como $3a + b + a + 2b$ también surgen dificultades, pues la respuesta $4a + 3b$ no parece un resultado adecuado y tienta a seguir sumando, por lo que se puede entregar $7ab$ como resultado juntando ambas expresiones. Como discutimos anteriormente, la explicación de "no sumar peras con manzanas" no es apropiada, y una forma de explicar que el resultado $7ab$ para $3a + b + a + 2b$ es incorrecto es insistir en que a y b son números cualesquiera que pueden ser distintos y mostrar ejemplos de la expresión evaluada como:

$$3 \cdot 6 + 9 + 6 + 2 \cdot 9 = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 9$$

$$3 \cdot 75 + 13 + 75 + 2 \cdot 13 = 4 \cdot 75 + 3 \cdot 13$$

donde queda claro que todo se podrá sumar pues solo se trata de números, y que la suma es $4a + 3b$, pero que como a y b podrían ser números distintos no podremos escribir esta expresión de forma más compacta como un múltiplo de 7. Vemos que evaluar nos ayuda a entender por qué el resultado es $4a + 3b$ y que esto no es $7ab$. También se puede evaluar para distintos valores de a y b, como se muestra en la tabla, para mostrar que $3a + b + a + 2b$ no es $7ab$.

a	b	$3a + b + a + 2b$	$7ab$
0	1	3	0
1	0	4	0
0	0	0	0
1	1	7	7
3	2	18	42
2	2	14	28

Tabla II.3

Vemos que de todos los valores de a y de b que probamos, solo en dos casos, cuando $a = b = 0$ y $a = b = 1$, coinciden ambas evaluaciones. En todos los otros, las evaluaciones son distintas. Nos habría bastado solo uno de estos casos para concluir que las expresiones $3a + b + a + 2b$ y $7ab$ son distintas.

La traducción de una situación desde el lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico puede ser compleja y esta dificultad no se origina en el álgebra, sino en las imprecisiones de nuestro modo de hablar. El uso de paréntesis permite que las expresiones algebraicas no tengan estas ambigüedades. Como se advirtió antes, las expresiones $3x - 1$ y $3\,(x - 1)$ corresponden, respectivamente, a "el triple de un número, menos 1" y "el triple, de un número menos 1". Pero en el lenguaje oral difícilmente se percibirá la *coma* de una manera inequívoca. Así, esta dificultad no se relaciona con errores de los niños y niñas, sino que se trata de un problema del lenguaje que el profesor debe considerar. Otras frases que producen esta misma dificultad de interpretación son, por ejemplo, "el cuadrado de un número más 3", "la mitad de un número menos 8".

El significado de las letras en las expresiones algebraicas implica un cambio en las concepciones previas de niños y niñas de la matemática. En aritmética, con el estudio de los números y las operaciones básicas, cada símbolo tiene un significado establecido, por ejemplo, el 5 tiene siempre el mismo significado. En cambio, en álgebra aparecen variables, denotadas por letras, que pueden adquirir distintos valores.

En el trabajo algebraico también aparecen muchas convenciones que provocan confusión, por ejemplo, la letra x se puede confundir con el símbolo $\times$ usado para la multiplicación. Más aún, las mismas convenciones usadas para evitar esta confusión pueden producir nuevas confusiones. Por ejemplo:

Si 2a significa 2 por a, entonces 6 que es 2 por 3 se puede escribir como 23.

La distributividad del producto con respecto a la suma es una propiedad muy importante, ya que aparece en múltiples contextos en educación básica y media, por lo que se debe estar atento a los errores que se cometen al aplicarla, pues pueden persistir durante muchos años. Ejemplos de errores en el uso de la distributividad son:

$$5\,(xy + 8) = 5x \cdot 5y + 40$$

$$5\,(x + y) = 5x + y$$

Ejercicio

Para cada una de las identidades erróneas anteriores proponga explicaciones válidas y convincentes de su falsedad.

Un error muy arraigado, que se manifiesta en todos los niveles educacionales, incluso en la universidad, se puede ejemplificar con dos errores comunes

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 \text{ y } \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

En estos errores se manifiesta una tendencia a pensar que elevar al cuadrado o extraer raíz (u otras operaciones de este tipo) "respetan" la suma y podemos intercambiar sus roles. Es decir, nos gustaría poder afirmar que "el cuadrado de la suma es la suma de los cuadrados" y "la raíz de la suma es la suma de las raíces" y nos cuesta renunciar a este armonioso equilibrio, que es completamente falso. El futuro profesor debe saber que no basta con haber enseñado muy bien el cuadrado del binomio y las propiedades de las raíces, ni que sus alumnos las hayan aprendido y comprendido a cabalidad. Este error los seguirá tentando y es mejor enfrentarlo con anticipación, advirtiendo de su falsedad y poder de seducción. Tal es la fama de este error que en Estados Unidos, a nivel universitario, le llaman "el sueño del novato".

Otro error que también es muy persistente es suponer que $-x$ es siempre un número negativo, sin importar el valor de x. La manera en que nos referimos verbalmente a $-x$ como "negativo de x" o "menos x" puede causar confusión, dando a entender que estamos buscando un número negativo o un número con signo menos. Este error se puede observar en actividades en que se deben evaluar expresiones algebraicas como la siguiente *Encuentra el valor de $-x$ si $x = -5$* donde muchos responderán que $-x = -5$. Este error también puede surgir si se usan solo números positivos al evaluar expresiones algebraicas, por lo que es importante ver ejemplos en que la evaluación se hace en números negativos y positivos. La propiedad que $-(-x) = x$ también puede provocar confusión, se puede interpretar como "menos por menos da más", lo que puede llevar a pensar que x es siempre positivo.

Con respecto a las potencias, notamos que la definición habitual expresada oralmente puede ser fuente de confusión. Por ejemplo, para explicar qué es 2^4, muchas veces se señala que "es igual a 2 multiplicado 4 veces por sí mismo". Esta definición puede resultar confusa, ya que mezcla la palabra "veces" con la idea de "multiplicar un número por sí mismo". Así, siguiendo esta "definición", se podría concluir que $2^4 = 4 \cdot 2 \cdot 2$. También en el trabajo con potencias se pueden producir, al comienzo, errores más rudimentarios, como por ejemplo $3^2 = 6$, interpretando 3^2 como $3 \cdot 2$.

Con respecto a las raíces, debemos mencionar que se olvida frecuentemente que la raíz cuadrada de un número es siempre positiva, por definición. Muchas veces se confunde el resolver una ecuación con determinar la raíz de un número, por ejemplo, anotar $\sqrt{9} = \pm 3$ basados en el hecho de que tanto $3^2 = 9$ como $(-3)^2 = 9$. Así, se olvida que por definición $\sqrt{b}$ es un número no negativo (positivo o nulo), cuyo cuadrado es b. Por lo tanto, -3 no puede ser raíz de 9.

En expresiones numéricas que contienen potencias se pueden producir errores relacionados con la prioridad en que se realizan los cálculos. Por ejemplo:

$$2 \times 4^2 = 8^2 = 64$$

$$\frac{27^3}{6^2} = \frac{9^3}{2^2}$$

$$6^2 + 6^2 = 12^2 = 144$$

$$5^2 + 3^2 = 8^2$$

$$5^2 - 3^2 = 2^2$$

Otros posibles errores relacionados con el estudio de las potencias tienen que ver con la aplicación de sus propiedades, como los que siguen:

$$5^2 + 5^2 = 5^4$$

$$5^4 - 5^2 = 5^2$$

$$\frac{20^3}{10^2} = 2^1$$

Es raro olvidar que $2^1 = 2$, pero, en cambio, reconocer que donde hay un 2 podemos poner 2^1 se olvida con mayor frecuencia. Esto puede provocar una dificultad al simplificar expresiones como $2 \cdot 2^8 \cdot 2^{-5}$. También puede causar confusión el uso de exponentes que son, a su vez, potencias, y así confundir 5^{3^2} con 5^6.

Otra fuente de error son las frases generales que son ciertas, excepto en situaciones especiales, que se olvidan o no se recuerdan con la misma fuerza. Por ejemplo, si se repite la frase: "todo número elevado a cero es 1", y no se hace la salvedad de que esos posibles números no incluyan al cero, esta excepción tiende a olvidarse y se puede llegar a pensar que $0^0=1$.

Ejercicios de la sección

1. En una prueba aparece la siguiente pregunta:

   Simplifica la siguiente expresión algebraica: $5(x + 1) - 2x$.

   Proponga tres alternativas de respuesta a la pregunta, que pueden ser errores observables en las respuestas de alumnos y, por tanto, funcionar como un buen distractor.

2. Una persona dice que $(-x)^3$ es siempre un número negativo. ¿Por qué podría estar haciendo esta afirmación?

3. Considere el siguiente desarrollo de un estudiante:

   $$5 - (2 + x) = 5 - 2 + x$$

   ¿Por qué podría estar cometiendo este error?

4. Qué distractores propondría para las siguientes preguntas:

   a. Simplifique $\sqrt{(-4)^2}$
   b. Calcule el valor de 2^{2^3}
   c. Simplifique $8^2 + 7^2$

Capítulo

II

Ecuaciones e inecuaciones

Introducción

A nivel escolar, el trabajo más intenso con expresiones algebraicas mayoritariamente ocurre en la resolución de ecuaciones. En este trabajo inciden muchos aspectos, por ejemplo, trabajar con letras, plantear ecuaciones a partir de problemas e interpretar la solución en términos del problema original. La tarea de plantear una ecuación para describir la situación que se presenta en un problema, puede ser mucho más difícil que resolverla. Describir o modelar situaciones mediante expresiones algebraicas, como hicimos en el capítulo anterior, es una tarea cuyo interés e importancia seguirán presentes en este capítulo.

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas donde las variables juegan un rol especial, pues mediante la ecuación se plantea la pregunta acerca de para cuáles valores de esas variables la igualdad es verdadera. Resolver una ecuación significa encontrar esos valores o números desconocidos. Debido al rol que juegan las variables en las ecuaciones, las llamaremos *incógnitas*.

Una idea clave en la resolución de ecuaciones es transformar una ecuación en otra más simple que tenga las mismas soluciones. Las manipulaciones que deberemos hacer para este propósito se basan en el uso de las propiedades de la igualdad. En este capítulo, abordaremos el estudio de estas propiedades y el uso de ellas en la resolución de ecuaciones y sistemas.

También estudiaremos en detalle las ecuaciones lineales de una incógnita, que son aquellas que se pueden transformar a una del tipo $ax + b = 0$, donde x denota la incógnita y a, b son números conocidos. Abordaremos el tránsito desde problemas aritméticos a ecuaciones y estudiaremos una variedad de representaciones basadas en modelos físicos y diagramas que permiten plantear y resolver ecuaciones. Con ello, queremos conectar los métodos algebraicos con el desarrollo de estrategias múltiples y pertinentes al problema que se desea resolver, además de mantener presente el sentido de los procedimientos, cuyos propósitos podrían oscurecerse en complejidades puramente técnicas. Esto también muestra cómo un razonamiento algebraico intuitivo, pero riguroso, permite a niños en niveles escolares iniciales, modelar matemáticamente, plantear y resolver ecuaciones, mucho antes de su formalización algebraica.

En este capítulo, también estudiaremos sistemas de ecuaciones lineales, mostrando que su resolución algebraica obedece a las mismas ideas que la resolución de ecuaciones. También estudiaremos las ecuaciones cuadráticas, su interpretación geométrica y su resolución. Finalmente, abordaremos el estudio de las inecuaciones, que son desigualdades entre expresiones algebraicas. Discutiremos en detalle las propiedades de la desigualdad, las cuales sustentan los procedimientos de resolución.

1. Las ecuaciones y la igualdad

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas, por ejemplo: $2x + 3y = 5$, $x + 3 = 9 - x$, $x^2 = 9x$ son ecuaciones. Al escribir una ecuación nos referimos a los valores de la o las incógnitas que hacen que la igualdad sea verdadera. El sentido de la igualdad en una ecuación no es el mismo que cuando decimos $2 + 3 = 5$, sino que se debe entender como una frase que puede ser cierta o falsa, dependiendo del valor que tienen las incógnitas. Por ejemplo, cuando $x = 1$, la igualdad $3x - 9 = 0$ es falsa, mientras que si $x = 3$, es verdadera.

Otro tipo de igualdades que involucran expresiones algebraicas son las identidades (estudiadas en el apartado I.1.5). En este caso, la igualdad entre las expresiones siempre es cierta, por ejemplo, $a + b = b + a$ se cumple para todos los números a y b. Esto no ocurre si escribimos la ecuación $a + b = 0$. El sentido en que se entiende la igualdad depende del contexto.

Al igual que cuando trabajamos con expresiones algebraicas, la elección de las letras usadas para denotar la o las incógnitas en una ecuación no es relevante. Así, si escribimos $2x + 3 = 4(x - 2)$ o $2b + 3 = 4(b - 2)$, estamos denotando la misma ecuación. Usualmente, en el trabajo con ecuaciones con una incógnita se usa la letra x para denotarla, pero si la ecuación proviene de un problema, se usan letras que tengan algún sentido en el contexto. Por ejemplo, si la incógnita es el perímetro de una figura, podemos denotar la incógnita como p. Por supuesto que darle otro nombre también es correcto.

Definición II.1 Aquellos valores de la o las incógnitas que al sustituirlos en una ecuación hacen que la igualdad sea cierta, se llaman soluciones de la ecuación. Resolver una ecuación significa encontrar todas sus soluciones.

Las ecuaciones pueden no tener solución, por ejemplo, $y - 2 = y - 3$ no tiene ninguna solución, ya que la igualdad nunca es cierta. También, hay ecuaciones que tienen más de una solución, por ejemplo $x^2 = 9$ tiene como solución a 3 y -3, y $2x + 3y = 5$ tiene infinitas soluciones.

Para pensar

Se puede interpretar la identidad $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ también como una ecuación. ¿Cuáles serían sus soluciones?

Ejercicios

1. Explique por qué la ecuación $2x + 3y = 5$ tiene infinitas soluciones.

2. Verifique si $x = -3, -1, -1/2, 0, 1/3, 1, 2, 3$ son soluciones de las siguientes ecuaciones:

   a. $x^2 + 4x = 5$

   b. $x(x - 1)(x + 5) = 0$

   c. $n^2 + 2n = 3n$

   d. $3(x - 1) + 5 = 3x - 7$

   e. $3x + 1 = 2x$

Muchas veces es posible encontrar soluciones de ecuaciones probando números (prueba y error), sin embargo, este tipo de procedimiento no nos permite decir si hemos encontrado todas las soluciones de una ecuación. Para resolver ecuaciones, es crucial hacer uso de propiedades de la igualdad, que nos permiten transformar una ecuación en otra más sencilla que tenga las mismas soluciones. Enunciaremos propiedades fundamentales de la igualdad y otras que se derivan de ellas, las que usaremos extensivamente en la resolución de ecuaciones.

1.1 Propiedades de la igualdad

En esta sección, estudiaremos distintas propiedades de la igualdad que hemos usado muchas veces y nos parecen muy naturales. Sin embargo, necesitaremos hacer uso de ellas en procedimientos de resolución algebraica de ecuaciones que no son directos ni fáciles, y será muy importante poder argumentar con total certeza acerca de la validez de las manipulaciones que haremos y de la legitimidad de nuestras conclusiones. Por este motivo, hemos reunido las propiedades fundamentales de la igualdad que nos servirán en lo que sigue, discutiendo sus usos y las conclusiones que de ellas se derivan.

Propiedades fundamentales de la igualdad

Sean a, b y c números reales. Entonces se cumple que:

1. $a = b$ es lo mismo que $b = a$.
2. Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.
3. Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.
4. Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$.

Como estas propiedades son importantes y haremos un uso intensivo de ellas, las discutiremos en profundidad.

Propiedad 1 Sean a y b números reales, $a = b$ es lo mismo que $b = a$.

La **propiedad 1**, llamada *simetría* de la igualdad, es usada cada vez que intercambiamos el lado derecho e izquierdo de una igualdad. Por ejemplo, nos dice que $2 + 3 = 5$ es lo mismo que $5 = 2 + 3$, lo que nos parece bastante obvio. Pero no siempre la reconocemos en contextos más complejos y hasta damos distintos nombres a la misma igualdad dependiendo de qué lado del signo igual ponemos las expresiones. Por ejemplo, cuando escribimos

$$3(x + y) = 3x + 3y$$

decimos que aplicamos la propiedad distributiva. En cambio, si escribimos

$$3x + 3y = 3(x + y)$$

decimos que hemos *factorizado*. Sin embargo, en ambos casos hemos escrito exactamente lo mismo.

Propiedad 2 Sean a, b y c números reales, si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

La **propiedad 2**, llamada *transitividad* de la igualdad, también es ampliamente usada. Por ejemplo, esta propiedad nos dice que si $a = b$ y $b = 4$, entonces $a = 4$, lo que muchas veces escribimos como $a = b = 4$. Igual que en el caso anterior, dependiendo del contexto puede resultar menos fácil reconocer este razonamiento. Por ejemplo, si escribimos las dos igualdades siguientes, una bajo la otra, como acostumbramos a hacerlo en el proceso de resolución de ecuaciones,

$$x + 2 = 5$$

$$x + 2 = 3 + 2$$

la forma en que estamos razonando es la siguiente:

tenemos que $x + 2 = 5$ y como $5 = 3 + 2$, entonces $x + 2 = 3 + 2$.

Es decir, sin explicitarlo, al pasar de una fila a la siguiente hemos usado la **propiedad 2**. En general, cada vez que escribimos cadenas de igualdades, que pueden ser bastante más largas que la del ejemplo, estamos usando la propiedad de transitividad, aunque no lo explicitemos.

Propiedad 3 Sean a, b y c números reales, si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

En el contexto de ecuaciones, esta propiedad dice que si sumamos el mismo número a ambos lados de una ecuación, entonces se mantendrá la igualdad. Por ejemplo:

si $2a - 3 = 7$, entonces $(2a - 3) + 3 = 7 + 3$.

Notemos que esta última ecuación dice en realidad que $2a = 10$ (¿por qué?). La ecuación $2a = 10$ es más simple de resolver que $2a - 3 = 7$. Habitualmente, usaremos esta propiedad en el proceso de resolver ecuaciones, donde buscamos llegar a ecuaciones cada vez más sencillas.

Ejercicio

Demuestre, usando las propiedades de las operaciones y la igualdad, por qué se tiene que si $(2a - 3) + 3 = 7 + 3$, entonces $2a = 10$.

También es cierta la propiedad recíproca, es decir:

si a, b y c son números reales y $a + c = b + c$, entonces $a = b$.

De hecho, para demostrarla usaremos la misma **propiedad 3**. Haremos explícitos todos los pasos de la demostración de esta propiedad, para mostrar cómo las propiedades fundamentales de la igualdad se usan aun en las deducciones más simples.

Si $a + c = b + c$, entonces la **propiedad 3** nos asegura que podemos sumarle cualquier número a ambos lados de la igualdad y esta se conservará. Esto nos autoriza a sumar a ambos lados el inverso aditivo de c, es decir, el número $(-c)$, con lo cual tendremos:

$$(a + c) - c = (b + c) - c.$$

Por la asociatividad de la suma, sabemos que $(a + c) + (-c) = a + (c + (-c))$.

Como $c + (-c) = 0$ podemos sumar a a ambos lados de la igualdad, debido nuevamente a la **propiedad 3**, para obtener que $a + (c + (-c)) = a + 0$. Usando transitividad (**propiedad 2**) obtenemos

$$(a + c) + (-c) = a + 0.$$

Como 0 es el elemento neutro de la suma, $a + 0 = a$, y usando transitividad nuevamente, tenemos que $(a + c) + (-c) = a$.

Razonando del mismo modo, obtenemos que:

$$(b + c) + (-c) = b.$$

Finalmente, como $(a + c) + (-c) = (b + c) + (-c)$, $(a + c) + (-c) = a$ y $(b + c) + (-c) = b$ usando la transitividad obtenemos que $a = b$.

La demostración de esta propiedad muchas veces se presenta a través de la siguiente cadena de igualdades:

$$a + (c + (-c)) = b + (c + (-c))$$

$$a + 0 = b + 0$$

$$a = b.$$

Como vimos en nuestra demostración, el paso de una línea a la otra está justificado por las propiedades de la igualdad y de las operaciones. Así demostramos, justificando cada paso, que la recíproca de la **propiedad 3** también es cierta.

Observación:

Los detalles de la demostración anterior muestran que el trabajo de igualdades muchas veces deja cosas implícitas y, por lo tanto, puede producir confusiones. Estas tres líneas de escritura matemática están una bajo la otra sin ninguna palabra que las vincule, como suele verse en muchos ejercicios de resolución de ecuaciones o de problemas numéricos. ¿Cómo se relacionan esas líneas entre sí? ¿Qué significa escribir una línea bajo la otra?

Por convención, cada vez que se escribe una cadena de igualdades, una bajo la otra, significa que cada igualdad se deduce de la anterior por medio de un razonamieto, usando propiedades matemáticas. Por lo tanto, si la primera igualdad es cierta, entonces la segunda también; si la segunda igualdad es cierta, la tercera también lo es y así sucesivamente. Así, si la primera igualdad es cierta, la última también lo es. Para indicar que una igualdad se deduce de la otra, se dice: "como ..., entonces...", por ejemplo: como $a + (c + (-c)) = b + (c + (-c))$ entonces $a + 0 = b + 0$, pues $c + (-c) = 0$.

Muchas veces estas cadenas son reversibles, es decir, se puede deducir en orden inverso, en ese caso, es necesario indicarlo. Se debe tener precaución, pues muchas veces en este tipo de razonamientos algunas de las deducciones no son reversibles, como veremos en ejemplos más adelante.

Una vez que hemos comprendido la manera en que se usan las propiedades de la igualdad y las operaciones en los razonamientos con igualdades, y que podamos realizarlos con fluidez y seguridad en nuestros desarrollos, no es necesario explicitar con tanto detalle cada paso. Solo lo hemos hecho para hacer ver la importancia y utilidad de las propiedades listadas, y también para aumentar nuestra conciencia acerca de formas de escribir ampliamente usadas que dejan muchas cosas importantes sin explicitar y que, por consiguiente, pueden ser fuente de errores, especialmente para quienes se encuentren aprendiendo álgebra.

Ejercicios

1. Explique la siguiente cadena de igualdades, explicitando las deducciones necesarias:

$$a = b$$
$$a + 0 = b + 0$$
$$a + (c + (-c)) = b + (c + (-c)).$$

Explique por qué esta cadena de igualdades es reversible.

2. Resuelva la siguiente ecuación usando las propiedades 1, 2 y 3 de la igualdad y las propiedades de las operaciones:

$$x + (x - 8) = x + 4.$$

Si en el procedimiento anterior se reemplaza $x = 12$ en cada paso, ¿qué pasa? ¿por qué?

Propiedad 4 Sean a, b y c números reales, si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$.

La **propiedad** 4 también parece muy natural, si pensamos en ejemplos como "si $a = 3$, entonces $3a = 9$". Pero no resulta tan fácil reconocerla en frases como:

$$\textit{si } 6x = 9 \textit{ entonces } \frac{1}{6}6x = \frac{1}{6}9.$$

Notemos que la última ecuación es en realidad $x = \frac{9}{6}$ (¿por qué?).

¿Será cierta la propiedad recíproca, es decir si $a \cdot c = b \cdot c$, entonces $a = b$?

La respuesta es que no podemos concluir esto, a menos que sepamos que $c \neq 0$. Por ejemplo, $5 \cdot 0 = 4 \cdot 0$, pero no es cierto que $5 = 4$.

Solo si $c \neq 0$, existe el número $\frac{1}{c}$, el inverso multiplicativo de c, y podremos usar la **propiedad** 4 para concluir que si $a \cdot c = b \cdot c$, entonces $a = b$. Para esto notamos que:

$$\text{si } a \cdot c = b \cdot c, \text{ entonces } a \cdot c \cdot \frac{1}{c} = b \cdot c \cdot \frac{1}{c},$$

lo que implica que $a \cdot 1 = b \cdot 1$, de lo que concluimos que $a = b$.

A partir de las propiedades 1, 2, 3 y 4 de la igualdad, podemos demostrar dos propiedades adicionales.

Propiedad 5 Sean a, b, c y d números reales, si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.

Esta propiedad nos permite sumar dos igualdades, para obtener una tercera igualdad. Por ejemplo, si $a = 5$ y $c = 3$, entonces $a + c = 5 + 3$. Para probar la **propiedad** 5, observamos que por la **propiedad** 3 tenemos que si $a = b$, entonces $a + c = b + c$. Del mismo modo, si $c = d$, entonces $c + b = d + b$. Como $c + b = b + c$ y $d + b = b + d$ por la conmutatividad de la suma, concluimos usando la transitividad (**propiedad** 2) que $a + c = d + b$, que es lo que queríamos probar.

Una pregunta natural es si se cumple la recíproca de la **propiedad 5**. Es decir, si será cierto que:

para a, b, c y d números reales, si $a + c = b + d$, entonces $a = b$ y $c=d$.

Esta propiedad no es cierta en general, pues se pueden encontrar números para los cuales se cumpla que $a + c = b + d$ y no sea cierto que $a = b$ y $c = d$. Por ejemplo, si $a = 5$, $c = 3$, $b = 4$, $d = 4$, se tiene que $5 + 3 = 4 + 4$, pero $5 \neq 4$ y $3 \neq 4$.

La **propiedad 5** es muy usada cuando queremos resolver más de una ecuación simultáneamente, que es lo que se denomina un *sistema de ecuaciones*. Abordaremos esto en el próximo apartado.

Propiedad 6 Sean a, b, c y d números reales, si $a = b$ y $c = d$, entonces $a \cdot c = b \cdot d$.

Usando directamente esta propiedad, podemos decir que si $5 = x$, entonces $25 = x^2$. La demostración de esta propiedad queda de ejercicio al lector.

A continuación, resumiremos las propiedades de la igualdad agregando las propiedades recíprocas que demostramos.

En resumen

La igualdad tiene las siguientes propiedades, las cuales se usan en la resolución de ecuaciones.
Sean a, b, c y d números reales, entonces:

1) $a = b$ es lo mismo que $b = a$.
2) Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.
3) Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$. Recíprocamente, si $a + c = b + c$, entonces $a = b$.
4) Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$. Si $a \cdot c = b \cdot c$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$.
5) Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.
6) Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a \cdot c = b \cdot d$.

Ejercicios

1. Demuestre la **propiedad 6**.

2. Analice la validez de la afirmación recíproca a la **propiedad 6**. Recuerde que para justificar que es cierta una afirmación, debemos argumentar usando las propiedades establecidas previamente. Para justificar que es falsa, basta mostrar un contraejemplo.

3. Detalle las propiedades que le permiten pasar de una línea a la siguiente, en el desarrollo que sigue:

$$
\begin{gathered}
2x + 3 = 5 \\
(2x + 3) + (-3) = 5 + (-3) \\
2x + (3 + (-3)) = 2 \\
2x = 2 \\
x = 1
\end{gathered}
$$

4. Si $a = b$, ¿puede concluir que $a^2 = b^2$? ¿será verdadera la recíproca? Argumente con las propiedades establecidas o con contraejemplos.

5. Un alumno que quiere calcular la edad de María, de la cual se sabe que es 10 años menor que Pedro, cuya edad es el doble que la suma de las edades de sus primas Rocío y Sofía, de 3 y 8 años respectivamente, escribió:

$$3 + 8 = 11 \cdot 2 = 22 - 10 = 12.$$

¿Cuál es el error del procedimiento realizado?

1.2 Uso de las propiedades de la igualdad en la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones

La clave en la resolución de ecuaciones consiste en transformarlas, usando las propiedades de la igualdad, en ecuaciones más simples, de tal manera que las soluciones sigan siendo las mismas. Notamos que si usamos las propiedades 3 y 4, con la precaución de no multiplicar o dividir por cero, siempre obtenemos una ecuación que tiene las mismas soluciones.

Definición II.2 Dos ecuaciones se dirán equivalentes si es posible transformar una en la otra y viceversa, usando las propiedades de la igualdad. Si dos ecuaciones son equivalentes, entonces cualquier solución de una de ellas será solución de la otra.

Cuando manipulamos una ecuación usando las propiedades 3 y 4, sin multiplicar o dividir por cero, obtenemos una ecuación equivalente. Por ejemplo, la ecuación $3x + 3 = x - 5$ es equivalente a $2x + 3 = -5$, pues sumamos $-x$ a ambos lados, la cual es equivalente a $2x = -8$, al sumar -3 a ambos lados. Finalmente, esta última ecuación es equivalente a $x = -4$, pues multiplicamos ambos lados por $\frac{1}{2}$. Así, $3x + 3 = x - 5$ es equivalente a $x = 4$, y ambas tendrán las mismas soluciones, en este caso, evidentemente es $x = 4$. Esta cadena de igualdades muchas veces se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} 3x + 3 &= x - 5 \quad /-x \\ 2x + 3 &= -5 \quad /-3 \\ 2x &= -8 \quad / \cdot \frac{1}{2} \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Observamos que, en esta cadena de ecuaciones, cada ecuación es equivalente a la anterior y, por lo tanto, son todas equivalentes entre sí; en particular, la primera ecuación es equivalente a la última.

Ejercicio

Explique cada uno de los pasos del siguiente desarrollo usado para resolver la ecuación $3x-\frac{1}{2}=x+4$, indicando en qué propiedades de la igualdad se sustentan.

$$\begin{aligned} 3x-\frac{1}{2} &= x+4 \\ 3x &= x+\frac{9}{2} \\ 2x &= \frac{9}{2} \\ x &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo

Resolvamos la ecuación $\frac{1}{x-5}=1$. Partimos notando que $x \neq 5$, pues sino la expresión no tiene sentido. Por lo tanto, si multiplicamos la ecuación por $(x-5) \neq 0$, obtendremos la ecuación equivalente $1 = x - 5$, de donde obtenemos $x = 6$.

No siempre es evidente cómo evitar la división por cero, ya que cuando dividimos por una expresión se debe suponer que la expresión no es cero y luego considerar qué pasa si dicha expresión es cero. Por ejemplo, resolvamos la ecuación:

$$x^2 = 3x.$$

Si consideramos $x \neq 0$, podemos dividir ambos lados por x, obteniendo:

$$x = 3$$

que es solución de la ecuación original. Si $x = 0$, entonces $x^2 = 0 = 3x$, por lo tanto, $x = 0$ también es solución. Si hubiésemos dividido la ecuación, sin preocuparnos de que $x \neq 0$, habríamos encontrado que $x = 3$, olvidándonos de la solución $x = 0$.

Si bien se pueden hacer discusiones por casos para resolver una ecuación, es preferible evitarlo, siempre que sea posible. Podríamos haber resuelto la misma ecuación $x^2 = 3x$ como sigue:

$$\begin{aligned} x^2 &= 3x \quad /-3x \\ x^2-3x &= 0 \\ x(x-3) &= 0. \end{aligned}$$

Notamos que en el último paso se usó la propiedad distributiva. La última ecuación es equivalente a la primera, y puede ser resuelta usando la siguiente propiedad de la multiplicación:

*si **a** y **b** son números reales y **ab** = 0, entonces **a** = 0 o **b** = 0,*

la cual enunciaremos como teorema y demostraremos a continuación. Usando esta propiedad, tenemos que si $x(x-3) = 0$, entonces $x = 0$ o $x - 3 = 0$; es decir, $x = 3$, y así 3 y 0 son las soluciones de esta ecuación.

Teorema II.1

Si a y b son números reales y $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Demostración:

Haremos la demostración distinguiendo casos. Si $a \neq 0$, entonces por la **propiedad** 4 de la igualdad podemos multiplicar ambos lados de la igualdad $ab = 0$ por $\frac{1}{a}$ y obtener que $b = 0$. Similarmente, si $b \neq 0$, obtenemos que $a = 0$. Si ocurre que simultáneamente $a = 0$ y $b = 0$, entonces también es cierto lo que queríamos probar: $a = 0$ o $b = 0$.

Para pensar

Una persona resuelve la ecuación $x(x-2) = 4$ razonando de la siguiente manera:

Como $x(x-2) = 4$, *entonces* $x = 2$ *o* $x - 2 = 2$, *o sea* $x = 4$, *las soluciones son* $x = 2$ y $x = 4$.

Las soluciones encontradas claramente son incorrectas. ¿Por qué cree que la persona razonó de esta manera? ¿qué propiedad está usando incorrectamente?

Ejercicios

1. Verifique si los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes, justifique cada una de sus respuestas:

   a. $2x - 3 = 5x + 8$; $\quad 2x = 5x + 5$

   b. $2x^2 + x^3 = 3x$; $\quad 2x + x^2 = 3$

   c. $z^2 + 2z + 1 = 0$; $\quad z + 1 = 0$

   d. $(x^2 - 1)(2x + 1) = 0$; $\quad (x - 1)(2x + 1) = 0$

   e. $\frac{2x-1}{x^2+1} = 5$; $\quad -6 = 5x^2 + 2x$

   f. $(z - 5)(z + 6) = z + 6$; $\quad z - 7 = 0$

   g. $t + 2(t - 1) = 3t + 5$; $\quad 9 = 0$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones justificando los pasos realizados. En particular, explique por qué las soluciones encontradas son todas las soluciones de la ecuación.

   a. $y + 3 = 3y + 4$

   b. $x + \sqrt{3} = 2x - 1$

   c. $(z - 2)^2 = (z - 2)$

   d. $\frac{1}{4}(x-5) = (x-5)^2$

   e. $x^2(x - 1) = 0$

   f. $a(a^2 - 1) = a^2(a^2 - 1)$

También las propiedades de la igualdad son clave para resolver ecuaciones simultáneas que involucran dos (o más) cantidades desconocidas. Los sistemas surgen de manera muy natural, ya que muchas veces en los problemas se presentan situaciones en las que hay más de una cantidad desconocida (incógnita) que se desea determinar. Consideremos el siguiente problema:

Sofía y Tomás tienen 37 bolitas entre los dos. Sofía tiene una bolita más que el doble de las Tomás, ¿cuántas bolitas tiene cada uno?

Este problema, como muchos otros, involucra determinar más de una incógnita, y es posible describir una de ellas en función de la otra. Si s y t denotan el número de bolitas de Sofía y Tomás, respectivamente, entonces:

$$s + t = 37 \text{ y } s = 2t + 1.$$

Para determinar el número de bolitas de Sofía y el de Tomás, debemos encontrar una solución de este sistema, es decir, valores de s y t que satisfagan simultáneamente ambas ecuaciones. En general, los sistemas se denotan usando una llave que une ambas ecuaciones, para enfatizar que ambas ecuaciones deben satisfacerse al mismo tiempo:

$$\begin{aligned} s + t &= 37, \\ s &= 2t + 1. \end{aligned}$$

Para resolver el sistema, procederemos de la misma manera como abordamos la resolución de una ecuación: manipulando el sistema y usando las propiedades de la igualdad, de manera de obtener un sistema más simple equivalente al anterior.

Definición II.3 Dos sistemas de ecuaciones se dicen equivalentes si es posible transformar uno en el otro y viceversa, usando las propiedades de la igualdad. Si dos sistemas de ecuaciones son equivalentes, entonces cualquier solución de uno de ellos será solución del otro.

Ejemplo

Resolvamos el sistema anterior:

$$\begin{aligned} s + t &= 37 \\ s &= 2t + 1 \end{aligned}$$

Una manera de proceder es sustituir la expresión $s = 2t + 1$ en la primera ecuación, obteniendo que $(2t + 1) + t = 37$.

Esto se puede hacer, pues si sumamos t a ambos lados de la ecuación $s = 2t + 1$, obtenemos que $s + t = (2t + 1) + t$, luego, por transitividad $(2t + 1) + t = 37$, es decir, $3t + 1 = 37$. De esta ecuación, obtenemos que $t = 12$ (explique por qué) y como $s = 2t + 1$, obtenemos que $s = 25$.

Podemos verificar fácilmente que $t = 12$ y $s = 25$ es solución del sistema original, sin embargo, es necesario mostrar que en realidad ambos sistemas son equivalentes, ya que podría pasar que el sistema original tuviese otra solución adicional.

Ejercicio

Demuestre que los sistemas:

$$\begin{aligned} s+t&=37 \\ s&=2t+1 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} 3t+1&=37 \\ s&=2t+1 \end{aligned}$$

son equivalentes. Para esto, puede explicar cómo usar las propiedades de la igualdad para deducir el primer sistema partiendo del segundo, o verificar que las manipulaciones realizadas para deducir el segundo sistema a partir del primero son reversibles.

Veamos otro ejemplo. Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+y&=20, \\ x-y&=10. \end{aligned}$$

la **propiedad** 5 nos permite deducir que:

$$(x+y)+(x-y)=30.$$

Sumando los términos del lado izquierdo, se tendrá finalmente $2x$ y, por lo tanto, se ha obtenido la ecuación:

$$2x=30$$

de la cual obtenemos $x = 15$, usando la **propiedad** 4. Para obtener el valor de y podemos sustituir $x = 15$ en la primera ecuación y obtener que $15 + y = 20$, de donde $y = 5$ por la **propiedad** 3.

Ejercicio

¿Qué propiedades de la igualdad se usan para obtener que si $x = 15$ y $x + y = 20$, entonces $15 + y = 20$?

Para pensar

Explique, usando las propiedades de la igualdad, por qué los siguientes sistemas son equivalentes:

$$\begin{aligned} x+y&=20 \\ x-y&=10 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} x+y&=20 \\ 2x&=30 \end{aligned}$$

Es importante enfatizar que no hay métodos que funcionen para resolver ecuaciones de cualquier tipo. En las secciones que siguen, nos enfocaremos en dos tipos de ecuaciones con una sola incógnita: las lineales que son del tipo $ax + b = 0$ con a y b números conocidos, y las cuadráticas, que son de la forma $x^2 + bx + c = 0$ con b y c números conocidos; y también estudiaremos los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. En estos casos, abordaremos cómo resolver este tipo de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, analizando sus soluciones y también su uso al resolver problemas de contexto.

Ejercicios

1. Resuelva las siguientes ecuacionesjustificando el procedimiento usado:

   a. $2\,(x + 4) + 5x = x - 5$

   b. $2a + 8 = 3\,(a - 5) + a$

   c. $2x^2 + x = 0$

   d. $(x^2 + 8x)\,(2x - 4) = 0$

   e. $b^3 - b^2 = 0$

2. Un niño dice que la ecuación $3t + 5 = 2(t - 1) + t$ está mala, pues al trabajar con ella llega a que $7 = 0$. ¿Cuál cree que fue el procedimiento que usó el niño? ¿por qué cree que afirma que la ecuación está mala?

3. Resuelva los siguientes sistemas explicando el procedimiento usado:

   a. $\begin{array}{l} 2x + 4y = 6 \\ x - 5y = -3 \end{array}$

   b. $\begin{array}{l} -2x = 4 \\ 4x + y = 19 \end{array}$

   c. $\begin{array}{l} x = y^2 \\ x + y = 0 \end{array}$

   d. $\begin{array}{l} x - y^2 = 1 \\ y^2 + 2x = 8 \end{array}$

   e. $\begin{array}{l} x + y^2 = 1 \\ y^2 + 2x = 8 \end{array}$

En resumen

- El uso de las propiedades de la igualdad y las operaciones es clave para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones.
- Al transformar una ecuación para resolverla de manera más sencilla, debemos preocuparnos de que la ecuación final sea equivalente a la inicial, para así no perder soluciones.
- Si manipulamos una ecuación haciendo uso de las propiedades 3 y 4, con la precaución de no multiplicar o dividir por cero, obtenemos una ecuación equivalente.
- Cuando se resuelven sistemas también se debe verificar que al manipular las ecuaciones se obtenga un sistema equivalente.

Ejercicios de la sección

1. Resuelva las siguientes ecuaciones justificando el procedimiento usado:

   a. $3x - 1 = 4{,}5$

   b. $2(t - 1) + 5 = 4(t + 1) - 3$

   c. $3(x - 1) + 5 = x + 1 + 2(x + 1)$

   d. $3x(x - 1)(x + 1) + 3x = 3x$

   e. $\dfrac{x+1}{x-1} = 2$

   f. $\dfrac{2x}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$

   g. $\dfrac{1}{x} - x = \dfrac{1+x^2}{x}$

   h. $x(1 - x) - x = x^2$

   i. $(x - 1)(x + 1) = 1$

2. Una niña dice que no se puede resolver la ecuación $3(x - 1) + 1 = 3x - 2$ ni la ecuación $4x - 8 = 2(2x - 3)$, ya que "se van las x". ¿Qué es lo que ocurre en cada situación?¿por qué cree que estas ecuaciones pueden provocar problemas al resolverlas?

3. Una persona dice que las soluciones de la ecuación

$$\frac{x+1}{x+4} = \frac{3}{7}$$

   son $x = 2$ y $x = 3$, lo que es claramente incorrecto. ¿Por qué cree usted que la persona razonó de esa manera? ¿qué propiedad está usando incorrectamente? Resuelva esta ecuación, explicando detalladamente el procedimiento realizado.

4. Discuta si las siguientes ecuaciones son equivalentes:

   a. $2x + 3(x + 3) = 5$ y $2x = 5 - 3x - 3$

   b. $t(t - 1)(t - 2) = 2(t - 2)$ y $t(t - 2)(t - 3) = 0$

   c. $(t - 5)3 = 0$ y $2t - 5 = \mathrm{t}$

   d. $(t^3 + 5t^2 + 6t + 5) = 0$ y $(t^2 + 1)(t^3 + 5t^2 + 6t + 5) = 0$

5. Para cada una de las siguientes ecuaciones o sistemas de ecuaciones, escriba un problema de contexto que pueda ser descrito a través de la ecuación o sistema, según corresponda:

   a. $n + (n + 28) = 4n$

   b. $n + (n - 1) + (n - 2) = 27$

   c. $\dfrac{x(x-1)}{2} = 8$

   d. $\begin{array}{l} a = 3b + 4 \\ a - b = 6 \end{array}$

   e. $\begin{array}{l} a = 3b \\ 2(a + b) = 54 \end{array}$

2. Ecuaciones lineales

Las ecuaciones que estudiaremos en esta sección son lineales y con una sola incógnita. Esto significa que la incógnita, que en general denotaremos como x, aparece solo multiplicada por algún número y sumada o restada de otros números; por ejemplo, nunca aparece elevada a una potencia (distinta de 1). En síntesis, las ecuaciones lineales que estudiaremos son aquellas equivalentes a la ecuación:

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números dados.

Por ejemplo, la ecuación:

$$2x - 8 = 0$$

tiene esta forma y su solución es bastante directa, por los números involucrados. Simplemente, "salta a la vista" que solo para $x = 4$ la igualdad es verdadera.

La forma en que se presenta una ecuación lineal ofrecerá distintos niveles de dificultad para su resolución y, por lo tanto, se trata de un asunto relevante a la hora de abordar la enseñanza de ellas. Aun tratándose de ecuaciones equivalentes, los niños y niñas tendrán dificultades muy distintas al resolver las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x &= 8 \\ 2x - 8 &= 0 \\ 3x - 2 &= x + 6 \\ 3(x - 4) &= x - 4 \\ 4(x - 3) &= 2(x - 3) + 2 \end{aligned}$$

Ejercicio

Explique por qué todas las ecuaciones anteriores son equivalente mostrando cada uno de los procedimientos que permiten transformar una ecuación en otra.

Las ecuaciones lineales que estudiaremos provienen, generalmente, de problemas en contexto, cuya traducción al lenguaje algebraico, lo que genera la ecuación, es parte importante de la tarea matemática. Las 5 ecuaciones equivalentes que listamos antes no solo ofrecen distintos grados de dificultad para su resolución. Si ellas provienen de problemas en contexto, entonces representarán relaciones con distintos grados de complejidad.

2.1 De lo aritmético a lo algebraico

A niveles escolares básicos, ya aparecen ejercicios donde hay que plantear y resolver ecuaciones, aunque no se utilice el lenguaje algebraico. El problema de plantear una relación entre números, donde hay una cantidad desconocida que se debe determinar para hacer verdadera una igualdad, es una tarea a la que niños de tercero básico han sido expuestos. Por ejemplo, se plantean problemas como:

$$38 = \boxed{} + 12$$

donde la incógnita no está representada por una letra, sino por un casillero vacío que se pide completar.

Esta manera de representar incógnitas es usada desde los primeros niveles escolares. Por ejemplo, en el estudio de las operaciones se establecen relaciones entre tres números en ejercicios como los que siguen:

$$3 + \square = 5$$

$$3 = 5 - \square$$

$$\square + 2 = 5$$

$$2 = 5 - \square$$

y también con multiplicaciones y divisiones:

$$3 \times \square = 15$$

$$3 = 15 : \square$$

$$\square : 3 = 5$$

$$15 = 5 \times \square$$

A partir de este tipo de prácticas, se desarrolla cierto sentido numérico que se aplica posteriormente en la resolución de ejercicios del tipo:

$$13 - 5 = \square - 3.$$

Las dificultades con el uso del signo igual aparecen en estos ejercicios. En el ejercicio anterior, es común el error de escribir 8 o 5 en el recuadro.

Para pensar

Conjeture el tipo de razonamiento que puede llevar a niños y niñas a escribir 8 o 5 en el recuadro del ejercicio anterior.

Este tipo de ejercicio sirve a muchos propósitos. En primer lugar, contribuirá a liberar al signo igual de su primer uso escolar, el de servir como instrucción para poner el resultado de una operación. Aquí, en cambio, el signo igual está usado en una frase que puede ser verdadera o falsa, dependiendo del número que se ponga en el casillero vacío, es decir, como se usa en una ecuación.

En segundo lugar, este ejercicio permitirá que se manifiesten distintas formas de razonar, que se pueden reconocer, valorar y proyectar en otras tareas matemáticas. Por ejemplo, se puede proceder calculando primero el resultado de la operación del lado izquierdo, 8, y luego buscando un número tal que al restarle 3 se obtenga 8, determinando así que es 11 el número buscado. Pero también se puede razonar equilibrando y ajustando ambos lados de la igualdad al mismo tiempo, del modo siguiente:

Si al lado derecho se están restando 2 menos que al lado izquierdo, entonces, para mantener la igualdad, debemos poner en el casillero un número que sea menor en 2 que el 13, que está en ese lugar en el lado izquierdo, es decir, el número 11.

En este procedimiento no fue necesario calcular el resultado de 13 – 5. Esta alternativa puede parecer poco interesante con números pequeños, como los del ejemplo, pero resulta muy útil en ejercicios más complejos y favorece el desarrollo de habilidades de cálculo mental. Por ejemplo, para resolver:

$$192-83=\square-90$$

si razonamos como antes, vemos que en el casillero debe ir un número que exceda en 7 a 192, es decir, debe ir 199. Para esto no fue necesario calcular 192 – 83, sino que se usó una compensación.

Cuando se introducen las ecuaciones es importante tener en cuenta los procedimientos aritméticos que los niños y las niñas conocen desde los cursos iniciales, así como sus formas de razonar y relacionar las operaciones, como en los ejemplos anteriores. Si el problema planteado puede ser resuelto mediante un razonamiento aritmético directo, no se verá la utilidad de complejizarlo diciendo que se busca el valor de una incógnita que satisfaga una ecuación.

