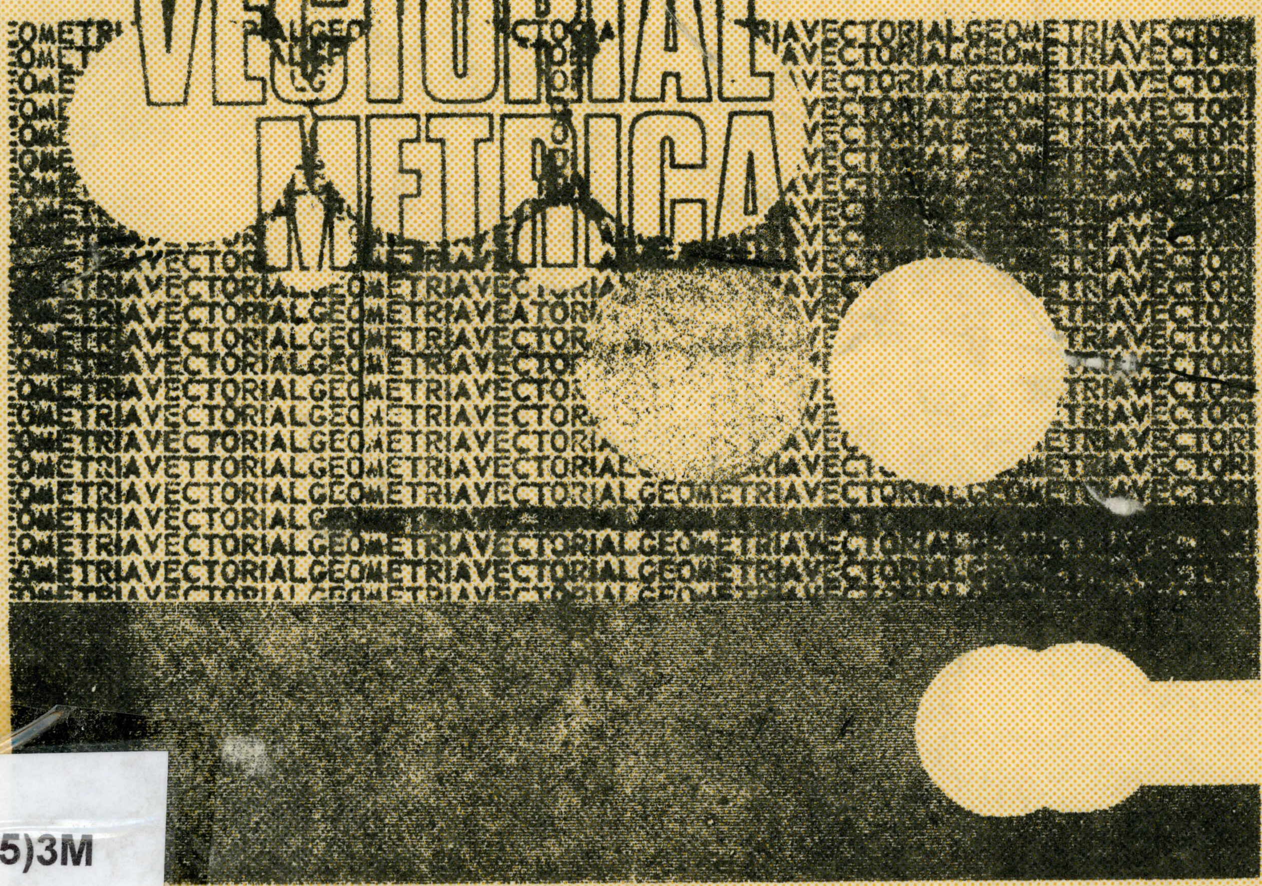
prof: hernán cortés pinto
centro de perfeccionamiento, experimentación e investigaciones pedagógicas

MATEMATICAS
3er AÑO DE ENSEÑANZA MEDIA

1971 - TEXTO GUÍA PARA EL PROFESOR

GEOMETRIA VECTORIAL METRICA



geometría vectorial métrica

texto guía para el profesor

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

PROF: HERNAN CORTES P.

MINISTERIO DE EDUCACION
CENTRO DE PERFECCIONAMIENTO,
EXPERIMENTACION E
INVESTIGACIONES PEDAGOGICAS

matematica
3er. año enseñanza media

P R E S E N T A C I O N

Nuevamente el Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas pone en manos del profesorado de Matemáticas de nuestra enseñanza media un notable aporte científico - pedagógico de nuestro colega el Prof. Hernán Cortés Pinto.