Como hemos visto en los ejemplos, antes de introducir el uso de letras podemos resolver ecuaciones, aunque no las nombremos así. Otra manera de introducir incógnitas y ecuaciones, sin el uso de letras, que permite describir ecuaciones más complejas se muestra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo

$\bigstar + \bigstar + \bigstar + 4 = 25$

$\bigstar = ?$

Como 25 = 21 + 4, entonces

$\bigstar + \bigstar + \bigstar + 4 = 21 + 4$ y, por lo tanto, $\bigstar + \bigstar + \bigstar = 21$ de lo que deducimos que $\bigstar = 7$.

En este ejemplo, apareció de manera natural una técnica muy utilizada al resolver ecuaciones, que es *cancelar* el número 4 que aparece sumado a ambos lados de la igualdad, lo que equivale a restarlo de ambos lados, es decir, a utilizar la **propiedad** 3 de la igualdad.

Estos ejercicios, en los que se usan símbolos gráficos para denotar incógnitas, favorecen el desarrollo de razonamientos algebraicos sofisticados que incluso permiten resolver, de manera bastante natural, sistemas de dos ecuaciones, como se muestra en los ejemplos que siguen.

Ejemplos

1) $\triangle + \bigstar = 15$

$\triangle - \bigstar = 5$

$\triangle = ?\ \bigstar = ?$

Usando la **propiedad** 5 de la igualdad, podemos sumar ambas ecuaciones, con lo cual se cancelarán las estrellas del lado izquierdo y se obtendrá:

$\triangle + \triangle + \bigstar - \bigstar = 15 + 5$

$\triangle + \triangle = 20$

De lo que se deduce que $\triangle + \triangle = 20$ y, por lo tanto, $\triangle = 10$.

2) $\blacksquare + \bigcirc = 8$

$\blacksquare + \blacksquare + \blacksquare + \bigcirc + \bigcirc = 19$

$\blacksquare = ?$ $\quad \bigcirc = ?$

Reagrupando en la segunda ecuación las parejas, cuyo valor conocemos de la primera ecuación, obtendremos:

$$\underbrace{\blacksquare + \bigcirc}_{8} + \underbrace{\blacksquare + \bigcirc}_{8} + \blacksquare = 19$$

y, por lo tanto, tenemos que $16 + \blacksquare = 19$, de lo que deducimos que $\blacksquare = 3$. Con este resultado, obtenemos en la primera ecuación que:

$3 + \bigcirc = 8$

de lo que se deduce que

$\bigcirc = 5.$

En estos dos ejemplos se han ilustrado dos procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones que ya se estudiaron de manera algebraica en la sección 1 de este capítulo. La primera de ellas corresponde a sumar las dos ecuaciones para eliminar una incógnita. En el segundo ejemplo se muestra cómo utilizar una sustitución en la otra ecuación para resolver el sistema.

Otro tipo de problemas que se abordan en la enseñanza básica y que ayudan a desarrollar un razonamiento algebraico son aquellos donde se debe encontrar el número desconocido, como el que vemos a continuación:

Tomé un número, lo multipliqué por 5 y luego le resté 7, con lo que obtuve 13. ¿Con qué número partí?

Para describir este tipo de problemas muchas veces se usan los *diagramas de flujo,* como el siguiente:

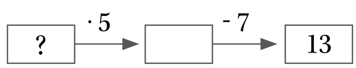


Figura II.1

De aquí resulta fácil ver el diagrama inverso, que permite deshacer el proceso y encontrar el número pedido:

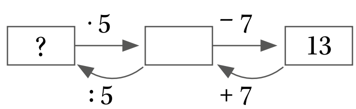


Figura II.2

Es decir, para obtener el número desconocido hay que sumarle 7 a 13, lo que da 20, y luego al dividir este número por 5, encontramos que el número buscado es 4.

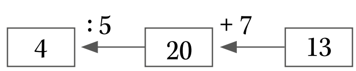


Figura II.3

Este tipo de problema y de diagrama ayudan a enfatizar que para encontrar la solución se debe proceder *deshaciendo* las operaciones realizadas, usando las operaciones inversas. Esta idea también es útil, posteriormente, en la resolución algebraica de ecuaciones.

La aparición de letras que representan números es una de las principales dificultades que los niños y las niñas enfrentan cuando se introduce el estudio del álgebra. Muchas veces esta incógnita y la ecuación en la que participa no están dadas, sino que se deben elegir, de modo de modelar un problema en contexto, planteando una ecuación.

Una de las dificultades que enfrentan los niños es la arbitrariedad de las letras usadas como incógnitas. Por ejemplo, puede no resultar evidente que las ecuaciones:

$$4l = 36$$

$$4x = 36$$

son idénticas y, por lo tanto, tienen la misma solución. Más aún, al plantear ecuaciones a partir de problemas en contexto, también podemos elegir la incógnita misma. Para ilustrar esta libertad en la elección de la incógnita consideremos el problema:

Juan tiene el doble de la edad de su hijo Pedro y la suma de sus edades es 90 años. ¿Cuáles son las edades de Juan y de Pedro?

Si llamamos x a la edad de Pedro, tendremos que la edad de Juan es $2x$ y la ecuación que nos permite encontrar las edades de ambos es:

$$x + 2x = 90$$

cuya solución es $x = 30$. Así, podemos responder que Pedro tiene 30 años y su padre, Juan, tiene 60 años. Si, en cambio, llamamos x a la edad de Juan, tendremos que la edad de Pedro es $\frac{x}{2}$ y la ecuación de la cual obtendremos la respuesta al problema será:

$$\frac{x}{2} + x = 90 .$$

Esta ecuación es distinta a la anterior y su solución será $x = 60$, que también es diferente a la solución previa. Pero la respuesta al problema será la misma: Juan tiene 60 años y su hijo Pedro tiene 30 años.

Como hemos visto, esta libertad para elegir la incógnita que utilizaremos puede producir ecuaciones distintas con distintas soluciones. Lo importante es que, al interpretarlas para responder a la pregunta del problema, la respuesta sea la misma. Tanto plantear una ecuación a partir de un problema, como interpretar la solución para dar respuesta al problema son tareas cruciales y no triviales, que se deben enfatizar.

El ámbito numérico apropiado al nivel escolar produce ciertas limitaciones a la libertad para elegir la incógnita. La segunda formulación del problema anterior involucra operatoria de fracciones, pues se debe sumar:

$$\frac{x}{2} + x,$$

lo que no es posible a niveles escolares tempranos. Sin embargo, si se puede resolver el problema planteado.

En resumen

- Las niñas y los niños desarrollan estrategias para resolver ecuaciones que son anteriores a la aparición formal de las ecuaciones en el currículo.
- Las letras que se usen para designar incógnitas son arbitrarias.
- No siempre hay una única manera de elegir la incógnita que se usará para plantear una ecuación asociada a un problema.
- Cuando se resuelve un problema usando una o más ecuaciones para representarlo, es fundamental traducir la solución de la ecuación a la respuesta del problema original.

Ejercicios

1. Resuelva los siguientes problemas planteando la ecuación correspondiente y resolviéndola usando relaciones numéricas.

   a. Si a un número le quito 56, se obtiene 18, ¿cuál es el número?
   b. La suma de dos números es 135. Si uno de ellos es 83, ¿cuál es el otro número?
   c. La suma de un número y 35, es igual a la suma entre 535 y 55, ¿ cuál es el número?
   d. Si Claudia pagó con $1000 dos kilos de manzanas y recibió de vuelto $260, ¿cuánto cuesta cada kilo de manzanas?
   e. Un número excede en 15 a otro número. Si la suma de ellos es 55, ¿cuáles son los números?

2. Explique, usando dos razonamientos distintos, cómo determinar el valor que falta en las igualdades que siguen:

   a. $674 - 389 = \square - 379$
   b. $73 + 56 = 71 + \square$
   c. $126 - 37 = \square - 40$
   d. $5 \cdot 84 = \square \cdot 105$
   e. $35 \cdot \square = 7 \cdot 15$

3. Encuentre un número tal que si se multiplica por 8, se le resta 4 y luego se divide por 3 resulta 4. Para ello, utilice un diagrama de flujo y resuélvalo. Plantee además la ecuación que lo representa.

4. Resuelva

   $\bigcirc + \triangle + \blacksquare = 16$

   $\bigcirc + \bigcirc + \blacksquare = 18$

   $\triangle + \blacksquare = 13$

   $\bigcirc = ?$ $\triangle = ?$ $\blacksquare = ?$

5. Resuelva

   $\blacksquare - \triangle = 14$

   $\triangle + \bigcirc = 18$

   $\blacksquare - \bigcirc = 10$

   $\blacksquare = ?$ $\triangle = ?$ $\bigcirc = ?$

2.2 Uso de distintos modelos para plantear y resolver ecuaciones

A muchas personas les resulta difícil conectar un problema con una ecuación que lo describa y se enfocan solo en operar con los números presentes en el problema, de alguna manera. Describir matemáticamente una situación problemática es una tarea primordial y de ello depende nuestra comprensión del problema y la posibilidad de resolverlo. Esto no es algo innato y se necesita aprender y practicar. Para plantear un problema usando una o más ecuaciones necesitamos identificar las cantidades desconocidas o incógnitas involucradas, a partir de los datos entregados y expresar sus relaciones. Este mismo proceso, al hacerlo explícito, permitirá, finalmente, interpretar la solución de la ecuación y conectarla con la respuesta al problema. Estos dos procesos son los que en el marco de la prueba PISA de matemáticas se llaman "matematizar" y "desmatematizar" el problema.

Diagramas de barra

Los diagramas de barra son muy útiles, tanto para plantear ecuaciones, como para resolver algunos problemas directamente, es decir, sin necesariamente plantear una ecuación. En estos diagramas se representan las incógnitas, a través de barras de largo desconocido. La solución del problema se obtiene a través de la manipulación de estas barras, utilizando las relaciones que nos entrega el problema. Los diagramas de barra son un paso intermedio en la abstracción del problema.

Ejemplo

Marcela tiene 400 g *de bombones que reparte en* 3 *paquetes de igual peso y le sobran* 40 g *¿Cuánto pesa cada paquete?*

En primer lugar identificamos la incógnita como el peso en gramos de cada paquete de bombones. Si representamos esta cantidad x por una barra:

$$\boxed{\quad x \quad}$$

entonces, la situación descrita puede ser representada por el siguiente diagrama:

x	x	x	40
400			

el cual puede ser presentado de manera más esquemática como

$$\underbrace{\boxed{\quad x \quad}\boxed{\quad x \quad}\boxed{\quad x \quad}\boxed{40}}_{400}$$

De cualquiera de estos diagramas, resulta claro que una ecuación que representa la situación es $3x + 40 = 400$.

Resolviendo la ecuación, se obtiene el valor de x=120, es decir, el peso de cada paquete de bombones es 120 g. Pero también, directamente del diagrama, se podría haber encontrado el peso del paquete notando que 3 paquetes deben pesar 360 g, por lo que un paquete pesa 120 g.

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo

Claudia tiene inicialmente, 4 *paquetes de nueces, de igual peso. A cada paquete le agrega* 20 g *de nueces. El peso final de los* 4 *paquetes juntos es de* 360 g. *¿Cuál era el peso original de cada paquete?*

El siguiente diagrama describe el problema, con x como el peso original de cada paquete:

x	20	x	20	x	20	x	20
360							

A partir del diagrama deducimos la ecuación:

$$4\,(x + 20) = 360.$$

Podemos resolver esta ecuación obteniendo que x=70 y responder que originalmente los paquetes de nueces pesaban 70. Pero también usando directamente el diagrama obtenemos que el peso inicial de los cuatro paquetes es $360 - 80 = 280$, por lo que el peso inicial de un paquete es 280/4 g = 70 g.

Veamos otro ejemplo en donde el diagrama se usa para representar una ecuación de la forma

$$ax + b = cx + d.$$

Ejemplo

Anita es 11 *años mayor que su hermana María, pero su mamá prefiere decir que Anita tiene un año más que el doble de la edad de María. ¿Cuál es la edad de Anita?*

No conocemos ninguna de las dos edades y nos preguntan por la edad de Anita. Pero como la referencia es la edad de María, usaremos esa edad como la incógnita x. Con esta elección, podemos representar el problema mediante el siguiente diagrama

x	11	
x	x	1

La ecuación asociada es $x + 11 = 2x + 1$, y del mismo diagrama se puede apreciar que $11 = x + 1$ y, por lo tanto, $x = 10$ y la edad de Anita es 21 años.

Hacemos notar la importancia de que las dos barras horizontales del diagrama estén alineadas para poder mostrar las relaciones que permiten resolver el problema.

Ejercicios

1. Plantee la ecuación que relaciona las edades de Anita y María usando como incógnita la edad de Anita.

2. Resuelva, usando diagramas de barra y planteando la ecuación, los siguientes problemas:

   a. José gastó $\frac{2}{3}$ de sus ahorros en fichas para videojuegos y le quedaron \$2.300. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado José?

   b. Encuentre dos números consecutivos cuya suma sea 43.

Muchas veces los problemas contextualizados involucran más de una cantidad desconocida o incógnita. Este tipo de problemas se pueden reducir a resolver una ecuación, si se expresan todas las incógnitas en términos de una sola. Veamos un ejemplo.

Ejemplo

Tres niños juntaron dulces en un cumpleaños. Juan juntó la mitad de dulces que Tomás, y Natalia juntó tres dulces más que los que juntaron Juan y Tomás juntos. Si entre los tres juntaron 45 dulces, ¿cuántos dulces juntaron cada uno?

En este problema se desconocen las cantidades de dulces de cada uno de los tres niños, pero se nos entregan las relaciones entre ellas. Anotemos T la cantidad de dulces de Tomás, J y N las cantidades de dulces de Juan y Natalia, respectivamente.

Veamos cómo plantear y resolver el sistema usando diagramas de barra. El siguiente diagrama expresa que Juan juntó la mitad de dulces que Tomás:

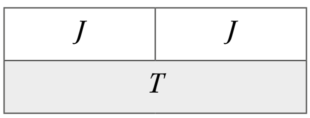


Diagrama A

Por otra parte, Natalia juntó 3 dulces más que los que juntaron Juan y Tomás juntos, esto se expresa en el siguiente diagrama:

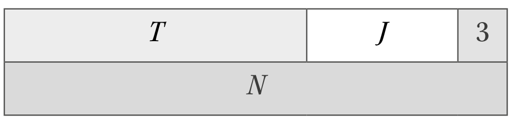


Diagrama B

Como entre los tres juntaron 45 dulces, tenemos que:

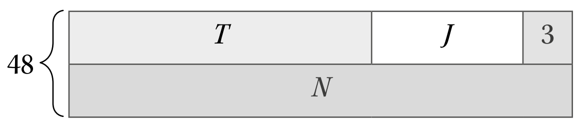


Diagrama C

y, por lo tanto, Natalia juntó 48/2 = 24 dulces.

Si reemplazamos la cantidad de dulces de Tomás, expresado en el diagrama *A*, en el diagrama *C,* obtenemos:

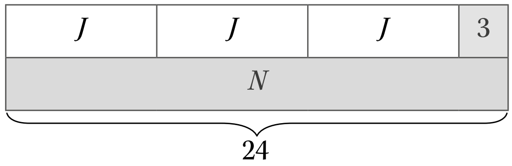


Diagrama D

Así, tres veces la cantidad de dulces de Juan debe ser 21, es decir, la cantidad de dulces que juntó Juan es 7. Finalmente, del diagrama A obtenemos que Tomás juntó 14 dulces.

Veamos cómo plantear el problema directamente, expresando cada una de las relaciones de manera algebraica. Se dice que Juan juntó la mitad que Tomás, así $J = \frac{T}{2}$.

Natalia juntó tres dulces más que Juan y Tomás juntos, lo que expresamos con:

$$N = T + J + 3 = T + \frac{T}{2} + 3.$$

Resumimos esta información en una tabla que nos ayude a tenerla a la vista

Tomás	Juan	Natalia
T	$J = \frac{T}{2}$	$N = T + \frac{T}{2} + 3$

Finalmente, se dice que el total de dulces que juntaron es 45, por lo que:

$$\mathrm{J} + T + N = 45$$

y usando las relaciones de la tabla para reemplazar J y N, obtenemos que:

$$\frac{T}{2} + T + T + \frac{T}{2} + 3 = 45$$

Como $\frac{T}{2} + T + T + \frac{T}{2} = 3T$, se tiene que

$$3T + 3 = 45,$$

por lo que $3T = 42$ y $T = 14$. Así $J = 7$ y $N = 14 + 7 + 3 = 24$, lo que significa que Tomás juntó 14 dulces, Juan juntó 7 y Natalia 24.

Vemos que el uso de una tabla para mantener a la vista muchas relaciones que podrían habernos confundido resultó útil para plantear la ecuación que nos permitió encontrar la solución del problema. Este ejemplo ilustra el hecho de que no existe una única manera de plantear el problema que sea la mejor en todas las situaciones.

Los diagramas de barra pueden ser muy útiles, pero hay muchos casos donde no son adecuados. Por ejemplo, puede ser engorroso utilizarlos si los números involucrados son muy grandes. Si en el problema se habla de 100 veces una cantidad, no sería posible, ni razonable, dibujar 100 veces una barrita para establecer las relaciones dadas. En estos casos, lo más sencillo es plantear la ecuación directamente a partir de los datos y resolver con un método algebraico. Tampoco el uso de estos diagramas es apropiado si la ecuación tiene como solución un número negativo. Es importante mencionar que cuando se aborda este tipo de problema, los alumnos ya utilizan procedimientos algebraicos.

Veamos un último ejemplo donde hay una resta involucrada en la ecuación y resolver mediante diagrama puede ser más complejo que resolver de manera algebraica.

Ejemplo

Considere el problema:

En una caja había el doble de caramelos de menta que de miel. Andrea agregó 7 *caramelos de miel y sacó* 5 *de menta. Ahora, hay la misma cantidad de caramelos de menta que de miel, ¿cuántos caramelos hay de cada sabor?*

Si x es la cantidad de caramelos de miel que había inicialmente en la caja, entonces $2x$ era la cantidad de caramelos de menta que había en ese momento. La cantidad de caramelos de miel que hay ahora es $x + 7$ (pues Andrea agregó 7) y la cantidad de caramelos de menta que hay ahora es $2x - 5$. Si ahora hay la misma cantidad de caramelos de menta que de miel, entonces:

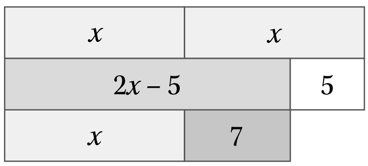
$$x + 7 = 2x - 5.$$

Para resolver la ecuación, restamos x a ambos lados y luego sumamos 5 a ambos lados de la ecuación, de donde obtenemos

$$12 = x.$$

Es decir, inicialmente había en la caja 12 caramelos de miel y 24 de menta, y ahora hay 19 caramelos de cada tipo.

Usando diagramas también se puede describir la situación, como se muestra a continuación:



Queda como ejercicio deducir directamente el diagrama a partir del enunciado, y encontrar la solución del problema a partir de este diagrama.

Ejercicio

Utilice diagramas para resolver los siguientes problemas y plantear las ecuaciones que los describen

a. Susana gasta $\frac{1}{3}$ de sus ahorros en un libro. Después de gastar la mitad de lo que le queda en un cuaderno, a Susana le quedan \$2.100. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado Susana? ¿Cuánto costaron el libro y el cuaderno?

b. Un campesino planta un 35% de sus tierras con maíz, un 25% con trigo y lo que le queda con papas. Se sabe que plantó 8 hectáreas con papas. ¿Cuántas hectáreas tiene el campesino?

c. Cuatro amigas juntaron 28 piedras en una excursión. Antonia juntó el doble que Marcela, mientras que Josefa y Karina juntaron dos piedras más qué las recolectadas por Antonia y Marcela, respectivamente. ¿Cuántas piedras juntó Marcela?

Balanzas

Un modelo ampliamente usado para introducir e ilustrar las ecuaciones son las balanzas con dos platillos, el cual enfatiza el significado de ecuación asociado al equilibrio. El principio detrás de la balanza es que si ella está en equilibrio y quitamos o agregamos el mismo objeto en cada platillo, u objetos del mismo peso, el equilibrio se mantiene, es decir, el peso en ambos platillos sigue siendo igual.

Para pensar

¿Con qué propiedades de la igualdad se relaciona el principio de la balanza?

Supongamos que desconocemos el peso de una botella de agua y que la balanza se equilibra colocando en un platillo 2 unidades de peso y la botella, y en el otro platillo de 4 unidades de peso.

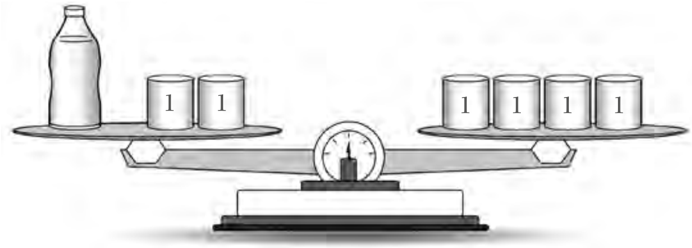


Figura II.4

El equilibrio de la balanza significa que se cumple la igualdad de pesos:

peso de la botella + 2 unidades de peso = 4 unidades de peso.

Lo que puede ser expresado por la ecuación:

$$s + 2 = 4,$$

donde s representa el peso de la botella.

Si bien la solución de la ecuación es evidente, encontraremos el peso de la botella quitando pesos de tal manera que la balanza se mantenga en equilibrio. Si quitamos 2 unidades de peso de cada platillo, el equilibrio se mantiene. Así, el peso de la botella es igual al peso de las dos unidades restantes en el platillo derecho.

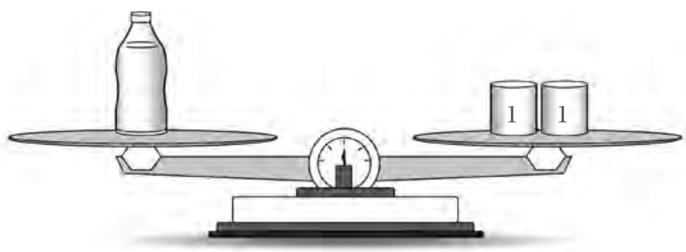


Figura II.5

El uso de balanzas también es útil para plantear ecuaciones. Por ejemplo, encontremos una ecuación que describa la siguiente balanza en equilibrio, donde sabemos que cada  representa una unidad de peso y el peso de la caja es una cantidad desconocida.

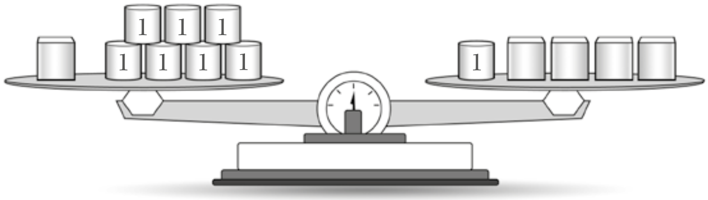


Figura II.6

Denominaremos x el peso de la caja. Como la balanza está en equilibrio, $x + 7 = 1 + 4x$. Podemos resolver esta ecuación usando el principio de la balanza: si quitamos una unidad de peso y una caja en ambos platillos, el equilibrio se mantiene, por lo que 6 unidades pesan lo mismo que 3 cajas, y, por lo tanto, cada caja debe pesar lo mismo que dos unidades de peso.

Ejercicio

Explique en términos de las propiedades de la igualdad el procedimiento usado para resolver la ecuación anterior.

Las balanzas tienen sentido para ilustrar ecuaciones en que las cantidades involucradas son positivas. El uso de las balanzas con números enteros puede ser polémico, porque los números negativos no se asocian a peso. En algunos softwares educativos se representan los números negativos en una balanza por medio de globos que hacen que la balanza "pierda peso", pero ello es más bien un atajo para que el modelo funcione con números negativos, que un modelo para una situación real. De este modo, las balanzas no son un modelo apropiado para representar ecuaciones como $x + 4 = 0$ o $2x + 8 = 4$.

A través de las balanzas, se puede introducir el método algebraico para resolver ecuaciones. Para esto modificaremos las cajas por x y las unidades de peso por números. Por ejemplo, para resolver la ecuación $3x + 3 = x + 9$, utilizamos la balanza de la siguiente forma:

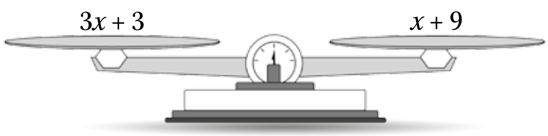


Figura II.7

Quitamos 3 a ambos lados:

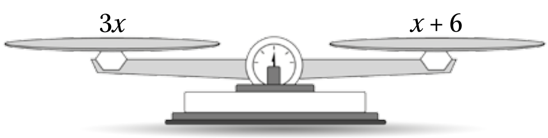


Figura II.8

y luego quitamos x a ambos lados:

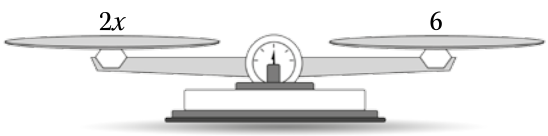


Figura II.9

Podemos apreciar que 6 se puede escribir como $2 \cdot 3$, por tanto, $2x$ a un lado de la balanza corresponde a 2 veces 3 al otro lado.

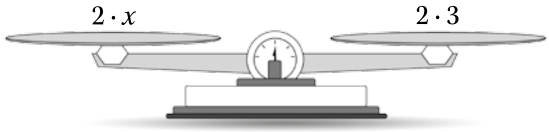


Figura II.10

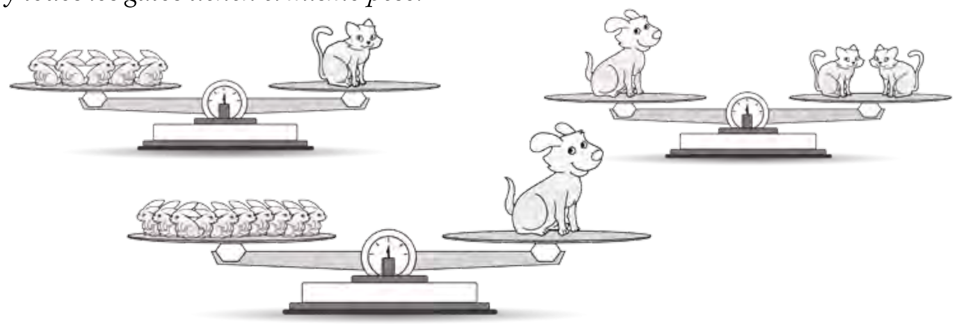
Por tanto, para que se mantenga el equilibrio en la balanza, x debe ser igual a 3.

Las manipulaciones hechas en las balanzas para encontrar el valor de la incógnita permiten visualizar las manipulaciones algebraicas que se realizan al resolver una ecuación. Los pasos que hemos detallado corresponden a restar el mismo número en ambos lados de la ecuación, para mantener la balanza equilibrada. También se ha utilizado que si los dos platillos pesan lo mismo, la misma proporción en cada uno de ellos también mantiene la balanza equilibrada (por ejemplo, si $2x$ pesa lo mismo que 6 unidades, entonces x pesará lo mismo que 3). Este procedimiento corresponde a dividir ambos lados de la ecuación por el mismo número. El que estas manipulaciones mantengan la igualdad se sustenta en las propiedades 3 y 4 de la igualdad.

Este modelo también sirve para plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales donde hay 2 cantidades desconocidas a determinar.

Ejemplo

Las siguientes balanzas están en equilibrio. *¿Cuántos conejos hay que poner en la balanza de abajo para que pesen lo mismo que el perro? Los conejos pesan todos lo mismo y todos los gatos tienen el mismo peso.*



En el problema vemos que la unidad es el peso del conejo, y se pide calcular el peso del perro en términos del peso de un conejo. Este problema involucra dos incógnitas: el peso del perro y el peso de un gato, y las balanzas nos entregan relaciones entre estas incógnitas y el peso de un conejo.

Vemos que un gato pesa lo mismo que 5 conejos, y que un perro pesa lo mismo que 2 gatos. Para resolver el problema, sustituimos en la segunda balanza de arriba, en el platillo derecho, cada gato por 5 conejos, pues ya sabemos que pesan lo mismo. Es decir, en el platillo derecho de la segunda balanza de arriba quedarán 10 conejos equilibrados con el perro del platillo izquierdo y obtenemos así que un perro pesa lo mismo que diez conejos. Observamos que la primera balanza nos permite expresar el peso de un gato en términos del peso de un conejo, y luego la segunda balanza nos entrega el peso de un perro en términos del peso de un gato, así, en la resolución del problema, hicimos dos sustituciones.

Para resolver el problema, no fue necesario plantear ninguna ecuación. Solo usamos las propiedades de la igualdad.

Veamos cómo plantear las ecuaciones que modelan este problema. Si denominamos C a el peso de un conejo, P al peso de un perro y G al peso de un gato y escribamos las ecuaciones dadas por la balanza usando como unidad el peso de un conejo:

$$G = 5C \leftarrow \text{primera balanza}$$

$$P = 2G \leftarrow \text{segunda balanza}$$

De la primera ecuación (proveniente de la primera balanza), tenemos que 2 gatos pesan lo mismo que 10 conejos, es decir, $2G = 10C$, y reemplazando en la segunda ecuación obtenemos que $P = 2G = 10C$, es decir, que un perro pesa lo mismo que 10 conejos.

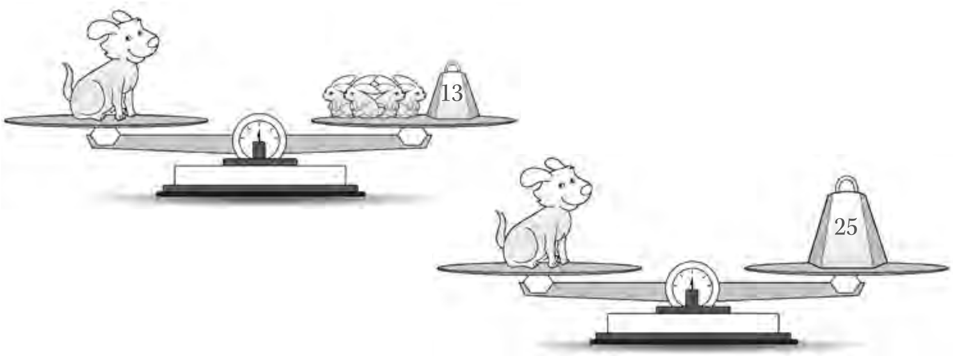
Ejercicio

¿Qué propiedades de la igualdad se utilizaron para determinar el peso del perro en términos del peso de los conejos? Justifique cada paso usado en la resolución del problema, en términos de las propiedades de la igualdad.

Veamos otro ejemplo.

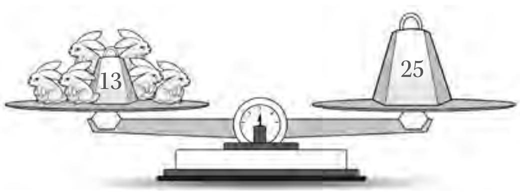
Ejemplo

Las siguientes balanzas están en equilibrio.



En cada una de las balanzas hay perros y conejos. También hay pesas marcadas con su peso en kilogramos. Los perros pesan todos lo mismo, y al igual que todos los conejos. Obtenga el peso de un perro y un conejo.

Para resolver el problema vemos que, a partir de la primera balanza, el peso del perro es igual al peso de cuatro conejos y de la pesa de 13 kg. Sustituyendo el peso del perro en la segunda balanza, obtenemos la siguiente balanza que tiene una sola incógnita:



Podemos ver que los seis conejos pesan 25 − 13 = 12 kg, es decir, cada conejo pesa 12/6 = 2 kg, y de la primera balanza obtenemos que cada perro pesa $4 \cdot 2 + 13 = 25$ kg.

El procedimiento que utilizamos para determinar el peso de un conejo y un perro no requirió plantear las ecuaciones. Sin embargo, estas se pueden obtener fácilmente. Denotando con C el peso de un conejo y con P el peso de un perro, de las balanzas originales deducimos:

$$P = 4C + 13 \leftarrow \quad \text{primera balanza}$$

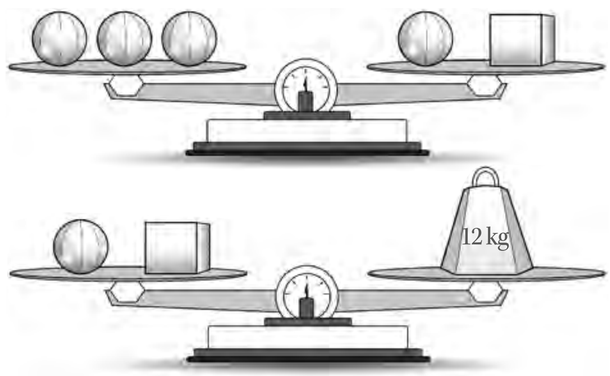
$$P + 2C = 25 \leftarrow \quad \text{segunda balanza}$$

Queda como ejercicio para el lector explicar cómo a partir de estas dos ecuaciones se obtiene la ecuación $4C + 13 = 25$ (proveniente de la última balanza), explicando qué propiedades de la igualdad se utilizan.

Ejercicios

1. Considere el sistema de ecuaciones $x + 3y = y + 15$, $x + y = 9$. Plantee dos balanzas a partir de este sistema e indique cómo usaría las balanzas para determinar los valores de x e y.

2. Las siguientes balanzas están en equilibrio. En ellas hay pelotas, cubos y una pesa de 12 kg. Las pelotas pesan todas lo mismo y los cubos pesan todos lo mismo. Manipulando las balanzas sin usar otras pesas, encuentre cuánto pesa cada pelota y cada cubo.



3. Plantee balanzas que representen las siguientes ecuaciones y resuélvalas.

   a. $3x + 5 = x + 7$ b. $2a + 3 = a + 4$

Los modelos propuestos nos permiten ilustrar los procedimientos que se usan en la resolución algebraica de ecuaciones y ayudan a reconocer su significado. Pero, en la medida que se complejizan las ecuaciones, estos modelos son insuficientes y es necesario promover procedimientos más económicos y efectivos, como la resolución algebraica. Es importante comprender que el procedimiento algebraico ha prevalecido debido a su generalidad y eficiencia, aunque muchas veces invisibiliza los razonamientos que hay detrás de la resolución de ecuaciones. Por ello, hemos mostrado el estudio de las ecuaciones utilizando distintos modelos que ayudarán a desarrollar la comprensión del proceso realizado, así como también a develar la relación entre el problema planteado y su representación algebraica.

Ejercicios

1. Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando balanzas, explique el razonamiento usado:

   a. $4x + 14 = 7x + 5$
   b. $\frac{3x}{2} + 4 = \frac{5x}{2} + 2$

2. Resuelva los siguientes problemas usando diagramas de barra y plantee la ecuación apropiada para cada uno:

   a. Tomás compró en un quiosco una revista y un paquete de chicles. La revista le costó el triple que el paquete de chicles. Si en total gastó \$ 1.800, ¿cuánto le costó la revista?
   b. En una caja hay pelotitas rojas y negras. Hay 14 pelotas rojas más que negras y en total hay 156 pelotas. ¿Cuántas pelotas negras y rojas hay?
   c. Carla se tomó $\frac{1}{4}$ de su jugo mientras iba a la escuela. Luego se tomó $\frac{2}{3}$ de lo que quedaba en el recreo, y se tomó el resto mientras iba a la casa. Si su botella de jugo tenía 350 cc, ¿cuánto jugo tomó en el recreo?

3. Plantee problemas para las siguientes ecuaciones y resuélvalos usando un diagrama de barra:

   a. $\frac{2}{7}a + \frac{1}{7}a + 8 = 50$
   b. $2m + 3m + m = 1.800$
   c. $x = 450 + \frac{x}{3} + 600$

4. Decida cuáles de las representaciones y estrategias estudiadas se pueden utilizar para plantear o resolver las ecuaciones y los problemas que siguen, justificando sus elecciones.

   a. $3x + 22 = x + 20$
   b. María tiene la mitad de láminas que Pedro y Josefa tiene 2 más que María. Deciden juntar sus láminas y Pedro descubre que una de sus láminas coincide con una de María y otras dos coinciden con dos de Josefa, por lo que las retira de la colección de láminas distintas. Todas las láminas de María y de Josefa son distintas. Así entre los tres juntan 31 láminas distintas. ¿Cuántas láminas tenía cada uno originalmente?
   c. $4(x + 2) - 12 = 32$
   d. Camila tiene 5 bolsas con igual cantidad de dulces, que regalará a 5 amigas que vendrán a su cumpleaños. Si agrega 2 dulces a cada bolsa, en total habrá repartido 115 dulces. ¿Cuántos dulces tenía cada bolsa inicialmente?

2.3 Resolución algebraica de ecuaciones lineales y discusión de sus soluciones

Cualquiera sea la forma en que se presente una ecuación lineal, siempre buscaremos despejar la incógnita, es decir, dejarla sola a un lado de la igualdad. En la enseñanza escolar muchas veces se describe esta tarea usando conceptos como *cancelar*. En esta sección, mostraremos la fundamentación de este concepto en términos de las propiedades de la igualdad. Esto nos permitirá abordar la resolución algebraica de ecuaciones evitando trabajar con números negativos y fracciones, lo que es importante al tratar este tema en la enseñanza básica.

Para resolver la ecuación:

$$4x - 8 = 20,$$

partimos sumando 8 a ambos lados de la igualdad:

$$4x - 8 + 8 = 20 + 8,$$

y, por lo tanto, se tendrá

$$4x = 28.$$

Como $28 = 4 \cdot 7$, entonces

$$4x = 4 \cdot 7$$

y podemos cancelar el factor 4. Esto está sustentado por la **propiedad** 4 de la igualdad, ya que corresponde a multiplicar por el inverso multiplicativo de 4 a ambos lados de la igualdad, o a dividir ambos lados por 4. Notemos que al presentar este paso, dividiendo por 4 en vez de multiplicar por su inverso multiplicativo, evitamos referirnos a fracciones y solo usamos la descomposición de un número en sus factores.

Consideremos ahora la ecuación:

$$5x - 2 = 2\,(x+1) + 11.$$

En este caso, partimos manipulando el lado derecho de la ecuación usando la distributividad, y obtenemos:

$$2\,(x + 1) = 2x + 2.$$

Rescribimos nuestra ecuación como:

$$5x - 2 = 2x + 2 + 11,$$

es decir,

$$5x - 2 = 2x + 13.$$

Como $5x=2x+3x$, entonces nuestra ecuación se escribe:

$$2x + 3x - 2 = 2x + 13$$

y restando $2x$, nos quedará que:

$$3x - 2 = 13.$$

Sumando 2 a cada lado de la igualdad, obtenemos que:

$$3x = 15$$

y como $15 = 3 \cdot 5$, podemos dividir por 3 ambos lados de la igualdad, para obtener que $x = 5$.

Una vez que se adquiere práctica en el trabajo con las ecuaciones, muchos de estos pasos pueden ser omitidos.

Para pensar

Suponga que a, b, c y d son números enteros. Analice las relaciones que deben tener a, b, c y d para que las soluciones de la ecuación $ax + b = cx + d$ sean:

- naturales
- enteras

Ejercicios

1. Claudia, una estudiante de segundo año de Educación Media, para resolver la ecuación $x + 105 = 1305 + 100$ utilizó el siguiente procedimiento algebraico:

$$\begin{aligned} x + 105 &= 1305 + 100 & & \\ x + 105 &= 1405 & &\text{se suman los términos de la derecha} \\ x + 105 + (-105) &= 1405 + (-105) & &\text{se suma a ambos lados } -105 \\ x + 0 &= 1300 & &\text{por propiedad del elemento inverso aditivo} \\ x &= 1300 & &\text{por propiedad del elemento neutro aditivo} \end{aligned}$$

¿Cómo resolvería la ecuación anterior de manera apropiada para ser presentada a alumnos de 6º básico?

2. Resuelva las siguientes ecuaciones de dos formas distintas, pensando en cómo se pueden presentar a alumnos de 6° básico.

a. $x + 380 = 377 + 66$ b. $11x = 44 \cdot 21$ c. $x + 33 \cdot 7 = 37 \cdot 33$

En los ejemplos previos, hemos cancelado sumandos y factores. El cancelar sumandos se sustenta en la **propiedad** 3 de la igualdad, que no tiene restricciones y, por lo tanto, siempre se puede realizar. En cambio, cancelar factores se sustenta en la **propiedad** 4 de la igualdad, que solo vale si el factor que se cancela es distinto de 0. El riesgo de cometer el error de cancelar un factor nulo solo se presenta al cancelar un factor cuyo valor no conocemos, pues involucra a la incógnita y podría ser nulo. Para ilustrar este riesgo, veamos la resolución de la ecuación que sigue.

Ejemplo

Un profesor plantea el ejercicio de resolver la ecuación $2(x + 3) = x + 6$

Un alumno responde que no tiene solución. El procedimiento que utilizó es el siguiente:

$$2x + 6 = x + 6.$$

$$2\cancel{x} = \cancel{x}$$

$$2 = 1.$$

El error de este alumno es haber supuesto que el factor x se podía cancelar. Al realizar esta cancelación, se está suponiendo que x tiene inverso multiplicativo, lo que es falso cuando $x = 0$. En este caso, justamente $x = 0$ es la solución de la ecuación. Esto podemos comprobarlo remplazando x por 0 en la ecuación original o en sus ecuaciones equivalentes. La cancelación correcta luego de obtener la ecuación:

$$2x = x$$

debió ser descomponer $2x = x + x$, obteniendo que:

$$x + x = x$$

y cancelando el sumando x, obtenemos que:

$$x = 0.$$

Como se ha advertido antes, las ecuaciones lineales no siempre tienen una única solución y, por lo tanto, se necesita una gran claridad respecto de la validez de los pasos seguidos para interpretar los resultados obtenidos. En la sección siguiente, veremos ejemplos donde no se obtiene una solución única y analizaremos los posibles casos que podrían ocurrir en cuanto a la existencia y la cantidad de soluciones.

Ejercicios

1. Explique cómo resolver las siguientes ecuaciones usando cancelación:
   a. $2x + 5 = 3x + 3$
   b. $5(x + 1) - 5 = (x + 1) + 4$
   c. $8x + 3\,(x - 1) = 2x + x - 1 + 5$
2. Escriba tres ecuaciones que tengan solución $x = 5$.

2.4 Existencia y cantidad de soluciones

En esta sección, discutiremos las soluciones de las ecuaciones lineales, que como vimos en la **Sección 1**, podrían no tener solución o su solución podría no ser única. Para hacer este estudio de manera sistemática, es conveniente escribir las ecuaciones de la forma:

$$ax + b = 0,$$

donde a y b son números dados, pero que podrían ser cualesquiera y ,por lo tanto, podrían ser incluso nulos. La existencia y cantidad de soluciones dependerá crucialmente de que a sea o no sea 0. Esa posibilidad no es tan extraña como podría parecer. Veamos un ejemplo.

Ejemplo

Consideremos la ecuación:

$$3 - (x + 1) = -5x - (4 - 4x),$$

y su resolución:

$$\begin{aligned} 3 - x - 1 &= -5x - 4 + 4x \\ 2 - x &= -x - 4 \\ 2 &= -4. \end{aligned}$$

Evidentemente, esta ecuación no tiene solución. Para ver la relación entre este hecho y los valores de a y de b en la ecuación lineal $ax + b=0$, observamos que si sumamos 4 a ambos lados del signo igual, tendremos que la ecuación original es equivalente a $6 = 0$, la cual es efectivamente una ecuación del tipo $ax + b = 0$, con $a = 0$ y $b = 6$.

Veamos un ejemplo donde la solución no es única.

Ejemplo

Consideremos la ecuación:

$$3 + 2\,(x - 1) = 2\,(1 + x) - 1,$$

cuya resolución resumimos como sigue:

$$\begin{aligned} 2\,(x - 1) &= 2x - 2 \\ 2\,(1 + x) &= 2 + 2x \\ 3 + 2x - 2 &= 2 + 2x - 1 \\ 1 + 2x &= 1 + 2x. \end{aligned}$$

De la última ecuación, es evidente que la igualdad será siempre cierta, cualesquiera sea el valor que tome la incógnita x. Es decir, todos los posibles valores de x resuelven la ecuación, por lo que tiene una infinidad de soluciones. Para reconocer en ella la ecuación general, podemos sumar a ambos lados $(-1 - 2x)$ y obtener la ecuación equivalente $0 = 0$, que es una ecuación del tipo $ax+b=0$, con $a = 0$ y $b = 0$.

Hemos mostrado que ecuaciones que a priori no parecen distintas de aquellas que tienen solución única se transforman en ecuaciones equivalentes del tipo $ax + b = 0$, pero con $a = 0$ o con $a = b = 0$ y, por lo tanto, no tienen una única solución.

Resumiendo estas posibilidades, podemos distinguir los casos que nos llevarán a encontrar solución única, inexistencia de solución o infinidad de soluciones dependiendo de los valores que puedan tomar los números a y b en la ecuación general:

$$ax + b = 0.$$

Notemos, en primer lugar, que si $a \neq 0$ entonces, independientemente del valor de b, la solución de la ecuación será el número:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Por lo tanto, siempre que $a \neq 0$, cualesquiera sean los números a y b, la ecuación tendrá una única solución. En cambio, si $a = 0$, tendremos dos posibilidades:

Caso 1: $b = 0$

En este primer caso, la ecuación $ax + b = 0$ dirá $0x + 0 = 0$. Esto es lo mismo que decir $0 = 0$, que es siempre cierto, independiente de los valores que tome x. Es decir, la igualdad será cierta para todos los posibles valores de x y, entonces, cualquier número es solución de la ecuación, por lo que tiene una infinidad de soluciones.

Caso 2: $b \neq 0$

En el segundo caso, la ecuación $ax + b = 0$ dirá $0x + b = 0$, es decir, $0 + b = 0$. Esto es imposible, pues estamos suponiendo que $b \neq 0$. Así, no habrá ningún valor de x que haga cierta la igualdad y, por lo tanto, la ecuación no tiene solución.

Para pensar

- ¿Es posible que una ecuación lineal tenga exactamente dos soluciones?
- Si usted encuentra dos números que son solución de una ecuación lineal ¿qué puede decir respecto de sus soluciones?

En resumen

La ecuación lineal $ax + b = 0$:

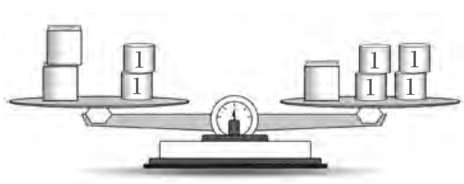
- tiene una única solución si $a \neq 0$
- tiene infinitas soluciones, pues todos los números son solución, si $a = 0$ y $b = 0$
- no tiene solución, si $a = 0$ y $b \neq 0$.

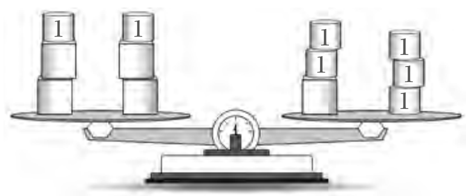
Ejercicios de la sección

1. Dibuje una balanza para cada una de las siguientes ecuaciones, utilícela para encontrar el valor de la incógnita.

   a. $2x + 3 = x + 7$ b. $x + 7 = 4x + 1$ c. $3x + 2 = 9$

2. Se quiere saber el peso de los cubos y para ello se ponen en una balanza unidades de peso. Escriba la ecuación para cada una de las siguientes balanzas:

   a.


   b.


3. Utilice diagramas para resolver las siguientes ecuaciones:

   a. $3x - 3 = 15$ b. $5x + 3 = 2x + 7$ c. $\frac{3}{5}x + 4 = x$

4. Encuentre el valor de los lados iguales de un triángulo isósceles, sabiendo que son 3 cm más grandes que el tercer lado y que el perímetro del triángulo es 18 cm.

5. Una la ecuación del lado izquierdo con la ecuación equivalente del lado derecho:

a. $5(x - 1) = 2(x + 1) + 5$	$2x + 1 = \frac{5}{2}$
b. $4x = 3$	$0{,}125x - 1{,}5 = -5$
c. $12x = 6x + 2$	$3x = 1$
d. $\frac{1}{2}(x - 10) = -33$	$x = 4$

6. Resuelva las ecuaciones:

a. $6(x-2)+10=x+14$

b. $2(1+x)=3(x-1)-x$

c. $2(x+1)=3(x-1)-x+5$

d. $15x+25=40$

e. $\frac{1}{3}+5x=\frac{4}{3}$

f. $3(8-2x)=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}$

7. Para cada una de las ecuaciones que siguen, plantee un problema y resuélvalo:

a. $2x+100=500$

b. $x-15-\frac{1}{3}(x+15)=50$

c. $\frac{4}{5}(x-25)=35$

d. $\frac{x}{2}+\frac{2}{4}=1$

e. $2A-6=18$

f. $0{,}8\,P+3.000=35.000$

g. $\frac{x}{2}+x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}=35$

h. $2(3C-4)+2=66$

8. Justifique cada uno de los pasos que permiten resolver las siguientes ecuaciones:

a. $3x=4$

b. $\frac{2x}{3}=20$

c. $-4x+2=10$

9. Resuelva los siguientes problemas utilizando ecuaciones. Indique claramente las cantidades desconocidas involucradas, cómo se deduce la ecuación, el procedimiento usado para su resolución y la interpretación de la solución en el contexto del problema.

a. Para ingresar a un gimnasio, se debe pagar una matrícula de $20.000 y cada mes la mensualidad es $15.000. Un socio que ingresa da un cheque por $80.000, ¿cuántos meses pagó?

b. Paula corrió 4 km el día lunes, el martes corrió 2 km más que el miércoles, el jueves corrió 2/3 de lo que corrió el miércoles y el viernes corrió el doble que el jueves. Si ella corrió exactamente 30 km de lunes a viernes, ¿cuánto corrió el martes, miércoles, jueves y viernes?

c. En una librería, las ventas de dos años fueron de $36.000.000. Las ventas del segundo año fueron un 40% más que las del primer año. ¿Cuáles fueron las ventas de cada año?

d. En la billetera de Elisa hay $54.000, en billetes de $5.000, $2.000 y $1.000. Ella tiene el doble de billetes de $5.000 que de $2.000 y los billetes de $1.000 son 2 más que los billetes de $5.000. ¿Cuántos billetes de $5.000 tiene Elisa?

e. Alejandra y Sofía reciben la misma mesada. Alejandra gastó $700 en un lápiz y Sofía gastó $300 en un paquete de chicles, después de lo cual Alejandra tiene 4/5 de lo que le queda a Sofía. ¿Cuánto es la mesada de cada niña?

10. En la ecuación $19x+p=18$, qué valores puede tener p para que:

a. x sea un número natural

b. x sea un número entero

3. Sistemas de ecuaciones lineales

Como estudiamos en la sección anterior, la resolución de muchos problemas de enunciado involucra plantear y resolver ecuaciones lineales. Hay muchas situaciones que involucran varias cantidades desconocidas, las cuales están relacionadas entre sí. Estas relaciones muchas veces se expresan a través de ecuaciones lineales con más de una incógnita, las cuales forman lo que llamaremos un *sistema de ecuaciones*.

Civilizaciones muy antiguas resolvían problemas matemáticos relacionados con sistemas de ecuaciones lineales, los que surgían del modelamiento de un problema concreto. El siguiente problema se encuentra en un antiguo texto babilónico:

Uno de dos terrenos tiene un rendimiento de $\frac{2}{3}$ sila por sar, el segundo tiene un rendimiento de $\frac{1}{2}$ sila por sar[1]. La producción del primer terreno fue 500 silas más que la producción del segundo. El área de los dos terrenos juntos es de 1.800 sar. ¿Qué tan grande es cada terreno?

Este problema lo podemos describir matemáticamente de la siguiente manera. Si denotamos las áreas desconocidas con x e y, entonces la producción del primer terreno es $\frac{2}{3}x$, y la del segundo es $\frac{1}{2}y$. Como la producción del primer terreno fue de 500 silas más que la del segundo, tenemos que:

$$\frac{2}{3}x = \frac{1}{2}y + 500.$$

Además, como el área de ambos terrenos es 1.800 sar tenemos que:

$$x + y = 1.800,$$

y, por lo tanto, el problema se puede describir mediante el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x &= \frac{1}{2}y + 500, \\ x + y &= 1.800. \end{aligned}$$

Los chinos también estudiaron problemas que se pueden plantear en términos de un sistema de ecuaciones. En el capítulo 7 del libro matemático chino *Jiuzhang* se encuentra el siguiente problema:

El precio de 1 acre de tierra buena es 300 piezas de oro y el precio de 7 acres de tierra mala es 500 piezas de oro. Uno ha comprado en total 100 acres con un precio de 10.000, ¿cuánta tierra buena y cuánta tierra mala fueron compradas?

Si denotamos las áreas de tierra buena y mala en acres por x e y respectivamente; entonces la cantidad total de tierra que se ha comprado está dada por $x + y = 100$. Cada acre de tierra buena cuesta 300 piezas de oro y cada acre de tierra mala cuesta $\frac{500}{7}$ piezas de oro. Así, los acres de tierra buena cuestan $300x$ piezas de oro y los acres de tierra mala cuestan $\frac{500}{7}y$ piezas de oro.

1 Sila y sar son medidas de la cantidad de producción y del área, respectivamente.

Entonces, el precio total de la tierra comprada es $300x + \frac{500}{7}y = 10.000$. Por lo tanto, el problema se puede describir mediante el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$300x + \frac{500}{7}y = 10.000,$$
$$x + y = 100.$$

En esta sección abordaremos el estudio de sistemas lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas, los cuales tienen la forma:

$$ax + by = c,$$
$$dx + ey = f.$$

Donde *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f* son números que suponemos conocidos y *x* e *y* son las incógnitas a determinar. Nuestro principal propósito en esta sección es abordar cómo plantear sistemas de ecuaciones lineales a partir de problemas. También trataremos la resolución algebraica de sistemas lineales a partir de lo estudiado en la **Sección 1** de este capítulo.

Es importante notar que, si bien los sistemas de ecuaciones no están presentes en el currículo escolar de enseñanza básica, estos sí aparecen implícitamente en diversos tipos de problemas. De hecho, en la sección anterior vimos varios ejemplos de problemas escolares en donde aparece más de una cantidad desconocida. Los niños y las niñas de educación básica pueden resolver problemas que involucran dos o más cantidades desconocidas aprovechando relaciones entre las ecuaciones, y también mediante el uso de balanzas y diagramas de barras, métodos que se sustentan en relaciones entre números y operaciones y las propiedades de la igualdad. Abordar este tipo de trabajo promueve una actitud favorable a la resolución de problemas, ayuda a desarrollar el sentido numérico y a comprender el significado de la igualdad, y prepara a los niños y niñas para el futuro trabajo con sistemas de ecuaciones que se abordan en la educación media.

3.1 Resolución algebraica de sistemas de ecuaciones

En esta sección, abordaremos la resolución algebraica de sistemas lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas de la forma:

$$ax + by = c,$$
$$dx + ey = f.$$

Donde *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* son números que suponemos conocidos y *x* e *y* son las incógnitas. Para esto, recordaremos los procedimientos discutidos en el apartado **II.1.3.**

La clave para resolver sistemas de ecuaciones es usar las propiedades de la igualdad para obtener un sistema de ecuaciones equivalente, para el cual sean evidentes las soluciones. Recordemos que si manipulamos un sistema usando las **propiedades** 3 y 4 de la igualdad, con la precaución de no multiplicar o dividir ambos lados de la ecuación por cero, obtendremos un sistema equivalente.

Ejercicios

1. Escriba los siguientes sistemas en la forma:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

Identificando *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*. Justifique el razonamiento usado identificando las propiedades de la igualdad utilizadas.

a. $$\begin{aligned} 2(3-x)-5 &= 2(5x+4y) \\ 6(x+y-1) &= 3(x-1)+2 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 4x-2y &= 22 \\ 3x+5y &= 49 \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} \frac{1}{3}(3x-5)+y &= 4-\frac{y}{5} \\ \frac{3}{4}(1-8x)-\frac{1}{3}y &= -4(x-2y) \end{aligned}$$

2. Determine qué pares de valores son soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4x-2y &= 22 \\ 3x+5y &= 49 \end{aligned}$$

a. $x = 5, y = -1$ b. $x = 3, y = 8$ c. $x = 8, y = 5$ d. $x = -8, y = -5$

3. Para el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

encuentre números x_0, y_0 tales que:

a. x_0, y_0 sea solución de la primera ecuación, pero no de la segunda.
b. x_0, y_0 sea solución de la segunda ecuación, pero no de la primera.
c. x_0, y_0 no sea solución de ninguna de las ecuaciones.
d. x_0, y_0 sea solución del sistema.

La solución de un sistema puede ser encontrada de distintas maneras. No hay una forma única de proceder, solo hay que preocuparse de que cada paso realizado entregue una ecuación equivalente. Sin embargo, dependiendo del sistema, puede que un procedimiento sea más sencillo que otro.

Como vimos en el apartado **II.1.3**, una idea clave para resolver sistemas es expresar (o despejar) una incógnita en términos de la otra, y sustituir esa relación para obtener una ecuación lineal que involucre solo una incógnita. Ilustraremos este método mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Determinemos la solución del sistema.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= -1 \\ x - 3y &= 7 \end{aligned}$$

Haremos todos los pasos para recordar los procedimientos discutidos en el apartado **III.1.3**, y, en particular, veremos por qué usar una sustitución entrega un sistema equivalente.

Observemos que el coeficiente de la incógnita x en la segunda ecuación es igual a 1, por eso nos conviene despejar la incógnita x usando la segunda ecuación. Para esto, sumamos a ambos lados de la segunda ecuación $3y$, y obtenemos que $x = 7 + 3y$. Así, los sistemas siguientes son equivalentes:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= -1 \\ x - 3y &= 7 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} 3x + 2y &= -1 \\ x &= 7 + 3y \end{aligned}$$

Ahora, sustituimos la expresión para x en la primera ecuación $3(7 + 3y) + 2y = -1$. Para justificar esta sustitución a partir de las propiedades de la igualdad, podemos razonar de la siguiente forma: como $x = 7 + 3y$, tenemos que $3x + 2y = 3(7 + 3y) + 2y$ por las **propiedades** 3 y 4. Como $3x + 2y = -1$, entonces por transitividad (**propiedad** 2 de la igualdad) obtenemos que $3(7 + 3y) + 2y = -1$.

Se puede verificar (ejercicio) que los sistemas:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= -1 \\ x &= 7 + 3y \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} 3(7 + 3y) + 2y &= -1 \\ x &= 7 + 3y \end{aligned}$$

son equivalentes, y por lo tanto el último sistema es equivalente al sistema original. Resolver el último sistema es sencillo, ya que la primera ecuación no involucra a x, y su valor se obtiene reemplazando el valor de y en la segunda ecuación.

Observamos que la primera ecuación del último sistema se puede escribir como $11y + 21 = -1$. Para resolver esta ecuación, partimos sumando -21 a ambos lados de la igualdad, obtenemos que $11y = -22$ y luego multiplicamos la ecuación por $\frac{1}{11}$ y obtenemos que $y = -2$.

Reemplazando $y = -2$ en la ecuación $x = 7 + 3y$, obtenemos que $x = 7 + 3(-2) = 7 - 6 = 1$. Es decir, la solución del sistema original será $x = 1$ e $y = -2$.

Este ejemplo fue resuelto de manera detallada, para explicar por qué es válido hacer la sustitución. Una vez que se entiende por qué funciona que este procedimiento produce sistemas equivalentes, no es necesario justificarlo nuevamente. Veamos otro ejemplo.

Ejemplo

Resolvamos el sistema:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ 4x + y &= -3. \end{aligned}$$

El coeficiente de la incógnita y en la segunda ecuación es igual a 1, y por eso nos conviene despejar esta incógnita de la segunda ecuación, obteniendo que $y = -3 - 4x$. Reemplazamos esta expresión para y en la primera ecuación y obtenemos la siguiente ecuación:

$$3x - 2(-3 - 4x) = 1.$$

Queda como ejercicio al lector resolver esta ecuación para obtener que $x = -\frac{5}{11}$. Reemplazando este valor de x en la relación obtenida para la incógnita y, es decir $y = -3 - 4x$, obtenemos $y = -\frac{13}{11}$. Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es $x = -\frac{5}{11}$ e $y = -\frac{13}{11}$.

También podríamos haber despejado la incógnita x de la primera ecuación, obteniendo $x = \frac{1+2y}{3}$. Sustituyendo este valor de x en la segunda ecuación, obtenemos la siguiente ecuación con la incógnita y:

$$4\left(\frac{1+2y}{3}\right) + y = -3.$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos $y = -\frac{13}{11}$ y si reemplazamos este valor en la expresión para la incógnita x, es decir $x = \frac{1+2y}{3}$, obtenemos que $x = -\frac{5}{11}$. La solución es, por supuesto, la misma, pero al hacerlo de esta última forma los cálculos fueron un poco más complicados.

A veces no es necesario hacer una sustitución para resolver el sistema, sino que se puede tratar de sumar o restar las ecuaciones para obtener una que involucre solamente una incógnita. Por ejemplo, en el siguiente sistema de ecuaciones, los coeficientes de la incógnita y se diferencian solamente en el signo, son 4 y -4 .

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 9 \\ x - 4y &= -3 \end{aligned}$$

Podemos sumar ambas ecuaciones, usando la **propiedad 5** de la igualdad, y obtener la ecuación:

$$\begin{array}{rl} & 2x + 4y = 9 \\ + & \;\; x - 4y = -3 \\ \hline & 3x \qquad\;\; = 6 \end{array}$$

Se puede ver que los sistemas:

$$\begin{aligned} 2x+4y &= 9 \\ x-4y &= -3 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} 2x+4y &= 9 \\ 3x &= 6 \end{aligned}$$

son equivalentes.

Este último sistema es sencillo de resolver. De la ecuación $3x = 6$ obtenemos que $x = 2$. Al remplazar este valor en la primera ecuación, obtenemos que $4 + 4y = 9$, de donde $y = \frac{5}{4}$.

Ejercicio

En el ejemplo anterior, podríamos haber usado cualquiera de las dos ecuaciones originales para resolver el sistema. Justifique esto probando que los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x+4y &= 9 \\ x-4y &= -3 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} x-4y &= -3 \\ 3x &= 6 \end{aligned}$$

son equivalentes.

Tal como ocurre en el caso de las ecuaciones, puede pasar que un sistema de ecuaciones no tenga solución o que tenga infinitas soluciones. Ilustraremos estos casos con los siguientes ejemplos.

Ejemplos

1) Encontremos dos números reales que sumados den 6 y que el doble de su suma sea 4.

Denotamos a los dos números con x e y. Queremos encontrar x e y tales que $x + y = 6$ y $2(x + y) = 4$, es decir:

$$\begin{aligned} x+y &= 6 \\ 2x+2y &= 4 \end{aligned}$$

Despejamos la incógnita x de la primera ecuación y obtenemos $x = 6 - y$. Reemplazamos este valor en la segunda ecuación y obtenemos la siguiente ecuación en la incógnita y: $2\,(6 - y) + 2y = 4$. Observamos que esta ecuación es equivalente a $0y = 8$, por lo tanto, la igualdad no se cumple para ningún valor de y. Así, concluimos que el sistema de ecuaciones no tiene ninguna solución.

Otra forma de ver por qué este sistema no tiene soluciones es dividiendo ambos lados de la segunda ecuación por 2, lo que nos entrega que $x + y = 2$, y así obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente

$$\begin{aligned} x+y &= 6 \\ x+y &= 2 \end{aligned}$$

Claramente, este sistema de ecuaciones no tiene soluciones, porque no existen valores de x e y cuya suma sea 6 y 2 simultáneamente.

2) Encontremos dos números reales tales que su suma sea 6 y su promedio sea 3.

Queremos determinar números x e y tales que $x + y = 6$ y $\frac{x+y}{2} = 3$, es decir, que resuelvan el sistema:

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y &= 3 \end{aligned}$$

Si despejamos la incógnita x de la primera ecuación, obtenemos que $x = 6 - y$. Reemplazamos esta expresión para x en la segunda ecuación y obtenemos $\frac{6-y}{2} + \frac{y}{2} = 3$, que solo tiene la incógnita y. Al resolver esta ecuación, obtenemos $0y = 0$. Esta igualdad se cumple para todo valor de y. Podemos verificar fácilmente que si y es un número cualquiera y $x = 6 - y$, se satisfacen ambas ecuaciones:

$$x + y = (6 - y) + y = 6 - y + y = 6$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}(6 - y) + \frac{1}{2}y = \frac{6}{2} - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y = 3.$$

Otra forma de encontrar estas soluciones es multiplicar ambos lados de la segunda ecuación por 2, lo que nos da $x + y = 6$, y así obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ x + y &= 6 \end{aligned}$$

Este sistema se reduce a una sola ecuación con dos incógnitas $x + y = 6$, la cual tiene infinitas soluciones, ya que si y es cualquier número, entonces al tomar $x = 6 - y$ obtenemos una solución. Por lo tanto, este sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones.

En resumen

- Los procedimientos algebraicos para resolver los sistemas de ecuaciones lineales se basan en el uso de las propiedades de la igualdad.
- Una idea clave para resolver sistemas de ecuaciones es despejar una de las incógnitas en términos de la otra, para luego sustituir esta expresión en la otra ecuación.
- Los sistemas de ecuaciones lineales, al igual que las ecuaciones lineales, pueden no tener solución o tener infinitas soluciones.

Ejercicios

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones

a. $\begin{aligned} y &= 3x+1 \\ y &= 2x+5 \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} 2(3x-1)+5 &= 2y \\ 5(3-y) &= 0 \end{aligned}$

c. $\begin{aligned} 2x-5(3-y) &= 2x \\ 4x-y &= 0 \end{aligned}$

d. $\begin{aligned} -3x+5y &= -6 \\ x+4y &= -15 \end{aligned}$

e. $\begin{aligned} -2x+y &= -3 \\ 3x+2y &= 8 \end{aligned}$

f. $\begin{aligned} 2x+y &= -3 \\ -6x-3y &= 9 \end{aligned}$

g. $\begin{aligned} x-6y &= 17 \\ 5x+6y &= 13 \end{aligned}$

h. $\begin{aligned} 3x+2y &= 1 \\ 3x+5y &= 7 \end{aligned}$

i. $\begin{aligned} x-y &= 3 \\ x+y &= 9 \end{aligned}$

2. En cada uno de los casos, determine una ecuación de tal manera que el sistema formado por esa ecuación y $x = 4y + 3$:

a. No tenga solución.
b. Tenga infinitas soluciones.
c. Tenga como solución $x = -5$, $y = 2$.

3.2 Aplicación de los sistemas de ecuaciones a la resolución de problemas

Tal como hemos visto, hay muchos problemas cuya solución involucra resolver ecuaciones o sistemas lineales. Es clave saber cómo plantear sistemas lineales a partir de un problema. Para esto, debemos enfocarnos en reconocer las cantidades desconocidas involucradas y expresar a través de ecuaciones las relaciones entre ellas. Este proceso, que llamamos matematizar el problema, puede ser realizado con la ayuda de diagramas o interpretando las relaciones directamente. Una vez que se determinan estas cantidades desconocidas, resolviendo el sistema, hay que interpretar la solución del problema a la luz de la pregunta realizada.

Ejemplos

1) Una persona compró en la feria 8 kg de paltas y 22 kg de papas por \$16.800. La próxima vez, con los mismos precios compró 20 kg de paltas y 16 kg de papas por \$26.400. Determine el precio de 1 kg de paltas y de papas.

Denotamos por x e y los precios de un kilogramo de papas y paltas, respectivamente. La primera vez que compró los productos la persona pagó $8x$ por las papas y $22y$ por las paltas. Como en total se pagó \$16.800, tenemos que $8x + 22y = 16.800$. La segunda vez, la persona pagó $20x$ por las paltas y $16y$ por las papas, así $20x + 16y = 26.400$.

Obtenemos así el siguiente sistema que relaciona a las incógnitas x e y:

$$\begin{aligned} 8x+22y &= 16.800 \\ 20x+16y &= 26.400 \end{aligned}$$

Para resolver este sistema, usaremos un procedimiento algebraico. Partimos dividiendo ambos lados de la segunda ecuación por 4 y obtenemos que $5x + 4y = 6.600$.

Ahora, despejamos x en términos de y, esto se puede obtener de la ecuación anterior si restamos $4y$ a ambos lados de la igualdad y luego multiplicamos por $\frac{1}{5}$, obteniendo así $x=\frac{6.600-4y}{5}$, es decir, $x=\frac{6.600}{5}-\frac{4}{5}y=1.320-\frac{4}{5}y$. Esto nos entrega el valor de 1 kg de paltas en términos de 1 kg de papas. Si reemplazamos esto en la primera ecuación, obtenemos que

$$8\left(1.320-\frac{4}{5}y\right)+22y=16.800,$$

de donde:

$$10.560-\frac{32}{5}y+22y=16.800.$$

Esta ecuación solo involucra una incógnita y se puede resolver de manera algebraica. Partimos sumando los términos que incluyen a y para obtener:

$$10.560+\frac{78}{5}y=16.800.$$

Restando 10.560 a ambos lados de la ecuación, obtenemos que $\frac{78}{5}y=6.240$, de donde $y=400$. Para obtener el valor de x, usamos que $x=1.320-\frac{4}{5}\cdot 400=1.000$. Así, el 1 kg de paltas vale \$1.000 y 1 kg de papas vale \$400.

2) La distancia entre dos puntos de un río es de 80 km. Un barco recorre esta distancia a favor de la corriente del río en 4 h y en contra de la corriente del río en 5 h. Determine la velocidad del barco y la velocidad de la corriente del río.

Denotamos con x e y la velocidad del barco y de la corriente respectivamente. Estas velocidades se miden en km/h (kilómetros por hora). Para plantear el sistema, usaremos la siguiente relación conocida entre la distancia, velocidad y tiempo:

Distancia recorrida = velocidad de desplazamiento · tiempo transcurrido.

Si el barco se desplaza a favor de la corriente, la velocidad con la que se desplaza será la suma de su velocidad y la de la corriente, es decir, $x + y$. Mientras que si el barco se desplaza contra la corriente, su velocidad de desplazamiento será $x - y$. Sabemos que el barco recorre los 80 km a favor de la corriente en 4 h. Así, por la fórmula de arriba, obtenemos que $4(x + y) = 80$.

De la misma forma, el barco recorre los 80 km en contra de la corriente en 5 h. Usando la fórmula que relaciona la velocidad de desplazamiento y la distancia recorrida, obtenemos que $5(x - y) = 80$. Así, hemos planteado un sistema de ecuaciones para resolver el problema, el cual está dado por el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$4(x+y)=80$$
$$5(x-y)=80$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos que $x = 18$ e $y = 2$. Queda como ejercicio para el lector resolverlo.

Así, hemos obtenido que la velocidad del barco es de 18 km/h y la velocidad de la corriente del río es de 2 km/h.

Ejercicios

1. Escriba en forma de una ecuación con dos incógnitas las siguientes situaciones:
   a. El doble de un número menos el tercio de otro número es igual a 3.
   b. El promedio de dos números es igual a 1,5.
   c. El triple de un número más 20 veces otro número es igual a 5.
2. Una lancha recorre 34 km a favor de la corriente de un río en el mismo tiempo que recorre 26 km contra la corriente. La velocidad propia de la lancha es de 15 km/h. Determine la velocidad de la corriente del río.
3. Emilia, Antonia y Tomás juntan láminas de un álbum. Entre Antonia y Emilia tienen 24 láminas y Antonia con Tomás tienen 30 láminas. Emilia tiene 6 láminas menos que Tomás. ¿Cuántas láminas tiene cada uno?
4. Invente un problema con contexto que pueda ser modelado por el sistema $x + y = 30$, $2x - y = 15$.
5. Invente un problema de enunciado cuya resolución involucre resolver el sistema $x - y = 40$ y $x = y + 12$. Observe que el sistema no tiene solución.

En resumen

- Los sistemas de ecuaciones lineales nos permiten describir y resolver problemas.
- Para ello, debemos reconocer las cantidades desconocidas y expresar las relaciones entre ellas mediante ecuaciones.
- Debemos interpretar la solución del sistema de acuerdo a la pregunta realizada.

Ejercicios de la sección

1. Resuelva las siguientes ecuaciones usando balanzas y explicando la validez del procedimiento utilizado:

   a. $\begin{aligned} 3x &= y \\ y + 7 &= 6x \end{aligned}$

   b. $\begin{aligned} 2x + 5 &= y \\ 2y + x &= 15 \end{aligned}$

2. Considere el siguiente problema:

   En un corral hay conejos y gallinas. Determine el número de conejos y gallinas en el corral, si se sabe que hay 15 cabezas y 44 patas.

   Resuelva el problema utilizando dos procedimientos distintos, uno de ellos apropiado para ser presentado a niños y niñas de cuarto básico.

3. Resuelva el siguiente problema explicando claramente las sustituciones realizadas.

   Josefa corrió de lunes a viernes. El martes y miércoles corrió lo mismo que el día lunes. El jueves corrió 2 km menos que el martes, y el viernes corrió la mitad que el jueves. En la semana ella corrió en total 24 km. ¿Cuántos km corrió Josefa cada día?

4. Determine si el par de números $x = 1, y = 2$ es solución de las siguientes ecuaciones con dos incógnitas:

   a. $2x + 2y = 5$
   b. $x - 2y = 1$
   c. $3x - 2y = -1$
   d. $-x - 2y = -4$

5. Despeje la incógnita y en términos de x, en cada una de las ecuaciones:

   a. $3x + y = -2$
   b. $-5x + 2y = 4$
   c. $2(x - 1) + 3(2 - y) = 5x - y - 2$

6. Resuelva los sistemas de ecuaciones justificando los pasos realizados.

   a. $\begin{aligned} y &= 2x + 1 \\ 5x - 2y &= -2 \end{aligned}$

   b. $\begin{aligned} x &= 6 - y \\ -2x + 3y &= 4 \end{aligned}$

   c. $\begin{aligned} 5x - 3y &= 14 \\ 2x + y &= 10 \end{aligned}$

   d. $\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ 3x - 2y &= 3 \end{aligned}$

   e. $\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ -3x + 6y &= -2 \end{aligned}$

   f. $\begin{aligned} 4x + y &= -2 \\ -8x - 2y &= 4 \end{aligned}$

   g. $\begin{aligned} x + y &= 2 \\ -x + 2y &= 4 \end{aligned}$

   h. $\begin{aligned} 4x + 3y &= -1 \\ x - 3y &= 11 \end{aligned}$

   i. $\begin{aligned} -2x + 4y &= -11 \\ 4x + 4y &= 1 \end{aligned}$

7. Hace 6 años, la edad de Enrique era los $\frac{3}{2}$ de la edad de su hermana y, dentro de 6 años, 4 veces la edad de Enrique será 5 veces la edad de su hermana. Determine las edades actuales.

8. Un zorro, al ser perseguido por un galgo le lleva 50 saltos de ventaja, y da 4 saltos mientras el galgo sólo da 3; pero 2 saltos del galgo equivalen a 3 saltos del zorro. ¿Cuántos saltos debe dar el galgo para alcanzar al zorro?

9. El cociente de dos números es 6 y el resto es 11. ¿Cuáles son estos números, si su suma es 179?

10. Dos llaves de agua quedan abiertas durante 25 minutos la primera y durante 28 minutos la segunda. En ese período suministran 1.465 L de agua. Pero si la primera queda abierta 20 minutos y la segunda queda abierta 21 minutos, sólo suministran 1.130 L de agua. ¿Cuántos litros de agua por minuto suministra cada llave?

11. Un adorno compuesto de oro y plata pesa 593 g. Su volumen es de 41 cm^3. Calcule el peso del oro y de la plata que contiene el adorno, sabiendo que un centímetro cúbico de oro pesa 19 g y que uno de plata pesa 10,5 g.

4. Ecuaciones cuadráticas

En la **Sección 2** estudiamos ecuaciones de la forma $ax + b = 0$ con a y b como números conocidos y x la incógnita a determinar. Hay muchos problemas que involucran ecuaciones donde la incógnita aparece en una expresión algebraica más compleja, la que puede involucrar potencias de la incógnita. En esta sección estudiaremos ecuaciones de la forma $x^2 + bx + c = 0$, que se denominan *cuadráticas* o *de segundo grado*.

Las ecuaciones cuadráticas fueron estudiadas por civilizaciones de la antigüedad. En tablillas del periodo babilónico Arcaico (2000– 1600 A.C) aparecen una serie de problemas que actualmente se modelarían con una ecuación cuadrática. Uno de ellos es:

He sumado 7 *veces el lado de un cuadrado y* 11 *veces el área, obteniendo* $6\frac{1}{4}$.

Veamos cómo describir este problema mediante una ecuación cuadrática. Si llamamos x al lado del cuadrado, entonces el área de dicho cuadrado es x^2, por lo que x debe cumplir:

$$7x + 11x^2 = 6\frac{1}{4}\cdot$$

La solución que aparece en la tablilla es un procedimiento en que se enuncian instrucciones a seguir para obtener el resultado. Este consiste en una serie de operaciones que entregan 0,5 como el valor buscado. Al resumir todos los pasos, aparece la expresión:

$$x = \frac{-7 + \sqrt{7^2 + 4\cdot 11\cdot 6\frac{1}{4}}}{2\cdot 11}$$

la que corresponde a:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

para los valores $a = 11$, $b = 7$ y $c = -6\frac{1}{4}$. La fórmula anterior, que podemos recordar de la educación media, surge a partir un procedimiento algebraico para determinar las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Así, se puede inferir que los babilonios conocían el procedimiento general para resolver problemas de ecuaciones cuadráticas.

Expertos en historia de la matemática afirman que los procedimientos de los babilonios no eran algebraicos, sino que geométricos. Consistían en la yuxtaposición de figuras planas, tales como cuadrados y rectángulos, y su descomposición en figuras de áreas equivalentes. Si bien el procedimiento usado aparentemente es aritmético, en realidad, los números y las operaciones hacen referencia a la construcción de cuadrados, y el cálculo de raíces corresponde a calcular la medida de sus lados.

Veamos por qué la ecuación cuadrática está relacionada con la construcción de cuadrados. Para que el procedimiento sea más claro, consideraremos una ecuación de la forma $x^2 + bx = d$, es decir, $d = -c$. Supongamos que b y d son números positivos y que estamos buscando una solución positiva. El lado izquierdo de la igualdad $x^2 + bx = d$ es el área de la figura que resulta al yuxtaponer un cuadrado de lado x y un rectángulo de lados b y x, como se muestra en la **Figura II. 11**:

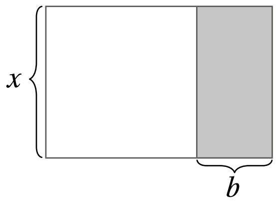


Figura II. 11

Si dividimos el rectángulo de lados b y x en dos rectángulos de lados $\frac{b}{2}$ y x, y cada uno lo yuxtaponemos al cuadrado de lado x, como se muestra en la **Figura II. 12**, obtenemos que la suma del cuadrado de lado x y el rectángulo de lados b y x tiene la misma área que la siguiente figura:

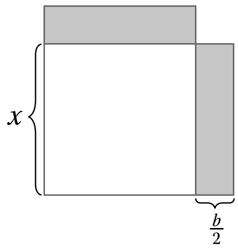


Figura II. 12.

Si yuxtaponemos a esta figura un cuadrado de lado $\frac{b}{2}$, como se muestra en la **Figura II. 13**, obtenemos un cuadrado de lado $x+\frac{b}{2}$:

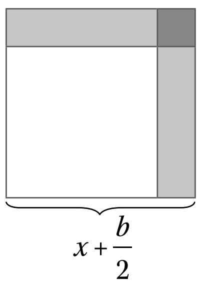


Figura II. 13

Si a la expresión x^2+bx le sumamos $\frac{b^2}{4}$, que es el área del cuadrado de lado $\frac{b}{2}$, obtenemos que $x^2+bx+\frac{b^2}{4}$ es el área del cuadrado de lado $x+\frac{b}{2}$. Por lo tanto, la ecuación original $x^2+bx=d$ se puede escribir como:

$$x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=d+\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

y como el lado derecho es el área del cuadrado de lado $x+\frac{b}{2}$, obtenemos que

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=d+\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Es decir, se busca un cuadrado de lado $x+\dfrac{b}{2}$ cuya área sea $d+\left(\frac{b}{2}\right)^2$.Como el lado de un cuadrado es la raíz cuadrada de su área, obtenemos que la solución es

$$x+\tfrac{b}{2}=\sqrt{d+\left(\tfrac{b}{2}\right)^2}\text{ , es decir } x=-\tfrac{b}{2}+\sqrt{d+\left(\tfrac{b}{2}\right)^2}\,.$$

El procedimiento utilizado para encontrar una solución positiva de la ecuación se denomina *completar el cuadrado*, y su significado geométrico salta a la vista. En el procedimiento, siempre supusimos que la incógnita x era positiva y que b y d son positivos. Usando un procedimiento algebraico, que se basa en la idea de completar el cuadrado, encontraremos la solución en el caso general.

La visualización geométrica de las ecuaciones cuadráticas aparece también en el Teorema de Pitágoras. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + 9^2 = 12^2$ se puede visualizar mediante un triángulo del que se conocen la medida de la hipotenusa y de uno de los catetos. Así, x representa la longitud del otro cateto:

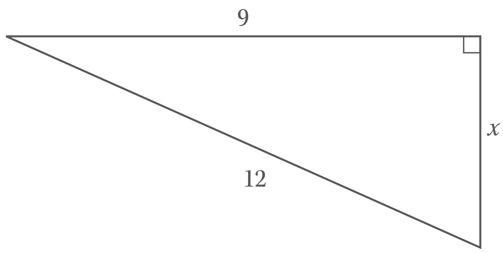


Figura II. 14

El valor de x satisface $x^2 + 81 = 144$, si restamos 81 a ambos lados de la ecuación, obtenemos que la medida del cateto x cumple que $x^2 = 63$. Así, estamos buscando un número positivo x cuyo cuadrado es 63, es decir $x=\sqrt{63}$.

4.1 Resolución de ecuaciones de la forma $x^2=d$

Vamos a partir estudiando el tipo de ecuación cuadrática más sencilla, aquella de la forma $x^2 = d$. Ilustraremos el procedimiento mediante la ecuación del ejemplo anterior, $x^2 = 63$. Las soluciones de esta ecuación se expresan muchas veces como $x=\pm\sqrt{63}$ y es importante saber qué razonamiento nos lleva a esta respuesta, en particular, debemos ser precisos con respecto al significado de $\pm$. Para este fin, utilizaremos la siguiente identidad (suma por diferencia), que vimos en el apartado **I.1.5**, la cual es válida para cualquier par de números reales x, y:

$$x^2 - y^2 = (x - y)\,(x + y).$$

Usando esta identidad y recordando que $63=\sqrt{63}^{\,2}$ tenemos que:

$$x^2-63=x^2-\sqrt{63}^{\,2}=\left(x-\sqrt{63}\right)\left(x+\sqrt{63}\right).$$

Así, la ecuación $x^2 = 63$ es equivalente a:

$$\left(x-\sqrt{63}\right)\left(x+\sqrt{63}\right)=0\,.$$

Para resolver esta ecuación, recordamos que el producto de dos números es 0, si al menos uno de los dos números es 0 (**Teorema II.1** del apartado **II.1.2**). Por lo tanto, para cumplir la igualdad se debe tener que: $x-\sqrt{63}=0$, es decir $x=\sqrt{63}$, o bien $x+\sqrt{63}=0$, o sea $x=-\sqrt{63}$. Concluimos que la ecuación $x^2=63$ tiene dos soluciones, una de ellas es $\sqrt{63}$ y la otra es $-\sqrt{63}$. Debemos entender que la expresión "$x=\pm\sqrt{63}$" indica que la igualdad es verdadera si la incógnita x toma el valor $\sqrt{63}$ o el valor $-\sqrt{63}$.

En el ejemplo de la **Figura II. 14** obtenemos que el largo del cateto es $\sqrt{63}$ y descartamos la otra solución, pues no tiene sentido un valor negativo en esta situación. Al usar álgebra para resolver problemas, es muy importante discutir las soluciones obtenidas por métodos algebraicos a la luz del problema original. En este caso, este análisis nos llevó a descartar una solución algebraica.

El procedimiento para encontrar las soluciones de la ecuación $x^2 = 63$ es válido si remplazamos 63 por cualquier otro número positivo o cero. Por lo tanto, si d no es negativo, las soluciones de la ecuación $x^2 = d$ son $x=\sqrt{d}$ y $x=-\sqrt{d}$. La demostración de este resultado queda como ejercicio para el lector.

Para completar el estudio de la ecuación $x^2 = d$, nos falta considerar el caso en que $d < 0$. Aquí la ecuación no tiene ninguna solución, porque no existe ningún número real x cuyo cuadrado sea negativo.

El siguiente teorema resume el estudio de las soluciones de la ecuación $x^2 = d$.

Teorema II.2

Considere d un número real. La ecuación $x^2 = d$ tiene:

a) Dos soluciones distintas dadas por $x=\sqrt{d}$ y $x=-\sqrt{d}$, cuando $d > 0$.

b) Solamente una solución dada por $x = 0$, cuando $d = 0$.

c) Ninguna solución, cuando $d < 0$.

Si bien este teorema solo abarca las ecuaciones del tipo $x^2 = d$, también puede ser aplicado si la ecuación es de la forma $(x + b)^2 = d$.

Teorema II.3

Considere b y d números reales. La ecuación $(x + b)^2 = d$ tiene:

a) Dos soluciones distintas dadas por $x=-b+\sqrt{d}$ y $x=-b-\sqrt{d}$, cuando $d < 0$.

b) Solamente una solución dada por $x = -b$, cuando $d = 0$.

c) Ninguna solución, cuando $d < 0$.

La demostración de este resultado queda como ejercicio para el lector.

Como veremos más adelante, cualquier ecuación cuadrática es equivalente a una ecuación del tipo $(x + b)^2 = d$ y, por lo tanto, podremos estudiar sus soluciones. Veamos un ejemplo en que la solución será obtenida transformando la ecuación en una de este tipo, usando la identidad del cuadrado del binomio.

Ejemplo

Se sabe que en un rectángulo de área **6 cm^2** uno de sus lados mide **2 cm** más que el otro. ¿Cuánto mide cada lado?

Para resolver este problema, denotamos por L el lado desconocido de menor medida, entonces, el otro lado del rectángulo estará dado por $L + 2$. Así, el área del rectángulo está dada por $L\,(L + 2)$ que, por los datos del problema, es 6. Por lo tanto, se debe cumplir la igualdad:

$$L\,(L + 2) = 6$$

la cual es equivalente a $L^2 + 2L = 6$.

Para resolver esta ecuación, trataremos de *completar un cuadrado,* lo que significa escribir el lado izquierdo de la ecuación (el que involucra la incógnita) como el cuadrado de una expresión algebraica, para así usar de manera apropiada el **Teorema II.3** para resolver la ecuación. Para hacer esto, recordamos la identidad del cuadrado de binomio que vimos en el apartado **I.1.5**, que se cumple para cualquier par de números x e y:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Así, remplazando x por L e y por 1,obtenemos que $(L + 1)^2 = L^2 + 2L + 1$ para cualquier valor de L. Volviendo a nuestro problema, vemos que si sumamos 1 a ambos lados de la ecuación, obtenemos que esta es equivalente a:

$$L^2 + 2L + 1 = 7,$$

es decir, $(L + 1)^2 = 7$.

Para resolver esta ecuación usamos el **Teorema II.3**, de donde obtenemos que la ecuación se satisface cuando $L+1=\sqrt{7}$ o $L+1=-\sqrt{7}$, es decir, la ecuación tiene dos soluciones: $L=-1+\sqrt{7}$ y $L=-1-\sqrt{7}$. Como $-1+\sqrt{7}>0$ y $-1-\sqrt{7}<0$, la única solución es $L=-1+\sqrt{7}$. Así, los lados del rectángulo son $-1+\sqrt{7}$ y $-1+\sqrt{7}+2=1+\sqrt{7}$.

Para pensar

¿Cómo explicaría la resolución del problema anterior usando un procedimiento geométrico?

Ejercicio

Demuestre los **Teoremas II.2** y **II.3.**

4.2 Solución general de la ecuación cuadrática

En esta sección estudiaremos cómo resolver cualquier ecuación cuadrática. Vamos a partir definiendo lo que es una ecuación cuadrática.

Definición II. 4 Diremos que una ecuación es cuadrática o de segundo grado, si es equivalente a una ecuación de la forma

$$x^2 + bx + c = 0$$

donde b y c son números reales y x denota la incógnita a determinar.

Por ejemplo la ecuación $(x-1)x - \frac{1}{7}x + 5 = 0$ es una ecuación cuadrática, ya que $(x - 1)\,x = x^2 - x$, por lo que la ecuación es igual a $x^2 - \frac{8}{7}x + 5 = 0$, la cual es de la forma anterior con $b = -\frac{8}{7}$ y $c = 5$.

Ejercicio

Verifique si las siguientes ecuaciones son cuadráticas:

a. $(2a - 1)\,a = 3a^2 + 5$

b. $(4y + 5)^2 - 2y^2 = 0$

c. $x\,(x - 1) = x^2$

d. $2x\,(x - 1) = x^2 + x\,(x + 1)$

e. $\dfrac{2}{x^2+1} = \dfrac{1}{x}$

Queremos encontrar las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$, la cual es equivalente a $x^2 + bx = -c$. Vamos a proceder de manera similar al ejemplo de la subsección anterior, en que la clave fue usar la identidad del cuadrado de binomio para formar el cuadrado de una expresión en el lado izquierdo de la ecuación.

Partimos notando que $x^2 + bx = x^2 + 2\frac{b}{2}x$. Si usamos la identidad del cuadrado de binomio con $y = \frac{b}{2}$, tenemos que:

$$x^2 + 2\tfrac{b}{2}x + \left(\tfrac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \tfrac{b}{2}\right)^2,$$

por lo que si sumamos $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ a ambos lados de la ecuación $x^2 + bx = -c$, obtenemos que esta es equivalente a:

$$x^2 + 2\tfrac{b}{2}x + \left(\tfrac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\tfrac{b}{2}\right)^2, \text{ es decir } \left(x + \tfrac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\tfrac{b}{2}\right)^2.$$

Para resolver esta última ecuación usamos el **Teorema II. 3**, considerando tres casos:

a) $-c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 > 0$ b) $-c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0$ c) $-c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 < 0$

Si se cumple a), entonces usando el **Teorema II. 3**, obtenemos que la ecuación:

$$\left(x + \tfrac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\tfrac{b}{2}\right)^2$$

tiene dos soluciones dadas por: $x + \frac{b}{2} = \sqrt{-c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ y $x + \frac{b}{2} = -\sqrt{-c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$, es decir,

$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{-c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ o $x = -\frac{b}{2} - \sqrt{-c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$.

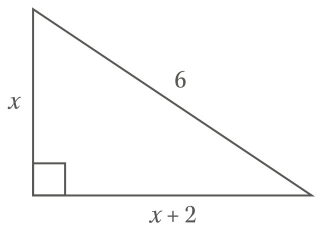
Si estamos en el caso b), entonces la ecuación tiene una sola solución dada por $x+\frac{b}{2}=0$, es decir $x=-\frac{b}{2}$. Finalmente, si se cumple c), la ecuación no tiene solución, ya que $-c+\left(\frac{b}{2}\right)^2<0$ y, por lo tanto, nunca puede ser igual a $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$.

Resumimos todo esto en el siguiente teorema.

> ***Teorema II. 4***
>
> La ecuación $x^2+bx+c=0$:
>
> a) Tiene dos soluciones distintas $x=-\frac{b}{2}+\sqrt{-c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$ o $x=-\frac{b}{2}-\sqrt{-c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$, cuando $-c+\left(\frac{b}{2}\right)^2>0$.
>
> b) Tiene una solución dada por $x=-\frac{b}{2}$, cuando $-c+\left(\frac{b}{2}\right)^2=0$.
>
> c) No tiene solución, cuando $-c+\left(\frac{b}{2}\right)^2<0$.

Ejemplo

En el triángulo rectángulo de la figura se sabe que el valor de la medida de la hipotenusa es **6 cm** y que un cateto mide **2 cm** más que el otro.



Usando el Teorema de Pitágoras, tenemos que si x denota la medida del cateto menor, se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$x^2+(x+2)^2=36.$$

Es decir, x debe ser solución de esta ecuación. Se deja como ejercicio justificar que la ecuación anterior es equivalente a:

$$x^2+2x-16=0.$$

Resolvamos esta ecuación usando la fórmula que acabamos de deducir. En este ejemplo $b=2$ y $c=-16$. Lo primero es verificar el signo de $-c+(b/2)^2$.

En este caso $-c+(b/2)^2=-(-16)+1=17>0$. Así la ecuación tendrá dos soluciones dadas por $x=-1+\sqrt{17}$ y $x=-1-\sqrt{17}$. La solución $-1-\sqrt{17}<0$ no tiene sentido en el contexto de nuestro problema, y la otra solución es $-1+\sqrt{17}>0$, por lo que el cateto menor del triángulo debe medir $-1+\sqrt{17}$, y el otro $2+\left(-1+\sqrt{17}\right)=1+\sqrt{17}$.

En resumen

- Las ecuaciones cuadráticas son aquellas que son equivalentes a la ecuación $x^2+bx+c=0$, con b y c números reales, y x denota la incógnita a determinar.
- Una forma de abordar el estudio de las soluciones de una ecuación cuadrática se basa en usar la identidad del cuadrado del binomio, que permite escribir la ecuación de la forma $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=-c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$.
- Analizando la ecuación anterior, vemos que puede tener una, dos o ninguna solución dependiendo del signo de $-c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Ejercicios de la sección

1. Explique cómo deducir que la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ tiene soluciones dadas por $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, cuando $b^2 - 4ac \geq 0$, y no tiene solución cuando $b^2 - 4ac < 0$.