Este folleto viene a ser la natural complementación del que entregamos el año pasado referente a la Unidad 3 del II Año de Enseñanza Media (Geometría Vectorial Afín). Suministra el material de enseñanza, y la adecuada metodología, para el desarrollo de la Unidad 3 del III Año de Enseñanza Media (Geometría Vectorial Métrica).

Al igual que su congénere mencionado, este trabajo adopta el punto de vista moderno para el enfoque de la Geometría consistente en un esfuerzo por algebrizarla por la vía del Algebra Lineal. Esta vez se incorporan los aspectos "métricos" de las figuras del plano euclidiano, lo que lleva consigo no sólo la mejor introducción a la geometría cartesiana métrica plana, sino además la más natural conexión con la Trigonometría.

Es de esperar que los maestros, para quienes esta obra fue expresamente concebida y redactada, saquen el mayor provecho profesional y formativo de su lectura y estudio. La Dirección del Centro espera acoger de muy buen grado cualquier sugerencia, consulta o comentario al respecto que los señores profesores quieran hacernos llegar. Esta colaboración es siempre indispensable, pues toda Reforma Educacional debe apoyarse en la participación activa de todo el profesorado, que es felizmente lo que ha estado ocurriendo hasta ahora.

ABRIL 1972.-

P R E A M B U L O

De acuerdo con el espíritu de esta Unidad 3 del III Medio, este folleto viene a continuar y completar las nociones de Geometría Vectorial de II Medio que expusimos en un trabajo anterior (Bibl. [10]).

La *Geometría vectorial plana métrica* es en efecto un enriquecimiento complementario de la Geometría vectorial plana afín, y no una alternativa enfrente de ésta. La geometría métrica (ya plenamente "euclidiana") presupone cumplidos los principios y aceptadas las conclusiones de la geometría afín; sólo que aquélla agrega nuevos principios y obtiene con ellos - y con los anteriores - nuevas consecuencias.