2. Determine las soluciones de las siguientes ecuaciones.
   a. $x^2 + 6x - 8 = 25$
   b. $x(x + 1) = -1$
   c. $(x - 5)(x + 3) = 0$
   d. $2x(x - 3) + 1 = 2x^2 - 6$
   e. $(x - 1)^2 - (2x - 3)^2 = 0$

3. Se sabe que el producto de dos números consecutivos es 182. Determine estos números.

4. Determine todos los números que cumplen que su suma sea 28 y su producto 187.

5. Encuentre la medida del lado de un triángulo equilátero, si se sabe que su altura es 1.

6. Se sabe que si el lado de un cubo aumenta 1 cm, entonces su volumen aumenta 10 cm^3. Determine el lado del cubo.

7. Resuelva las siguientes ecuaciones explicando el procedimiento utilizado:
   a. $x+1=\dfrac{2}{x}$
   b. $(x - 5)(x + 3)(2x + 3) = 0$
   c. $2x+2=\dfrac{1+x}{x}$

5. Desigualdades e inecuaciones

En muchas situaciones de la vida diaria se entrega o se pide información en base a comparaciones. Por ejemplo, se dice que Juan es mayor que María o se pregunta si Chillán está más cerca o más lejos de Santiago que La Serena. Podemos describir estas afirmaciones y preguntas en lenguaje matemático usando desigualdades. Por ejemplo, si j denota la edad de Juan y m la edad de María, la situación descrita anteriormente puede ser representada como "j es mayor que m" y usando el símbolo " >" lo escribimos como la desigualdad $j > m$.

En esta sección, estudiaremos las propiedades fundamentales de las desigualdades y algunas consecuencias de estas. También abordaremos el estudio de las inecuaciones, que surgen de problemas planteados en base a desigualdades, donde se busca saber cuáles son todos los valores que puede tomar una variable para que una desigualdad sea válida.

Ejercicio

Describa usando una desigualdad la pregunta ¿Chillán está más cerca o más lejos de Santiago que La Serena? Averigüe si la desigualdad es cierta o falsa.

Recordemos el uso de los símbolos "<" y ">" en la descripción de desigualdades.

Notación:

Para expresar que un número a es **menor que** un número b, anotamos $a < b$.

Para expresar que el número b es mayor que el número a, anotamos $b > a$.

Las dos frases anteriores expresan lo mismo, decir $a < b$ es equivalente a decir $b > a$. Así, en el ejemplo anterior decir que "Juan es mayor que María" es lo mismo que decir que "María es menor que Juan".

A veces queremos representar situaciones que incluyen la posibilidad de que una cantidad sea mayor o igual que otra, entonces introduciremos nuevos símbolos para representar esos casos.

Notación:

Para expresar que un número a es menor o es igual que un número b, anotamos $a \leq b$.

Para expresar que un número b es mayor o es igual que el número a, anotamos $b \geq a$.

También en este caso ambas frases dicen lo mismo, decir que $a \leq b$ es equivalente a decir que $b \geq a$.

Hay situaciones que se describen con más de una desigualdad. Por ejemplo, podemos querer escribir que un número a es mayor que 10, pero que también es menor o igual que 15, lo que anotaríamos como $a > 10$ y $a \leq 15$. Estas dos desigualdades se pueden escribir de un modo más compacto como:

$$10 < a \leq 15.$$

Siempre que escribamos una desigualdad encadenada del tipo $a < b < c$ estamos diciendo que $a < b$ y también que $b < c$.

No siempre se pueden juntar dos desigualdades. Ilustremos esto con el siguiente ejemplo.

En una línea de bus los pasajeros que tienen menos de 12 años o más de 65 no pagan pasaje, por lo tanto, si x representa la edad de un pasajero, tenemos que no pagará pasaje cuando $x > 65$ o $x < 12$. Si bien uno puede estar tentado a escribir estas desigualdades como $65 < x < 12$, vemos que esto no tiene sentido, pues diría que 65 es menor que 12.

Ejemplos

1) Si p representa el precio de un objeto en una tienda que asegura que todo lo que vende no es más caro que \$5.000, entonces podríamos decir que p es menor o igual a 5.000 y escribir que $p \leq 5.000$, pero también podríamos escribir $5.000 \geq p$.
2) Si Rocío perteneció a la muestra de jóvenes que rindieron la prueba PISA 2009, y sabemos que los participantes eran mayores de 13 años y menores de 17 años. Entonces si e es el número que representa la edad de Rocío al momento de la aplicación de esa prueba, podemos escribir $13 < e < 17$, es decir, Rocío tenía más de 13 años y menos de 17 años en esa fecha.
3) Si el puntaje de corte de la carrera de Pedagogía Básica en una universidad el año 2012 fue de 585 puntos en la PSU y Esteban ingresó ese año a esa carrera en esa universidad, podemos decir que Esteban obtuvo al menos ese puntaje en la PSU y escribir $P \geq 585$, donde P es el puntaje de Esteban en la PSU correspondiente.

Ejercicios

1. Describa usando los símbolos de desigualdad las siguientes afirmaciones:
   a. Chillán está más cerca de Santiago que Temuco.
   b. Pedro obtuvo una nota mayor que 4,0 en matemática.
2. Anita no supo cuánto pesó su maleta, pero sabe que el máximo admitido para no pagar sobrepeso eran 23 kg y a ella no le cobraron adicional.
3. Describa situaciones que podrían representarse a través de las siguientes desigualdades:
   a. $x \leq 1.990$
   b. $n \geq 8$
   c. $2 \geq p \geq 0$
   d. $m - 3 < 20$
4. Use el símbolo ≤ para ordenar los pares de números que siguen
   a. 1 y $-0,8$
   b. $-3,5$ y $-3,55$
   c. $\frac{5}{6}$ y $\frac{6}{7}$
   d. $-\frac{5}{6}$ y $-\frac{6}{7}$
   e. $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$
   f. $\sqrt{5}$ y 2,5
   g. $\frac{1}{4}$ y 0,25
   h. 1 y $0,\overline{9}$
   i. $3\frac{2}{3}$ y $3\frac{4}{5}$

5.1 Propiedades de las desigualdades

Para visualizar las desigualdades y sus propiedades es muy útil utilizar la recta numérica.

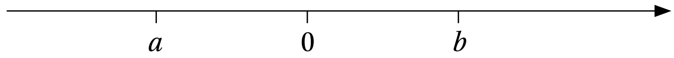


Figura II.14

Cuando en la recta numérica un número a está a la izquierda de otro número b, significa que $a < b$. Los números positivos son aquellos que cumplen $a > 0$, mientras que los negativos satisfacen $a < 0$. En la **Figura II.14**, a es un número negativo y b es positivo.

Veremos, primero, cuatro propiedades fundamentales de las desigualdades que comentaremos a continuación.

Propiedades fundamentales de las desigualdades:

Sean a, b, c y d números reales. Entonces:

a. Se cumple una y solamente una de las siguientes: $a < b$, $a > b$, $a = b$.

b. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

c. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

d. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

Estas propiedades son muy intuitivas y se usan constantemente al trabajar con desigualdades, teniendo el mismo rol que las propiedades fundamentales de la igualdad que vimos en el **apartado II.1.2.** A continuación, comentaremos estas propiedades y veremos cómo visualizarlas en la recta numérica.

Propiedad 1 Sean a y b números reales. Se cumple una y solamente una de las siguientes: $a < b$, $a > b$, $a = b$.

Esta propiedad se llama *tricotomía* y dice que dados dos números cualesquiera, se tiene que uno es mayor que el otro, o son iguales. Pensando en la ubicación de los números en la recta numérica, esta propiedad dice que dos números a y b tienen tres posibilidades de ordenarse: a está a la izquierda de b, o a está a la derecha de b, o a coincide con b.

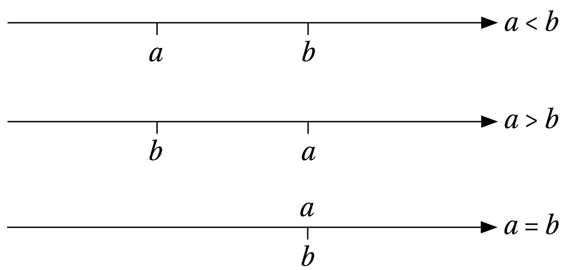


Figura II.15

Propiedad 2 Sean a, b y c números reales, si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Esta propiedad se llama *transitividad* y, por ejemplo, nos permite decir que si $x < 5$ y $5 < y$, entonces $x < y$. También se usa cuando escribimos desigualdades encadenadas, como $a < 5 < b$, la que en particular expresa que $a < b$. La transitividad se visualiza fácilmente en la recta numérica, como se muestra en la **Figura II.16:** si b está a la derecha de a y c está a la derecha de b, entonces c está a la derecha de a.

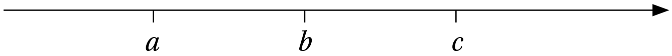


Figura II.16

Propiedad 3 Sean a, b y c números reales, si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Esta propiedad dice que si sumamos cualquier número, positivo o negativo, a ambos lados de una desigualdad, esta se mantiene. Esta propiedad se puede apreciar claramente en la recta numérica, como se muestra en la **Figura II.17**. Si a está a la izquierda de b, entonces al desplazar ambos números en la misma medida a la derecha, que es lo que ocurre al sumarle a ambos el mismo número positivo c, o al desplazar ambos números a la izquierda, es decir sumar un número negativo c, se mantendrá el mismo ordenamiento. Es decir, $a + c$ se ubicará a la izquierda de $b + c$, lo que anotamos como $a + c < b + c$.

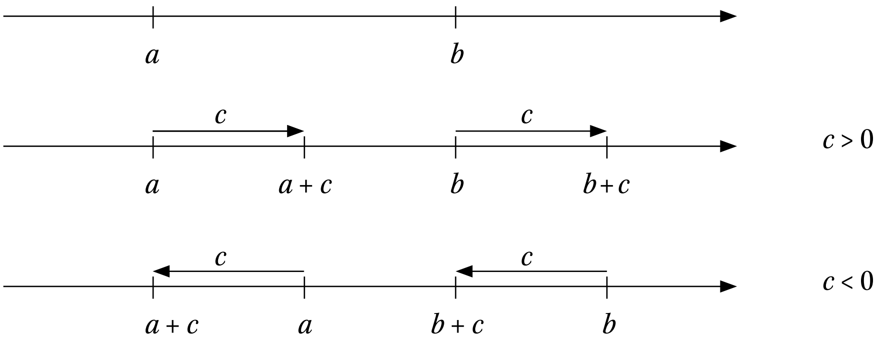


Figura II.17

Propiedad 4 Sean a, b y c números reales. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

Esta propiedad nos permite decir, por ejemplo, que si $b > 0$ y $c > 0$, entonces $bc > 0$. Es decir, si multiplicamos un número positivo por otro positivo, obtenemos un número positivo. Esta propiedad vale independiente del signo de a y b. Como se muestra en la **Figura II.18**, vamos a visualizar esta propiedad en la recta numérica suponiendo que $a < 0 < b$ en los casos $c > 1$ y que $c < 1$.

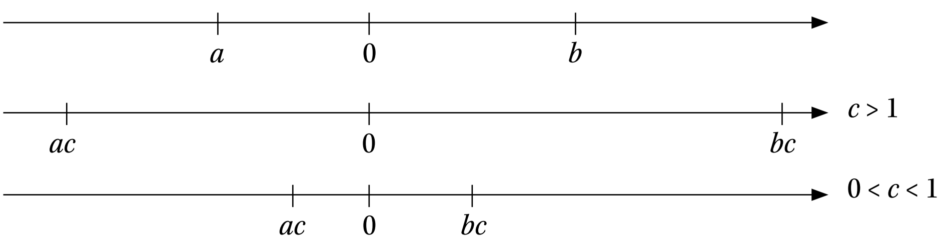


Figura II.18

Ejercicio

Demuestre que las recíprocas de las **propiedades** 3 y 4 son también válidas, es decir:

a. Si a, b y c son números reales y $a + c < b + c$, entonces $a < c$.

b. Si $c > 0$ y $ac < bc$, entonces $a < b$.

A partir de estas cuatro propiedades fundamentales, podemos demostrar otras propiedades de la igualdad.

Propiedad 5 Sean a y b números reales, si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

Esta propiedad se llama *antisimetría*, y dice que si en la recta numérica a está a la izquierda de b o coincide con b y si además b está a la izquierda de a o coincide con b, entonces a y b coinciden. Para demostrar esta propiedad usaremos la **propiedad 1**, que nos dice que solo una de las siguientes es cierta: $a < b$, $b < a$ o $a = b$. Sabemos que $a \leq b$, por lo que $b < a$ no puede ser cierta, de igual manera, descartamos que $a < b$, pues sabemos que $b \leq a$. Así, debemos tener que $a = b$.

Propiedad 6 Sean a y b números reales. Si $a < b$, entonces $-b < -a$, y recíprocamente si $-b < -a$, entonces $a < b$.

Demostremos esta propiedad. Primero, supongamos que $a < b$ y demostremos que $-b < -a$. Si sumamos $-a -b$ a ambos lados de la desigualdad $a < b$ usando la **propiedad 3**, tendremos que:

$$a + (-a -b) < b + (-a -b)$$

y como $a + (-a -b) = a - a - b = -b$ y $b + (-a -b) = b - a -b = -a$, obtenemos que $-b < -a$.

Recíprocamente, si suponemos que $-b < -a$, entonces si sumamos $a + b$ a ambos lados de la desigualdad, obtenemos por la **propiedad** 3 que $-b + (a + b) < -a + (a + b)$, de donde obtenemos que $a < b$.

La **propiedad 6** también se puede visualizar en la recta numérica. Observamos que para encontrar la posición de $-a$ en la recta numérica debemos reflejar a con respecto del 0, es decir, $-a$ se ubicará en un lugar simétrico al de a con respecto al 0, sin importar si a es un número positivo o negativo. En la siguiente figura, ilustramos la **propiedad 6** en el caso en que $a < 0$ y $b > 0$.

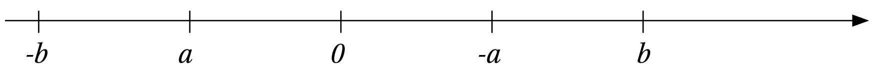


Figura II.19

Propiedad 7 Sean a, b y c números reales. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Esta propiedad nos dice que al multiplicar ambos lados de una desigualdad por un número negativo, esta se revierte. Esta propiedad es consecuencia de la **propiedad 6** y su demostración queda como ejercicio para el lector.

Propiedad 8 Sean a, b, c y d números reales. Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.

Esta propiedad nos permite sumar desigualdades, por ejemplo si $a < 5$ y $b < 7$, entonces $a + b < 12$. Probemos esta propiedad. Si sumamos c a la primera desigualdad $a<b$, obtenemos que $a + c < b + c$ por la **propiedad** 4. Similarmente, si sumamos b a ambos lados de la segunda desigualdad $c < d$, obtenemos que $c + b < d + b$, así tenemos que $a + c < b + c$ y $c + b < d + b$. Usando la **propiedad** 2 obtenemos que $a + c < d + b$.

Ejercicios

1. Demuestre la **propiedad** 7.
2. Las propiedades 2, 3, 4, 7 y 8 siguen siendo válidas si cambiamos $<$ por $\leq$. Demuestre estas propiedades usando las propiedades de la 1 a la 8 de la desigualdad y las propiedades de la igualdad vistas en el apartado I.1.2. Recuerde que $a \leq b$ significa que $a < b$ o $a = b$.
3. Sean a, b y c números reales. Pruebe que si:

   a. $a \leq b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

   b. $a < b$ y $b \leq c$, entonces $a < c$.
4. Demuestre la validez de la afirmación recíproca de la **propiedad** 7, es decir, si a, b y c son reales con $c < 0$, entonces si $ac > bc$, entonces $a < b$.
5. Discuta la validez de la afirmación recíproca de la **propiedad** 8: "Si a, b, c y d son números reales y si se cumple que $a + c < b + d$, entonces $a < b$ y $c < d$".
6. Si $a < b$ ¿se puede concluir que $a^2 < b^2$? Si su respuesta es afirmativa, justifíquela con una demostración. Si su respuesta es negativa, justifíquela con un contraejemplo.

En resumen

En esta sección hemos establecido las siguientes propiedades de las desigualdades:

1. Para cualquier par de números reales se cumple una y solamente una de las siguientes: $a < b$, $a > b$, $a = b$.
2. Sean a, b y c números reales. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
3. Sean a, b y c números reales. Si $a < b$ entonces, $a + c < b + c$ y recíprocamente, si $a + c < b + c$, entonces $a < b$.
4. Sean a, b y c números reales con $c > 0$. Si $a < b$, entonces $ac < bc$ y recíprocamente, si $ac < bc$, entonces $a < b$.
5. Sean a y b números reales. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.
6. Sean a y b números reales. Si $a < b$, entonces $-b < -a$, y recíprocamente si $-b < -a$, entonces $a < b$.
7. Sean a, b y c números reales con $c < 0$. Si $a < b$, entonces $ac > bc$, y recíprocamente, si $ac > bc$, entonces $a < b$.
8. Sean a, b, c y d números reales. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.

Las propiedades 2, 3, 4, 6, 7 y 8 también son válidas si reemplazamos $<$ por $\leq$.

5.2 Inecuaciones

En muchas situaciones, necesitamos establecer un rango de posibilidades de acuerdo a restricciones de tiempo, de presupuesto, de distancia, de afinidad o gusto, de espacio disponible, y tantas otras. En general, la pregunta acerca de ese rango de posibilidades se expresa matemáticamente como la búsqueda de todos los números que satisfacen una *inecuación*.

Definición II. 5 Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas que involucran una cantidad desconocida o incógnita. Resolver una inecuación quiere decir determinar todos los posibles valores de la incógnita que satisfacen la inecuación.

Veamos algunos ejemplos de problemas cuya resolución involucra la resolución de una o más inecuaciones.

Ejemplos

1) El centro de padres de un curso juntó $200.000, a través de una rifa, para comprar regalos de Navidad para todos los niños del curso. Han decidido que los 30 niños recibirán el mismo juguete. Calculan que gastarán $10.000 en locomoción cuando vayan a hacer la compra y necesitan saber cuál es el rango de precios en el que pueden escoger el regalo. Si p es el precio del regalo, entonces debe satisfacer la inecuación:

$$30p + 10.000 \leq 200.000.$$

2) En una autopista de un país europeo existe un límite mínimo de velocidad. Circular a menos de 75 km/h se considera una infracción que es multada. Elena debe recorrer una distancia de 300 km por esa autopista y su vehículo no está en buenas condiciones mecánicas, por lo que debe conducir a una velocidad moderada y en ningún caso superar los 100 km/h. Debido a compromisos que tiene en su lugar de destino, necesita estimar el tiempo t en horas que podría tomarle ese viaje, el cual realizará a velocidad constante. Como la velocidad, en km/h, es la distancia recorrida (en kilómetros) dividida por el tiempo (en horas) empleado en ese recorrido, las restricciones de velocidad que tiene Elena se expresan con las siguientes inecuaciones:

$$75 \leq \frac{300}{t} \leq 100.$$

Resolveremos estas inecuaciones usando las propiedades de las desigualdades, tal como lo hicimos cuando trabajamos con ecuaciones. La clave es transformar la inecuación en otra más simple que sea *equivalente* a la original.

Definición II. 6 Dos inecuaciones se dicen equivalentes si es posible transformar una en la otra usando las propiedades de la desigualdades y viceversa. Si dos inecuaciones son equivalentes, entonces cualquier valor de la incógnita que satisfaga una de las desigualdades también satisface la otra.

Si una inecuación es transformada en otra solamente usando las **propiedades** 3, 4, 6 y 7, entonces son equivalentes.

En el primer ejemplo, se nos pide determinar para qué valores del precio del juguete p se cumple que $30p + 10.000 \leq 200.000$. Para determinar el rango deseado, partimos restando 10.000 a ambos lados de la desigualdad, o sumando -10.000, lo cual por la **propiedad** 3 (usada para $\leq$) es equivalente a la desigualdad original. Así $30p \leq 200.000 - 10.000 = 190.000$. Ahora si multiplicamos esta desigualdad por 1/30, obtenemos que esta desigualdad es equivalente a $p \leq \dfrac{190.000}{3} = 6.333,\overline{3}$. ¿Por qué? En el contexto del problema, los precios deben ser enteros, así el precio debe satisfacer $p \leq 6.333$.

Veamos ahora cómo resolver las desigualdades del segundo ejemplo, en el que se nos pide encontrar los valores de t, tal que $75 \leq \dfrac{300}{t} \leq 100$. Debido a que t es el tiempo que demora el viaje, debe ser un número positivo. Esta suposición será clave al resolver estas inecuaciones.

Encontremos primero cuándo $75 \leq \dfrac{300}{t}$. Como $t > 0$, podemos multiplicar ambos lados de esta desigualdad por t y obtener que $75t \leq 300$, de donde $t \leq \dfrac{300}{75} = 4$. Así, el tiempo que demorará el viaje es menor o igual a 4 horas. Por otra parte, t también debe satisfacer la desigualdad $\dfrac{300}{t} \leq 100$. Procediendo de manera similar, obtenemos que esta desigualdad es equivalente a $t \geq \dfrac{300}{100} = 3$, es decir, el tiempo de viaje es mayor o igual a 3 horas. Así, el rango de tiempos deseado es $3 \leq t \leq 4$, es decir, el viaje demorará entre 3 y 4 horas.

Usualmente, se usa la recta numérica para visualizar las soluciones de las inecuaciones. Para esto, se marca con una línea sobre la recta numérica el rango de valores deseado. Por ejemplo, en la siguiente figura se identifican los valores $3 \leq t \leq 4$ en la recta numérica:

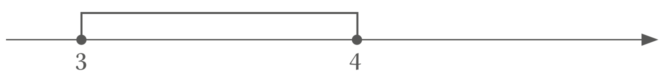


Figura II.20

Los puntos sólidos (•) en 3 y 4 indican que ambos puntos son parte de los valores que puede tomar t.

Veamos otro ejemplo. Representemos en la recta numérica los números x tal que $8 < x$ o $x \leq 4$

Figura II.21

Aquí, usamos un círculo sin relleno (○) en 8 para indicar que este punto no está incluido en el rango de números descrito por las desigualdades.

Ejercicio

Determine para qué valores reales de t se cumple que

$$1 \leq \frac{1}{t} \leq 2$$

y bosqueje la solución en la recta numérica.

Al igual que con las ecuaciones, no siempre las inecuaciones tienen solución, es decir puede pasar que ningún número satisfaga la desigualdad involucrada. Por ejemplo, la inecuación $2(x+1) < 2x + 1$ no tiene solución, ya que si restamos $2x$ a ambos lados, obtenemos la desigualdad equivalente $2 < 1$, que es siempre falsa.

Ejercicios

1. Juan y María son dos compañeros que deben encontrar un horario para reunirse durante 2 horas. María estará ocupada en clases hasta las 10 de la mañana y entre las 2 y las 4 de la tarde debe asistir a una escuela que está a 25 minutos de distancia de la universidad. Juan estará ocupado hasta las 11 de la mañana. Describa mediante inecuaciones todas las restricciones que afectan el horario de inicio de la reunión y determine el rango posible de horarios en que Juan y María se pueden reunir.

2. Si el lado de un cuadrado es mayor o igual a 5 cm, ¿qué se puede afirmar respecto de su área?

3. Dos hermanos tienen 8 años de diferencia. Determine en qué período de sus vidas, el hermano mayor tendrá por lo menos 4 años más que el doble de la edad del hermano menor.

4. Determine si los números que siguen son soluciones de la inecuación $3x + 4 > 24 - 11$.

   a. -1 c. 3 e. $7{,}2$
   b. 0 d. $2{,}9$ f. $\sqrt{7}$

5. Verifique si las siguientes desigualdades son equivalentes

   a. $2x + 5 < 3$ y $-2x < -2$
   b. $x + 3 + 2(x+4) < x + 5$ y $2x + 6 < 0$
   c. $x^2 + 5x \leq 0$ y $x + 5 \leq 0$

6. Resuelva las siguientes desigualdades mostrando sus soluciones, si existen, en la recta numérica:

   a. $5x + 11 < 2x + 3$ c. $\dfrac{1}{x} < 5 < x + 1$
   b. $2x < 1 < 3x + 2$ d. $x + 5 \leq 2x - 3 < 3x + 10$

En resumen

- Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas que involucran una cantidad desconocida o incógnita.
- Resolver una inecuación es encontrar todos los valores de la incógnita que satisfacen la desigualdad.
- La resolución de inecuaciones está basada en el uso de las propiedades de las desigualdades, las cuales permiten transformar la inecuación en otra equivalente.

Ejercicios de la sección

1. Si $a < b$, ¿se puede concluir que $c - b < c - a$ para cualquier número c? Si su respuesta es afirmativa, justifíquela con una demostración. Si su respuesta es negativa, justifíquela con un contraejemplo.
2. Inserte el signo "=" o ">" o "<", según corresponda para que las afirmaciones que siguen sean verdaderas:

   a. Si $x > 5$, entonces $x + 8$ ____ 13.

   b. Si $x > -3$, entonces $-5x + 18$ ____ 33.
3. Si el área de un círculo es menor a 12 cm^2 ¿qué se puede afirmar respecto de su diámetro?
4. Un auto viaja hacia el sur a una velocidad de entre 80 km/h y 110 km/h. ¿Entre qué valores se encuentra la distancia recorrida al cabo de 4 horas?
5. Proponga problemas cuya solución involucre resolver las siguientes inecuaciones y resuélvalas. Asegúrese de que la solución tenga sentido para el problema propuesto:

   a. $L + 5 < 2L - 1$

   b. $2x + 1.900 \leq 30.000$ y $x \geq 1.000$

   c. $-10 < \dfrac{x + (x - 12)}{2} < 12$

   d. $9x < 36 < 12x$
6. Se sabe que $3{,}1 < a < 3{,}2$ y que $7{,}5 < b < 7{,}6$. Encuentre desigualdades que permitan localizar la ubicación de las siguientes expresiones en la recta numérica, que se deduzcan de las desigualdades dadas para a y b:

   a) $3a$

   b) $-2b$

   c) $a + b$

   d) $b - a$

   e) a^2

   f) $\dfrac{a}{b}$
7. Demuestre que si a y b son números no negativos, entonces $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
8. Si al doble de la edad de Josefa le sumamos 5, nos da menos de 31. Pero si a la edad de Josefa le restamos 4, nos da a lo más 8. ¿Qué puedes decir acerca de la edad que tiene Josefa?

6. Dificultades y errores asociados al trabajo con ecuaciones

El trabajo con ecuaciones involucra distintas tareas en cuya ejecución se pueden manifestar dificultades y errores. Por ejemplo, cuando se plantean ecuaciones para resolver problemas de contexto, es necesario elegir o reconocer las variables presentes, describir las relaciones entre ellas mediante ecuaciones *(matematizar el problema)*, y también interpretar las soluciones obtenidas para dar respuesta al problema *(desmatematizar)*. El proceso de resolución también involucra distintas manipulaciones algebraicas, las cuales pueden tener asociadas sus propias dificultades y errores.

La tarea de describir problemas de contexto usando matemática, en particular ecuaciones, es de gran complejidad y se desarrolla gradualmente. Hay que estar conscientes de esta dificultad y dar herramientas para su superación. Tal como vimos en la **Sección 2**, el trabajo con diagramas es una herramienta para modelar problemas de contexto, que ayuda a enfrentar la dificultad inherente al planteamiento de ecuaciones. También es importante tener en cuenta, que el proceso inverso en el cual se interpretan los resultados obtenidos mediante un procedimiento matemático, a la luz del contexto en el que se planteó el problema, es frecuentemente olvidado. Conectar los desarrollos matemáticos con la solución de problemas concretos ayuda a dar sentido al trabajo algebraico.

En esta sección nos concentraremos en los errores y dificultades que se producen en el trabajo con ecuaciones lineales, abordando aquellos relacionados con el uso del signo "=" y con la resolución algebraica de ecuaciones.

La igualdad es una idea muy básica y esencial en matemáticas, cuyo significado preciso puede cambiar dependiendo del contexto. La primera forma en que los niños usan la idea de igualdad es para entregar el resultado de una operación, por ejemplo, se dice "dos más dos es igual a cuatro". En el capítulo anterior, vimos igualdades entre expresiones algebraicas y nuestro interés actual se refiere al significado de la igualdad en el contexto de las ecuaciones. Este uso es diferente del que se hace al escribir ecuaciones. Cuando escribimos:

$$2x + 3 = 5,$$

se está planteando una pregunta implícita acerca de cuáles son las soluciones o los valores que puede tomar la incógnita x para que la igualdad sea cierta. En nuestro ejemplo, la igualdad planteada será falsa para cualquier valor de x distinto de 1 y cierta para $x = 1$.

Para comprender y enfrentar los errores y dificultades asociados a la igualdad, es necesario reconocer los variados usos del signo "=". En los primeros niveles de la escolaridad, este signo se utiliza principalmente para indicar que se debe entregar el resultado de una operación, es decir, como una instrucción. Sus primeras apariciones ocurren en frases como:

$$2 + 3 = 5,$$

que se lee como *"dos más tres es cinco"* o *"dos más tres es igual a cinco"*, y en ejercicios como:

$$5 + 3 = \_\_\_\_.$$

Aun antes de la introducción de las ecuaciones, ocurren errores relacionados con un uso desprolijo o francamente equivocado del signo "=". Por ejemplo, en tareas como la siguiente:

Completa el espacio con el número que corresponda en: $8 + 4 = \_\_\_\_ + 5$,

se obtienen respuestas erróneas, como 12 ó 17, que corresponden a resultados de sumar $8 + 4$ en un caso y $8 + 4 + 5$, en el otro caso.

Otro error común, basado también en el uso del signo "=" para poner un resultado, se produce cuando se pide resolver un problema como el siguiente:

La mamá de Manuel tiene 30 años. Manuel tiene 4 años más que un quinto de la edad de su mamá. Encuentra la edad de Manuel.

Se pueden encontrar respuestas correctas obtenidas con los cálculos que siguen:

$$30 \div 5 = 6 + 4 = 10.$$

La edad de Manuel es 10 años.

Claramente, la respuesta al problema es la correcta y la idea detrás del procedimiento es adecuada. El error se reduce a la escritura, específicamente, al uso del signo "=", ya que la primera de las igualdades es falsa.

Para pensar

¿Cómo contribuye el uso de las calculadoras a las confusiones en el uso del signo "="?

Ejercicio

Presente correctamente la solución del problema anterior.

Al iniciar el trabajo con ecuaciones, es importante entender la igualdad como una relación entre los números al lado derecho y al lado izquierdo del signo "=", es decir, darle un sentido bidireccional a la igualdad, lo que dista de su primera función como instrucción para poner un resultado. Ejemplos y ejercicios como los que siguen fomentan este cambio de visión.

Ejemplos

a. $4 + 5 = 8 + 1$
b. $10 + 5 = 18 - 3$
c. $4 \cdot 3 = 9 + 3$
d. $\frac{27}{1} = 27 + 0$

Ejercicios

a. $15 + 2 = \_\_\_\_ - 3$
b. $\_\_\_\_ - 6 = 33 + 3$
c. $525 : 5 = \_\_\_\_ + 5$

Ejercicio

Proponga distractores para los siguientes ejercicios escolares

a. $28 - 5 = \_\_\_\_ + 12$ b. $24 : 4 = \_\_\_\_ - 3$ c. $35 + 7 = \_\_\_\_ \cdot 7$

En la resolución de ecuaciones aparece también con frecuencia un problema relacionado con una forma descuidada en que se presenta el procedimiento de resolución. Consideremos la tarea

Resuelva la ecuación $4x + 3 = 2x + 7$.

En el proceso de resolver este tipo de ecuaciones puede ocurrir que el procedimiento se presente como una serie de igualdades que no son falsas, pero que ocultan la razón que las fundamenta y que, por lo tanto, no quisiéramos promover, como las siguientes:

$$4x + 3 - 3 = 2x + 7 - 3 = 4x = 2x + 4$$

$$4x - 2x = 2x + 4 - 2x = 2x = 4$$

$$x = 2.$$

Aquí el problema ocurre en la escritura del procedimiento y no afecta al resultado. Este inconveniente se produce al mezclar igualdades de distinto tipo en procedimientos que normalmente se escriben en líneas separadas y que rara vez explicamos cómo se vinculan entre ellas. Una escritura correcta y más transparente, pero que no explica la relación entre las igualdades que se escriben, sería:

$$\begin{aligned} 4x + 3 &= 2x + 7 \\ 4x + 3 - 3 &= 2x + 7 - 3 \\ 4x &= 2x + 4 \\ 4x - 2x &= 2x + 4 - 2x \\ 2x &= 4 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Para aclarar el sentido de esta escritura, conviene verbalizar todas las relaciones y argumentos que se usan para establecerlas. La relación entre la primera y la segunda línea es del tipo "si…, entonces…". Es importante leer o incluso escribir todo el argumento:

Si $4x + 3 = 2x + 7$, entonces esta igualdad se mantendrá si restamos el número 3 a los dos lados de la igualdad, que es lo que escribimos en la segunda línea.

Como ejercicio, le pedimos que describa de este modo todo el proceso de resolución como una cadena de deducciones válidas.

En la verbalización del proceso de resolución algebraica hay también precauciones que debemos tomar. En el segundo paso, podemos decir que "sumamos el inverso aditivo de 3 a ambos lados de la igualdad", lo que es correcto, pero puede ser inadecuado al nivel escolar. Una manera más simple de decirlo es "restamos 3", o, como hicimos en una sección anterior, descomponer 7 como 4 + 3 y restar 3 a ambos lados de la igualdad:

$$4x + 3 = 2x + 4 + 3$$

$$4x = 2x + 4.$$

Al hablar de *inversos aditivos* también se corre el riesgo de complejizar la tarea. Por ejemplo, si en el proceso de resolución de una ecuación se comete el siguiente error:

$$2x - 2 = 1$$

$$2x = 1 - 2,$$

explicar que el inverso aditivo de −2 es 2 y no −2 puede no ser útil para aclarar que lo que se desea es cancelar el −2 para simplificar la ecuación y que por eso debemos sumar 2 a ambos lados de la igualdad.

Es importante que los alumnos comprendan el propósito del procedimiento algebraico y el sentido de cada paso para conseguir una ecuación equivalente más sencilla de la cual obtener la solución. En este contexto, cuando se ha llegado a una ecuación del tipo:

$$2x = 4,$$

de la cual resulta obvio que la solución es $x = 2$, no es necesario pedir ningún paso adicional ni que expliquen que la solución se obtiene dividiendo ambos lados por 2. Tales explicaciones solo producen la idea de que el procedimiento es una serie de pasos formales y sin sentido.

Los alumnos de enseñanza básica pueden resolver ecuaciones simples solo a través de relaciones numéricas, sin utilizar los procedimientos formales de resolución algebraica. Consideremos, por ejemplo, las ecuaciones:

$$x + 5 = 15,$$

$$5x + 3 = 8x.$$

El primer problema ha sido resuelto muchas veces antes de llegar a trabajar ecuaciones bajo la forma de ___ + 5 = 15. En el segundo problema, verán que 3 tiene que ser igual a $3x$ para que al sumarle $5x$ se obtenga $8x$, concluyendo que $x = 1$. Si bien los razonamientos usados en la resolución de los ejercicios anteriores son muy útiles y su promoción es aconsejable, también pueden ser fuente de errores en problemas más complejos. La resolución de ecuaciones lineales a niveles escolares superiores incluirá problemas como:

$$\frac{x+1}{x+4} = \frac{3}{7}.$$

Un alumno puede responder que este ejercicio tiene 2 soluciones: $x = 2$ y $x = 3$, basándose solo en relaciones numéricas aplicadas por separado al numerador y al denominador. Esto muestra cuán importante resulta que los alumnos comprendan las justificaciones de las estrategias anteriores y sus limitaciones, y aprecien los métodos formales de resolución de ecuaciones, basados en las propiedades de la igualdad. Para que esto ocurra, es imprescindible que al introducir estos procedimientos se presenten problemas más desafiantes que los del ejercicio previo, que permitan motivar el aprendizaje de técnicas más sofisticadas.

A nivel escolar, también se puede producir confusión entre el trabajo con expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones. Cuando se pide a los alumnos que simplifiquen la expresión:

$$2\,(x + 1) + x - 2,$$

se pueden obtener respuestas como $x = 0$, en lugar de $3x$, pues los alumnos suponen que se debe resolver la ecuación $2\,(x + 1) + x - 2 = 0$. Como se vio en el capítulo anterior, muchos errores en el trabajo con expresiones algebraicas se originan en que los alumnos están acostumbrados a que las tareas matemáticas entreguen un resultado numérico. El trabajo con expresiones algebraicas es una instancia donde se pueden ver respuestas matemáticas de diferente naturaleza.

Ejercicios de la sección

1. Construya 3 distractores para la solución de las siguientes ecuaciones fundamentando su elección.
   a. $6\,(x - 2) - 3 = 3x$
   b. $8 - 2x = -13 - x$
   c. $x\,(21 - 14) = 2\,(4 - x)$
2. Un alumno resuelve la ecuación $3x - 5 = 2\,(x + 8)$ de la siguiente manera:

   $$3x - 5 = 2\,(x + 8) = x - 5 = 16 = x = 21$$

   y responde que la solución es $x = 21$. A pesar de que el valor obtenido para x es correcto, la resolución de la ecuación no lo es. Explique qué errores cometió el alumno y muestre cómo resolver la ecuación correctamente.
3. Construya distractores para el ejercicio:

   Simplifique la expresión 6 (x – 2) – 3 – x.
4. En la resolución de ecuaciones, los alumnos pueden cometer errores conceptuales, así como errores de desprolijidad. Dé tres ejemplos de cada uno de estos dos tipos de errores que permitan distinguirlos con claridad.
5. Explique cuáles errores conceptuales (si es que los hay) se manifiestan en los siguientes procedimientos erróneos:
   a. $30 - 3x = -26$, por lo que $4 = 3x$
   b. $3\,(20 - x) = -30$, por lo que $60x - 3x = -30$
   c. $3\,(20 - x) = -30$, por lo que $60 - x = -30$

6. Un alumno dice que la ecuación $5x = 7x$ no tiene solución, pues $5 \neq 7$. ¿Cómo enfrentaría este error?

7. Describa los razonamientos que pueden realizar alumnos de enseñanza básica para resolver las ecuaciones que siguen, sin utilizar los procedimientos formales de resolución algebraica:

   a. $6x + 3 = 7x$

   b. $4x + 3 = 15$

Capítulo III

Patrones y secuencias

Introducción

Reconocer patrones nos ayuda a realizar predicciones y así anticiparnos a sucesos futuros, lo que es fundamental para nuestra vida. Las estaciones del año, las fases de la luna, la ocurrencia de eclipses lunares y solares son todos ejemplos de fenómenos que siguen una secuencia determinada, lo que nos permite predecirlos.

Un aspecto muy importante para reconocer patrones es poder describirlos de manera clara. El álgebra es una importante herramienta para este fin, ya que el uso de variables nos permite expresar reglas generales de manera precisa. La descripción matemática de los patrones también nos puede ayudar a entender por qué aparecen, y esto es crucial si se quiere no solo describir, sino que también comprender el mundo que nos rodea.

El reconocimiento de patrones aparece de manera muy temprana en la escolaridad. Niños y niñas de nivel preescolar reconocen patrones repetitivos que aparecen en secuencias de figuras y a, medida que se avanza en la escolaridad, se presentan tareas en las cuales se deben completar distintas secuencias numéricas siguiendo una regla que se presenta de manera implícita: por ejemplo, continuar la secuencia: **0, 5, 10, 15, 20**. Este tipo de tareas son importantes, ya que contribuyen a cimentar el desarrollo del razonamiento *inductivo*, donde a partir de una regularidad observada se hace una predicción o conjetura. Sin embargo, es fundamental tener en cuenta que continuar una secuencia es siempre ambiguo, pues no hay una única regla que permita explicar un número finito de términos. Esta consideración es clave a la hora de proponer actividades y evaluarlas. La respuesta que pueda proponer un niño o niña dependerá de la regla en la cual basa su predicción. La discusión de esta regla es lo que permite que se exprese el razonamiento que se quiere fomentar en el trabajo matemático.

En la educación básica hay muchas oportunidades para reconocer patrones o regularidades numéricas que se presentan en el trabajo con números y operaciones. Por ejemplo, se pueden apreciar distintas regularidades en la tabla de 10×10, en las tablas de multiplicar y en la expansión decimal de fracciones, entre otras. Reconocer este tipo de patrones nos permite conjeturar propiedades matemáticas en base a algunos ejemplos. Sin embargo, la validez de estas propiedades no está dada por la presencia de un determinado patrón, sino que requiere de una demostración, es decir, de un *razonamiento deductivo* que permita comprobar la validez de la conjetura usando propiedades matemáticas que sabemos ciertas.

En este capítulo abordaremos el estudio de distintos tipos de patrones, como son los patrones numéricos descritos anteriormente, y las secuencias numéricas, tales como progresiones aritméticas y geométricas y sus sumas asociadas, que son de gran interés en distinto tipo de problemas.

1. Patrones numéricos

En el trabajo con números y operaciones observamos que surgen distintas regularidades o patrones, los cuales muchas veces utilizamos como herramientas de cálculo. Por ejemplo, al multiplicar un número natural por 10 solo debemos agregar un 0 a la derecha del número. Esta regla se puede formular a partir de algunos ejemplos, como $2 \cdot 10 = 20$; $3 \cdot 10 = 30$; $4 \cdot 10 = 40$; $10 \cdot 10 = 100$. La validez de esta propiedad se sustenta en nuestro sistema de numeración decimal, al multiplicar un número por 10, el valor de cada dígito del número se multiplica por 10. Así, el dígito de la unidad se convierte en el dígito de la decena, el dígito de la decena en el de la centena, y así sucesivamente.

En la tabla de multiplicación por 9 también se aprecian regularidades:

$9 \cdot 1 = 9$
$9 \cdot 2 = 18$
$9 \cdot 3 = 27$
$9 \cdot 4 = 36$
$9 \cdot 5 = 45$
$9 \cdot 6 = 54$
$9 \cdot 7 = 63$
$9 \cdot 8 = 72$
$9 \cdot 9 = 81$
$9 \cdot 10 = 90$

Figura III.1

Por ejemplo, podemos observar que de una fila a otra la decena aumenta en uno y la unidad disminuye en uno. Esta regularidad aparece, pues, al pasar de una fila a otra, estamos sumando 9, lo que equivale a sumar 10, es decir, aumentar una decena y luego restar 1, o sea, disminuir una unidad. Otra regularidad que podemos observar es que la suma de los dígitos de cada uno de los productos es siempre 9.

Ejercicios

1. Explique por qué la regla para multiplicar por 10 es válida para números decimales.

2. Explique por qué la suma de los dígitos de los productos de la tabla del 9 mostrada arriba, es siempre 9. ¿Se puede generalizar esta propiedad si se continúa la tabla? Si es así ¿cómo lo haría?

3. Considere la secuencia de los múltiplos de 8, ¿qué regularidad observa en el dígito de la unidad de cada número de la secuencia? ¿por qué ocurre esta regularidad?

En la tabla de 10×10, que se muestra a continuación, se pueden apreciar diversas regularidades:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura III. 2

Por ejemplo, observemos las siguientes diagonales principales de la tabla:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura III. 3

Vemos que si recorremos los números de la diagonal que parte en 1, al pasar de un número al siguiente se aumenta la unidad en 1 y la decena en 1. También observamos que si recorremos los números de la otra diagonal partiendo del 91, al pasar de un número al siguiente se aumenta en 1 la unidad y se disminuye en 1 la decena. Queda como ejercicio para el lector explicar por qué ocurren estas regularidades.

Veamos otra. Consideremos el siguiente cuadrado de 3×3 de la tabla:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura III.4

Notamos que al sumar los números de una diagonal de esta tabla obtenemos $13 + 24 + 35 = 72$ y si sumamos los números de la otra obtenemos $15 + 24 + 33 = 72$. Ambos números son iguales, y son el triple del número del centro del cuadrado. Veamos otro ejemplo con el cuadrado de la tabla que está a continuación:

45	46	47
55	56	57
65	66	67

Figura III.5

En este caso, la suma de las diagonales es $45 + 56 + 67 = 168$ y $47 + 56 + 65 = 168$, vemos que ambas sumas son iguales y son iguales al triple del número del centro del cuadrado. Esta propiedad se cumple en todos los cuadrados de 3×3 de la tabla. Queda como ejercicio demostrar esta propiedad.

Ejercicios

1. Explique por qué ocurren las regularidades de las diagonales de la tabla de 10×10 descritas anteriormente.

2. Explique por qué si se suman los números de la diagonal de un cuadrado de 3×3 de la tabla de 10×10, se obtiene el triple del número del centro.

3. Demuestre que si se suman los números de cada diagonal de un cuadrado cualquiera de la tabla de 10×10, los resultados son iguales.

También se observan regularidades en la secuencia de las potencias de 2. En la siguiente tabla, se muestran las 10 primeras potencias:

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Tabla III.1

Podemos ver que en el dígito de las unidades se repite el patrón 2, 4, 8, 6. Luego de reconocer este patrón, podemos responder preguntas tales como: cuál es el dígito de las unidades del número 2^{75}, lo que evidentemente no se puede responder calculando la potencia. Para esto, vemos que cuando el exponente es múltiplo de cuatro, la potencia termina en 6. Por lo tanto, 2^{76} termina en 6 y entonces 2^{75} termina en 8. Justifiquemos por qué las unidades de las potencias de 2 siguen este patrón repetitivo:

- Si se multiplica por 2 un número cuyo dígito de las unidades es 2, el resultado tendrá dígito de las unidades 4.
- Si se multiplica por 2 un número cuyo dígito de las unidades es 4, el resultado tendrá dígito de las unidades 8.
- Si se multiplica por 2 un número cuyo dígito de las unidades es 8, el resultado tendrá dígito de las unidades 6.
- Si se multiplica por 2 un número cuyo dígito de las unidades es 6, el resultado tendrá dígito de las unidades 2.

Para pensar

Considere un número natural arbitrario n y forme su secuencia de potencias:

$$n, n^2, n^3, n^4, \ldots$$

¿Será cierto que la secuencia formada por el dígito de las unidades de estas potencias sigue un patrón repetitivo?

En resumen

- Hay numerosos patrones que surgen en el trabajo con números y operaciones.
- Parte del trabajo matemático consiste en descubrir patrones, los que develan propiedades matemáticas.

Ejercicios de la sección

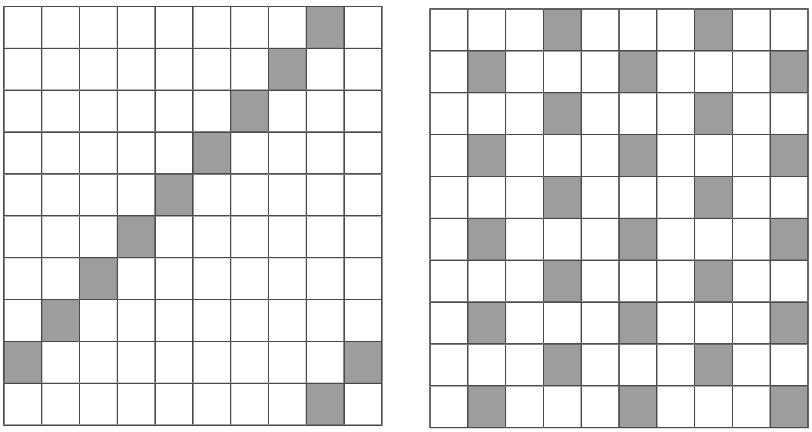
1. Considere un cuadrado cualquiera de 3×3 de la tabla de 10×10. Demuestre que si se multiplican los vértices opuestos y luego se sustrae el menor producto del mayor, se obtiene siempre 40.