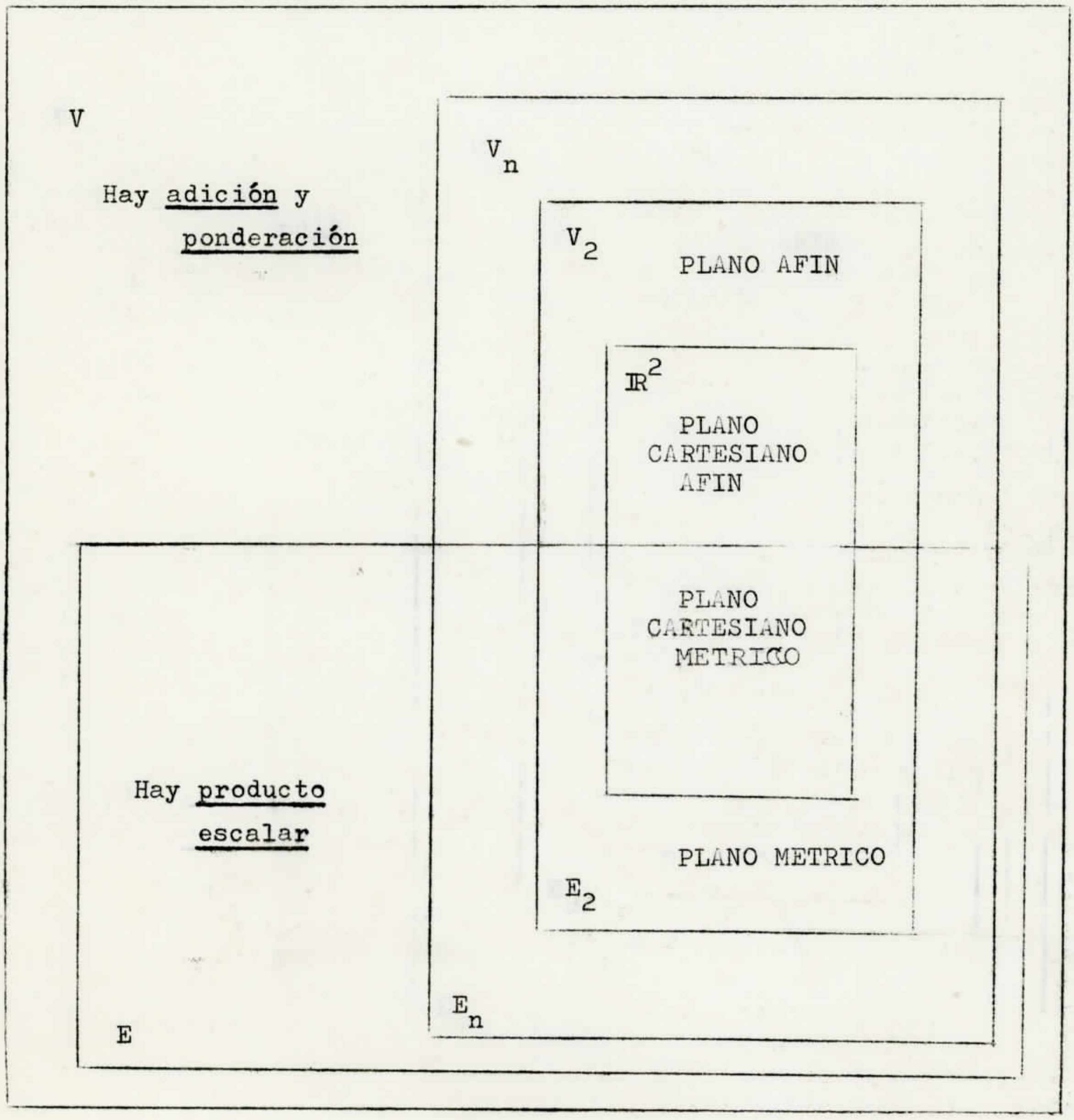
Admitida la intención doctrinaria de una algebrización moderna de la geometría clásica (Bibl. [10] : Obj. v) , el marco universal en que se desarrolló la geometría plana afín fue un espacio vectorial abstracto bidimensional cualquiera V_2. En ese ámbito previo ocurrirá ahora un fortalecimiento de la estructura algebraica vectorial mediante la incorporación de la nueva idea de Producto Escalar de dos vectores, si bien directamente inspirada en la antigua noción física de trabajo de una fuerza; como su nombre lo indica, no se trata de una auténtica multiplicación vectorial, sino de una ley de composición externa que asocia a dos vectores dados un número real. En la estructura abstracta de " espacio vectorial euclídeo " E esta ley de composición viene condicionada por una axiomática especial (Cap. 2) ; didácticamente, esta reglas básicas del producto escalar pueden motivarse obteniéndolas primero como teoremas en un modelo concreto como es el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, en que el producto escalar puede definirse directamente por una fórmula aritmética en términos de las componentes numéricas de los vectores factores (Cap. 1).

El producto escalar de un vector por sí mismo (cuadrado de un vector) habrá de ser un número real no negativo, de tal modo que esté bien definida su raíz cuadrada aritmética; este número $\sqrt{\vec{a}^2}$ a su vez se adoptará como expresión de la *"norma" del vector $\vec{a}$*. Y teniendo así la norma $\|\vec{a}\|$ como un número real no negativo asociado a cada vector $\vec{a}$ (espacio vectorial "normado"), se está a un paso de definir algebraicamente una "distancia" entre dos vectores, y por ende pasar a convertir E en un "espacio métrico" (como en teoría de conjuntos).

Esta espontánea metrización algebraica introducida en el ámbito propio del Algebra Lineal tiene plena utilización en la Geometría plana, que ahora por ello mismo pasa a constituirse en geometría de tipo métrico (Cap. 3). Cobran sentido así las clásicas nociones de longitud de un trazo, razón entre trazos cualesquiera, perpendicularidad de rectas, congruencia de figuras,etc. Surge también *la circunferencia* como importante lugar geométrico que compromete la métrica. Y el *Teorema de Pitágoras* aparece como el principio egregio de la geometría métrica, así como el Teorema de Thales lo era para la geometría afín.

Regresando al modelo vectorial aritmético $\mathbb{R}^2$ premunido de métrica mediante el consabido producto escalar, se obtiene una *Geometría cartesiana* (o analítica) *plana métrica* (Cap. 4), como continuación de la que se había logrado iniciar - en el aspecto afín - en II Medio. Se incorpora esta vez una fórmula pitagórica para la distancia entre dos puntos, una condición de perpendicularidad de rectas y la ecuación cartesiana de la circunferencia en todos los casos.