2. Describa una regularidad de la tabla del 11 y explique por qué se cumple.

3. Describa al menos 4 regularidades que se presentan en la tabla de 10×10 y explique su validez.

4. Describa regularidades que se encuentran en la tabla de 7×7 explicando por qué se cumplen.

5. Caracterice el tipo de números de la tabla de 10×10 que forman los siguientes patrones:



6. Considere la siguiente secuencia de números:

$$1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, \ldots$$

   a. Observe que los dígitos correspondientes a las unidades siguen un patrón repetitivo. Describa esta regularidad.
   b. Además del patrón repetitivo encontrado, se puede observar que la diferencia entre un término y el siguiente es 5. Si continuamos la secuencia usando esta regla ¿cuál es el término 100? ¿cuál es el término n?
   c. Si se continúa la secuencia usando la regla descrita en la parte (b.), ¿los dígitos de las unidades siguen el patrón repetitivo descrito en (a.)? Justifique su respuesta.

d. ¿Hay alguna regularidad que cumplan los dígitos correspondientes a las decenas en esta secuencia?

e. De las regularidades indicadas, ¿cuáles de ellas cree qué podría haber sido descubierta por un niño o niña de 3º básico? ¿cómo cree usted que el niño o niña podría explicar la regularidad encontrada?

f. ¿Está el número 999 en la secuencia? Explique cómo llegó a su respuesta y cómo podría razonar un niño de 4º básico para responder a esta pregunta.

7. Considere la siguiente secuencia:

$$3, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots$$

cuyo término n está dado por 3^n.

a. ¿Qué patrón o regularidad tienen los dígitos de las unidades de esta secuencia? ¿por qué?

b. ¿Cómo determinaría el dígito de las unidades del número 3^{125}?

c. Explique el procedimiento que usaría para encontrar el dígito de las unidades de 3^n.

d. ¿Cuál es el dígito de las unidades de $2^{156}\,3^{156}$ y $2^{123}\,3^{45}$? Explique el procedimiento usado para encontrarlos.

8. Considere la siguiente secuencia de potencias de 7 dada por: $7, 7^2, 7^3, 7^4, \ldots$

a. Describa el patrón o regularidad que tienen los dígitos de las unidades de los números de esta secuencia.

b. ¿Cuál es el dígito de las unidades de 7^{123}?

9. ¿Para qué números naturales se tiene que el dígito de las unidades de la secuencia de potencias es siempre el mismo?

10. Describa al menos 4 patrones o regularidades de la tabla de multiplicación de 10×10, que se muestra a continuación, y explique la validez de cada una de ellas.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	49	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

2. Secuencias

Una secuencia es una lista ordenada de números o figuras que puede ser finita o infinita. Así, en una secuencia se puede identificar la posición de cada número o figura tal como se aprecia a continuación:

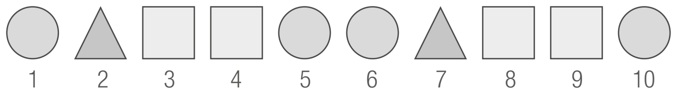


Figura III.6

En los niveles prescolares, los niños y niñas son enfrentados a problemas que involucran continuar secuencias de figuras, colores, etc. En estas actividades, los niños deben reconocer un patrón repetitivo y continuar la secuencia. Por ejemplo, consideremos la siguiente actividad para niños de kínder:

Dibuja el próximo elemento de la secuencia:

Figura III.7

A pesar de que este tipo de ejercicio ayuda a desarrollar el razonamiento inductivo, hay que tener cuidado, ya que se trata de tareas abiertas, las cuales no tienen una única solución. En esta actividad se espera que los niños y niñas reconozcan cuál es el patrón que se repite en la secuencia. En el ejemplo está implícito que la secuencia continuará siempre igual, los niños deben reconocer que el patrón carita feliz-corazón-corazón, que solo se muestra dos veces en la ilustración, es el que se sigue repitiendo. Sin embargo, una respuesta basada en suponer que la secuencia se repite entera dirá que el término siguiente es una carita feliz, y también es válida, lo que es importante es la discusión que permite conocer el razonamiento que lleva a esa respuesta.

Como hemos visto, al plantear tareas donde se pide que se reconozca un patrón que se repite, está implícito que hay uno presente y que se puede reconocer. Así, es necesario que este patrón aparezca más de una vez. Si en una secuencia de letras solo se muestra *A E A*, se puede creer que la siguiente letra es *E*, suponiendo que el patrón que se repite es *A E*, pero también esta podría ser *A*, si el patrón que se repite es *A E A*. En este caso, no es claro cuál es el patrón, ya que no se lo muestra repetido más de una vez para poder observarlo con claridad.

En este tipo de tareas, también se supone que el primer elemento de la secuencia debe ser el punto de partida del patrón. Así, en la siguiente secuencia:

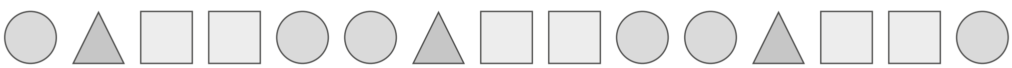


Figura III.8

el patrón que se repite, de acuerdo a esta convención, es:

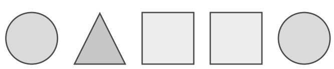


Figura III.9

Si no nos fijamos en el primer elemento, podríamos decir que el patrón que se repite es:

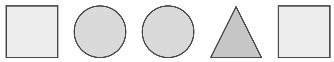


Figura III.10

lo cual es correcto, solo si se parte desde la cuarta figura. Observamos que las tareas de reconocer patrones, incluso repetitivos, y continuar secuencias tienen ambigüedades asociadas que se deben tener en cuenta al momento de realizarlas.

Hay muchas secuencias que se construyen siguiendo el mismo patrón repetitivo, a pesar de que estén constituidas de objetos distintos. Por ejemplo, las secuencias

$$A\ B\ B\ A\ B\ B\ A\ B\ B\ldots$$

$$1\ 2\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1\ 2\ 2\ldots$$

se construyen esencialmente a partir del mismo patrón repetitivo que el de la secuencia de la **Figura III. 7.** En los ejemplos descritos, podemos decir que el patrón que se repite es:

$$A\,B\,B \text{ o } A\,B\,B\,A\,B\,B$$

Ambas respuestas son correctas. Cuando se pide reconocer el patrón que se repite, implícitamente se solicita encontrar el patrón repetitivo de largo mínimo, que en este caso es

$$A\,B\,B.$$

Para pensar

Usando las letras A y B, construya todos los patrones repetitivos posibles de largo mínimo 5.

Es importante también reconocer que no en toda secuencia con elementos repetidos existe un patrón repetitivo, por ejemplo, en la siguiente secuencia de cuadrados y triángulos:

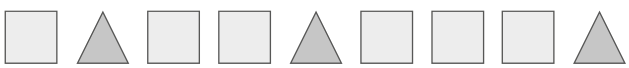


Figura III. 11

no hay un patrón repetitivo.

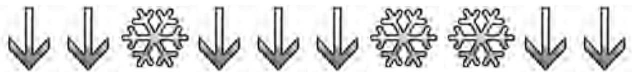
Ejercicios

1. Proponga una regla para explicar la formación de la secuencia anterior.

2. Para cada una de las siguientes secuencias, proponga una regla que permita explicar su formación y que no sea un patrón repetitivo:

   a. 

   b. 

   c. 

Al avanzar en la escolaridad aparecen problemas que involucran no solo reconocer un patrón repetitivo, sino que también determinar cualquier término de la secuencia formada a partir de él. Para abordar este tipo de problemas, se requiere de un grado mayor de abstracción, particularmente en la descripción del patrón.

Ejemplo

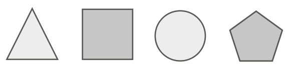
La siguiente secuencia se continúa siguiendo un patrón repetitivo:

a. De acuerdo al patrón encontrado ¿cuál es la figura siguiente?

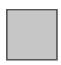
b. ¿Qué figura habrá en la posición 11?

c. ¿Y en la posición 38?

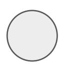
Para responder las preguntas (a.) y (b.), reconocemos que el patrón que se repite es



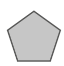
y continuamos la secuencia. Así, la figura que sigue en la secuencia será:



y la figura de la posición 11 será:



Para responder a la pregunta (c.) ya no es factible continuar la secuencia repitiendo el patrón, sino que se debe razonar de manera más abstracta. Como el patrón repetitivo tiene largo 4, vemos que en las posiciones que son múltiplos de 4 la figura será:

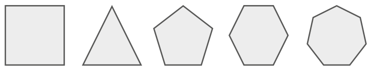


Así, en la posición 36 habrá un pentágono y, continuando con el patrón, vemos que en la posición 37 habrá un triángulo y en la 38 un cuadrado.

Ejercicios

1. Considere la secuencia formada por rotaciones de un cuadrado, en donde cada figura de la secuencia es una rotación en $90°$ de la figura anterior. ¿Qué puede decir acerca de la secuencia que se forma?

2. Considere la secuencia que se forma repitiendo el siguiente patrón:



   a. ¿Qué figura habría en la posición 13? ¿y en la posición 458?
   b. ¿Qué puede decir de los números que corresponden a la posición que ocupan los pentágonos en la secuencia?
   c. Describa mediante una expresión algebraica qué posición ocupa en la secuencia el n-ésimo cuadrado.

3. Si hoy es miércoles ¿qué día de la semana será en 153 días más? Explique cómo obtuvo la respuesta.

En una secuencia puede haber más de un patrón repetitivo. Por ejemplo, en la siguiente secuencia hay un patrón repetitivo de figuras y también uno de colores:

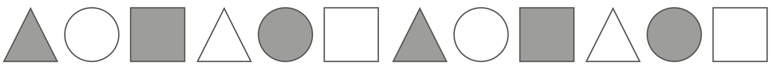


Figura III.12

Vemos que las figuras se repiten siguiendo el patrón triángulo-círculo-cuadrado, que tiene largo 3, y que los colores se alternan siguiendo el patrón gris-blanco, que tiene largo 2. Por ejemplo, tenemos que la figura 65 de la secuencia es un círculo de color gris, pues $65 = 21 \cdot 3 + 2$ y $65 = 32 \cdot 2 + 1$. También se puede considerar que en la secuencia hay solo un patrón repetitivo que considera tanto forma como color:

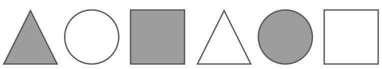


Figura III.13

el cual tiene largo 6. Considerando este patrón, también podemos verificar que la figura 65 es un círculo gris, pues $65 = 10 \cdot 6 + 5$.

Para pensar

Una secuencia tiene un patrón repetitivo de colores de largo 3: rojo-verde-azul, y uno de figuras de largo 5: círculo-cuadrado-estrella-triángulo-cuadrado. ¿Qué largo tiene el patrón repetitivo formado al considerar de manera conjunta color y forma?
Si ahora consideramos un patrón repetitivo de colores de largo 6 y uno de figuras de largo 9, ¿qué largo tiene el patrón repetitivo formado al considerar color y forma?

Otro tipo de tarea que aparece en la educación básica tiene que ver con continuar secuencias numéricas, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Completa la secuencia

5		15	20	25		35			50		

Figura III.14

Vemos que la tarea propuesta es ambigua, en ella está implícito que hay una regla de formación de la secuencia. En este ejemplo, podemos reconocer que la regla es que cada término de la secuencia es el anterior más 5, lo que explica los términos de la secuencia entregados. También este tipo de patrón está presente en la siguiente secuencia:

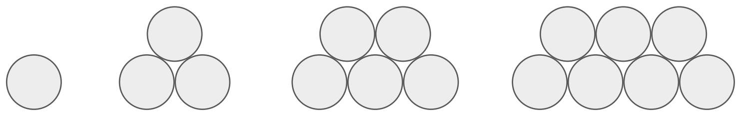


Figura III.15

En donde, si consideramos la secuencia formada por el número de círculos usados para construir cada figura, vemos que para pasar de un término al siguiente sumamos 2. Este tipo de secuencia numérica se denomina una *progresión aritmética*, cuyo estudio será abordado en el próximo apartado. Observamos que en las secuencias numéricas propuestas a partir de las **Figuras III.14** y **III.15** se reconoce un patrón numérico creciente, es decir, un término cualquiera es menor que el término siguiente.

Ejercicio

Considere la secuencia de la **Figura III.15**, que se continúa de acuerdo al patrón detectado arriba.

a. ¿Cuántas pelotitas habrá en la 7ª figura?¿y en la 13ª?

b. ¿Hay alguna figura formada por 37 círculos?¿Hay alguna figura que tenga 56 círculos? Justifique sus respuestas.

Veamos otro tipo de secuencia que sigue un patrón creciente. Consideramos la siguiente secuencia de cuadrados, en que el lado de cada cuadrado tiene una unidad más que el anterior, de la cual se muestran los primeros 4 términos:

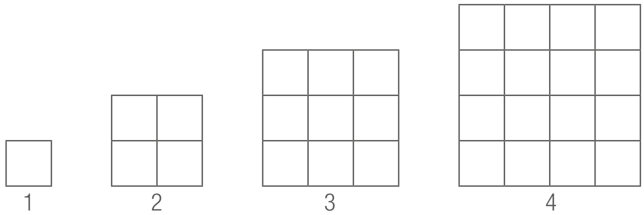


Figura III.16

Observamos que la secuencia formada por los lados de cada cuadrado sigue la secuencia de los números naturales $1, 2, 3, 4, \ldots$ pero si consideramos la secuencia de las áreas de los cuadrados (o del número de cuadrados unitarios que conforman cada cuadrado), obtenemos $1, 4, 9, 16, \ldots$ Vemos que el cuadrado en la posición n tiene lado igual a n y, por lo tanto, su área será n^2. Esta fórmula provee una descripción algebraica de cada término de la secuencia.

Como ya hemos mencionado, continuar una secuencia siguiendo un patrón observado es un problema ambiguo. Por ejemplo, si se nos pregunta cuál es el siguiente término de la secuencia

$$2, 4, 8, \_\_\_$$

la respuesta no es única. Por ejemplo, podríamos responder que el siguiente número es 16, diciendo que en la secuencia entregada cada número es el doble del anterior, describiendo así cómo se genera la secuencia dada. Otra posibilidad es decir que el próximo término es 2, proponiendo que el patrón $2, 4, 8$ se repite a lo largo de la secuencia. Estas respuestas son válidas. En cada una de ellas se propone una regla que se ajusta a los términos de la secuencia y que nos entrega un número distinto en cada caso. La pregunta realizada lleva implícito que hay una regla para formar la secuencia, pero claramente eso no es suficiente para entregar el término siguiente.

Para pensar

Proponga una regla para que el próximo término de la secuencia $2, 4, 8, \_\_\_, \_\_\_$ sea 10 y el término subsiguiente sea 14.

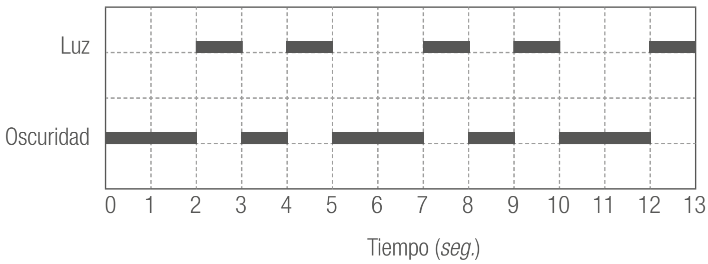
En resumen

- Al reconocer patrones se desarrolla el pensamiento inductivo, en el que proponemos reglas generales en base a ejemplos observados. Sin embargo, estas conjeturas deben ser demostradas utilizando pensamiento deductivo, es decir, se debe demostrar su validez usando propiedades conocidas.
- El reconocimiento de patrones nos lleva pensar de manera algebraica, utilizando variables para expresar regularidades.
- Los patrones que se reconocen a partir de secuencias finitas siempre serán ambiguos y no hay una manera única de continuar una secuencia, a menos que se indique de manera inequívoca la regla a seguir.

Ejercicios de la sección

1. ¿Qué hora del día será en 130 horas más? Explique el razonamiento usado y su relación con patrones repetitivos.

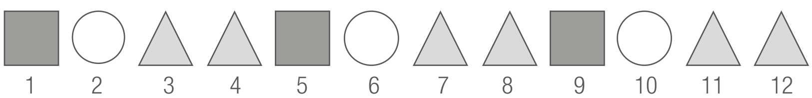
2. (Problema liberado, prueba PISA 2002) Los faros son torres con un foco luminoso en la parte superior que ayudan a los barcos a seguir su rumbo durante la noche cuando navegan cerca de la costa. Un faro emite destellos de luz según una secuencia regular fija y cada faro tiene su propia secuencia. En el diagrama de abajo, se puede ver la secuencia de destellos de luz de un faro, los cuales alternan con períodos de oscuridad.



Se trata de una secuencia regular. Se llama *período* de la secuencia al tiempo que dura un ciclo completo, antes de que comience a repetirse. Cuando se descubre el período de la secuencia, es fácil ampliar el diagrama para los siguientes segundos, minutos o incluso horas.

a. ¿Cuántos segundos tiene el período de este faro?
b. ¿Durante cuántos segundos emite este faro destellos de luz a lo largo de 1 minuto?
c. En la cuadrícula de abajo, traza el gráfico de una posible secuencia de destellos de luz de un faro que emita 30 segundos de luz cada minuto. El período de esta secuencia debe ser de 6 segundos.

3. Considere la siguiente secuencia:



En esta secuencia se continúa repitiendo el patrón cuadrado-círculo-triángulo-triángulo. Los números bajo las figuras indican la posición que tienen en la secuencia.

a. ¿Qué figura está en la posición 45? ¿por qué?
b. Felipe dice que hay 20 triángulos hasta la posición 40, ya que hay 2 triángulos en el patrón y en 40 posiciones se ha repetido el patrón 10 veces. ¿Es correcto el razonamiento de Felipe?

c. Tomás dice que hay 15 círculos en las primeras 50 posiciones, ya que hasta la posición 10 hay 3 círculos, por lo tanto, hay $3 \cdot 5 = 15$ círculos. ¿Es correcto el razonamiento de Tomás?

d. Determine el número de cuadrados, círculos y triángulos hasta la posición 1.437. Explique el procedimiento utilizado.

e. Describa qué secuencia numérica forman las posiciones en que se encuentran los cuadrados. ¿Qué regularidad observa en esta secuencia? ¿Qué relación hay entre un término y el siguiente?

f. Resuelva las partes (d.) y (e.) considerando ahora la secuencia numérica para las posiciones de los círculos.

g. Describa, usando una fórmula, la posición en que se encuentra el n-ésimo cuadrado.

4. La profesora de un curso designa 2 ayudantes que le colaboran durante la semana. En el curso hay 30 alumnos y la profesora elige a los dos ayudantes siguiendo la lista, de modo que la primera semana les toca a los números 1 y 2, la segunda al 3 y al 4, y así sucesivamente. Suponga que los alumnos nunca pierden su turno y que el año escolar tiene 42 semanas:

   a. ¿Cuántas veces serán ayudantes los alumnos que tienen el primer y segundo número de la lista?

   b. ¿Serán ayudantes todos los alumnos el mismo número de veces?

   Explique el razonamiento usado para responder las partes (a.) y (b.). ¿Por qué este problema está relacionado con patrones repetitivos?

5. Considere la expansión decimal del número 32/99.

   a. ¿Qué patrón siguen los dígitos de la expansión decimal de este número? ¿Por qué?

   b. ¿A partir de la coma, cuál es el dígito que está en la posición 100 de la expansión decimal? ¿Qué dígito está en la posición 1.003?

   c. Explique cómo determinar cuál es el dígito que está en la posición n de la expansión decimal.

   d. ¿Cuántos dígitos impares hay en la expansión decimal hasta la posición n?

6. Considere la expansión decimal de 18/7= 2,5714285714285714285714285714286 …

   a. ¿Qué dígito estará en el lugar 170 de los dígitos decimales de este número (contados desde la coma)? ¿Por qué?

   b. ¿Cuántas veces aparece el número 1 entre los primeros 120 dígitos decimales de este número?

   c. ¿Cuántos números impares aparecen entre los primeros 120 dígitos decimales de este número?

2.1 Progresiones aritméticas y geométricas

En esta sección estudiaremos dos tipos de secuencias numéricas que pueden ser descritas por una regla y que encontramos en distintos contextos matemáticos y de la vida diaria.

Definición III. 1 Una progresión aritmética es una secuencia numérica finita o infinita donde la diferencia entre dos términos consecutivos es siempre la misma.

Por ejemplo, la secuencia de números pares: $2, 4, 6, 8, \dots$ es una progresión aritmética, pues la diferencia entre dos términos consecutivos es siempre 2.

Observamos que, en una progresión aritmética, cada término se obtiene sumando un número fijo al término anterior, el cual es precisamente la diferencia entre un término de la secuencia y el anterior.

Las siguientes secuencias corresponden a progresiones aritméticas:

$$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+3} 10 \xrightarrow{+3} 13 \xrightarrow{+3} \dots$$

$$3 \xrightarrow{+5} 8 \xrightarrow{+5} 13 \xrightarrow{+5} 18 \xrightarrow{+5} 23 \xrightarrow{+5} \dots$$

$$1 \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \frac{3}{2} \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \frac{5}{2} \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \frac{7}{2} \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \frac{9}{2} \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \dots$$

$$5 \xrightarrow{-2} 3 \xrightarrow{-2} 1 \xrightarrow{-2} -1 \xrightarrow{-2} -3 \xrightarrow{-2} \dots$$

Figura III.17

Por ejemplo, la tercera secuencia de la figura parte con el número 1 y todos los términos que siguen se obtienen sumando el número $\frac{1}{2}$. En la cuarta secuencia se parte con el número 5 y todos los términos que siguen se obtienen sumando el número -2.

Es muy importante que cualquier término de una progresión aritmética queda determinado por su lugar en la secuencia, el número con el que esta comienza y la cantidad fija que se suma, que llamaremos d. En las secuencias correspondientes a los números impares y a los números pares:

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots$$

vemos que para ambas $d = 2$, pero el primer término de una es 1 y el de la otra es 2.

Obtengamos una expresión para cualquier término de una progresión aritmética que comienza con el número a. Vemos que :

El segundo término de esta secuencia será $a + d$.

El tercer término será $a + d + d = a + 2d$.

El cuarto término será $a+2d + d = a + 3d$.

Así, para obtener por ejemplo el término 10 de la secuencia, debemos sumar 9 veces d al primer término, lo que nos entrega que $a + 9d$. Este mismo razonamiento nos lleva a concluir que:

el término N será $a + (N - 1) d$.

Ejemplo

Determinemos si las siguientes secuencias comienzan como una progresión aritmética:

1) 3, 7, 11, 19, …

2) 2, 7, 12, 18, 23, …

3) 3, 3, 3, 3, 3, …

Para la primera secuencia vemos que al restar un término del siguiente obtenemos $7 - 3 = 4$, $11 - 7 = 4$, $15 - 11 = 4$, $19 - 15 = 4$. Por lo tanto, la sucesión comienza como una progresión aritmética con primer término 3 y diferencia 4.

En la segunda secuencia, obtenemos las restas $7 - 2 = 5$, $12 - 7 = 5$, $18 - 12 = 6$, $23 - 18 = 5$. Como no todas estas restas son iguales, concluimos que la secuencia no es una progresión aritmética. En la última secuencia todos los términos son iguales, por lo tanto, la diferencia entre dos de ellos es 0, y así, la secuencia comienza como una progresión aritmética.

Hay muchas situaciones de la vida cotidiana donde aparecen progresiones aritméticas. Por ejemplo, en la cuenta mensual de electricidad se cobra un cargo fijo de \$700, que cubre la primera media hora y un monto variable que consiste en \$80 por cada kilowatt hora (kwh) consumido (si no hay sobreconsumo). La tabla de precios comenzaría como sigue:

Consumo en kwh	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tarifa en \$	700	780	860	940	1.020	1.100	1.180	1.260	1.340	1.420

Tabla III.2

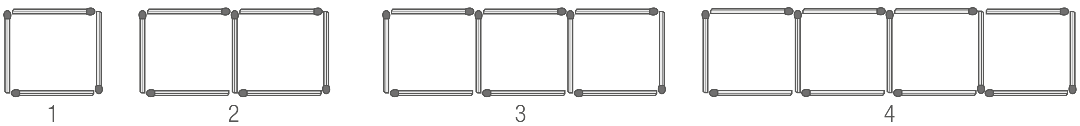
La tarifa cobrada forma una progresión aritmética, donde la diferencia entre dos términos consecutivos es 80, que es el precio por cada kwh adicional, y el primer término es 700. Para saber el precio de un consumo mensual de N kwh bastará calcular $700 + 80N$. Por ejemplo, el cobro por un consumo mensual de 260 kwh sería de $(700 + 80 \cdot 260)$ pesos, es decir \$21.500.

Ejercicios

1. Determine si las siguientes secuencias comienzan como progresiones aritméticas. De ser así, escriba el primer término y la diferencia entre dos términos consecutivos.

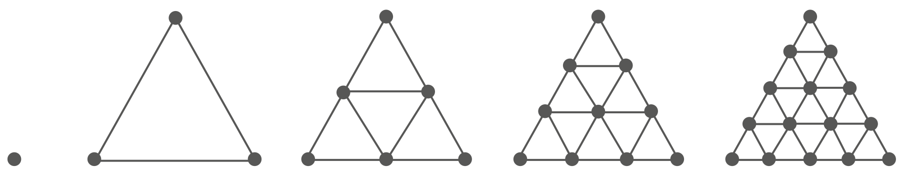
   a. 0,2; 1,6; 2,3; 3   b. -1, -4/3, −5/3, −2, −7/3   c. -7, −4, −1, 3, 6

2. Describa una regla para continuar la siguiente secuencia de figuras formadas por palitos de fósforos, de tal manera que la cantidad de palitos usados sea una progresión aritmética



3. Exprese la secuencia de los múltiplos de un número dado.

4. Considere la siguiente secuencia de triángulos:



   ¿Qué regularidad observa entre el número de puntos usados en una figura y el número de puntos de la figura siguiente? Describa una regla que permita continuar esta secuencia.

5. Indique si las siguientes situaciones pueden ser descritas mediante una progresión aritmética:

   a. Un bloque de hielo de volumen inicial 1 m^3 se derrite a una tasa de 0,01m^3/h.
   b. La altura de una persona medida desde su nacimiento.
   c. La secuencia de temperaturas máximas diarias en un año.
   d. La ganancia de una sala de cine, si para su funcionamiento diario se debe incurrir en un costo fijo de $150.000, y cada entrada vale $3.500.

6. Proponga situaciones que puedan ser descritas mediante las siguientes progresiones aritméticas:

   a. 0, 8, 16, 24
   b. 500, 700, 900, 1.100, 1.300, 1.500, 1.700, 1.900, 2.100, 2.300, 2.500
   c. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, …

Otro tipo de secuencia numérica que sigue una regla similar a la anterior, la cual relaciona dos términos consecutivos, es la denominada *progresión geométrica*.

Definición III.2	Una progresión geométrica es una secuencia numérica, finita o infinita, donde la razón entre un término y el anterior es siempre la misma.

Observamos que en una progresión geométrica, cada término se obtiene multiplicando el término anterior por un número fijo, el cual es precisamente la razón entre estos términos.

En la siguiente figura se ilustran varias progresiones geométricas:

$$2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} 32 \xrightarrow{\times 2} \ldots$$

$$1 \xrightarrow{\times 5} 5 \xrightarrow{\times 5} 25 \xrightarrow{\times 5} 125 \xrightarrow{\times 5} 625 \xrightarrow{\times 5} \ldots$$

$$64 \xrightarrow{\times 0{,}5} 32 \xrightarrow{\times 0{,}5} 16 \xrightarrow{\times 0{,}5} 8 \xrightarrow{\times 0{,}5} 4 \xrightarrow{\times 0{,}5} \ldots$$

$$3 \xrightarrow{\times (-3)} -9 \xrightarrow{\times (-3)} 27 \xrightarrow{\times (-3)} -81 \xrightarrow{\times (-3)} 243 \xrightarrow{\times (-3)} \ldots$$

Figura III.18

Como veremos a continuación, en el caso de las progresiones geométricas también basta con conocer el primer término y la razón, para conocer toda la secuencia. Consideremos una progresión geométrica cuyo primer término es a y cuya razón es r.Vemos que:

El segundo término de esta secuencia será ar.

El tercer término será r por el término anterior, es decir ar^2.

El cuarto término será r por el término anterior, es decir ar^3.

El quinto término será r por el término anterior, es decir ar^4.

Y siguiendo este razonamiento:

El término n será igual a ar^{n-1}.

Las progresiones geométricas describen distinto tipo de situaciones, como, por ejemplo, el crecimiento de una población de bacterias (ver apartado 2.4 del **Capítulo I**) y el interés bancario. Por ejemplo, si se deposita $1.000.000 en una cuenta de ahorro que paga el 6% de interés anual, y no se deposita ni se retira dinero de la cuenta, la cantidad de dinero al final de un año será 6% más que la cantidad de dinero al final del año anterior. Veamos cómo esta situación corresponde a una progresión geométrica.

Para calcular esta cantidad de dinero en un año cualquiera habrá que sumar la cantidad que había el año anterior (término anterior en la secuencia) y los intereses del 6% de esa cantidad, es decir, habrá que multiplicar el término anterior por 1,06. Así:

El primer término de la secuencia es igual a 1.000.000.

El segundo término de la secuencia es igual a $1{,}06 \cdot 1.000.000 = 1.060.000$.

El tercer término de la secuencia es igual a $1{,}06 \cdot 1.060.000 = 1.123.600$.

El cuarto término de la secuencia es igual a $1{,}06 \cdot 1.123.000 = 1.191.016$.

Vemos que el dinero depositado crece como una progresión geométrica de razón 1,06 y que parte en 1.000.000.

Para pensar

¿De qué depende que una progresión geométrica crezca o decrezca?

Ejemplo

Determinemos si las siguientes secuencias son progresiones geométricas:

1) 3, 9, 27, 81, 243

2) 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$

3) -2, 6, −18, −54, 162

Vemos que todas las secuencias consideradas son finitas. Para la primera secuencia, los cocientes están dados por: $\frac{9}{3}=3$, $\frac{27}{9}=3$, $\frac{81}{27}=3$, $\frac{243}{81}=3$. Por lo tanto, la sucesión comienza como una progresión geométrica con primer término 3 y razón 3.

En la segunda secuencia los cocientes son $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}, \frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la sucesión es una progresión geométrica con primer término 8 y razón $\frac{1}{2}$.

Para la tercera secuencia, el segundo y tercer cociente están dados por $\frac{-18}{6}=-3$, $\frac{(-54)}{(-18)}=3$. Con esto, basta para concluir que la sucesión no es una progresión geométrica, pues no todos los cocientes entre términos consecutivos son iguales.

Para pensar

Explicar por qué si una secuencia es una progresión geométrica, entonces la secuencia formada por los cuadrados de los términos de la primera es también una progresión geométrica.

Ejercicios

1. Determine si los términos dados de las sucesiones que siguen están en progresión geométrica. De ser así, escriba el primer término y la razón.

   a. 0,4; 0,8; 1,6; 3,2; 6,4

   b. $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}$

   c. $-1, 1, -1, 1, -1, 1$

   d. 2, 4, 16, 256, 65.536

2. Para estimar $\sqrt{2}$, podemos comenzar notando que $1 < \sqrt{2} < 2$ (ya que 12 = 1 y 22 = 4) y que, por definición, $\sqrt{2}^2 = 2$. Sin más información que esa, la mejor estimación de x es la mitad entre 1 y 2, es decir, $\frac{3}{2}$. El máximo error que podríamos estar cometiendo con esta estimación tiene que ser menor que $\frac{1}{2}$, que es la distancia de nuestra estimación, tanto a 1 como a 2. Ahora, como $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > \sqrt{2}^2 = 2$, concluimos que $\sqrt{2}$ está entre 1 y $\frac{3}{2}$. Con esta información, estimamos $\sqrt{2}$ como la mitad entre 1 y $\frac{3}{2}$, es decir $\frac{5}{4}$, pues de ese modo estamos seguros de que el error que estamos cometiendo es menor que $\frac{1}{4}$, que es la distancia entre nuestra estimación $\frac{5}{4}$ y tanto 1 como $\frac{3}{2}$. Siguiendo con este procedimiento, generaremos una secuencia de aproximaciones a $\sqrt{2}$ que pondremos siempre al centro de un intervalo, es decir, de un segmento de la recta, cuyo largo se reduce a la mitad en cada paso y donde el error asociado al primer término es menor que $\frac{1}{2}$, el error del segundo término es menor que $\frac{1}{4}$ y así sucesivamente. ¿Cuántos términos tendremos que calcular para estar seguros de cometer un error menor que 0,00005?

2.2 Series

Al hacer sumas parciales de los términos de una secuencia, se obtiene una nueva secuencia numérica que llamamos *serie*. En el caso de las progresiones aritméticas y geométricas, estas sumas son particularmente interesantes, pues se pueden calcular.

Consideremos la secuencia de los números naturales

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Se trata de una progresión aritmética que comienza con 1 y cuya diferencia es también 1. Consideremos ahora la serie formada por las sumas parciales:

primer término = 1,

segundo término = 1 + 2 = 3,

tercer término = 1 + 2 + 3 = 6,

cuarto término = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.

Una manera de visualizar la serie es mediante la parte sombreada en la siguiente secuencia de figuras:

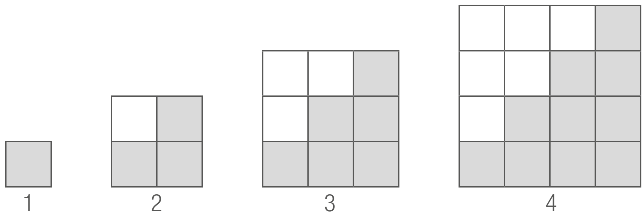


Figura III.19

En esta secuencia, el lado del cuadrado crece una unidad al pasar de un término al siguiente. Si el cuadrado N está formado por N cuadrados de área unitaria, el área este será N^2. El área sombreada en el cuadrado de lado N corresponde a la mitad del área de este cuadrado más la mitad del área de los cuadrados unitarios que forman la diagonal. Como en la diagonal del cuadrado número N hay exactamente N cuadrados unitarios, tendremos que el área sombreada corresponde a $\frac{N^2}{2}+\frac{N}{2}$. Así, hemos concluido que el término número N de la serie es $\frac{N^2}{2}+\frac{N}{2}$, es decir,

$$1+2+3+\ldots+N=\frac{N^2}{2}+\frac{N}{2}=\frac{N\left(N+1\right)}{2}.$$

Este resultado nos permite calcular las sumas parciales de cualquier progresión aritmética. En efecto, consideremos ahora una progresión aritmética de diferencia d y que comienza en a, como se muestra en la tabla que sigue.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	N
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+4d$	$a+5d$	$a+6d$	$a+7d$	$a+8d$		$a+(N-1)d$

Tabla III.3

La suma de los N primeros términos de la progresión geométrica está dada por:

$$a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+(a+(N-1)\,d)).$$

Observamos que a aparece sumado N veces y que podemos factorizar d de todos los otros sumandos. Así, reagrupando tendremos que el término N de la serie corresponde a:

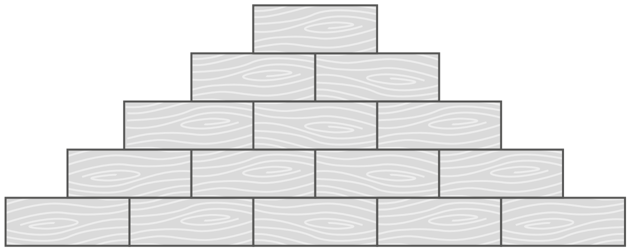
$$Na+d\,(1+2+\ldots+(N-1)).$$

Usando la fórmula obtenida antes para la suma de los primeros N–1 números naturales, tendremos que la suma de los primeros N términos de la progresión aritmética será:

$$Na+d(N-1)\frac{N}{2}.$$

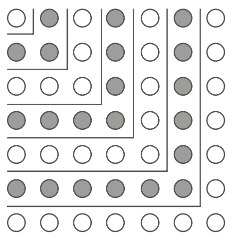
Ejercicios

1. Josefina está jugando con bloques rectangulares de madera, apilándolos siguiendo la forma triangular que se muestra en la figura.

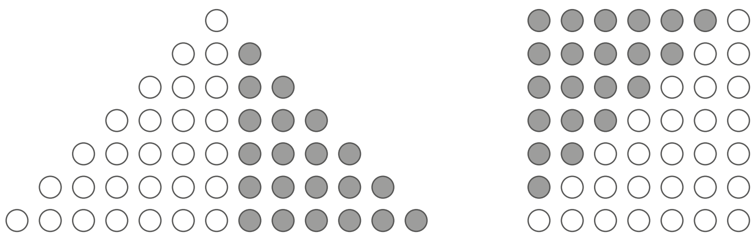


   a. Ella formó un triángulo con **66** bloques. ¿Cuántas filas tiene el triángulo formado?
   b. Josefina tiene **100** bloques. ¿Cuántas filas tiene el triángulo con el mayor número de bloques que puede formar?

2. Encuentre una fórmula para la suma de los N primeros números impares.
   a. Para ello, le proponemos considerar una estrategia que se ilustra en la figura que sigue, explicando su razonamiento.



   b. Explique cómo podría deducir la misma fórmula obtenida antes, pero a partir de los otros dos esquemas que siguen:



   c. A partir de las figuras anteriores, obtenga una fórmula para la suma de los primeros N pares.

Para calcular las sumas parciales de una progresión geométrica, utilizaremos una estrategia diferente. Consideremos una progresión geométrica cuya razón es r y con primer término a, como se muestra en la tabla que sigue:

1	2	3	4	5	6	...	N
a	ar	ar^2	ar^3	ar^4	ar^5	...	ar^{N-1}

Tabla III.4

Llamemos S a la suma de los primeros N términos:

$$S = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{N-1}.$$

Notemos que si multiplicamos S por r, obtendremos:

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^N$$

y por lo tanto:

$$S - rS = a - ar^N,$$

es decir, $S(1 - r) = a(1 - r^N)$, de lo que concluimos que:

$$S = a\frac{(1-r^N)}{(1-r)}.$$

Una observación interesante con respecto a esta fórmula es que si la razón r es un número mayor que -1 y menor que 1, entonces r^N será cada vez más pequeño cuando N crezca, aproximándose a 0. En este caso, podemos dar sentido a sumar todos los términos de una progresión geométrica. A medida que N crece, la suma de los términos se acerca más y más a:

$$\frac{a}{(1-r)}.$$

Este valor se interpreta como la suma de todos los términos de la progresión.

Ejemplo

El número $0{,}\overline{1} = 0{,}1111111\ldots$ se puede escribir como

$$0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1.000}\ldots$$

Si consideramos la secuencia de los sumandos tendremos que se trata de una secuencia geométrica que comienza en $a = 0{,}1$ y de razón

$$r = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

La fórmula anterior nos permite calcular la serie infinita como

$$0{,}11111\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1.000} + \frac{1}{10.000} + \frac{1}{100.000} + \ldots = \frac{0{,}1}{0{,}9} = \frac{1}{9}.$$

Se puede visualizar usando áreas de cuadrados el valor de la suma infinita de la serie geométrica formada por las potencias naturales de $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 1.$$

En efecto, el área del cuadrado de lado igual a 1 es 1, y este cuadrado se puede descomponer de la siguiente manera:

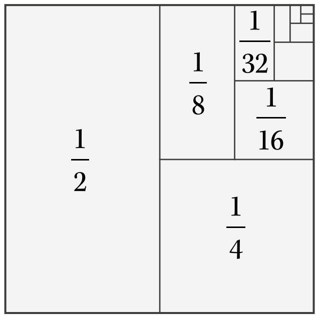


Figura III.20

De donde podemos deducir que la suma infinita anterior es 1.

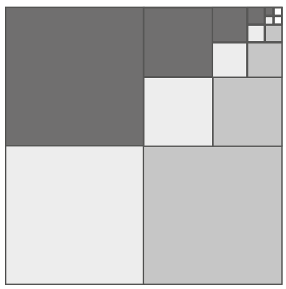
Ejercicios

1. Calcule el número decimal periódico 0,166666 … utilizando una serie geométrica.

2. Suponga que usted ahorra cada mes \$30.000, los que deposita en una cuenta que le ofrece un interés mensual del 0,4%. Calcule cuánto dinero tendrá al cabo de un año en esa cuenta.

3. Comparando las áreas en la figura, justifique la suma que sigue. Compruebe este resultado con la fórmula obtenida anteriormente.

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \ldots = \frac{1}{3}$$

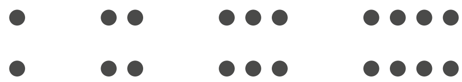


En resumen

- Las progresiones aritméticas son aquellas secuencias en las que la diferencia entre un término y el anterior permanece constante.
- Las progresiones geométricas son secuencias en las que el cociente o razón entre un término y el anterior permanece constante.
- Existen fórmulas que nos permiten expresar la suma de los primeros N términos, tanto de una progresión aritmética, como de una progresión geométrica.
- En el caso de la progresión geométrica, cuando la razón r satisface $-1 < r < 1$, se puede asignar un valor a la suma de todos los infinitos términos de la progresión.

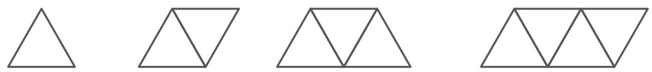
Ejercicios de la sección

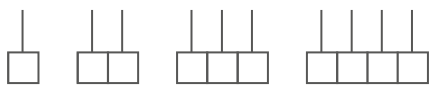
1. Considere la siguiente secuencia de puntos:

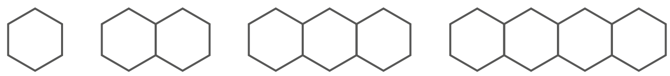


   a. Describa un patrón que sigue la secuencia.
   b. Si la secuencia se continúa siguiendo el patrón descrito en (a.), ¿cuántos puntos tendrá la 5ª figura? ¿cuántos puntos tendrá la 8ª figura?
   c. ¿Cuántos puntos tendrá la 23ª figura? Justifique.
   d. Determine una fórmula que permita encontrar el número de puntos de la figura *n*.

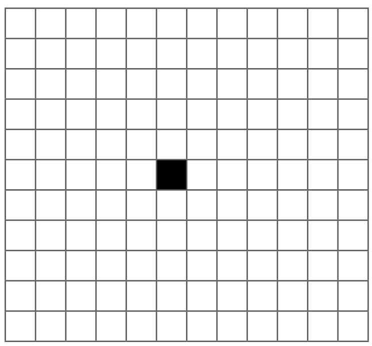
2. Para cada una de las secuencias, describa un patrón que indique cómo se generan:

   a. 

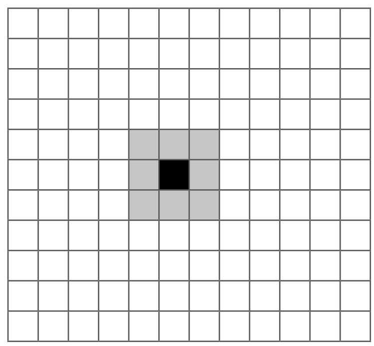
   b. 

   c. 

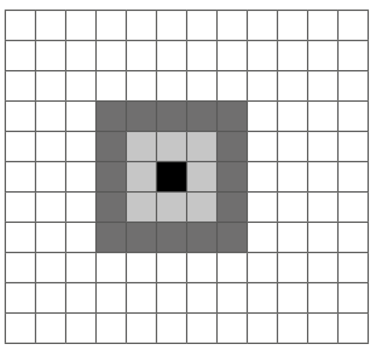
3. Marcela tiene dibujado un cuadrado en una hoja de papel cuadriculado y comienza a pintar alrededor de él como muestran las siguientes figuras:



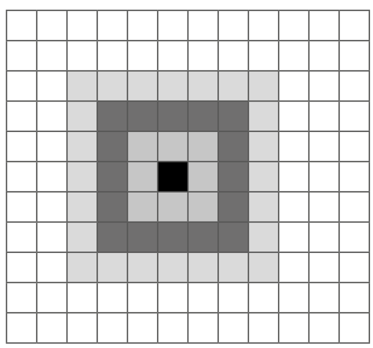
1ª



2ª



3ª



4ª

a. Suponiendo que sigue pintado de la misma manera, complete la tabla

Nº de la figura	Número de nuevos cuadros pintados	Número total de cuadros pintados
2	8	9
3		
4		
5		
6		

b. ¿Cuál es el número de nuevos cuadrados pintados en la 10ª figura? ¿y cuál es el número total de cuadrados pintados?

c. Describa mediante una fórmula la secuencia de nuevos cuadrados pintados para cada figura.

d. Describa mediante una fórmula la secuencia del total de cuadrados pintados para cada figura.

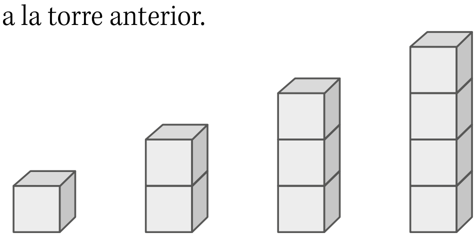
4. La siguiente secuencia de figuras formadas por "×" se muestra hasta la cuarta posición.

×××	××××	×××××	××××××
×	××××	×××××	××××××
	×	×××××	××××××
	×	×	××××××
		×	×
		×	×
			×
			×

a. Proponga un patrón de formación para la secuencia compuesta por el número de × necesario para formar cada figura.

b. Siguiendo la secuencia y usando el patrón descrito en (a.) ¿cuántas × se usan para una figura en la posición n?

5. En la secuencia de torres de cubos que se muestra a continuación, cada torre se obtiene agregándole un cubo a la torre anterior.



a. Complete la siguiente tabla

Número de cubos	Nº de caras exteriores
1	6
2	10
3	
4	
5	

b. Describa el patrón de la secuencia formada por el número de caras exteriores de cada torre. ¿Cuántas caras visibles tiene la torre n?

6. Determine una posible fórmula del término *n*-ésimo para las siguientes secuencias:

a. 2, 3, 4, 5 , . . .

b. 2, 10, 50, 250 , . . .