El otro aspecto métrico fundamental dd la geometría plana es la Goniometría o medición de ángulos (Cap. 5) Aquí el producto escalar también es el encargado de asociar a cada ángulo un número real bien determinado que se denomina su coseno, noción que junto con la de seno tienen antiguo origen en la trigonometría de los primitivos astrónomos helénicos. Se organizan así las "tablas goniométricas" que permiten resolver perfectamente los problemas que relacionan magnitudes longitudinales con magnitudes angulares. Todo ello tiene su aplicación culminante en el cálculo de triángulos o Trigonometría propiamente dicha. (Cap. 6).



O B J E T I V O S D E
L A U N I D A D

Desde luego, renovamos aquí los Objetivos generales que nos propusimos en la Unidad de GEOMETRIA VECTORIAL AFIN. Y ahora agregamos los siguientes:

vi) COMPRENSION DEL PROCESO DE ABSTRACCION QUE LLEVA, DESDE UN MODELO NUMERICO RESTRINGIDO DE PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES, AL CONCEPTO GENERAL DE ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO ABSTRACTO CON DEFINICION AXIOMATICA.

(Una ampliación del Objetivo iv)

vii) PARTICIPACION EN EL PROCESO DE ALGEBRIZACION DE LA GEOMETRIA PLANA METRICA QUE UTILIZA UNA ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL BIDIMENSIONAL EUCLIDEO.

(Ampliación del Objetivo v)

viii) HABILIDAD PARA SUPEDITAR BAJO DICHA ESTRUCTURA VECTORIAL EL PROCESO DE ARITMETIZACION DE LA GEOMETRIA PLANA METRICA QUE NOS LEGO EL METODO CARTESIANO DE LAS COORDENADAS (RUDIMENTOS DE GEOMETRIA ANALITICA)

(Ampliación del Objetivo vi)

ix) DESTREZA EN EL MANEJO DE CONCEPTOS, DE FORMULAS Y DE TABLAS GONIOMETRICAS EN PROBLEMAS CLASICOS DE TRIGONOMETRIA.

B I B L I O G R A F I A

[1] S.M.S.G. : "Matemática Intermedia, Parte 2" (Univ Stanford, 1965). Art. 11-4 al 11-6.

[2] BREARD : "Mathématiques 2º AB" rojo (L' Ecole, 1963). Lecc. XII, XIII, XV, XVI, XVII

[3] "Mathématiques 2º CM" verde azul (L'Ecole, 1962). Lecc. XXII, XXIII, XXIV, XXXIII, XXXIV, XXXV .

[4] "Mathématiques 1º CM" celeste (L'Ecole, 1962). Lecc. XII, XIII, XIV, XV, XVI .

[5] PAPY : "Matemática Moderna " . Vol. III (EUDEBA, 1970). Cap. 11, 12, 17, 18.

[6] HERNANDEZ - ROJO - RABUFETTI - HERNANDEZ:
"Conceptos básicos de Matemática Moderna"
(CODEX, 1966). Art. XII. 7

[7] MURDOCH : "Linear Algebra for Undergraduates"
(Wiley, 1959). Art. 10 .

[8] ECCLES-VANCE-MIKULA:
"Analytic and Vector Geometry"
(Addison-Wesley, 1969). Art. 5-7 al 5-9.

[9] SMAIL: "Trigonometry Plane and Spherical "
(Mc Graw-Hill, 1952).

[10] H. CORTES: "Geometría Vectorial Afín. Guía del Profesor"
(Centro de Perfeccionamiento, 1971.)

<u>NOTA.</u> Este último folleto será nutridamente referido en el presente trabajo, sólo con la sigla "G.V.A.".

S U M A R I O   D E L   C O N T E N I D O

(Ver Programa de III Medio, Unidad 3) .

1. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES. Producto escalar de vectores en $\mathbb{R}^2$; sus propiedades. Cuadrado de un vector, cuadrado de un binomio vectorial. Norma de un vector; sus propiedades; vectores unitarios.

2. ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO. Axiomática de Espacio Vectorial Euclídeo (con producto escalar) E sobre $\mathbb{R}$; concepto de norma de un vector en E. Métrica en E. El modelo $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial euclídeo de dimensión 2.

3. EL PLANO METRICO E_2 . El plano vectorial euclídeo;sus puntos son vectores en E_2. Sus rectas tal como en el plano afín, pero esta vez con vectores en E_2. Longitud de un trazo, distancia entre dos puntos. Rectas perpendiculares, como pares de rectas cuyos vectores de dirección tienen producto escalar nulo; trazos perpendiculares. El triángulo rectángulo; teorema de Pitágoras, teoremas de Euclides.