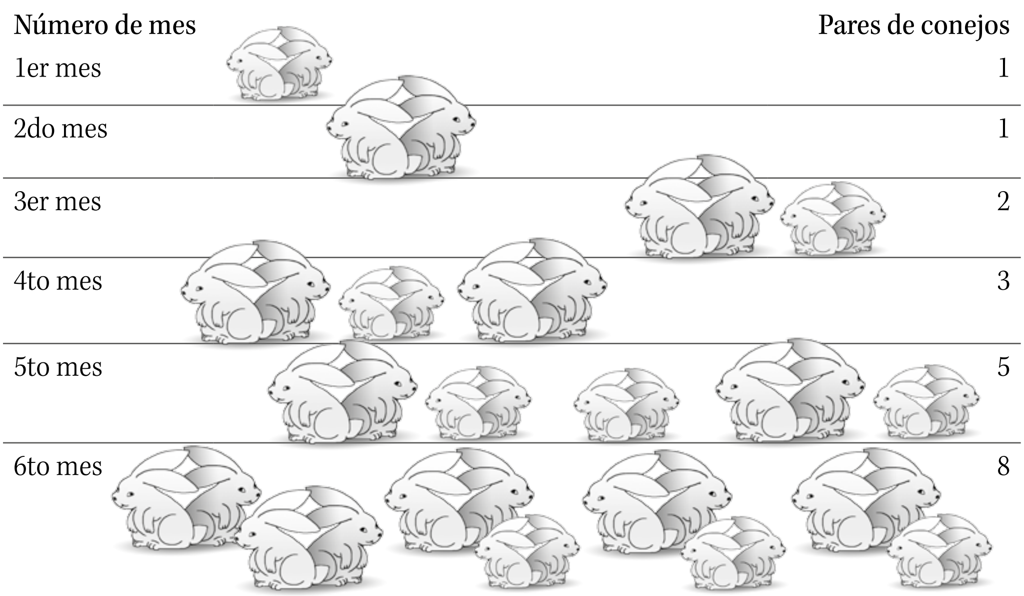
c. 2, ½, 2, ½, 2, ½ , . . .

d. 1, -1, 1, -1, 1 , . . .

7. Considere la siguiente situación:

Un hombre tiene una pareja de conejos y desea saber cuántos son engendrados a partir de este par en un año. Se sabe que un par de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil y a partir de ese momento cada mes engendra una nueva pareja de conejos, es decir, un macho y una hembra.

En el diagrama que se muestra a continuación se ilustra la situación descrita.



En el primer mes hay 1 par de conejos no fértiles. El segundo mes hay el mismo par de conejos, pero esta vez son fértiles. El tercer mes hay 2 pares de conejos, los conejos fértiles del primer mes y sus crías no fértiles nacidas el segundo mes. El cuarto mes hay 3 pares de conejos, los conejos fértiles del primer mes junto con sus nuevas crías no fértiles nacidas el cuarto mes y el par de conejos nacidos en el tercer mes que ahora son fértiles, y así sucesivamente. Así, se obtiene la siguiente secuencia formada por el número de parejas de conejos de cada mes:

1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

a. Determine los 12 primeros términos de esta secuencia.

b. Explique por qué cada término de la secuencia (a partir del tercero) es igual a la suma de los dos términos anteriores.

Esta secuencia de números se llama "sucesión de Fibonacci", y aparece en la naturaleza en la distribución de hojas en un tallo, la distribución de semillas en flores y frutos, etc. Invitamos al lector o lectora a revisar la abundante y sorprendente información que se puede encontrar en Internet.

8. Considere la secuencia:

$$1 \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{4}{5} \qquad \frac{5}{6} \qquad \ldots$$

a. ¿Qué regularidad observa en los términos de la secuencia? Proponga una regla que le permita continuar la secuencia, siguiendo con el patrón observado.

b. Considere la resta entre un término y el siguiente. ¿Qué patrón observa en esta secuencia? Justifique la validez del patrón usando la regla obtenida en la parte anterior.

9. Considere la secuencia de números dada por la siguiente regla:

- El primer término es $0 + 1 + 2 = 3$.
- El segundo término es $1 + 2 + 3 = 6$.
- El tercer término es $2 + 3 + 4 = 9$.

Y en general, el término N está dado por la suma del número N con su antecesor y sucesor.

a. Encuentre el término 258 de la secuencia

b. ¿Es esta secuencia una progresión aritmética?

c. El número 3.478 ¿aparece en la secuencia?

10. Obtenga la suma de los primeros 100 múltiplos de 7.

11. La fórmula de la suma de una progresión aritmética se obtiene también de una estrategia atribuida a Gauss[1]. Para sumar los primeros N números naturales $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + N$, notemos que da lo mismo sumarlos en cualquier orden, es decir, también podemos escribir $S = N + \ldots + 3 + 2 + 1$. Por lo tanto, podríamos sumar 2 veces S, calculando las sumas de las parejas de términos que quedan uno sobre el otro en esta suma, es decir:

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
S = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \ldots + & (N-2) & + & (N-1) & + & N \\
S = & N & + & (N-1) & + & (N-2) & + \ldots + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
2S = & (N+1) & + & (N+1) & + & (N+1) & + \ldots + & (N+1) & + & (N+1) & + & (N+1)
\end{array}$$

Complete el argumento que le permite obtener de aquí la fórmula de la suma de los primeros N números naturales.

12. Un gran número de estudiantes financian sus carreras con el Crédito con Aval del Estado, CAE. Este fondo permite, a los estudiantes que lo requieran, pagar sus estudios universitarios con un préstamo que deberán devolver una vez que finalicen sus estudios y generen ingresos con su ejercicio profesional. En el año 2011, este dinero se prestaba con una tasa de interés anual del 6% y, a partir del 2012, una nueva ley bajó este interés al 2% anual. Supongamos que un estudiante recibe un préstamo para cubrir la totalidad del arancel de su carrera, el que anualmente es de \$1.500.000, y que su carrera tiene una duración de 5 años. Calcule la deuda que habrá acumulado este estudiante al final del quinto año, con ambas tasas de interés y compare.

1 Matemático alemán de gran importancia que vivió entre los años 1777 y 1855, y cuya genialidad matemática se manifestó a temprana edad.

13. En el libro *El hombre que calculaba,* de Malba Tahan, se cuenta la famosa leyenda del juego del ajedrez:

El rey Iadava, señor de la provincia de Taligana, perdió a su hijo Adjamir en una batalla para salvar su reino de una invasión. El rey se sumergió en la tristeza debido a que recordaba diariamente la batalla en la cual perdió a su hijo. Por este motivo, descuidó sus quehaceres y dejó de gobernar el reino con sabiduría. Un súbdito, llamado Sessa, quiso ayudar al rey a salir de su tristeza para que gobierne como lo hacía anteriormente y por eso le llevó un juego, un tablero de ajedrez, para que el rey se distrajese. El tablero de este juego emulaba un campo de batalla y sus piezas a dos ejércitos. Sessa le enseñó a jugar al rey y este al jugar se dio cuenta de que el sacrificio de un príncipe en una batalla a veces es impuesto por la fatalidad, para que resulte la paz y la libertad de un pueblo. De esta manera, el rey encontró consuelo a su tristeza y quiso recompensar a Sessa con lo que él pidiese. Sessa se negó a recibir recompensa y el rey insistió en que podía darle lo que él pidiese. Ante tanta insistencia, Sessa dijo al rey que quería su recompensa en granos de trigo, de la siguiente manera: Me daréis un grano de trigo para la primera casilla del tablero; dos para la segunda; cuatro para la tercera; ocho para la cuarta; y así, doblando sucesivamente hasta la última casilla del tablero. Todos en la corte se rieron de la petición de Sessa. El rey mandó a llamar a los algebristas más hábiles de la corte y ordenó que calcularan la porción de trigo que Sessa quería. Para sorpresa del rey, el más sabio de los matemáticos le dijo: Mi señor, hemos calculado el número de granos de trigo y obtuvimos un número cuya magnitud es inconcebible para la imaginación humana. El trigo que habrá que darle a Sessa equivale a una montaña que, teniendo por base la ciudad de Taligana, se alce 100 veces más alta que el Himalaya. Sembrados todos los campos de la India, no darían en dos mil siglos la cantidad de trigo que según vuestra promesa corresponde al joven Sessa. El rey quedó estupefacto y Sessa, para no afligir a su rey, renunció a su recompensa. Finalmente, el rey lo nombró visir.

Encuentre una expresión para la cantidad de granos de trigo que el rey Iadava debía pagar al joven súbdito Sessa. ¿Se puede calcular esta cantidad usando una calculadora? ¿y un computador?

14. Una de las más famosas paradojas de Zenón dice que incluso el veloz Aquiles, el de los pies alados, jamás podrá alcanzar a la lenta tortuga, si le da una ventaja inicial. Para simplificar, supongamos que Aquiles es 10 veces más veloz que la tortuga y que le da 10 metros de ventaja. Según Zenón, cuando Aquiles haya recorrido esos 10 metros, la tortuga estará 1 metro delante de él; y cuando Aquiles haya recorrido ese metro, la tortuga estará 1 cm delante de él; y así sucesivamente. La tortuga siempre estará delante Aquiles. Muestre que Zenón estaba equivocado y que Aquiles alcanzará a la tortuga, calculando una serie geométrica infinita.

3. Dificultades asociadas al trabajo con patrones y secuencias

El reconocimiento de patrones es un tipo de tarea matemática que aparece de manera muy temprana en la escolaridad. En los niveles pre escolares y en primero y segundo básico, niños y niños se verán enfrentados a tareas que consisten en continuar secuencias de figuras, colores, números o letras, reconociendo un patrón a partir de los términos entregados. Este tipo de actividad puede tener mucho valor. Reconocer un patrón y predecir a partir de él es crucial para ser capaz de formular conjeturas. Pero, hay que tener presente que, a menos que se entregue una regla inequívoca, siempre continuar una secuencia es una tarea ambigua. Este hecho causa que muchos problemas que se encuentran en textos escolares y otros materiales estén mal planteados. Por ejemplo, en el siguiente ejercicio:

Determine el siguiente término de la secuencia:

$$6, 12, 18, 24, 30, \ldots$$

Se da por sentado que existe una única manera de determinar el siguiente término de la secuencia, lo cual no es correcto, ya que hay una infinidad de reglas posibles que explican los primeros 5 términos de ella. Este tipo de problema puede dar a entender que la respuesta se encuentra adivinando una regla que está pensando el profesor, lo cual se contrapone al sentido del trabajo matemático.

Por otra parte, hay que considerar que reconocer patrones y continuar secuencias son tareas matemáticas importantes. Lo que se debe considerar es plantear los problemas de manera correcta, dando espacio para una amplitud de respuestas. Al evaluar estos contenidos, resulta particularmente importante tener esto presente.

El trabajo con secuencias debe tener un carácter matemático y no ser una tarea de ingenio en que la respuesta deba ser encontrada mediante un truco. Es muy común encontrar en distintos medios tareas como:

Determinar el siguiente término de la secuencia U, D, T ,C ,C ,S, S, O …

Donde lo que se busca es que se reconozca que la secuencia está formada por la primera letra de cada número natural. Si bien resolver estos problemas puede ser motivante para algunos estudiantes, al hacerlos como parte de una clase desvirtúan el trabajo matemático, haciéndolo parecer una colección de trucos, donde lo que manda es el ingenio.

Otro aspecto a considerar es que, cuando se proponen secuencias, el número de términos debe ser acorde a lo que se desea que los alumnos reconozcan. Si se entregan muy pocos términos, será difícil proponer cualquier regla de formación. Por ejemplo, en la siguiente secuencia hay distintas regularidades presentes, y no es razonable proponer una regla de formación a partir de estos términos.

×××	××××	×××××
×	×××	××××
	×	×××
	×	×
		×
		×

Figura III.21

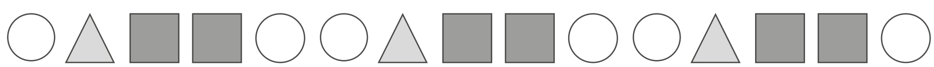
En el trabajo con patrones, siempre hay que considerar que la indagación y el establecimiento de conjeturas no pueden reemplazar el trabajo deductivo sino complementarlo, para enriquecer así el desarrollo de competencias esenciales al trabajo matemático.

Ejercicios de la sección

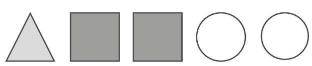
1. Proponga cómo formular el ejercicio anterior de manera que se admitan múltiples soluciones. Entregue al menos 3 maneras de continuar la secuencia propuesta, a partir de reglas que expliquen los primeros 5 términos entregados.

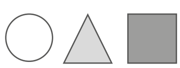
2. Para el siguiente ejercicio:

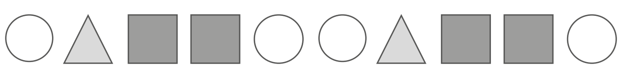
   Reconozca el patrón que se repite en la secuencia



Se dieron las siguientes respuestas:

a. 

b. 

c. 

Explique qué razonamiento podrían llevar a dar estas respuestas.

Capítulo IV

Funciones

Introducción

El concepto de función es muy importante en matemática y ciencias. Las funciones nos permiten describir diferentes fenómenos en los que se relacionan dos cantidades que varían. Por ejemplo, se usan funciones para describir la distancia recorrida por un vehículo, en función del tiempo transcurrido desde su partida, o para describir la cantidad de personas infectadas por una epidemia dependiendo de la cantidad de días de propagación de la enfermedad. El estudio de las funciones nos puede ayudar a ganar comprensión acerca del mundo que nos rodea y a predecir nuevos fenómenos.

Las funciones son asignaciones entre dos variables, que se pueden presentar de muchas maneras y estudiar con una variedad de herramientas. Todas esas maneras nos ayudan en su análisis y aportan desde distintas perspectivas. Sin embargo, es en los gráficos donde encontramos una representación que permite sintetizar la información contenida en una función. Los gráficos nos ayudan a describir globalmente una función, mostrando aspectos relevantes de la función que describen: tendencias, puntos donde estas tendencias cambian y, en general, su comportamiento. A partir de un gráfico, se pueden sacar muchas conclusiones acerca de una función. Graficar una función también nos permite comunicar visualmente su comportamiento de una manera sintética, transmitiendo de forma directa y concisa el análisis que hayamos realizado de ésta.

En este capítulo, estudiaremos la definición matemática de *función* y formas de presentarla, como fórmulas y tablas. También, estudiaremos el concepto de *razón de cambio*, a través del cual se puede describir cómo cambian las variables involucradas en una función. A este concepto, y a la función lineal, le dedicaremos toda una sección por su relevancia y utilidad.

Los gráficos se estudian en la última sección. En particular, veremos cómo elaborar gráficos a partir de tablas y a partir de situaciones, el gráfico de la función lineal, discutiendo el significado que tiene la razón de cambio o pendiente. También estudiaremos la interpretación de gráficos, lo que conlleva estudiarlos de manera cualitativa, poniendo el énfasis en sus características globales, como son el crecimiento, decrecimiento, y cambios de tendencia, lo que nos permite entender cómo varían las cantidades involucradas, para luego interpretar esto en el contexto de la situación estudiada.

1. Conceptos básicos

En esta sección estudiaremos la definición de *función* como objeto matemático, para luego poder trabajar con ella en la tarea de modelar distintas situaciones.

Definición IV. 1: Una función es una regla o correspondencia qué a cada elemento de una colección o conjunto de *entradas,* le asigna un elemento de una colección o conjunto de *salidas*.

El siguiente esquema nos permite visualizar los elementos fundamentales que caracterizan a las funciones

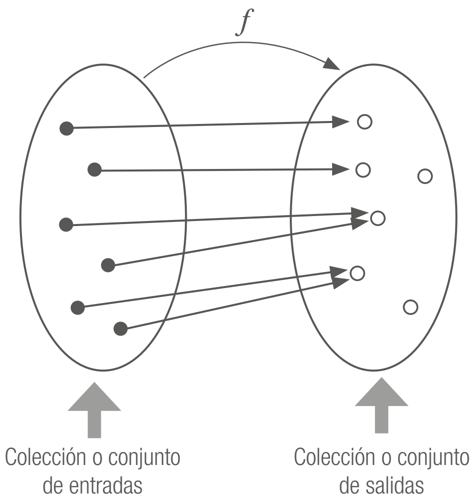


Figura IV.1

Tal como se muestra en la figura, a la izquierda está la colección o conjunto de entradas, y a la derecha la colección o conjunto de salidas. Los círculos representan los distintos elementos de cada una de las dos colecciones y las flechas indican la correspondencia. Vemos que a cada elemento del conjunto de entrada se le asigna un elemento del conjunto de salida. También notamos que la función puede asignar a dos entradas distintas una misma salida. Se denomina *dominio* al conjunto de entradas de la función y *recorrido* al conjunto de salidas.

No toda correspondencia entre conjuntos es una función. Por ejemplo, el siguiente diagrama no representa una función ya que no a todas las entradas le corresponde una salida:

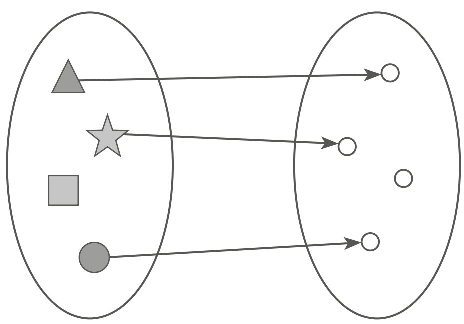


Figura IV.2

En la asignación que se muestra en el diagrama a continuación, hay una entrada a la cual le corresponde más de una salida, por lo que tampoco representa una función.

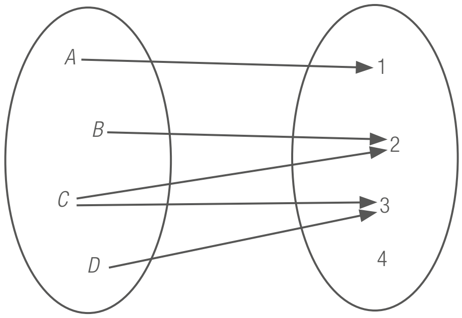


Figura IV.3

Representar funciones mediante diagramas no es muy útil, solo se puede hacer cuando el número de entradas es pequeño. Sin embargo, nos ayuda a comprender los elementos esenciales que definen a una función. Otra forma en que podemos entender una función es haciendo una analogía con la idea de una máquina la cual recibe una entrada y la transforma. Por ejemplo, consideremos una función que toma un número cualquiera y lo multiplica por 5 y le suma 1. Podemos visualizar la función usando el siguiente diagrama, en que el recuadro central simboliza la máquina.

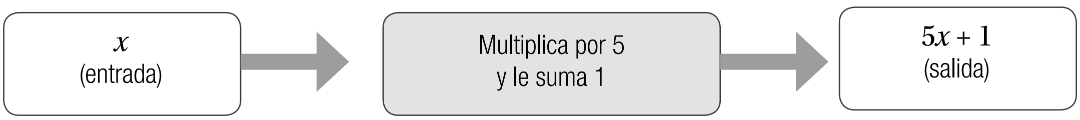


Figura IV.4

Por ejemplo, si la entrada es 2:

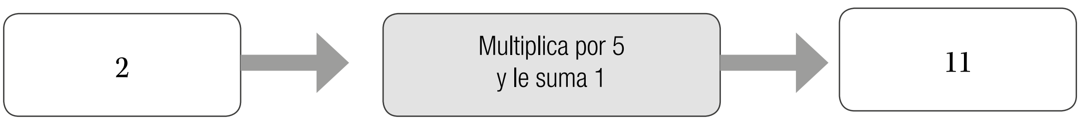


Figura IV.5

Esta función se puede describir mediante una expresión algebraica: si x es un número (entrada), la función lo multiplica por 5, obteniendo $5x$, y luego le suma 1, lo que entrega el número (salida) $5x + 1$.

Si llamamos f a una función, entonces $f(x)$ denota la salida de la función correspondiente a la entrada x. En el ejemplo anterior: $f(x) = 5x + 1$.

Definición IV. 2:	Evaluar una función en una entrada significa entregar el valor de la salida correspondiente.

Por ejemplo, si la función f está descrita por la expresión $f(x) = 5x + 1$, entonces, al evaluar la función en 3 obtenemos $f(3) = 16$.

Una notación que es muy usada y enfatiza la idea de función como la descripción de una relación entre dos variables es escribir $y = f(x)$ para expresar que las variables x e y están relacionadas a través de la función f. En esta notación, x denota una entrada de la función y se denomina variable independiente, mientras que y denota una salida de la función y se denomina variable dependiente, expresando que y depende de x.

Cualquier secuencia se puede describir a través de una función, la cual a cada número natural n le asigna el número o figura de la secuencia que se encuentra en esta posición. Por ejemplo, consideremos la secuencia construida repitiendo el patrón de flechas: derecha-abajo-arriba-izquierda, tal como se muestra en la figura.

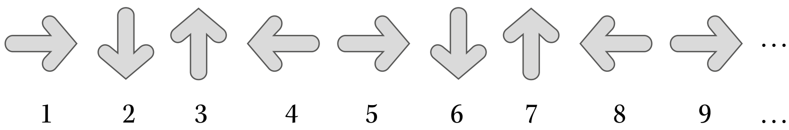
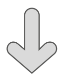
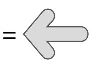
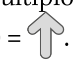
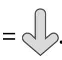


Figura IV.6

A partir de esta secuencia, podemos definir una función que llamaremos **fig**, la cual asocia a cada número natural N, que representa la posición en la secuencia, la figura correspondiente. Así:

fig (1) =  fig (2) =  fig (3) =  fig (4) = 

Para determinar **fig** (N) para un natural cualquiera, observamos que como el patrón tiene largo 4, si el número N es múltiplo de 4, entonces **fig** (N) = . Si N es un múltiplo de 4 más 1, tenemos que **fig** (N) = . Si N es un múltiplo de 4 más 2, tenemos que **fig** (N) = . Finalmente, si N es un múltiplo de 4 más 3, entonces **fig** (N) = .Vemos que la secuencia y la función definida a partir de esta entregan la misma información.

Si los elementos de una secuencia están descritos por medio de una expresión algebraica, la función que define la secuencia también lo estará. Por ejemplo, podemos describir los términos de una progresión aritmética a través de la función $P(N) = a + (N - 1)\, d$, donde a es el primer elemento de la progresión, y d es la diferencia entre un término y el anterior.

En resumen

- Una función es una correspondencia o asignación que a cada elemento de una colección, que denominamos *entrada*, le asocia una *salida*, que es un elemento de otra colección.
- Cualquier secuencia se puede expresar a través de la función que hace corresponder a cada número N el elemento en la posición N de la secuencia.

Ejercicios de la sección

1. Indique cuáles de las siguientes asignaciones pueden describirse mediante una función. Para cada caso, identifique la colección de entradas y salidas y describa la correspondencia respectiva:

   a. A cada alumno o alumna de un curso se le asigna su número de lista.

   b. A cada número de teléfono se le asigna la persona dueña de este.

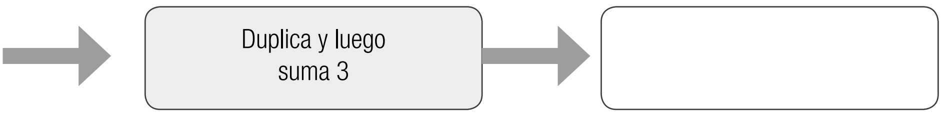
   c. A cada polígono regular se le asigna el número de vértices.

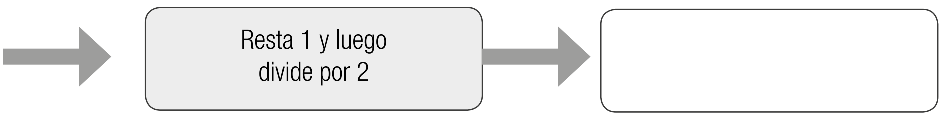
   d. A cada triángulo rectángulo se le asigna la medida de la hipotenusa.

   e. A cada residente de Chile se le asigna su número de RUT.

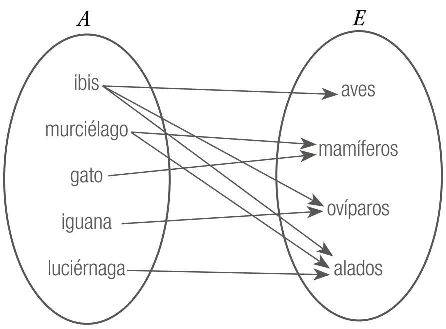
   f. A cada número real positivo se le asigna un triángulo que tenga al número como perímetro.

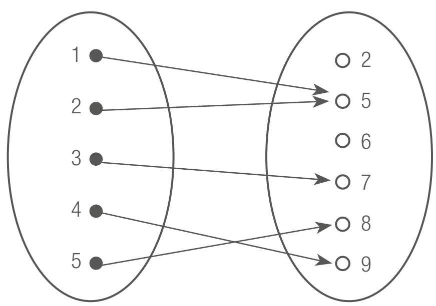
2. Describa, usando una fórmula, las siguientes máquinas que representan funciones.

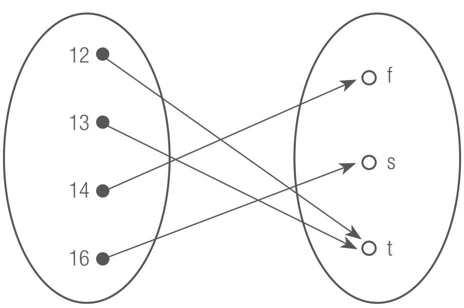
a.


b.


3. Determine cuál o cuáles de los siguientes diagramas representan una función. Explique por qué.

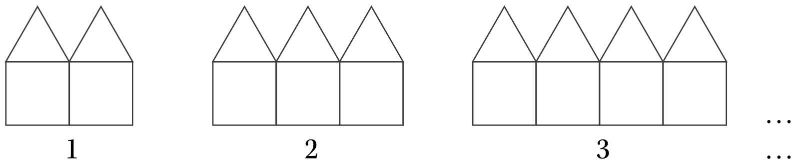




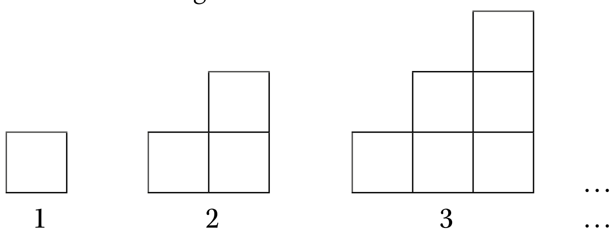


4. Para cada una de las siguientes secuencias, proponga una regla para continuarlas y descríbalas como una función.

a. El número de palitos necesarios para hacer la casa *N*



b. El número de cuadrados en la figura *N*



5. Evalúe las siguientes funciones:

a. $f(x) = 4x^2 + 1$ en $x = 1;\ 0{,}5;\ 4$

b. $g(x) = x(x+1) - x$ en $x = 0;\ -1;\ \frac{1}{8}$

2. Fórmulas y tablas

Hay muchas maneras de presentar o describir una función y la elección dependerá del tipo de función y de qué se desea estudiar y comunicar. Consideremos la siguiente situación:

Un promotor de tarjetas de crédito gana \$5.000 diarios y \$2.000 por cada persona que contrata el servicio.

Este enunciado describe una función que entrega la ganancia diaria del promotor, si conocemos cuántas personas contactadas por el promotor deciden obtener la tarjeta. Por ejemplo, si en un día 5 personas obtienen la tarjeta, la ganancia del promotor es de $5.000 + 5 \cdot 2.000 = 30.000$ pesos.

En algunos casos, podemos describir una función mediante una expresión algebraica o fórmula. En el ejemplo anterior, la función:

$$G(n) = 5000 + 2000n$$

entrega la ganancia diaria del promotor, si n personas contactadas obtienen la tarjeta. Veamos otro ejemplo.

Ejemplo

Consideremos un rectángulo de perímetro 10 cm. Describamos la función que entrega el área del rectángulo, si se da el largo de uno de sus lados.

Llamemos a y b al largo de los lados del rectángulo expresados en cm. Como el perímetro del rectángulo es 10 cm, se cumple que $2a + 2b = 10$. De esta igualdad obtenemos que $2b = 10 - 2a$, de donde deducimos que $b = 5 - a$. Notemos que esta igualdad define la función que toma como entrada el largo de un lado del rectángulo de perímetro 10 cm y entrega como salida el largo del otro lado. Con esto, podemos determinar la función A que entrega el área del rectángulo en términos de a, la cual está dada por $A(a) = a\,(5 - a)$.

La función A puede ser evaluada para cualquier valor de a, por ejemplo, para valores de a negativos, pero, en el contexto de la situación presentada, solo tiene sentido considerar $0 < a < 5$.

Ejercicio

Explique, en el contexto del ejemplo anterior, el sentido que tiene la evaluación de la función A en $a = 0$ o $a = 5$.

Otra forma de presentar una función es mediante una *tabla de doble entrada*. En la primera columna se listan las distintas entradas de la función y la segunda columna contiene las correspondientes salidas. Por ejemplo, podemos definir la función "altura", que a cada niño o niña de un curso le asigna su altura expresada en metros. Al usar una tabla para mostrar la función "altura", ponemos en la primera columna un identificador para cada niño, que en este caso es el nombre con el apellido paterno (suponiendo que no hay dos niños con el mismo nombre y apellido), y en la segunda columna se anota la altura del niño o niña correspondiente.

Alumno (a)	Altura (m)
Javiera Alarcón	1,28
Camilo Baeza	1,32
Mariano Barrientos	1,26
Antonia Castro	1,32
Carolina Carrasco	1,45
Martina Fernández	1,27
Carlos Gutiérrez	1,34
Daniel Herrera	1,27
Josefa Landeros	1,33
Maximiliano Lorca	1,36
Sandra Muñoz	1,32
Tomás Palacios	1,29
Florencia Zapata	1,30

Tabla IV.1

En este ejemplo, tenemos que al evaluar la función "altura" en la alumna Martina Fernández, se obtiene 1,27m. Si llamamos "altura" a esta función, entonces:

$$\textit{altura}\ (\text{Martina Fernández}) = 1{,}27\text{m}$$

En este caso, mediante la tabla podemos representar la función completamente, ya que podemos listar a todos los niños y niñas del curso.

Muchas veces usamos tablas para describir una función que se define a partir de una situación, por lo que se requiere construirla a partir de un enunciado, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

En el estacionamiento de un aeropuerto cobran las siguientes tarifas:

Tarifa	
Primera media hora o fracción	\$2.100
Media hora adicional o fracción	\$1.050
Tope diario	\$10.500

A partir de la información entregada, describamos de manera más precisa la función que, dado el tiempo que un auto estuvo estacionado, nos entregue la tarifa a pagar. Para esto usaremos una tabla, donde en la primera columna se anota como t el tiempo que un auto ha estado estacionado, y en la segunda columna, la cantidad a pagar.

Tiempo (h)	Tarifa ($)
$0< t \leq 0,5$	2.100
$0,5 < t \leq 1$	3.150
$1 < t \leq 1,5$	4.200
$1,5 < t \leq 2$	5.250
$2 < t \leq 2,5$	6.300
$2,5 < t \leq 3$	7.350
$3 < t \leq 3,5$	8.400
$3,5 < t \leq 4$	9.450
$4 < t \leq 24$	10.500

En este último ejemplo, el tiempo t es una variable que en principio podría ser cualquier número real. Sin embargo, para determinar la tarifa a pagar solo nos importa el tramo o intervalo en que se encuentra t, y por esa razón se puede describir la función asociada con una tabla.

En general, cuando el conjunto de entradas es infinito y no se distinguen un número finito de tramos, como en la situación anterior, una tabla no podrá mostrarnos la función completamente. Sin embargo listar los valores que entrega la función para algunas entradas puede ser de utilidad.

En la **Sección 4** de este capítulo veremos otra manera en que se presentan las funciones, que es a través de gráficos.

En resumen

- Hay algunas funciones que se pueden describir mediante una fórmula, la cual al evaluarla entrega los valores que toma la función.
- En algunos casos, se puede describir una función mediante una tabla de doble entrada. En la primera columna se listan las entradas, y en la segunda columna, las salidas correspondientes.
- Si el conjunto de entradas es infinito, en general, no es posible describir una función a partir de una tabla. Sin embargo listar algunas entradas y salidas puede ser de utilidad para su estudio.

Ejercicios de la sección

1. Describa las siguientes funciones mediante expresiones algebraicas:

   a. La función que a cada número natural le asocia su sucesor.

   b. La función que a cada número real distinto de 0 le asocia su inverso multiplicativo.

   c. La función que triplica y luego le suma 5 a cada número.

2. Explique cómo describiría las funciones que:

   a. A cada cuadrado le asocia su perímetro.
   b. A cada cuadrado le asocia la medida de su diagonal.
   c. A cada círculo le asocia su área.
   d. A cada cubo le asocia su área superficial.

3. Se sabe que de 1kg de naranjas se extrae $\frac{1}{3}$L de jugo.

   a. Describa mediante una expresión algebraica la función ***jugo***, que toma como entrada la cantidad de naranjas (kg) y entrega la cantidad de jugo (L) que se obtiene.
   b. Describa mediante una expresión algebraica la función ***naranjas***, que toma como entrada la cantidad de jugo (L) y entrega la cantidad de naranjas (kg) necesaria.

4. ¿Cómo mostraría la función que a cada niño o niña de un curso le asigna su altura, si es que hay niños que comparten el nombre completo?

5. Proponga una función f definida en los números reales a través de una fórmula, que cumpla:

x	$f(x)$
1	3
2	5
3	7
4	9

6. Describa en una tabla una función que muestre la temperatura promedio diaria en su ciudad durante el mes de febrero.

7. Considere la siguiente tabla

x	$g(x)$
1	3
2	7
3	11

A partir de esta, proponga una secuencia infinita donde x representa el número de figura y $g(x)$ represente el número de palitos necesarios para formar cada figura. De acuerdo a la secuencia propuesta, determine una fórmula para $g(x)$.

3. Función lineal y razón de cambio

En esta sección estudiaremos una clase importante de funciones, llamadas *funciones lineales*. Estas se comportan de una manera muy particular: *la variación de la variable dependiente es directamente proporcional a la variación de la variable independiente.* Esto es propio y exclusivo de las funciones lineales. La propiedad es compartida por las progresiones aritméticas, lo que muestra que estas progresiones son un caso particular de funciones lineales.

Comencemos recordando lo que significa que dos variables sean directamente proporcionales.

Definición IV. 3: Decimos que dos variables x e y son directamente proporcionales si existe una constante m distinta de 0, llamada constante de proporcionalidad, tal que $y = mx$.

Esta relación define una función f dada por $f(x) = mx$. Veamos un ejemplo.

Para preparar un litro de chocolate caliente se necesita disolver en la leche 2 cucharadas de chocolate en polvo. Podemos expresar la cantidad de chocolate caliente (en litros) como una función de la cantidad de chocolate en polvo (en cucharadas) como:

$$\text{chocolate caliente} = 0{,}5 \cdot \text{chocolate en polvo}.$$

Si llamamos x a la cantidad de cucharadas de chocolate en polvo e y a la cantidad de litros de chocolate caliente, tendremos que y en función de x se expresa como

$$y = 0{,}5\, x$$

Vemos así que la cantidad de chocolate caliente es directamente proporcional a la cantidad de cucharadas de chocolate que se disuelven, y la constante de proporcionalidad es $0{,}5$.

Ejercicio

En el ejemplo anterior, suponga que el chocolate viene envasado en frascos que contienen 10 cucharadas.

a. ¿Cuántas cucharadas de chocolate en polvo se necesitan para preparar 3 litros de chocolate caliente? ¿cuántos litros de chocolate caliente se pueden preparar con un envase de chocolate en polvo?

b. Haga una tabla que relacione la cantidad de envases de chocolate en polvo con la cantidad de litros de chocolate caliente que se consiguen y obtenga la expresión para la cantidad de litros de chocolate caliente en función de la cantidad de envases de chocolate en polvo. ¿Es también proporcional esta relación?

Las situaciones en las que se relaciona el desplazamiento o distancia recorrida con el tiempo transcurrido y la velocidad muchas veces se pueden modelar a través de una proporcionalidad directa. Supongamos que un bus parte del terminal de buses Collao de Concepción con una velocidad constante de 90 km/h. Denotamos con $s(t)$ la distancia del terminal Collao al bus, en kilómetros, después de t horas.

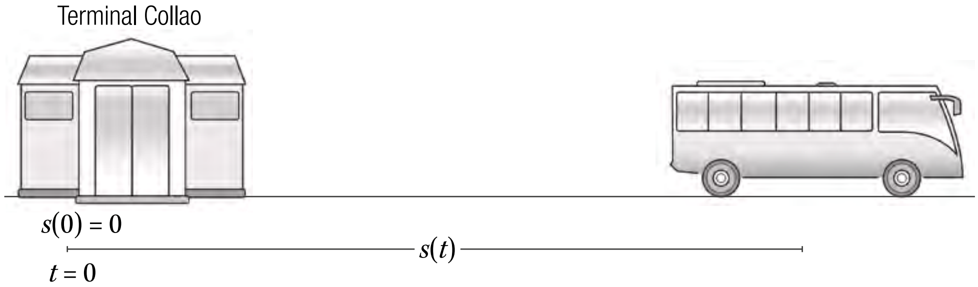


Figura IV.7

Sabemos que la velocidad es la distancia recorrida dividida por el tiempo transcurrido, es decir:

$$\text{velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

por lo que conociendo la velocidad, podemos determinar la distancia recorrida:

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo}.$$

La distancia recorrida es proporcional al tiempo transcurrido, y la constante de proporcionalidad es la velocidad. Si llamamos $s(t)$ a la distancia recorrida por el bus (en km) desde el terminal Collao después de t horas, obtenemos:

$$s(t) = 90\,t.$$

Ejercicio

Para el ejemplo anterior determine:

a. ¿A qué distancia del terminal Collao estará el bus después de media hora?
b. Suponiendo que la velocidad se mantiene siempre constante ¿cuánto tardará el bus en llegar a Santiago?

El coeficiente de proporcionalidad no tiene por qué ser positivo como en los ejemplos anteriores. Veamos un ejemplo donde no lo es. Imagine un estanque de agua con un flotador que marca el nivel de agua relativo a un nivel óptimo que indica como "0". Si entra más agua al estanque, el nivel aumentará y se marcarán los centímetros por sobre el nivel óptimo. Si hay una filtración, el nivel bajará y se marcarán los centímetros bajo el nivel óptimo (con signo negativo). Supongamos que el estanque está perdiendo agua, de modo que el nivel baja 3 cm al día y que al comienzo del registro el estanque estaba en el nivel óptimo de agua. En tal caso, la expresión para el nivel del estanque (n) en función del número de días transcurridos (d) será:

$$n(d) = -3d.$$

La siguiente tabla muestra cómo irá cambiando el nivel del estanque desde que partió el registro:

Día	Nivel
0	0
1	−3
2	−6
3	−9
4	−12
5	−15

Tabla IV.2

Notemos que los valores del marcador de nivel siguen una progresión aritmética con diferencia $d = -3$.

Para pensar

¿Cuál es la relación entre una función del tipo $f(x) = mx$ con una progresión aritmética? ¿Cómo se obtiene la *diferencia* y el *valor de partida* que caracterizan a este tipo de progresión?

Introduciremos un concepto que permite cuantificar la forma en que cambia la variable dependiente, en relación con el cambio de la variable independiente. Este concepto nos permitirá hacer comparaciones que sirvan para graficar funciones y para modelar situaciones utilizando funciones.

Definición IV. 4: La razón de cambio de una función f entre dos valores x y z se define como $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$.

Note que si usamos valores x y z que estén a distancia 1, es decir, tales que $z = x + 1$, entonces la razón de cambio será simplemente $f(x + 1) - f(x)$, que es la variación de f por cada unidad de incremento de la variable independiente x.

Mirando la tabla de nuestro último ejemplo, vemos que con cualquier elección de los valores x y z, la razón de cambio de f es siempre la misma, −3, lo que coincide con el coeficiente de proporcionalidad. Lo mismo ocurrirá en todos los ejemplos anteriores. En el caso del bus, la razón de cambio de la función que representa la distancia del bus al terminal será constante en cualquier tramo del camino y será igual a 90, que es también el coeficiente de proporcionalidad. En el caso de la función de los litros de chocolate, la razón de cambio entre cualquier par de valores es 0,5.

Veamos una función levemente distinta a las anteriores, pero que conserva esta propiedad. Supongamos que el bus del ejemplo anterior parte de una iglesia que se encuentra a 100 km del terminal de buses Collao de Concepción. Al igual que antes, el bus tiene una velocidad constante de 90 km/h. Denotamos con $S(t)$ la distancia del terminal Collao al bus, en kilómetros, después de t horas.

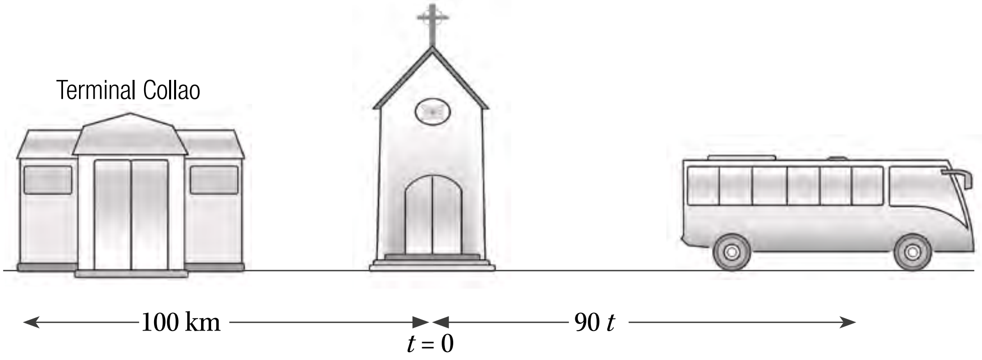


Figura IV.8

Ahora la distancia $S(t)$ es una función del tiempo t un poco distinta que en el caso anterior. Veamos cómo quedaría expresada en una tabla:

Tiempo transcurrido desde que partió el bus de la iglesia (h)	Distancia del terminal a la que se encuentra el bus (km)
0	100
1	190
2	280
3	370
4	460

Tabla IV. 3

Observamos que también aquí los valores de la distancia siguen una progresión aritmética con la misma diferencia $d = 90$, pero ahora el valor inicial es 100 en lugar de 0, como era el caso en el primer ejemplo del bus. Se puede obtener que la función S que describe la distancia a la que se encuentra el bus del terminal Collao, en kilómetros, después de t horas, aumentará proporcionalmente con el número de horas transcurridas. Como en el tiempo $t = 0$ el bus parte a 100 km del terminal Collao, entonces la distancia a la que se encuentra el bus respecto del terminal Collao, en función del tiempo transcurrido, es:

$$S(t) = 90\,t + 100.$$

Notamos que también en este caso la razón de cambio entre cualquier par de valores de t es constante e igual a 90.

Ejercicio

Utilizando la expresión de la función $S(t)$ del ejemplo anterior, determine:

a. ¿A qué distancia del terminal Collao estará el bus después de media hora?

b. ¿Cuántas horas tardará el bus en llegar a Santiago?

Todas las funciones que hemos visto en esta sección reciben el nombre de función lineal.

Definición IV. 5: Una función se llamará lineal si es de la forma:

$f(x) = mx + n$

Con m y n números reales dados.

La constante m que aparece en la fórmula de la función lineal $f(x) = mx + n$ se denomina *pendiente*.

En el ejemplo anterior, $S(t) = 90\,t + 100$ es una función lineal con pendiente $m = 90$ y $n = 100$. El siguiente teorema nos dice que las únicas funciones que tienen razón de cambio constante son las funciones lineales.

Teorema IV.1

Una función será lineal si y solamente si su razón de cambio entre cualquier par de valores es siempre la misma.

Demostración

Si f es una función lineal, es decir, si $f(x) = mx + n$, entonces su razón de cambio entre los valores x y z será

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{mz+n-mx-n}{z-x} = \frac{m(z-x)}{z-x} = m\cdot$$

De este modo, vemos que todas las funciones lineales tienen la característica de que su razón de cambio no depende de los valores que se usaron en su cálculo, por lo que es siempre la misma y corresponde a la pendiente.

Recíprocamente, supongamos que la razón de cambio:

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

es constante y no depende de los valores x y z donde se la evalúa. Llamemos m a esta constante de proporcionalidad. Entonces, para cualquier par x, z se tiene que:

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = m.$$

Si reemplazamos en esta expresión $z = 0$, y tomamos x cualquiera distinto de cero, obtenemos que $f(x) = mx + f(0)$, es decir, f es una función lineal con $n = f(0)$.

3.1 Algunas funciones no lineales

Veamos algunos ejemplos de funciones que no son lineales y estudiemos cómo cambian sus razones de cambio dependiendo de los valores donde se evalúan.

Consideremos la función que a un cuadrado cuyo lado mide x le asocia su área $A(x) = x^2$. Hagamos una tabla que muestre algunos valores de esta función:

x	$A(x)$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Tabla IV.4

A partir de esta tabla, calculamos razones de cambio:

$$\frac{A(1)-A(0)}{1-0}=\frac{1-0}{1}=1$$

$$\frac{A(2)-A(1)}{2-1}=\frac{4-1}{1}=3$$

$$\frac{A(3)-A(2)}{3-2}=\frac{9-4}{1}=5.$$

Vemos que estas razones van creciendo en la medida que los valores donde las calculamos crecen. Esta función no lineal es del tipo cuadrática, las que tienen la forma general:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde $a \neq 0$, b y c son números dados. Para este tipo de función, la razón de cambio entre x y z se expresa como:

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\frac{az^2+bz+c-ax^2-bx-c}{z-x}=\frac{a(z^2-x^2)+b(z-x)}{z-x}=a(z+x)+b.$$

En particular, para la función $A(x) = x^2$ tenemos que la razón de cambio entre x y $x+1$ está dada por:

$$A(x+1)-A(x)=2x+1.$$

Observamos que si x es positivo, la variación de la función A, cuando la variable x se incrementa una unidad, es positiva, más aún, esta variación se va haciendo más grande a medida que x crece.

Para pensar

¿De qué depende que la razón de cambio de una función cuadrática crezca o disminuya cuando los números x y z considerados se desplazan hacia la derecha?

Otra función no lineal interesante es aquella que relaciona dos variables que están en proporcionalidad inversa, es decir, cuando $y = c\frac{1}{x}$, donde c es la constante de proporcionalidad dada. Si denominamos $f(x) = c\frac{1}{x}$, tenemos que la razón de cambio entre dos valores x y z será:

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{c \quad \frac{1}{z} - \frac{1}{x}}{z - x} = -c\frac{1}{zx}$$

lo que claramente cambiará dependiendo de cuáles sean x y z. Por ejemplo, si consideramos $z = x + 1$, tenemos que la variación de la función por cada unidad en que varía la variable x está dada por:

$$f(x+1) - f(x) = -c\frac{1}{x(x+1)} \ .$$

Si la constante de proporcionalidad c es positiva y tomamos valores positivos de x, entonces la variación en f por cada unidad de incremento en la variable x será negativa; es decir, f decrecerá. Más aún, mientras más grande sea x, menor será el cociente $\frac{1}{x(x+1)}$ y, por lo tanto, el decrecimiento de f entre x y $x + 1$ será menor mientras más grande sea x. Al revés, cuando x está cerca de 0, el cociente $\frac{1}{x(x+1)}$ será muy grande y el decrecimiento de f en esa zona será enorme. En la **Sección 5** de este capítulo, estudiaremos el gráfico de esta función, lo que nos dará una mejor idea de su comportamiento.