4. EL PLANO METRICO CARTESIANO. Caso del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. Referencial cartesiano ortogonal, coordenadas ortogonales de un punto. Fórmula para la distancia entre dos puntos. Ecuación de la circunferencia. Ecuación de la recta; condición de perpendicularidad.

5. GONIOMETRIA. Goniometría en E_2; definición del coseno de un ángulo (intervalo de 0^o a 180^o) como el producto escalar de los vectores unitarios según sus lados; el seno de un ángulo definido en función de su coseno. Tablas goniométricas. El coseno y el seno como componentes de un vector unitario en $\mathbb{R}^2$ en un referencial cartesiano ortogonal. Interpretación gráfica del producto escalar de vectores.

6. TRIGONOMETRIA. Expresiones de las funciones goniométricas para ángulos en el triángulo rectángulo; sus valores para ángulos notables. Fórmulas del argumento suma . Tangente y cotangente. Identidades y ecuaciones trigonométricas sencillas. Tablas trigonométricas simplificadas, aplicaciones a problemas prácticos. Teorema del Seno y Teorema del Coseno en un triángulo cualquiera. Teoremas de congruencia.

1. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

Producto escalar de vectores en $\mathbb{R}^2$; sus propiedades. Cuadrado de un vector, cuadrado de un binomio vectorial. Norma de un vector; sus propiedades; vectores unitarios.

1.1 PRODUCTO ESCALAR EN $\mathbb{R}^2$

Universo: Espacio vectorial $\mathbb{R}^2$

["G.V.A": Cap 1 y 2] .

1.11 Definición

Una dueña de casa se enfrenta al mercado de dos bienes, cuyos precios unitarios son p_1 y p_2. Se decide a comprarlos en cantidades x_1, x_2, respectivamente; su gasto total es

$$x_1\ p_1 + x_2\ p_2 \ .$$

Los matemáticos dicen aquí que el vector "cantidades" $(x_1\ ,\ x_2) = \vec{x}$ se multiplicó escalarmente por el vector "precios" $(\ p_1\ ,\ p_2) = \vec{p}$. El número real que expresó el gasto total lo anotan

$$\vec{x}\ .\ \vec{p} \qquad .$$

Queda sugerida así la siguiente

Def. En el espacio vectorial bidimensional $\mathbb{R}^2$ (sobre $\mathbb{R}$), se define una ley de composición externa

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\ \cdot\ } \mathbb{R}$$

denominada PRODUCTO ESCALAR de dos vectores

$\vec{a} = (\ a_1,\ a_2\ )$ y $\vec{b} = (\ b_1,\ b_2\ )$:

$$\vec{a}\ .\ \vec{b} = a_1\ b_1 + a_2\ b_2 \quad .$$

Acostumbrar a los alumnos a no omitir el punto en el producto escalar.

1.12 Ejemplos

1) $(\ -5\ ,\ 3\ )\ .\ (\ 4\ ,\ -1\ ) = (-5).4 + 3.\ (-1) = -23$.
2) $(\ 7\ ,\ 0\ )\ .\ (-1\ ,\ 0\ ) = 7\ .\ (-1) + 0.0 = -7$.
3) $(\ 2\ ,\sqrt{3}\ )\ .\ (\ 0\ ,\ 0\ ) = 2.0 + \sqrt{3}\ .\ 0 = 0$.
4) $(\ 1\ ,\ 1\ )\ .\ (\ 1\ ,\ -1\ ) = 1\ .\ 1 + 1\ .\ (-1) = 0$.

Estos cuatro ejemplos son casos típicos.

Los dos primeros muestran que el producto escalar de dos vectores puede ser tanto un número real positivo como negativo .

El tercero señala que un factor vectorial nulo ($\vec{0}$) es suficiente para tener un producto escalar nulo (0) . Sin embargo, ello no es necesario; ya que el cuarto ejemplo presenta un producto escalar nulo, sin que ninguno de los factores sea el vector cero.

1.2 PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

El producto escalar de vectores en $\mathbb{R}^2$ tiene propiedades fundamentales que los alumnos ensayarán demostrar como pequeños teoremas.

1.21 Conmutatividad

Teor. $\vec{a}\,,\vec{b} \in \mathbb{R}^2$:

$$\vec{a}\circ\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

Prueba

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$.

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = b_1a_1 + b_2a_2 = \vec{b}\circ\vec{a}$$

) (Prop. M_2 en $\mathbb{R}$) (q.e.d.)

1.22 Factores ponderados

Teor. $\vec{a}\,,\vec{b} \in \mathbb{R}^2$; $p \in \mathbb{R}$:

$$(p\,\vec{a}) \circ \vec{b} = p (\vec{a} \circ \vec{b}) = \vec{a} \circ (p\,\vec{b})$$

Prueba

Sean $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$.

$$\therefore\ (p\,\vec{a}) \cdot \vec{b} = (pa_1\ , pa_2) \cdot (b_1, b_2) = (pa_1) b_1 + (pa_2)b_2$$

["G.V.A. : 2.11]

$$= p (a_1b_1) + p (a_2b_2) = p (a_1b_1 + a_2b_2) = p (\vec{a}\cdot\vec{b})$$

(Prop. M_3 en $\mathbb{R}$) (Prop. M_4 en $\mathbb{R}$)

(q.e.d.)

Por otra parte

$\vec{a} \cdot (p\vec{b}) = (p\vec{b}) \cdot \vec{a} = p(\vec{b} \cdot \vec{a}) = p(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(Art. 1.21) (caso ant.) (Art. 1.21) (q.e.d.)

1.23 Factor suma

Teor. | $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$:
$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Nota. | Hará bien el profesor en escribir en otro color el signo + del primer miembro, pues éste indica adición en $\mathbb{R}^2$ en tanto que el otro sólo expresa adición en $\mathbb{R}$. Por ello, no cabe aquí hablar de distributividad.

Prueba

Sean : $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$, $\vec{c} = (c_1, c_2)$

$\therefore \quad \vec{b} + \vec{c} = (b_1 + c_1 , b_2 + c_2)$, ["G.V.A." : 1.21]

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) \\
&= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 \quad (M_4 \text{ en } \mathbb{R}) \\
&= (a_1b_1 + a_2b_2) + (a_1c_1 + a_2c_2), \quad (A_2 \text{ y } A_3 \text{ en } \mathbb{R}) \\
&= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}
\end{aligned}$$

(q.e.d.)

1.24 Factor cero

Teor. | $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$
$\vec{a} \cdot \vec{0} = 0$

Prueba

Sea $\vec{a} = (a_1 , a_2)$:

$\therefore \quad \vec{a} \cdot \vec{0} = (a_1, a_2) \cdot (0 , 0) = a_1 0 + a_2 0 = 0$ (q.e.d.)

["G.V.A." : 1.14]

1.25 Factor diferencia

Teor. | $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$:
$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$

(Ver Nota en Art. 1.23)

Prueba

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = a_1(b_1 - c_1) + a_2(b_2 - c_2) = (a_1b_1 + a_2b_2) - (a_1c_1 + a_2c_2)$$
$$= \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$$

(q.e.d.)

1.3 CUADRADO Y NORMA EN $\mathbb{R}^2$

1.31 Cuadrado de un vector

Def. $\boxed{\vec{a} \in \mathbb{R}^2: \quad \vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}}$

El "cuadrado" de un vector es así el producto escalar del vector por sí mismo.

Hacer hincapié en que el cuadrado de un vector NO es un vector, sino un número real simple.

De hecho, para $\vec{a} = (a_1, a_2)$, se tiene

$$\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2$$

1.32 El cuadrado de un vector es un número no negativo

Teor. $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^2$

$$\vec{a}^2 \geqslant 0$$

Prueba $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 \geqslant 0$, puesto que las bases de estos cuadrados son números reales.

1.33 Cuadrado nulo

Teor. $\vec{a}^2 = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$

El cuadrado de un vector es nulo si y sólo si el vector es nulo.

Prueba

$$\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$a_1^2 = 0 = a_2^2$$
$$\Updownarrow$$
$$a_1 = 0 = a_2 \iff \vec{a} = \vec{0}$$

(q.e.d.)

1.34 Cuadrado de un binomio vectorial

Teor.

$$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2 :$$
$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

Prueba

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2)^2 = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2$$
$$= a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2$$
$$= (a_1^2 + a_2^2) + 2(a_1b_1 + a_2b_2) + (b_1^2 + b_2^2)$$
$$= \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

(q.e.d.)

1.35 Norma de un vector

Def.