Ejercicio

Analice como varía $f(x) = c\frac{1}{x}$ cuando la constante de proporcionalidad c es negativa.

Todos hemos escuchado que para indicar crecimientos muy rápidos se usa la expresión "crecimiento exponencial". Veamos, en un ejemplo, qué significa esto en cuanto a las razones de cambio. Consideremos el ejemplo del **apartado I.2.3**, referido al modelamiento del crecimiento de una población de bacterias *Escherichia coli*, las cuales se duplican cada 20 minutos.

Como vimos anteriormente, si en un instante inicial hay **1.000** bacterias, **20 min** más tarde habrá **2.000** y **40 min** más tarde habrá el doble de **2.000**, es decir, **4.000** bacterias, y así sucesivamente. Si llamamos n al número de períodos de **20 min** transcurridos desde el instante inicial y $P(n)$ a la población de bacterias correspondiente, tendremos que:

$$P(n) = 2^n \cdot 1.000.$$

Para analizar el crecimiento de esta función, comenzaremos por hacer una tabla:

n	$P(n)$
0	1.000
1	2.000
2	4.000
3	8.000
4	16.000
5	32.000
6	64.000
7	128.000

Tabla IV.5

Podemos verificar que $\dfrac{P(n+1)}{P(n)} = 2$ para cualquier valor de n. Es decir, la secuencia $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, … es una progresión geométrica.

También observamos que la función es creciente y que crece muy rápido. La función $P(n)$ se denomina función exponencial. Veamos cómo evolucionan las razones de cambio de esta función.

n	Razón de cambio entre n y $n+1$
0	$\dfrac{P(1)-P(0)}{1-0} = 2.000 - 1.000 = 1.000$
1	$\dfrac{P(2)-P(1)}{2-1} = 4.000 - 2.000 = 2.000$
2	$\dfrac{P(3)-P(2)}{3-2} = 8.000 - 4.000 = 4.000$
3	$\dfrac{P(4)-P(3)}{4-3} = 16.000 - 8.000 = 8.000$
4	$\dfrac{P(5)-P(4)}{5-4} = 32.000 - 16.000 = 16.000$
5	$\dfrac{P(6)-P(5)}{6-5} = 64.000 - 32.000 = 32.000$
6	$\dfrac{P(7)-P(6)}{7-6} = 128.000 - 64.000 = 64.000$

Tabla IV.6

Observamos que la razón de cambio considerada también se duplica al incrementar n en una unidad, lo que corresponde a un crecimiento muchísimo mayor que en el caso de las funciones anteriormente mostradas.

En resumen

- Una función lineal cumple que la razón de cambio entre cualquier par de valores es constante.
- Estas funciones se pueden expresar por la fórmula $f(x) = mx + n$, donde m es la razón de cambio o pendiente, y n corresponde a $f(0)$.
- Cualquier función en que la razón de cambio entre dos valores depende de los valores considerados no puede ser lineal.

Ejercicios de la sección

1. En cuál o cuáles de las siguientes ecuaciones las variables x e y son proporcionales:

   a. $x = 4y$
   c. $x - y = 0$
   e. $\frac{x}{y} = 5$
   b. $x + y = 1$
   d. $x^2 = y$
   f. $x + 3y = 4x + y$

2. Un empresario compra una máquina por un valor de 10 millones de pesos. Para efecto de pago de impuestos, se supone que ese valor se deprecia linealmente a 0 en un período de 10 años. Exprese el valor de la máquina en función de su antigüedad.

3. En las siguientes situaciones, indique cómo las cantidades presentes están relacionadas. Si es posible, describa la relación encontrada con una expresión algebraica e indique si esta corresponde a una función lineal.

   a. El área de un rectángulo que tiene un lado de largo 3 cm.
   b. Las calorías de un frasco de mermelada, si un gramo tiene 30 kcal.
   c. La cantidad de pintura que se requiere para pintar una pared.
   d. El dinero en una cuenta de ahorro que se deposita a un interés 0,8% anual.
   e. El área de un círculo en términos de su radio.
   f. La porción de una torta que reciben los niños que participan en un cumpleaños.
   g. El área de un triángulo equilátero.
   h. La relación entre la distancia en un plano dibujado a escala 1:150 y la distancia real.

4. Una milla es aproximadamente 1,6 km. Escriba la función que convierte km a millas y aquella que convierte millas a km. ¿Son ambas lineales?

5. La temperatura se mide en algunos países en °F. La relación entre la temperatura en °F y en °C es una función lineal. Se sabe que 0°C corresponde a 32°F y que 100°C es igual a 212°F. Escriba las funciones que permiten transformar de °F a °C y de °C a °F.

6. Las siguientes tablas muestran valores de distintas funciones. Determine si las funciones correspondientes pueden ser lineales. Si la respuesta es afirmativa, encuentre la expresión para la función.

x	y
0	4
1	8
2	12
3	16

x	y
1	−5
3	15
4	25
2	30

x	y
−1	−5
0	10
1	25
2	50

x	y
−4	0
−2	6
0	12
1	15

7. Se llama función exponencial a una del tipo $f(N) = a^N$, donde a es un número mayor que 0. Demuestre que:

a. La razón de cambio entre $N + 1$ y N, será

$$f(N+1) - f(N) = a^N (a-1).$$

b. Discuta el comportamiento de la función, en términos de su razón de cambio, cuando $a < 1$, $a = 1$, $a > 1$.

c. Considere la secuencia $f(0), f(1), f(2), \ldots$, con f es una función exponencial. ¿Se trata de una progresión geométrica? Si así fuera, ¿cuál es su razón?

4. Gráficos y funciones

Para describir una función también se puede emplear un gráfico, que la despliega de manera global, y nos permite apreciar visualmente cómo es la variación de las variables involucradas.

Para abordar la elaboración de gráficos y su interpretación es necesario introducir algunos conceptos básicos, como el de *plano cartesiano* y *coordenadas*.

4.1 Coordenadas cartesianas y el plano cartesiano

La idea de asignar un par de números reales a los puntos del plano y viceversa puede ilustrarse mediante los boletos de teatro o conciertos. Por ejemplo, si tenemos el siguiente boleto:

Figura IV.8

Para encontrar nuestro asiento en el teatro debemos buscar la fila 1 (entre las líneas de asientos horizontales) y el asiento 4 (entre las líneas de asientos verticales). De esta manera, ubicamos nuestro asiento, que en el dibujo está en negro. Podemos describir este asiento como el par $(1, 4)$, donde el primer número indica la fila horizontal de asientos y el segundo número la línea vertical.

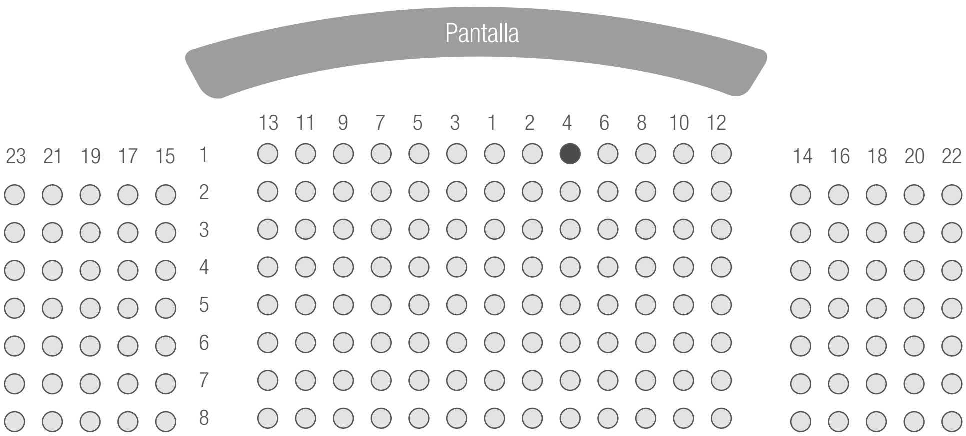


Figura IV.9

Ejercicio

Ubique en el teatro de la figura los asientos $(7, 21)$ y $(5, 15)$.

En el plano hay una infinidad de puntos, y para describir la ubicación de un punto en el plano utilizaremos pares de números reales. Lo primero es elegir un sistema de referencia. Con este propósito, trazamos en el plano dos rectas perpendiculares, que llamaremos *ejes* y que juegan el rol de definir la coordenada vertical y horizontal. Al punto de intersección de ambas rectas se le llama *origen,* se denota usualmente por O y se le asignan las coordenadas (0, 0). En ambos ejes elegimos una unidad de medida, transformando cada eje en una recta numérica. Así, convertimos al plano en un *plano coordenado* o *plano cartesiano*, al cual usualmente nos referiremos sencillamente como *plano*. Esto lo mostramos en la siguiente figura:

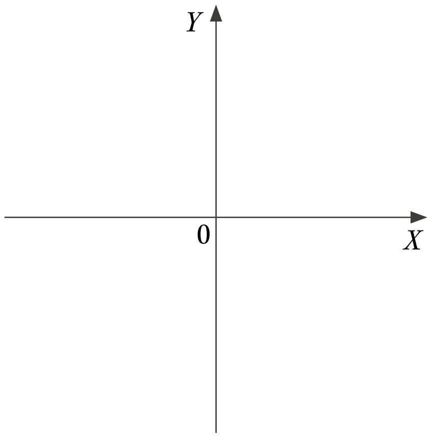


Figura IV.10

El plano coordenado se visualiza orientado como en la figura, y denotamos como *eje X* a la recta horizontal y como *eje Y* a la recta vertical. Estos ejes dividen el plano en cuatro regiones que se llaman *cuadrantes*. Los cuadrantes se denotan con las letras romanas I, II, III y IV en el sentido contrario de las agujas del reloj, como se muestra en la siguiente figura:

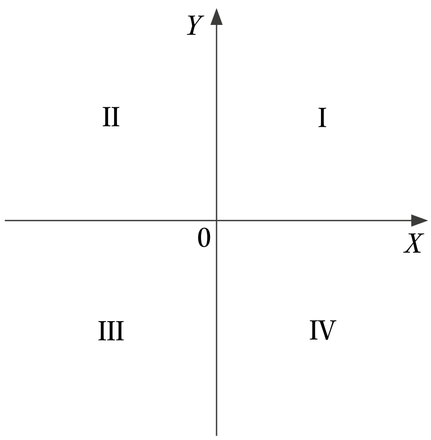


Figura IV.11

También se denota *semieje positivo OX* (o $x > 0$) al rayo que tiene como origen el punto (0, 0) y pasa por (1, 0), y similarmente denominamos *semieje positivo OY* (o $y > 0$) al rayo que tiene como origen el punto (0,0) y pasa por (0,1).

Veamos cómo identificar un punto P en el plano. Para esto trazamos una recta que pase por el punto P y que sea paralela al eje Y. Esta recta corta al eje X en el punto x de dicha recta. Llamaremos a x la *abscisa* del punto P. De igual manera, trazamos una recta que pase por P y que sea paralela al eje X. Esta recta corta al eje Y en el punto y en dicho eje coordenado. Llamaremos a y la *ordenada del punto* P. Veamos esto en la siguiente figura.

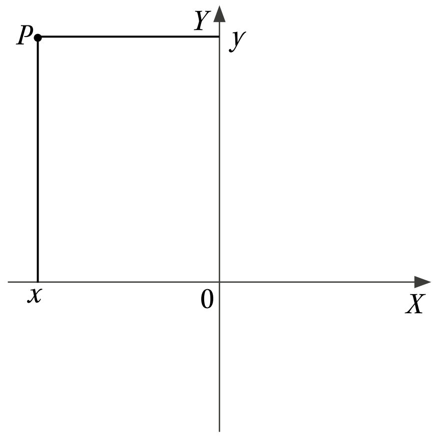
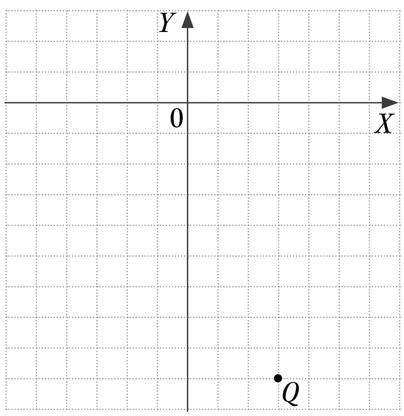


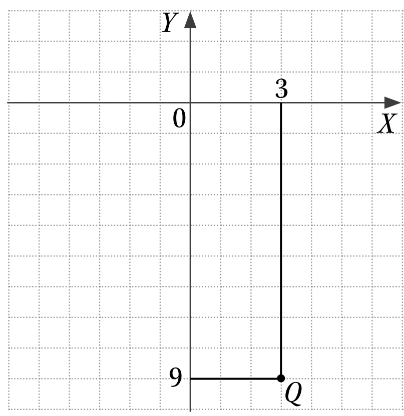
Figura IV.12

De esta manera, al punto P le asignamos el par de números (x, y). Mediante este procedimiento, a cada punto P del plano le hacemos corresponder un único par de números (x, y) y viceversa. La notación $P\,(x, y)$ indica que las coordenadas del punto P son (x, y).

Ejemplo

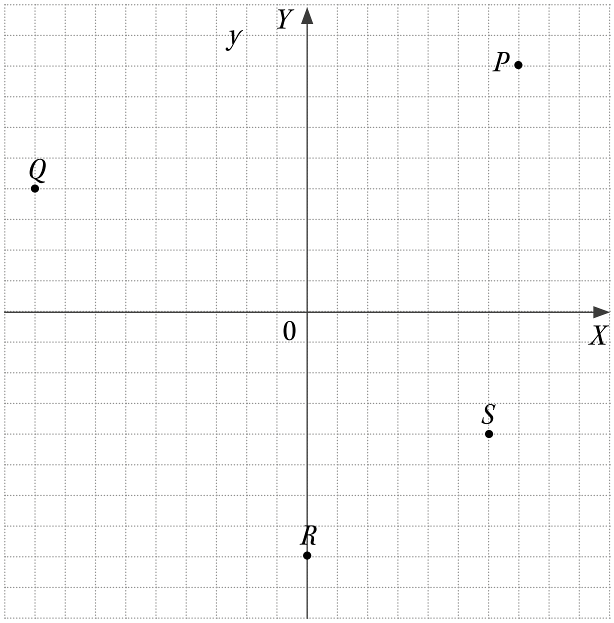
Consideremos el punto Q en el plano y determinemos sus coordenadas suponiendo que en la cuadrícula los cuadrados son de lado unitario. Para eso trazamos una recta que pase por Q y que sea paralela al eje Y. Esta recta corta al eje X en 3. Además, trazamos una recta que pase por Q y que sea paralela al eje X. Esta recta corta al eje Y en -9. Por lo tanto, las coordenadas del punto Q son $(3, -9)$. La abscisa de Q es 3 y la ordenada es -9.



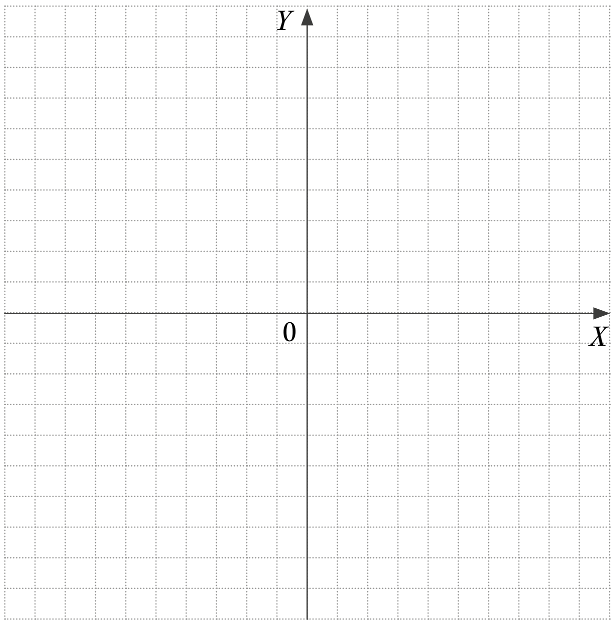


Ejercicios

1. Determine las coordenadas de los puntos P, Q, R y S.



2. Ubique en el plano coordenado a los puntos $P\,(0, 4)$, $Q\,(-5, 7)$, $Q\,(-2, -1)$, y $S\,(1/2, 7)$.



4.2 Cómo graficar funciones

El gráfico de una función f, cuyas entradas y salidas son números reales, es la colección de puntos del plano de la forma $(x, f(x))$. Muchas veces se dice que se está graficando $y = f(x)$, entendiendo esto como los puntos del plano de la forma (x, y) con $y = f(x)$.

En general, no es posible determinar el gráfico de la función. Si la variable dependiente x toma infinitos valores reales, entonces tendríamos que identificar un número infinito de puntos de la forma $(x, f(x))$ en el plano. Muchas veces solo podremos esbozar el gráfico de la función.

Veamos cómo abordar la confección de un gráfico a partir de datos entregados en una tabla. En la siguiente tabla se ha registrado el crecimiento, en centímetros, de un poroto en un algodón en los primeros 14 días desde que se plantó. Esta tabla nos entrega información acerca de la función que entrega el largo del brote del poroto, medido en cm, en función del tiempo transcurrido desde que se plantó.

t (días)	$L(t)$ (cm)
0	0
1	0
2	1
3	2
4	2
5	4
6	6
7	8
8	11
9	14
10	16
11	18
12	19
13	20
14	20

Tabla IV. 7

En este caso, llamaremos los ejes t y L, en lugar de X e Y, ya que estos nombres son más pertinentes para la situación descrita. También indicaremos en el gráfico la unidad de medida del eje de las abscisas (días), y de las ordenadas (cm). Luego identificamos los puntos de la tabla en el plano; por ejemplo, sabemos que $L(11) = 18$, por lo que el punto $(11, 18)$ está en el gráfico.

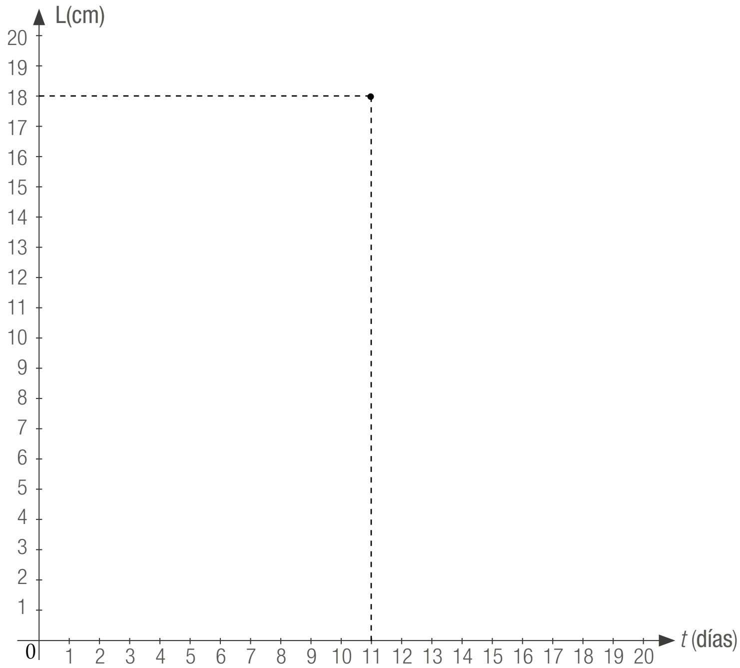


Figura IV.13

Siguiendo de esta manera, podemos identificar todos los puntos de la tabla en el plano, y obtenemos lo siguiente:

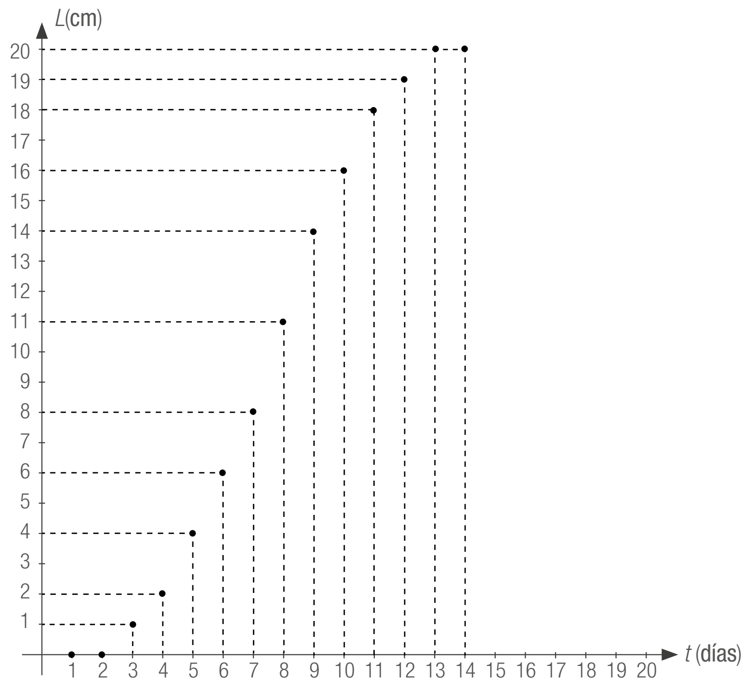


Figura IV.14

Notamos que, como las ordenadas y abscisas de los puntos son positivas (pues el tiempo transcurrido y el largo toman valores positivos), el gráfico está contenido en el primer cuadrante del plano.

Hemos identificado varios puntos del gráfico y eso nos ayuda a esbozarlo uniendo los puntos que sabemos que están en este con una curva, como se muestra en la siguiente figura:

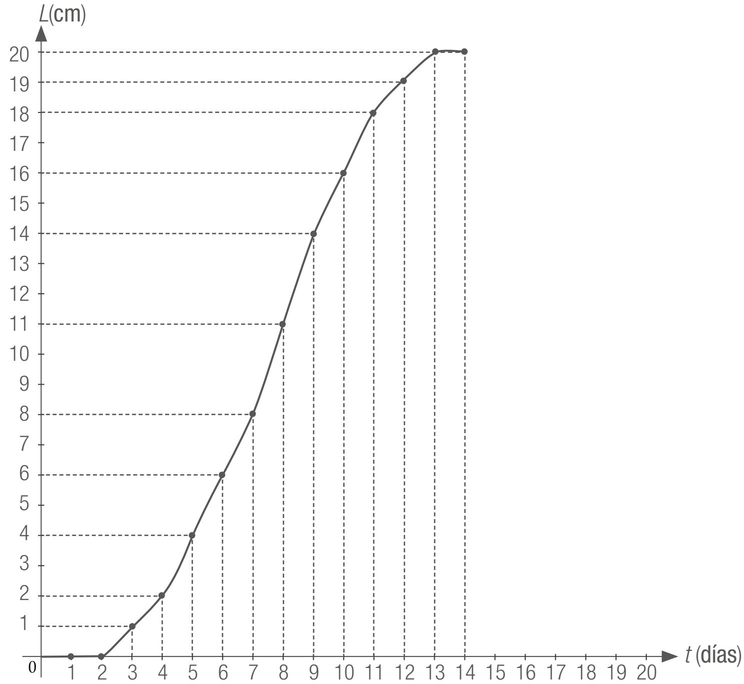


Figura IV.15

Esto tiene sentido en este caso, ya que el crecimiento del poroto es continuo. En esta situación, es imposible determinar exactamente el gráfico de la función, ya que solo conocemos algunos puntos de él. Sin embargo al esbozar el gráfico podemos apreciar de manera global el comportamiento que tiene el crecimiento del brote. Por ejemplo, vemos que el brote crece mucho más rápido entre los días 6 y 9 que entre los días 1 y 4 o 11 y 14.

A veces queremos graficar funciones de las cuales conocemos su expresión algebraica, por lo que podríamos evaluarla en cualquier punto del conjunto de entrada. Por ejemplo, consideremos la función que a la medida de un lado de un rectángulo de perímetro 10 cm, le asocia su área. Tal como vimos en la **Sección 2**, esta función está dada por la expresión $A(a) = a\,(10 - a)$, donde a representa la medida de un lado en cm y $A(a)$ es el área correspondiente en cm^2. Para bosquejar el gráfico en este caso, partimos por realizar una tabla con algunos valores de a y $A(a)$:

a (cm)	$A(a)$ (cm²)
0	0
0,5	2,25
1	4
1,2	4,56
1,5	5,25
2	6
2,5	6,25
3	6
3,5	5,25
4	4
4,3	3,01
4,5	2,25
5	0

Tabla IV.7

En este caso, podemos bosquejar el gráfico siguiendo los mismos pasos anteriores, notando que el área también es continua.

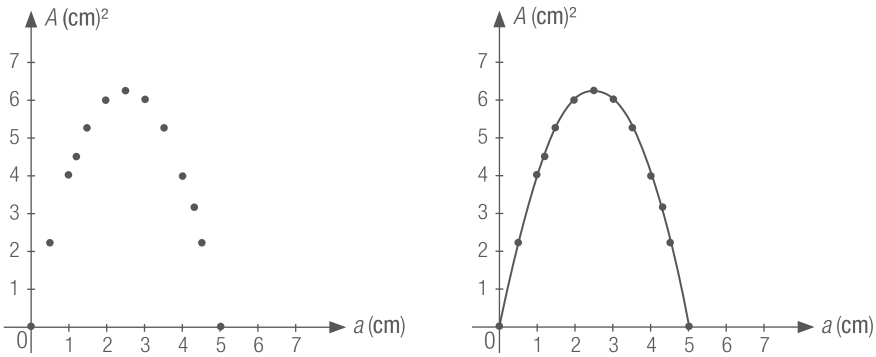


Figura IV.16

Para pensar

Usando el gráfico elaborado, conjeture cuál es el rectángulo de perímetro 10 que tiene mayor área.

También podemos graficar funciones en que la variable de entrada toma solo como valores números naturales. En este caso, no tiene sentido unir los puntos del gráfico. Por ejemplo, consideremos una secuencia infinita que parte con un hexágono y en la que cada figura se genera al agregar un hexágono adyacente en la figura anterior, tal como se muestra a continuación:

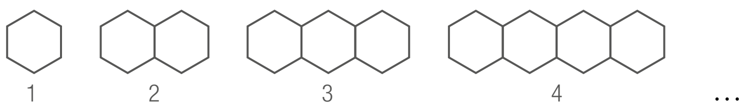


Figura IV.17

Si definimos la función $P(N)$, que a la figura N le asigna el número de segmentos usados en cada figura, resulta que $P(N) = 5N + 1$. En este caso tampoco podemos identificar el gráfico completo de la función, porque N toma un número infinito de valores, pero podemos identificar en el plano parte del gráfico, como se muestra en la figura:

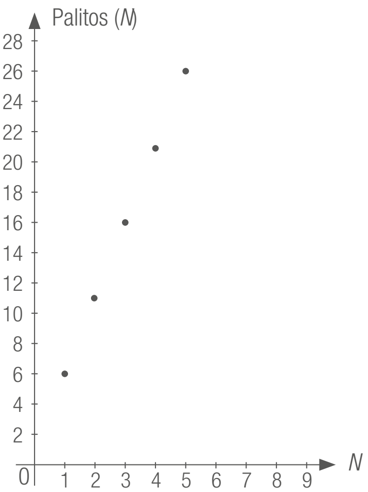


Figura IV.18

Para pensar

¿Cómo mostraría en un gráfico la función que a cada alumno de un curso le asigna su altura?

Ejercicios

1. Para usar el transporte urbano en Santiago, se debe usar la tarjeta BIP que se carga con dinero. Supongamos que el pasaje de metro cuesta $600. Proponga una tabla para el dinero que queda en la tarjeta al final de cada día, en el transcurso de una semana, suponiendo que: se inicia la semana con una tarjeta cargada con $10.000; de lunes a viernes se hacen dos viajes, uno de ida al trabajo y el otro de regreso a la casa; el día martes se le paga un viaje a un amigo; el día miércoles se carga con $2.000 y el viernes se hace un viaje extra para ir desde el trabajo al cine. Grafique los puntos de la tabla.

2. Esboce los gráficos de $y = f(x)$ para:

   a. $f(x) = 1$, con x tomando valores naturales.
   b. $f(x) = 1$, con x tomando valores reales.
   c. $f(x) = x + 1$, con x tomando valores naturales.
   d. $f(x) = x + 1$, con x tomando valores reales.
   e. $f(x) = 2x$, con x tomando valores reales.
   f. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, con x tomando valores naturales mayores a 1.

g. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, con x tomando valores reales positivos. Indicación: considere valores de x mayores que 1 y menores que 1.

4.3 Gráficos de funciones lineales

Comenzaremos graficando la función lineal $y = mx$. El caso más simple es cuando $m = 1$, es decir, cuando $y = x$. Esto significa que las dos variables siempre toman los mismos valores y el gráfico consiste en los puntos (x, x). Se puede ver que dichos puntos forman la bisectriz de los cuadrantes I y III, que es la línea recta que equidista del eje x e y, como se muestra en la siguiente figura[1]:

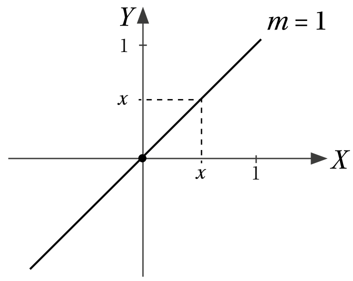


Figura IV.19

Por lo tanto, el gráfico de la función $y = x$ (proporcionalidad directa con $m = 1$) es la línea recta que pasa por el origen de coordenadas $(0, 0)$ y por el punto $(1, 1)$.

En general, para distintos valores de m, el gráfico de la función determinada por la proporcionalidad directa $y = mx$ es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas $(0, 0)$ y por el punto $(1, m)$.

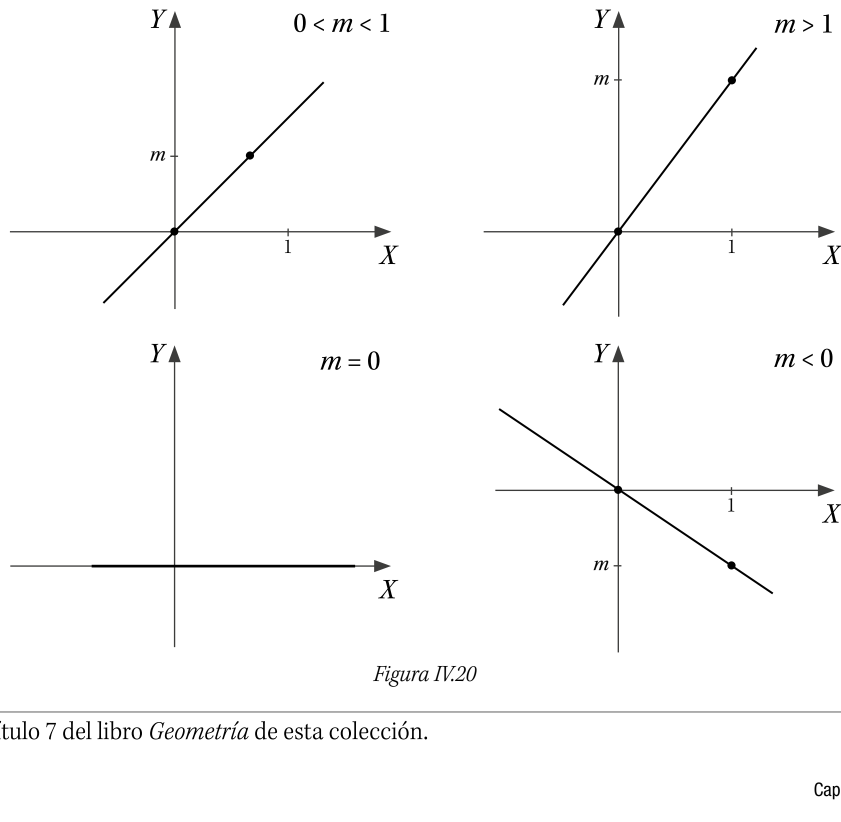


Figura IV.20

1 Ver Capítulo 7 del libro *Geometría* de esta colección.

En cada uno de estos gráficos se ha marcado el valor que toma $y = mx$, cuando $x = 1$. Luego se unió este punto $(1, m)$ con el punto $(0,0)$, mediante una recta.

En estos gráficos podemos ver que el signo de la pendiente m nos permite obtener una propiedad de la función $y = mx$.

- Si $m > 0$, entonces a medida que aumentan los valores de la variable x, los respectivos valores de la variable y también aumentan. Debido a esto, se dice que la función es *creciente*.
- Si $m < 0$, a medida que aumentan los valores de la variable x, los respectivos valores de la variable y disminuyen. Debido a esto, se dice que la función es *decreciente*.
- Si $m = 0$, entonces la función $y = mx$ permanece constante e igual a cero.

También observamos que para m positivo, a medida que crece, las rectas se vuelven más empinadas. Lo mismo ocurre cuando m es negativo, pero, en este caso, la recta se vuelve más empinada (en sentido opuesto) a medida que m decrece.

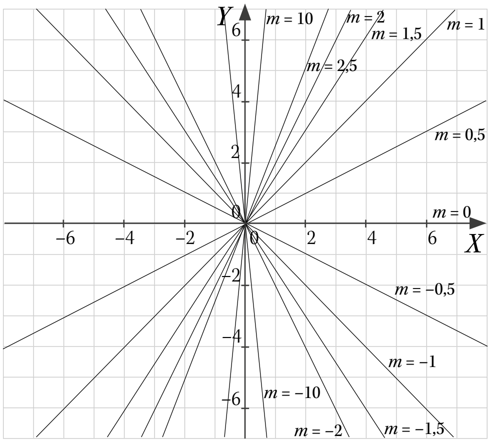


Figura IV.21

Ejercicio

Plantee una situación que pueda ser descrita por cada una de las siguientes funciones, y determine su gráfico:

a. $y = 4x$
b. $y = -3x$

Ahora mostraremos cómo obtener el gráfico de la función lineal $y = mx + n$ a partir del gráfico de la función $y = mx$. Si tenemos el gráfico de la función $y = mx$, para obtener el gráfico de la función $y = mx + n$ lo que tenemos que hacer es trasladar el gráfico de la función $y = mx$ en n unidades hacia arriba, si $n > 0$, y en $-n$ unidades hacia abajo, si $n < 0$.

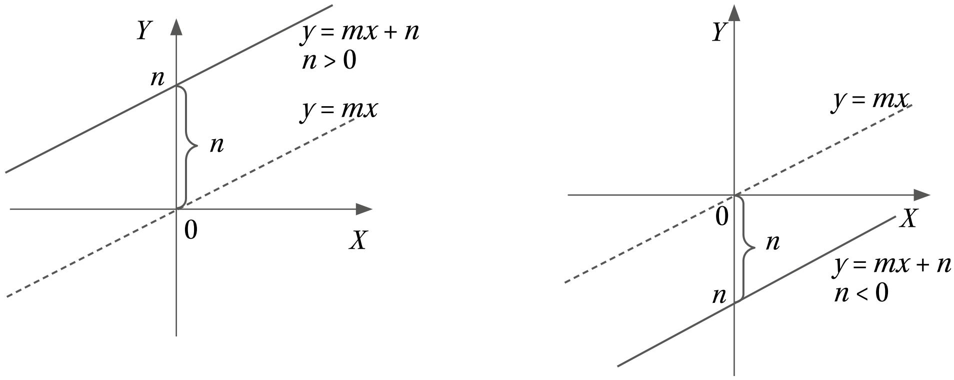


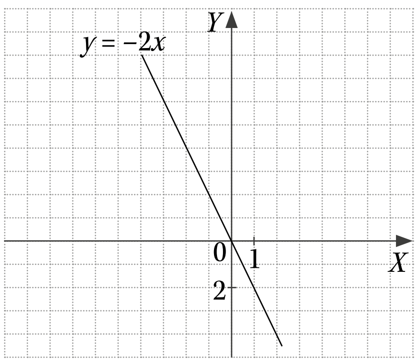
Figura IV.22

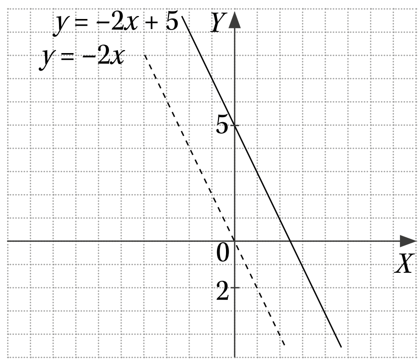
Esto se debe a que, si tomamos un valor x cualquiera, el valor de y que le corresponde es $y = mx + n$, lo cual se puede obtener primero calculando el valor del y correspondiente por la función $y = mx$, y luego a este valor se le suma n.

Como el gráfico de la función $y = mx$ es una recta, entonces el gráfico de $y = mx + n$ también es una recta que se obtiene trasladando la anterior. Este hecho justifica el adjetivo "lineal" que utilizamos con la función $y = mx + n$. Una observación importante es que, como el gráfico es una recta, con solo dos puntos este queda determinado.

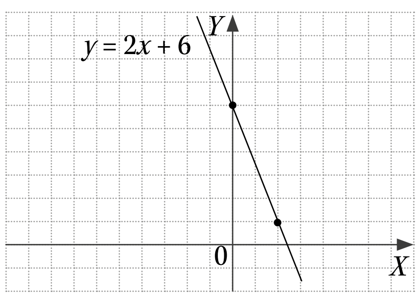
Ejemplo

Para hacer el gráfico de la función lineal $y = -2x + 5$, primero graficamos la función $y = -2x$ y luego trasladamos este gráfico 5 unidades hacia arriba.





Otra manera de graficarla es localizando dos puntos de ella y unirlos con una recta. Por ejemplo, si tomamos $x = 0$, obtenemos $y = 5$, es decir, obtenemos el punto (0,5), y si tomamos $x = 2$, obtenemos $y = 1$, es decir, obtenemos el punto (2,1). La recta que une los puntos (0,5) y (2,1) es el gráfico de la función.



Ejercicio

Grafique las funciones lineales:

a. $y = 3x - 1$ b. $y = 3x + 1$ c. $f(x) = -2x + 3$ d. $f(x) = -2x - 3$

Discutamos ahora el significado que tienen los coeficientes m y n en el gráfico de $y = mx + n$. El coeficiente n, que se denomina *coeficiente de posición*, se obtiene evaluando la función en $x = 0$. Entonces, el punto $(0, n)$ pertenece al gráfico de la función. Esto significa que la recta intersecta al eje Y en el punto de ordenada n, como se ve en la figura.

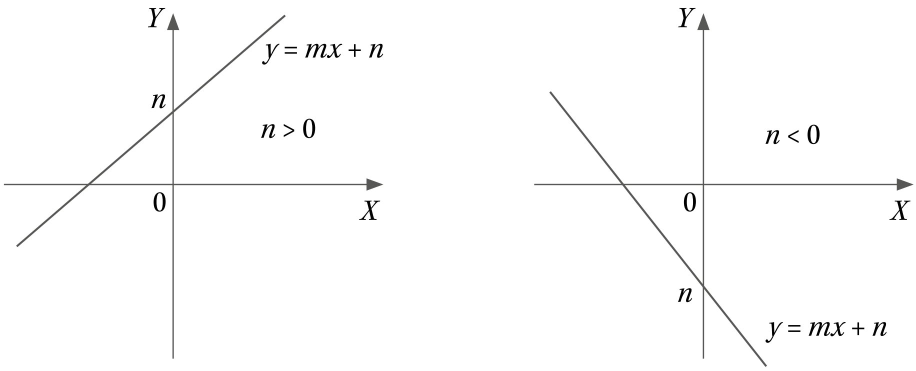


Figura IV.23

El rol de la pendiente m es el mismo en la función $y = mx$ que en la función $y = mx + n$, e informa acerca de la inclinación de la línea recta que corresponde a su gráfico. En efecto, si $m > 0$, entonces la función crece, es decir, a medida que aumentan los valores de x, los respectivos valores de y también aumentan, mientras que si $m < 0$, entonces la función decrece. Cuando $m = 0$, la función permanece constante.

Como sabemos que la pendiente m corresponde a la razón de cambio de la función lineal, mientras mayor sea su magnitud, mayor será el crecimiento de la función. Consideremos, por ejemplo, las funciones $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = x + 5$. En el primer caso, la pendiente es 2 y en el segundo caso la pendiente es 1. Así, la función g crecerá más rápido que la función h. Como en $x = 0$ la función h está más arriba (en $y = 5$) que la función g (en $y = 1$), necesariamente sus gráficos se cruzarán en algún punto a la derecha, como se muestra en la figura siguiente:

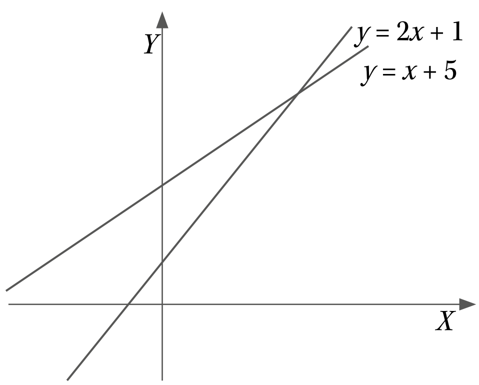


Figura IV.24

Ejemplo

Para un paseo de fin de año de un curso de una escuela de Rancagua, se quiere contratar un bus. Hay dos empresas que ofrecen el servicio:

- La empresa 1 cobra un costo fijo de \$85.000 más \$370 por kilómetro recorrido
- La empresa 2 no cobra costo fijo, pero cobra \$1.000 por kilómetro recorrido

Los posibles destinos son: Pichilemu, que está a 154 km de Rancagua, o el lago Rapel, que está a 70 km de Rancagua. ¿Cuál empresa conviene contratar en cada caso?

Si $f(s)$ es el costo en pesos de recorrer s kilómetros con el bus de la empresa, 1 y $g(s)$ es el costo en pesos de recorrer s kilómetros con el bus de la empresa 2, entonces:

$$f(s) = 85.000 + 370\,s \ \text{ y } \ g(s) = 1.000\,s.$$

La función $g(s)$ tiene una mayor pendiente, pero parte de 0; en cambio, la función $f(s)$ crece más lentamente, pero parte de 85.000. Es decir, para distancias cortas convendrá la empresa 2 y para distancias largas la empresa 1. Si se decide ir al lago Rapel, entonces:

$$f(70) = 85.000 + 370 \cdot 70 = 110.900 \ \text{ y } \ g(70) = 1.000 \cdot 70 = 70.000.$$

En cambio, si se decide ir a Pichilemu:

$$f(154) = 85.000 + 370 \cdot 154 = 141.980 \text{ y}$$

$$g(154) = 1.000 \cdot 154 = 154.000$$

Por lo tanto, si se decide ir al lago Rapel, conviene contratar a la empresa 2 y si se decide ir a Pichilemu, conviene contratar a la empresa 1.

Para pensar

¿Qué escala conviene elegir para los ejes X e Y en el ejemplo anterior, para poder visualizar el punto en que se intersectan ambas rectas?

Sabemos que para dibujar la recta que corresponde al gráfico de $y = mx + n$ basta con encontrar dos puntos $(p, f(p))$ y $(q, f(q))$ con $p \neq q$ y luego unirlos. Pero también hemos visto que conociendo m y n, sabremos dónde cruzar la recta con el eje Y y cuál será su inclinación, es decir, conociendo el valor de m y n, también tenemos información suficiente para graficar la función $y = mx + n$. Veamos cómo se relacionan estas dos maneras de caracterizar la recta.

La pendiente m se puede calcular como la razón de cambio:

$$m = \frac{f(q) - f(p)}{q - p}.$$

Calcular el coeficiente n, en cambio, no es tan directo. Para esto, se puede construir la función lineal que pase por los puntos $(p, f(p))$ y $(q, f(q))$ mediante la fórmula:

$$f(x) = f(p) + m(x - p),$$

lo que se comprueba evaluando esta expresión en $x = p$ y en $x = q$, reemplazando en este último caso el cociente con el que calculamos m. Así, comprobamos que n es:

$$n = f(p) - mp.$$

Ejercicios

1. Determine cuáles de las siguientes funciones lineales son crecientes o decrecientes.

   a. $y = 7x - 5$ b. $y = -0{,}1x + 2{,}5$ c. $y = -3x - 11$

2. Encuentre la pendiente de la función lineal:

   a. $f(x) = 7x + 1$ b. $y = -1{,}5x - 9$ c. cuyo gráfico pasa por los puntos (-2,-4) y (3,-1).

3. Proponga situaciones de la vida cotidiana que puedan ser descritas por las funciones de los ejercicios anteriores, e interprete la tasa de cambio en cada situación. Grafique cada una de las funciones.

Mostraremos ahora algunos gráficos de funciones no lineales. Consideremos la función $f(x) = x^2$. El gráfico de esta función se denomina *parábola* y se muestra en la figura siguiente:

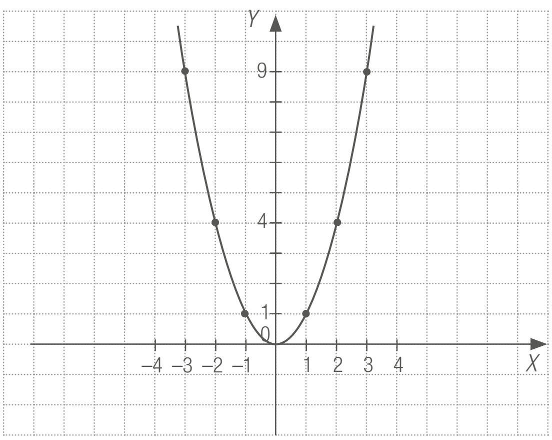


Figura IV.24

En el gráfico se han marcado los puntos de la siguiente tabla:

x	$y = x^2$
0	$0^2 = 0$
1	$1^2 = 1$
-1	$(-1)^2 = 1$
2	$2^2 = 4$
-2	$(-2)^2 = 4$
3	$3^2 = 9$
-3	$(-3)^2 = 9$

Tabla IV.9

Observando el gráfico vemos que esta función decrece a la izquierda del eje Y (es decir, para valores negativos de la variable x) y crece a la derecha del eje Y (es decir, para valores positivos de la variable x). Esto también se puede observar de la razón de cambio. Tal como vimos en la **Sección 3**, la razón de cambio para esta función está dada por:

$$\frac{f(x) - f(z)}{x - z} = x + z,$$

por lo que si x y z son positivos y $x > z$, entonces $f(x) > f(z)$; es decir, a medida que nos movemos hacia la derecha en el semieje $x > 0$, la función crece. Por otra parte, si x y z son negativos y $x > z$, entonces $f(x) < f(z)$ (pues $x + z < 0$), así a medida que nos movemos hacia la derecha en el semieje $x < 0$, la función decrece. De la razón de cambio también podemos observar que la variación de la función se hace más pronunciada a medida que movemos x y z hacia la derecha en el semieje $x > 0$. También observamos que, a medida que nos movemos a la izquierda, aproximándonos con x y z a 0, la razón de cambio se hace más pequeña, por lo que la variación de la función es menor. Esto también se aprecia del gráfico de la **Figura IV. 24**.

El gráfico de la función $y = x^2$ es simétrico con respecto al eje Y. Para verificar esto, observamos que si el punto (x, y) está en el gráfico, también estará en él $(-x, y)$, ya que $f(x) = f(-x)$, pues $x^2 = (-x)^2$.