A todo vector $\vec{a}$ en $\mathbb{R}^2$ le asociaremos un número real no negativo.

$$\|\vec{a}\| ,$$

que denominaremos NORMA de $\vec{a}$, y que definiremos como la raíz cuadrada aritmética del cuadrado del vector :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} .$$

Este número real existirá siempre, pues la raíz cuadrada aritmética de un número real no negativo (Art. 1.32) existe y es única [Programa Oficial de II medio; ítem 2.3].

1.36 Propiedades de la norma

He aquí tres importantes propiedades de la norma, para vectores en $\mathbb{R}^2$, que los alumnos demostrarán como sencillos teoremas.

Teor. 1

$$\|\vec{a}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

Prueba

$$\|\vec{a}\| = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 0 \Longleftrightarrow a_1^2 + a_2^2 = 0 \Longleftrightarrow a_1 = 0 = a_2 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

(q.e.d.)

Teor. 2

$$\|p\,\vec{a}\| = |p| \, \|\vec{a}\|$$

Prueba

$$\| p\vec{a} \| = \sqrt{(pa_1)^2 + (pa_2)^2} = \sqrt{p^2(a_1^2 + a_2^2)}$$
$$= \sqrt{p^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |p| \quad \|\vec{a}\| \quad \text{(q.e.d.)}$$

Se aplicó el conocido teorema de Algebra de II Medio referente a la raíz cuadrada aritmética de un producto de reales positivos.

Teor. 3 $\boxed{\|\vec{a} + \vec{b}\| \leqslant \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|}$ Se conoce como DESIGUALDAD TRIANGULAR

Para probar este teorema, intercalaremos el notable

Lema $\boxed{\begin{array}{l}\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2 : \\ |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leqslant \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|\end{array}}$ Se conoce como DESIGUALDAD DE SCHWARZ (o de Cauchy-Schwarz)

Prueba del lema

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (a_1b_1 + a_2b_2)^2 = a_1^2 b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2 b_2^2$$
$$= (\vec{a}^2 - a_2^2) b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + (\vec{a}^2 - a_1^2) b_2^2$$
$$= \vec{a}^2(b_1^2 + b_2^2) - (a_2^2 b_1^2 - 2a_2b_1a_1b_2 + a_1^2 b_2^2)$$
$$= \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (a_2b_1 - a_1b_2)^2$$
$$\therefore \quad (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leqslant \vec{a}^2 \vec{b}^2$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \leqslant \sqrt{\vec{a}^2} \sqrt{\vec{b}^2}$$
$$\Downarrow$$
$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leqslant \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \qquad \text{(q.e.d.)}$$

Prueba del **Teor. 3**

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 \qquad \text{(Art. 1.35)}$$
$$= \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 \qquad \text{(Art. 1.34)}$$
$$\leqslant \vec{a}^2 + 2|\vec{a} \cdot \vec{b}| + \vec{b}^2 \qquad \text{["ALG.I MEDIO" Art. 5.63]}$$
$$\leqslant \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 \qquad \text{(Lema de Schwarz)}$$
$$\therefore \quad \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 \leqslant (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$$
$$\Downarrow$$
$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leqslant \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \qquad \text{(q.e.d.)}$$

137. Vectores unitarios

En $\mathbb{R}^2$, damos el nombre de vector unitario a todo vector cuya norma (Art. 1.35) sea la unidad real :

Def.

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{a} \text{ vector unitario} \\ \Updownarrow \\ \| \vec{a} \| = 1 \end{array}}$$

Ejemplos clásicos de vectores unitarios son los que componen la "base canónica" en $\mathbb{R}^2$, ["G.V.A." : 2.14] :

$$\vec{i} = (1 , 0) \quad , \quad \vec{j} = (0 , 1) ;$$

pues : $\| \vec{i} \| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$, $\vec{j} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

1.4 PRIMERA SERIE DE EJERCICIOS OPERATORIOS

1) Dados los vectores :

$\vec{a} = (2,3)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, $\vec{c} = (2 , -3)$,

calcular $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ y también $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, verificando el cumplimiento del Teor. 1.23 .

2) Para vectores en $\mathbb{R}^2$, probar que:

i) $(- \vec{a}) \cdot \vec{b} = - (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (- \vec{b})$

ii) $(r \vec{a}) \cdot (s \vec{b}) = (r s) (\vec{a} \cdot \vec{b})$

3) Dados los vectores :

$$\vec{x} = \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{2} , \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right) , \quad \vec{y} = \left(\frac{2\sqrt{2} - 1}{2} , \frac{3}{2}\sqrt{2} \right)$$

Calcular $\| \vec{x} - \vec{y} \|$.