Otro ejemplo de función no lineal es la función de proporcionalidad inversa $f(x) = \frac{1}{x}$.

Vemos que $f(x)$ tendrá el signo de la variable, es decir, será negativo, cuando $x < 0$ y, positivo si $x > 0$. Como vimos en la **Sección 3**, la razón de cambio entre dos valores x y z está dada por:

$$\frac{f(x) - f(z)}{x - z} = -\frac{1}{xz}.$$

En particular, vemos que si $x > z$, y x y z son positivos, tendremos que $f(x) < f(z)$. Por lo que la función decrece a medida que nos movemos hacia la derecha en semieje $x > 0$. Ahora si $x > z$, y x y z son negativos, tendremos que $f(x) < f(z)$, es decir, la función decrece a medida que nos movemos hacia la derecha en el semieje $x < 0$. A partir de la razón de cambio, también podemos observar que la variación de la función se hace menos pronunciada a medida que movemos x y z hacia la derecha en el semieje $x > 0$. También observamos que, a medida que nos movemos a la izquierda, aproximándonos con x y z a 0, la razón de cambio se hace cada vez más grande, por lo que la variación de la función es cada vez mayor. El gráfico de esta función se presenta a continuación:

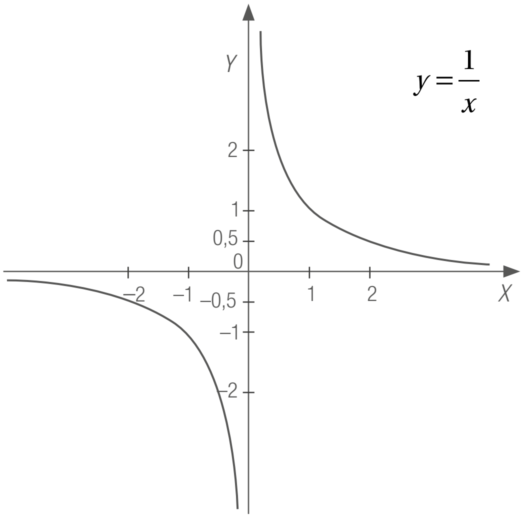


Figura IV.25

Para pensar

El gráfico de la función $y = \frac{1}{x}$ también tiene una simetría. Si el punto (x, y) está en el gráfico, también lo está el punto $(-x, -y)$. Explique por qué esto significa que el gráfico es simétrico con respecto al punto $(0, 0)$.

En resumen

- El gráfico de la función lineal $y = mx + n$ es una línea recta. Esta recta corta al eje Y en el punto $(0, n)$.
- Si $m > 0$, a medida que x crece, la recta sube; mientras que si $m < 0$, a medida que x crece, la recta baja.

Ejercicios

1. En una panadería diariamente se incurre en gastos de personal, alquiler y mantención por un monto de \$100.000. Además, el costo de producir un kilo de pan es \$300.
   a. Bosqueje el gráfico de la función de gasto diario de la panadería, en términos de la cantidad de pan producido.
   b. Por cada kilo de pan vendido, la panadería obtiene \$800 (luego de descontar el IVA). Bosqueje en el mismo gráfico anterior la función de ingresos de la panadería.
   c. Interprete el punto de intersección de los dos gráficos anteriores.
   d. ¿A partir de cuántos kilos de pan vendidos la panadería comienza a tener ganancias?
2. Grafique en el mismo plano las rectas $y = 2x + 3$ e $y = 3x + 1$. ¿Qué relación tiene el punto de intersección de estas rectas con la solución del sistema $y - 2x - 3 = 0$, $y - 3x - 1 = 0$?

3. Represente en el plano cartesiano los conjuntos de puntos (x,y), tal que:

a. $2x + 3y = 5$ b. $xy = 1$ c. $x - y = 3$ d. $y + 1 = x^2$

4. Para graficar $y = -x^2$ se puede observar que si el punto (x, y) está en el gráfico de $y = x^2$, entonces, $(x, -y)$ está en el gráfico de $y = -x^2$. A partir de esto, explique por qué el gráfico de la función $y = -x^2$ corresponde a reflejar el gráfico de $y = x^2$ con respecto al eje X.

5. Explique por qué graficar la función $y = (x - 1)^2$ corresponde a trasladar el gráfico de la función $y = x^2$ con respecto al eje X una unidad hacia la derecha.

6. Esboce el gráfico de las funciones, trasladando en el eje Y.

a. $g(x) = x^2 + 2$ b. $h(x) = x^2 - 2$ c. $w(x) = -x^2 + 2$ d. $u(x) = -x^2 - 2$

7. Grafique las siguientes funciones. Para esto, puede usar una tabla de valores o notar que la coordenada y correspondiente a x es la coordenada de $y = \frac{1}{x}$ multiplicada por un número apropiado.

a. $f(x) = 5\frac{1}{x}$ b. $f(x) = \frac{1}{2x}$ c. $f(x) = -5\frac{1}{x}$ d. $f(x) = -\frac{1}{2x}$

4.4 Interpretación de gráficos

El gráfico de una función es una forma de conseguir una visión global respecto de esta. Eso nos puede ayudar a predecir situaciones, a sacar conclusiones acerca de cambios de tendencias y a comparar comportamientos, entre otros. Para esto es necesario aprender a analizar e interpretar gráficos.

Un primer paso para analizar un gráfico es examinar distintos elementos relacionados con aspectos más bien cuantitativos: reconocer las variables presentes, la graduación que tienen los ejes e identificar puntos del gráfico, entre otros. Esto no es suficiente para interpretar el gráfico, para ello también debemos analizar aspectos cualitativos y asignarle un significado.

Veamos un ejemplo. En el gráfico a continuación, se ha registrado el peso de un recién nacido en su primer mes de vida.

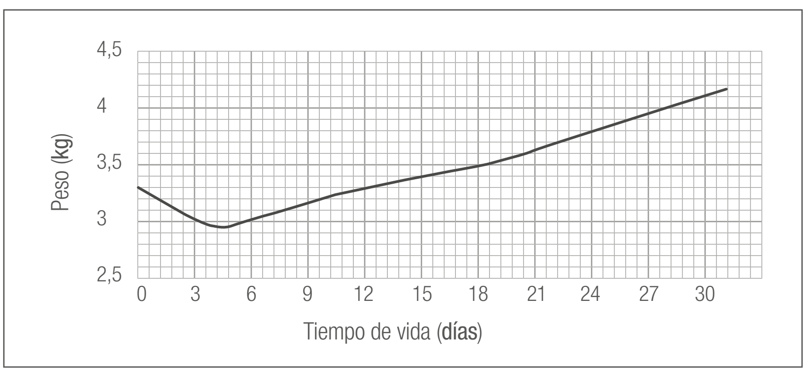


Tabla IV.26

En el eje de las abscisas se representa el tiempo de vida del bebé medido en días, y en el eje de las ordenadas se representan el peso en **kg**. También notamos que el origen no está en el **(0, 0)** ya que se decidió poner el peso solo en un rango de interés. Del gráfico, podemos ver que el peso del bebé al nacer fue de **3,3 kg** y que al 5° día alcanzó su peso mínimo de aproximadamente **2,9 kg**.

Ejercicio

A partir del ejemplo anterior, responda las siguientes preguntas:

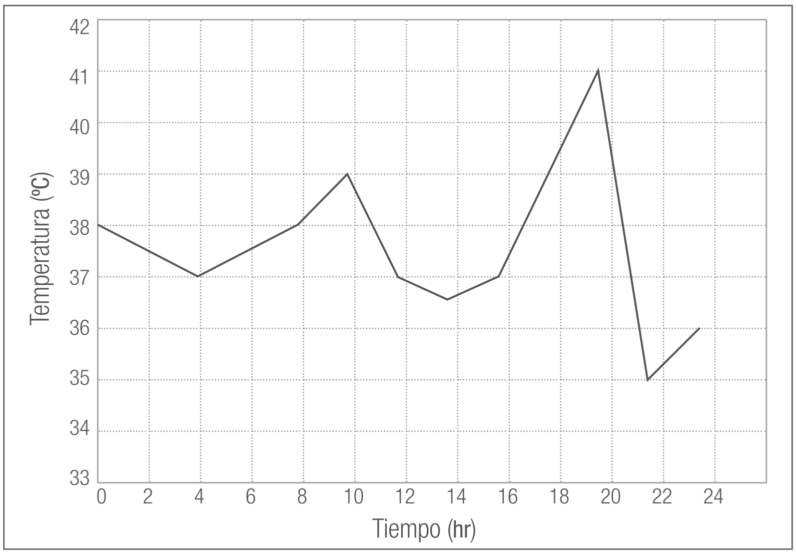
a. ¿En qué día el bebé recupera el peso que tenía al nacer?

b. ¿Cuál es, aproximadamente, el peso en el día **20**? ¿y en el día **30**?

Para interpretar un gráfico necesitamos hacer un análisis cualitativo y global que entregue sus características generales. Esto incluye reconocer intervalos donde la función crece, decrece o permanece constante, identificar valores en que la función alcanza su valor máximo o mínimo, comparar razones de cambio (o pendientes) e identificar puntos donde el gráfico experimenta cambios de tendencia (por ejemplo, pasa de crecer a decrecer), entre otros aspectos. Para interpretar el gráfico, se debe dotar de significado a los hallazgos obtenidos en el contexto de la situación modelada.

Ejemplo

El siguiente gráfico representa la variación de la temperatura de un enfermo durante todo el día.



A partir del gráfico responderemos las siguientes preguntas:

a. ¿Qué magnitud está representada en el eje de las abscisas?

b. ¿Qué magnitud está representada en el eje de las ordenadas?

c. ¿A qué hora el enfermo tuvo la máxima temperatura y cuál fue?

d. ¿En qué períodos tuvo temperaturas normales, es decir, no superiores a 37 grados?

e. Dos veces al enfermo le fue suministrado un antipirético de efecto rápido. ¿Aproximadamente, a qué hora ocurrió esto?

f. ¿Cuánto duró el efecto del antipirético cada vez?

g. Este gráfico ¿sugiere que la temperatura baja durante el sueño?

Notamos que para responder algunas de estas preguntas solo necesitamos leer el gráfico, mientras que para otras, como (f.) y (g.), se requiere una interpretación.

En el eje de las abscisas se representan las horas del día y en el eje de las ordenadas se representa la temperatura, pero solo en el rango de interés. La máxima temperatura llegó a 41 grados y se produjo en torno a las 8 de la noche. Entre el mediodía y las 4 de la tarde tuvo una temperatura normal, así como desde las 9 de la noche en adelante. A las 10 de la mañana, cuando la fiebre llegó a 39 grados, y a las 8 de la noche, cuando la fiebre llegó a 41 grados, le suministraron el antipirético y su efecto duró aproximadamente 4 horas la primera vez y solo 2 horas la segunda vez, pues pasado ese tiempo la fiebre comenzó a subir nuevamente, aunque la temperatura se mantuvo normal por las siguientes dos horas. La temperatura por debajo de los 37 grados que se produce pasada las 9 de la noche podría ser producto del sueño.

Muchas veces los gráficos no se presentan con sus ejes graduados, sino que más bien proveen una descripción cualitativa de una función, que surge del modelamiento de un fenómeno o situación. En este caso, también es posible interpretar el gráfico como se ilustra en el siguiente ejemplo.

El gráfico de la **Figura IV.27** describe el paseo en bicicleta que da una niña por un camino recto que pasa por la puerta de su casa. En el eje de las ordenadas se representa la distancia a la que ella se encuentra de su casa, y en el eje de las abscisas, el tiempo transcurrido.

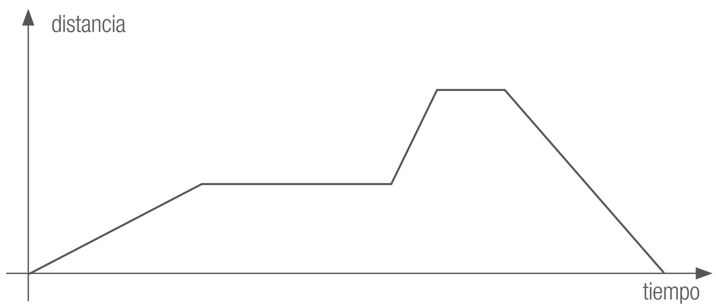


Figura IV.27

Analizando el gráfico podemos tener una buena idea de cómo fue el paseo. Vamos a distinguir 4 instantes de tiempo, que denotaremos por *a*, *b*, *c* y *d*, en los que hay un cambio de *tendencia*.

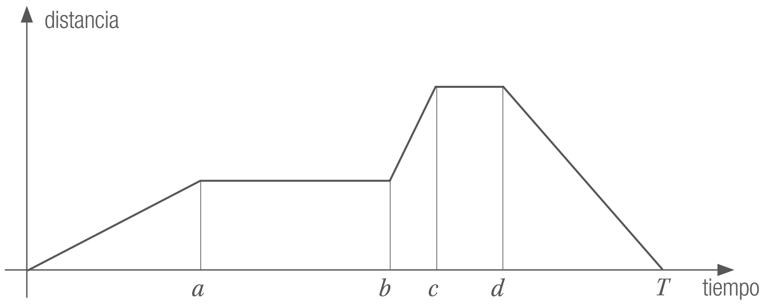


Figura IV. 28

La niña parte su paseo en bicicleta y en el instante a se detiene y permanece así hasta el instante b, pues el tiempo pasa y la distancia a su casa no cambia. Luego, en b parte nuevamente en su bicicleta alejándose de su casa. En el instante c, se detiene nuevamente, pero por un intervalo de tiempo menor (ya que se aprecia en el gráfico que el tiempo transcurrido entre a y b es mayor que entre c y d). En el instante d, comienza su viaje de regreso, ya que vemos que la distancia a su casa disminuye, y llega a su casa T unidades de tiempo después del inició de su viaje.

En cada uno de los tramos que distinguimos, el gráfico de la función es una línea recta. Así, en cada tramo la razón de cambio es constante y es la pendiente de cada segmento recto. Además, la razón de cambio es:

- positiva entre 0 y a,
- cero entre a y b,
- positiva entre b y c,
- cero entre c y d,
- negativa entre d y T.

Del gráfico también vemos que la pendiente entre 0 y a es menor que entre b y c. La razón de cambio es la velocidad en cada tramo, así vemos que la niña va más rápido entre b y c que entre 0 y a. En el tramo entre d y T, vemos que la razón de cambio es negativa; en este caso, también podemos interpretarla como velocidad, indicando el signo la dirección del movimiento (en este tramo la niña viaja hacia su casa, que es la dirección opuesta a aquella en el tramo entre 0 y a). También se podría considerar la velocidad en este tramo sin considerar el signo, es decir, sin tomar en cuenta la dirección del movimiento.

Para pensar

Analizando el gráfico de la **Figura IV. 28**, vemos que la niña pasa de moverse a velocidad constante, entre 0 y a, a detenerse instantáneamente en a. Luego, pasa de estar detenida entre a y b, a moverse con velocidad constante entre b y c. Esto no es realista. Discuta por qué. Proponga un nuevo gráfico más razonable para describir esta situación.

Ejercicios

1. Grafique la velocidad de la bicicleta del ejemplo anterior, considerando la dirección del movimiento y también sin considerarlo.

2. En el ejemplo anterior ¿en qué tramo la niña anda más rápido?

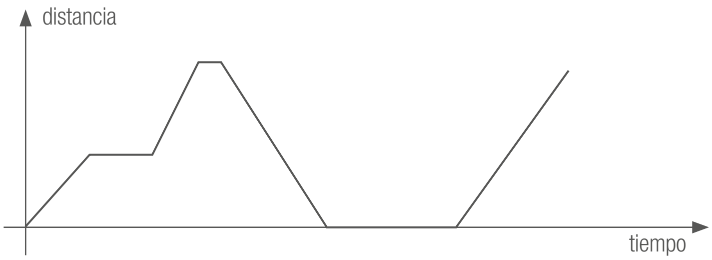
3. Describa la siguientes situaciones mediante un gráfico:

   a. Catalina va a comprar el pan a una panadería que queda a 8 cuadras de su casa en línea recta. Ella camina tranquila tres cuadras, se encuentra con una amiga y se queda conversando con ella. Luego, camina tres cuadras más y se da cuenta de que se le quedó su monedero. Regresa a su casa corriendo, toma su monedero y se va al negocio caminando rápido, pero sin correr. En el negocio la atienden rápido y finalmente regresa a su casa caminando lento, ya que está muy cansada.

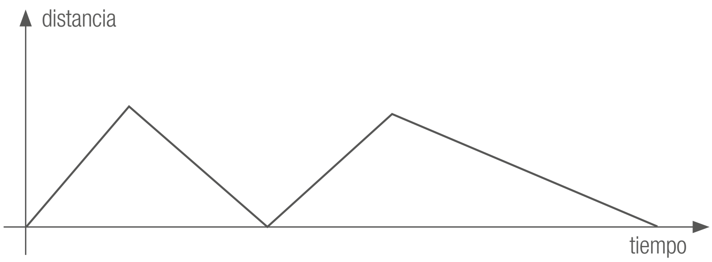
   b. En una clase de Educación Física, Juan tiene que subir el palo encebado. Él sube muy rápido al comienzo, pero se empieza a cansar y baja parte de lo que ha subido. Luego de quedarse quieto por un momento, toma impulso y sube hasta el final. Después baja rápidamente, pero de manera controlada.

4. Invente una historia para cada uno de los siguientes gráficos:

a.



b.



En el ejemplo de la **Figura IV.28** describimos una trayectoria en términos de la distancia. También analizamos la velocidad, que nos ayudó a describir de manera más precisa la situación, identificando cuándo la niña iba más rápido, más lento o se encontraba detenida. En el siguiente ejemplo, veremos una situación usando un gráfico distinto al anterior, en el que describiremos la velocidad en función de la distancia recorrida.

El dibujo muestra la pista de una montaña rusa, en la que los carros viajan entre *A* y *G* a velocidades que dependen de la inclinación. Las letras marcan los puntos donde la inclinación cambia. Por ejemplo, el carro acelera entre *B* y *C* aumentando su velocidad, mientras que frena entre *C* y *D*, por lo que disminuye su velocidad. Estas marcas nos ayudarán a construir el gráfico de la velocidad como función de la distancia recorrida.

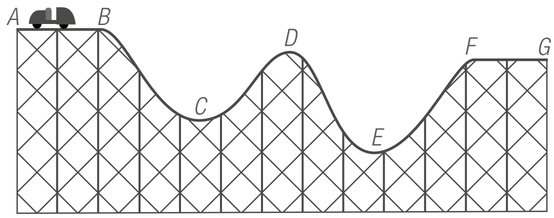


Figura IV. 29

Notamos que entre *A* y *B* no se observa ninguna pendiente en la pista que pueda acelerar o frenar al carro y, por lo tanto, la función "velocidad" debería ser constante. En cambio, entre *B* y *C* la pista baja con una pendiente considerable, lo que provocará aumento de la velocidad del carro, es decir, la función "velocidad" será creciente. Entre *C* y *D* la pista sube y, por lo tanto, el carro irá perdiendo velocidad, es decir, en este tramo será decreciente. Sabemos que estos cambios van ocurriendo de manera progresiva, así el impulso ganado en la bajada entre *B* y *C* se irá perdiendo de a poco en la subida entre *C* y *D*; por lo tanto, los cambios son continuos y la velocidad no salta de un valor a otro. Entre *D* y *E*, la bajada de la pista es más larga que entre *B* y *C*, por lo que el carro aumentará aun más su velocidad, la que irá bajando en la subida entre *E* y *F*. Es decir, la función "velocidad" será creciente entre *D* y *E* y alcanzará valores mayores que los obtenidos antes. Pasado el punto *E*, la función "velocidad" decrecerá y entre *F* y *G* debería no tener variaciones importantes, por ausencia de pendiente de la pista. El siguiente gráfico describe la situación presentada:

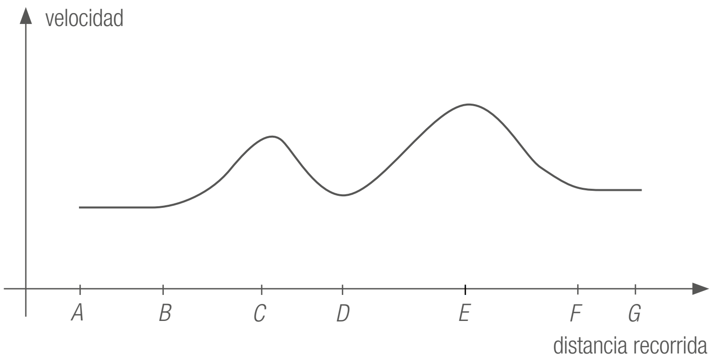
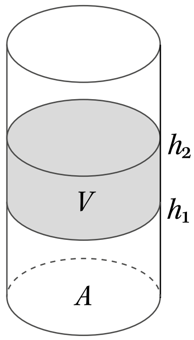


Figura IV. 30

Un último ejemplo que estudiaremos es cómo varía la altura del líquido en un frasco que está siendo llenado a tasa constante. En esta variación, claramente juega un rol esencial la forma del frasco. Supondremos que los frascos en consideración siempre tienen secciones transversales circulares, es decir, si hacemos un corte horizontal del frasco a cualquier altura, obtenemos una circunferencia.

El caso más simple es cuando el frasco es un cilindro como se muestra en la figura que sigue. En este caso, el volumen de líquido V contenido entre dos niveles de altura, digamos h_1 y h_2, donde $h_2 > h_1$, será igual al área de la base por la diferencia entre las alturas, es decir:



$$V = A\,(h_2 - h_1)$$

Figura IV. 31

Donde A es el área de la base. Así, el volumen contenido entre las alturas es proporcional a la variación de la altura, y la constante de proporcionalidad es el área de la base.

Supongamos que al comienzo el frasco se encuentra vacío. Inicialmente, la altura del nivel del líquido será 0 y crecerá a medida que se vierte el líquido en el frasco. Si llamamos V al volumen de líquido en el frasco y h, la altura, entonces $V=Ah$, de donde obtenemos que:

$$h = \frac{1}{A}V.$$

Es decir, la altura del nivel del líquido es proporcional al volumen de líquido vertido en el frasco, y la constante de proporcionalidad (pendiente) es $\frac{1}{A}$.

El siguiente gráfico muestra la altura del nivel del líquido en función del volumen que ingresa

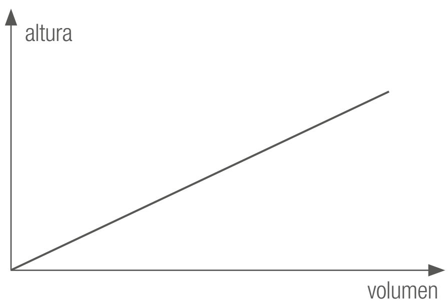


Figura IV.32

Ejercicio

Se llenan dos frascos cilíndricos con agua, de tal manera que la tasa a la cual ingresa el agua en cada frasco es la misma. Uno de los frascos tiene base de área A y el otro tiene base de área B, con $A > B$. En un mismo gráfico, muestre cómo varía la altura del nivel del agua en términos del volumen ingresado.

Analicemos ahora el caso de un frasco que no es cilíndrico, donde el área de la sección transversal varía con la altura del frasco. Al igual que antes, el frasco se llena de líquido a tasa constante, y graficaremos cómo varía la altura del nivel de líquido en función del volumen ingresado.

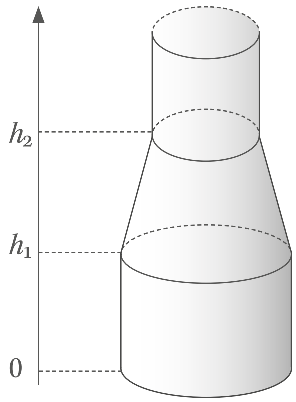


Figura IV.33

En el frasco distinguimos tres partes: la parte de abajo es un cilindro de altura h_1, la del medio es un cono truncado de altura $h_2 - h_1$ y finalmente la parte de arriba es otro cilindro, cuya base tiene un área menor que la anterior. La primera parte del gráfico será una recta, tal como vimos en el ejemplo anterior, la tercera parte del gráfico será también una recta con mayor pendiente, pues la sección transversal tiene menor área. La segunda parte del frasco es cónica y, por lo tanto, el área de la sección horizontal se irá achicando progresivamente. Así, la variación de altura ya no será proporcional e irá creciendo cada vez más rápido. El siguiente gráfico describe el comportamiento:

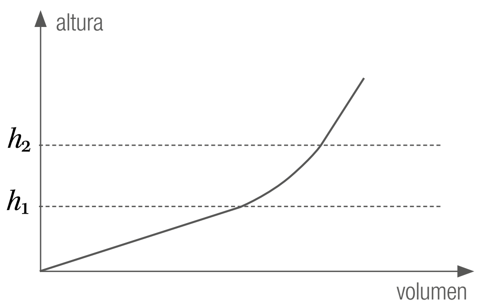


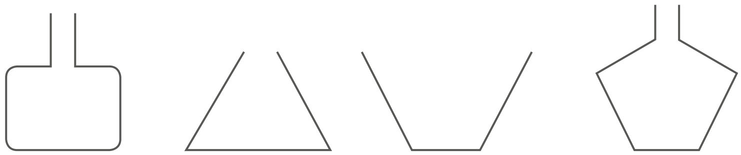
Figura IV. 34

En resumen

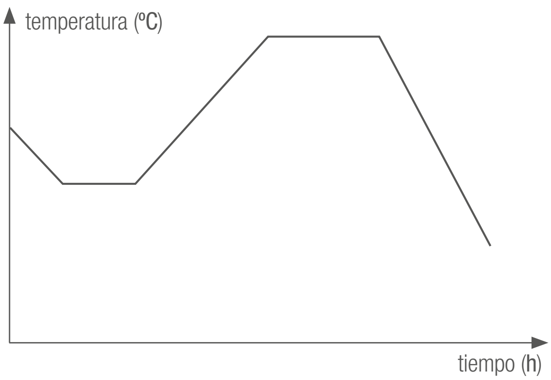
- Los gráficos nos ayudan a sintetizar y comunicar la información contenida en una función.
- Para interpretar un gráfico, es necesario analizar su comportamiento global e interpretar los hallazgos en el contexto de la situación que este describe.

Ejercicios de la sección

1. Cada uno de los siguientes frascos, con sección transversal circular, está siendo llenado con líquido a una tasa constante. Para cada caso, describa mediante un gráfico cómo varía la altura del líquido, en términos del volumen ingresado.



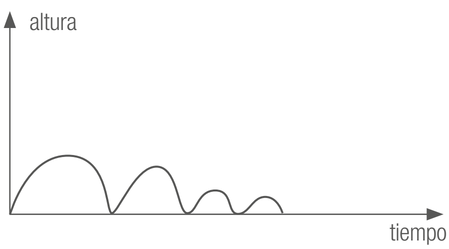
2. En el gráfico siguiente se muestra cómo varía la temperatura a lo largo de un día, partiendo de la medianoche:



   a. Identifique los períodos en que la temperatura sube, aquellos en que baja y aquellos donde permanece constante.
   b. Estime cuándo ocurre la temperatura máxima y cuándo, la mínima.
   c. Estime cuándo se producen las máximas variaciones de temperatura
   d. ¿Le parece que el comportamiento descrito es habitual con respecto a la temperatura?

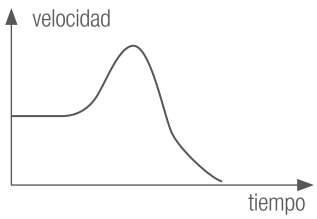
3. Un editor estima que el precio de producir entre 1.000 y 10.000 ejemplares de un libro es de \$500 por ejemplar; entre 10.001 y 20.000 el costo es de \$400 por ejemplar, y entre \$20.001 y \$50.000 el costo es de \$350 por ejemplar. Describa la función $f(n)$ que da el costo total de producir n ejemplares del libro, con $1.000 \leq n \leq 50.000$. Bosqueje el gráfico de la función, y para esto suponga que n es una variable real.

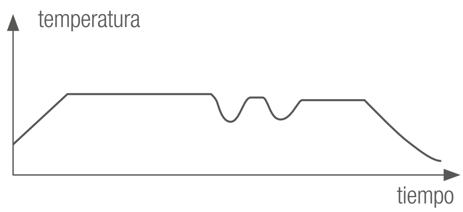
4. El siguiente gráfico entrega la altura de una pelota de goma que se lanza hacia arriba. Describa la trayectoria de la pelota.

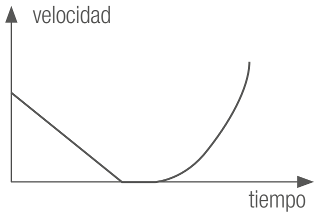


5. De acuerdo al relato de la conocida fábula de la liebre y la tortuga, grafique en el mismo plano cartesiano la distancia recorrida por cada uno de los animales.

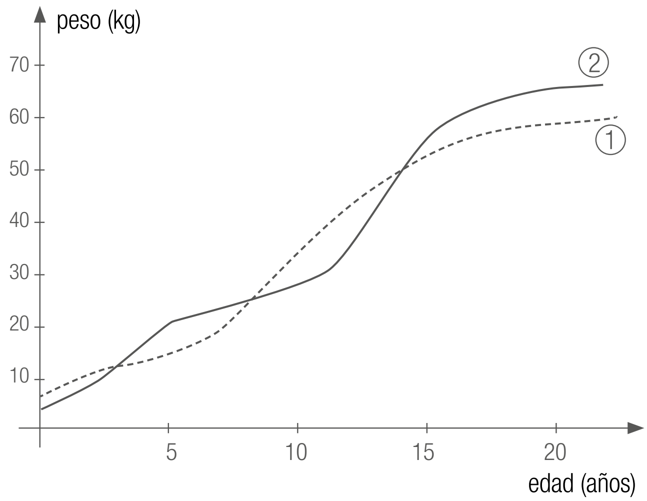
6. Para cada uno de los siguientes gráficos, invente una situación que pueda ser descrita mediante este.

a. 

c. 

b. 

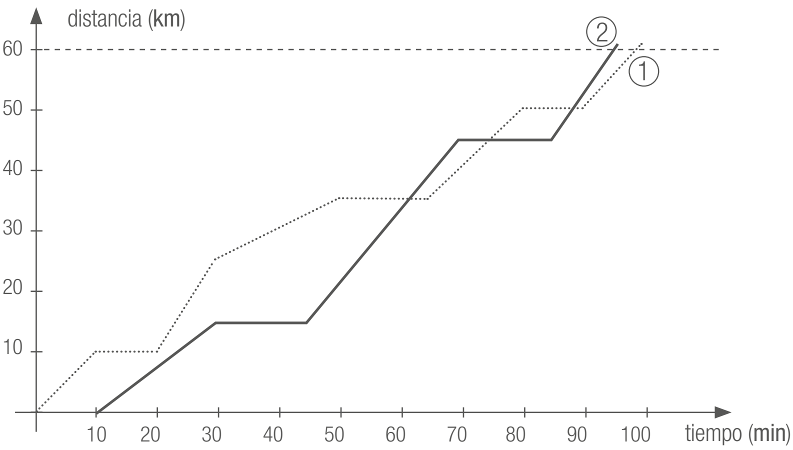
7. En el siguiente gráfico se aprecia la evolución del peso de una niña y de un niño.



De acuerdo al gráfico, conjeture qué número (1 o 2) corresponde al niño. Explique la razón de su elección. En base a esto, responda las siguientes preguntas.

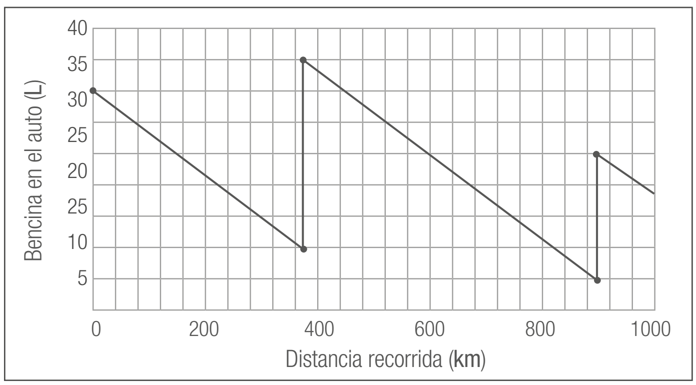
a. ¿Cuál es el peso del niño a los 8 años? ¿Y el de la niña a los 17?
b. ¿A qué edad el niño pesaba 40 kg? ¿cuándo la niña pesaba 20 kg?
c. ¿A partir de qué edad el niño pesaba más de 50 kg? ¿hasta qué edad la niña pesaba menos de 30 kg?
d. ¿A qué edad ambos tenían el mismo peso?
e. ¿Cuál fue el aumento de peso de la niña entre los 10 y los 15 años?
f. ¿Cuándo aumentó la niña más rápidamente de peso? ¿y el niño?

8. El gráfico muestra la distancia recorrida por dos automóviles (1 y 2) en función del tiempo transcurrido al realizar un viaje de 80 km.



a. ¿A qué hora salió el auto 2? ¿qué auto llegó primero? ¿qué auto se demoró más en realizar el recorrido?
b. ¿Cuánto tiempo estuvo parado cada auto, y en qué kilometro se detuvo cada uno?
c. ¿En qué momentos la velocidad del auto 1 fue mayor? ¿cuándo fue mayor la velocidad del auto 2? ¿qué auto alcanzó una mayor velocidad?

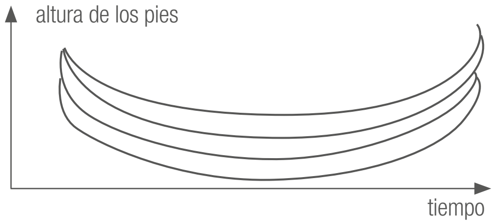
9. Una familia se va de vacaciones desde Santiago a Puerto Montt en su automóvil. El gráfico siguiente muestra cómo varía la cantidad de bencina que hay en el depósito del auto, durante el viaje por la Ruta 5 Sur.

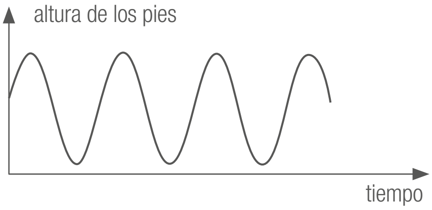


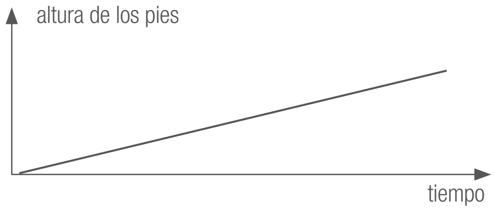
a. En el gráfico aparecen dos segmentos verticales, ¿qué representan?
b. ¿Cuánta bencina tenía el depósito después de recorrer 480 km?
c. ¿Cuánta bencina usó en los primeros 400 km?
d. ¿En cuántas estaciones de servicio ha parado?
e. ¿Cuántos litros de bencina ha puesto durante el viaje?
f. ¿En qué estación de servicio echó más gasolina?
g. ¿Si no hubiera parado a reponer bencina, a qué distancia de Santiago se habría quedado sin combustible?
h. Aproximadamente, ¿cuántos kilómetros recorre el auto por cada litro de bencina en carretera?

10. (Problema liberado, prueba PISA 2003) Mohammed está sentado en un columpio. Empieza a columpiarse. Está intentando llegar tan alto como le sea posible. ¿Cuál de estos gráficos representa mejor la altura de sus pies por encima del suelo mientras se columpia?

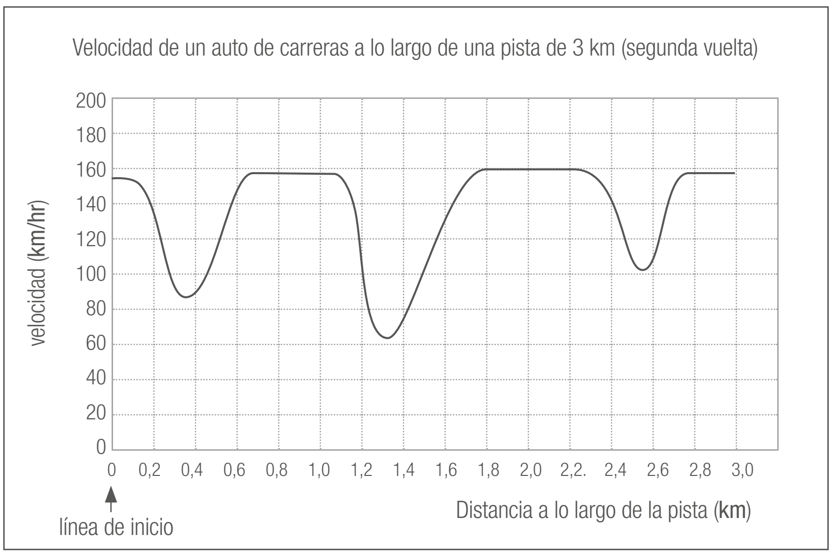
a.


c.


b.


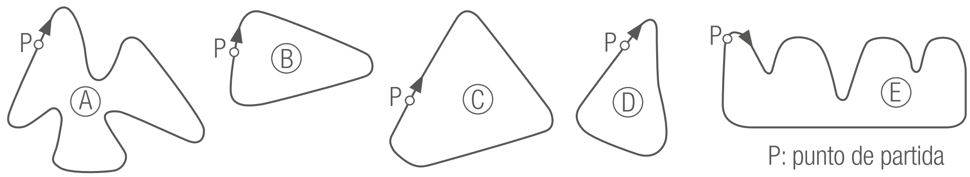
d.


11. (Problema liberado, prueba PISA 2000) El gráfico a continuación muestra cómo varía la velocidad de un auto de carreras a lo largo de una pista plana de 3 kilómetros de largo, durante su segunda vuelta.



a. ¿Cuál es la distancia aproximada desde el punto de partida hasta el principio de la sección recta más larga de la pista?
b. ¿Dónde se registró la velocidad más baja durante la segunda vuelta?
c. ¿Qué puede decir acerca de la velocidad del auto entre la marca de 2,6 km y la de 2,8 km?

d. A continuación, puede ver los dibujos de cinco pistas:



¿A lo largo de qué pista se condujo el auto para generar el gráfico de velocidad que se mostró antes?

12. Dibuje gráficos que permitan describir las siguientes situaciones. Marque los ejes con las variables que aparecen entre paréntesis. En la última situación, dibuje dos gráficos en los mismos ejes.

    a. "El pasto crece mucho en verano y hay que cortarlo todas las semanas, pero al llegar el otoño crece cada vez menos y se corta con cada vez menor frecuencia" (longitud del césped/tiempo).

    b. "Cuando estoy en el colegio, parto con mucho sueño y no estoy muy alerta. A medida que avanza la mañana, me pongo más alerta y capto bien las clases. Hacia el final de la jornada, me siento muy cansada, y ya no pongo atención" (atención a las clases /tiempo).

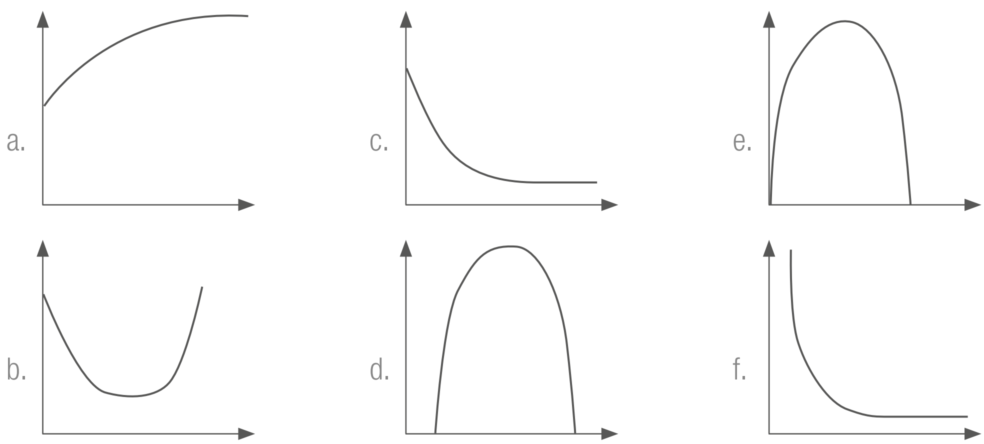
    c. "Al finalizar la primavera, planté una semilla en un macetero. Costó bastante para que comenzara a crecer. Al comienzo crecía lento y luego su crecimiento fue cada vez más rápido. Me olvidé de regarla por algunos días y la planta apenas creció. Cuando volví a regarla, volvió a crecer, pero su crecimiento se hizo más lento hasta alcanzar su tamaño definitivo. Al finalizar el verano, se fue marchitando lentamente" (altura de la planta/tiempo).

13. Indique cuál de los siguientes gráficos describe mejor cada una de las situaciones que se plantean, identificando la variable independiente y la variable dependiente que elegirá para la descripción. Si no se ofrece el gráfico adecuado, proponga otro.

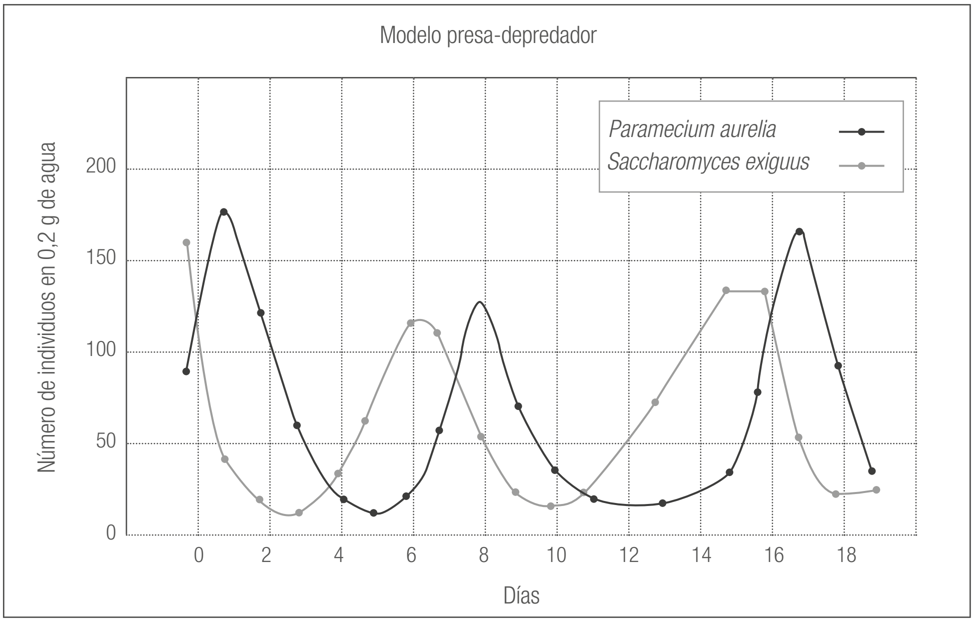
    a. "Me gusta bastante la leche fría y la leche caliente, pero me gusta poco la leche tibia".

    b. "Cuanto más pequeñas son las cajas, más podemos cargar en la camioneta".

    c. "Después del concierto hubo un silencio abrumador. Entonces, una persona de la audiencia empezó a aplaudir. Gradualmente, los que estaban alrededor se le unieron y pronto todo el mundo estaba aplaudiendo".



14. (Problema liberado, prueba PISA 2006). En el gráfico a continuación, se muestra el crecimiento de dos organismos vivos: el *Paramecium* y el *Saccharomyces*. Uno de los dos animales (el depredador) se come al otro (la presa). ¿Permite el gráfico identificar cuál es la presa y cuál, el depredador?



BIBLIOGRAFÍA

Beckmann, S. *Mathematics for elementary teachers.* 2ª Edición. Editorial Pearson Education. USA. 2008.

French, D. *Teaching and learning algebra.* Editorial Continuum. London, Great Britain. 2002.

Lewin, R., López, A., Martínez, S., Rojas, D., Zanocco, P. *Números*. Colección ReFIP: *Recursos para la formación de profesores de Educación Básica*. Editorial Ediciones SM Chile. Santiago, Chile. 2014.

Ministerio de Educación. Gobierno de Chile. *Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Básica*. 2011. Disponible en: http://www.mineduc.cl/usuarios/cpeip/File/2012/librobasicaokdos.pdf

Ministerio de Educación. Gobierno de Chile. *Bases Currículares de 1º a 6º Básico. 2013*. Disponible en: http://www.mineduc.cl/index5_int.php?id_portal=47&id_contenido=17116&id_seccion=3264&c=1

Parker, P., Baldridge, S. *Elementary mathematics for teachers*. Editorial Sefton-Ash Publishing. USA. 2003.

Reyes, C., Dissett, L., Gormaz, R. *Geometría. Colección ReFIP: Recursos para la formación de profesores de Educación Básica*. Editorial Ediciones SM Chile. Santiago, Chile. 2014.

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., Hernández, J. *Iniciación al álgebra*. Editorial Síntesis. España. 1999.

Sowder, J., Sowder, L., Nickerson S. *Reconceptualizing mathematics for elementary school teachers: Instructor's Edition*. Editorial W. H. Freeman and Company, New York. USA. 2009.

Van de Walle, J. *Elementary and middle school mathematics: teaching developmentally*. 6ª Edición. Editorial Pearson / Ally and Bacon. 2007

Yee, L.-P., Lee, N.-H. (Eds.). *Teaching primary school mathematics. A resource book*. 2ª Edición. Editorial Mc Graw Hill Education. Asia. 2009.

FECHA: _____/_______/_____

FECHA:_____/_______/_____

FECHA:_____/_______/_____

FECHA:_____/_______/_____

FECHA:_____/_______/_____

FECHA: _____/_______/_____

FECHA:_____/_______/_____

FECHA: _____ /_______ /_____

FECHA:_____/_______/_____

ReFIP Matemática

RECURSOS PARA LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

La colección ReFIP es una serie de cuatro textos: Números, Geometría, Álgebra y Datos y azar, enfocados en la matemática para enseñar que requieren los profesores de Educación Básica.

Esta colección fue desarrollada en el proyecto FONDEF-D09I1023 "Recursos para la Formación Inicial de Profesores de Educación Básica en Matemática", por un equipo de expertos disciplinarios y en educación de distintas universidades, liderados desde el Laboratorio de Educación del Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile.

El proceso de elaboración de estos textos se llevó a cabo durante tres años y contempló el pilotaje de versiones preliminares en cursos de carreras de Pedagogía en Educación Básica de 16 universidades, en el que participaron alrededor de 5.000 estudiantes de Pedagogía de todo el país. Esto permitió hacer los cambios y ajustes necesarios para producir las versiones finales, y hacer que estos textos se constituyan en herramientas de gran utilidad en la formación docente.

Los textos promueven la reflexión acerca de la matemática escolar y su enseñanza, contribuyen a integrar conocimientos disciplinarios y pedagógicos, y tienen su foco en la matemática específica de la tarea de enseñar.

Más información acerca de la colección y el proyecto se encuentra en:
http://refip.cmm.uchile.cl/

Álgebra
PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Geometría
PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Números
PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

Datos y azar
PARA FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

9789563149598