4) Probar que, para $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$, la condición $\| \vec{a} + \vec{b} \| = \| \vec{a} \| + \| \vec{b} \|$ equivale a afirmar que esos vectores son colineales acordes ; es decir , $\vec{a} = k \vec{b}$ con $k \geqslant 0$.

5) Para vectores en $\mathbb{R}^2$, probar que

$$\| \vec{a} + \vec{b} \| = \| \vec{a} - \vec{b} \| \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 .$$

6) Probar que es válido (o que es falso) el escolio siguiente, para vectores en $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{a} , \vec{b} \text{ linealm. depend.} \Longrightarrow | \vec{a} \cdot \vec{b} | = \| \vec{a} \| \, \| \vec{b} \| .$$

¿Es válido el recíproco ? Justifique su conclusión .

7) Verificar la Desigualdad de Schwarz para los siguientes pares de vectores :

i) $\vec{a} = (5, 12)$, $\vec{b} = (-6, 8)$.

ii) $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (-4, 8)$.

8) Verificar la Desigualdad Triangular de normas para los siguientes pares de vectores :

i) $\vec{a} = (8, -15)$, $\vec{b} = (-3, -4)$.

ii) $\vec{a} = (0, 9)$, $\vec{b} = (4, 3)$.

9) Definiendo, por analogía con Art. 1.11, un producto escalar para vectores en $\mathbb{R}^3$, verificar la Desigualdad de Schwarz para los siguientes pares de vectores :

i) $\vec{a} = (3, 1, 1)$, $\vec{b} = (-2, 3, 2)$.

ii) $\vec{a} = (2, 1, 6)$, $\vec{b} = (0, 3, -4)$.

10) Idem, verificar la Desigualdad Triangular de normas para los siguientes pares de vectores :

i) $\vec{a} = (1, 2, -3)$, $\vec{b} = (-2, 4, 2)$.

ii) $\vec{a} = (-3, -1, 2)$, $\vec{b} = (-6, -2, 4)$.

2. E S P A C I O   V E C T O R I A L   E U C L I D E O

Axiomática de Espacio Vectorial Euclídeo (con producto escalar) E sobre $\mathbb{R}$; concepto de norma de un vector en E. Métrica en E. El modelo $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial euclídeo de dimensión dos.

El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con producto escalar no es sino un modelo preparatorio de una estructura abstracta más general, que denominamos Espacio Vectorial Euclídeo

$$E \; ,$$

sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales.

Esta vez el producto escalar de dos vectores no se define directamente, sino que sólo se le reglamenta axiomáticamente en sus propiedades más básicas. Muchos son los modelos que pueden construirse entonces satisfaciendo los axiomas generales de adición, ponderación y producto escalar.

Si además de esa triple agrupación de postulados admitimos el axioma de la dimensión finita, tendremos espacios vectoriales euclídeos n-dimensionales E_n . Y es precisamente en un E_2 o un E_3 en que se desarrolla la Geometría vectorial métrica plana o del espacio.

2.1 ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO E

Universo : Un espacio vectorial E, sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

2.11 Axiomática del Producto Escalar abstracto

Def. Se dice que un espacio vectorial E sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ es EUCLIDEO , si se ha definido una ley de composición externa

$$E \times E \xrightarrow{\;\cdot\;} \mathbb{R}$$

denominada producto escalar, con las siguientes propiedades:

Ax. S_1 $\quad \vec{a}, \vec{b} \in E$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Ax. S_2 $\quad p \in \mathbb{R}$; $\vec{a}, \vec{b} \in E$:

$$(p\,\vec{a}) \cdot \vec{b} = p\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

<u>Ax. S_3</u> $\quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in E$:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

<u>Ax.S_4</u> $\quad \forall \vec{a} \in E$:

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{a} \geqslant 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \end{cases}$$

El Ax. S_1 estipula la conmutatividad, o mejor dicho la <u>simetría</u> del producto escalar abstracto.

Los Ax.S_2 y S_3 establecen la bilinealidad del producto escalar abstracto; de ellos y de S_1 se desprenden sus duales, que veremos en Art. 2.13 y 2.14 .

El Ax.S_4 está destinado a permitir definir ulteriormente una "norma" asociada a cada vector (Art. 2.23); con ello, todo espacio vectorial euclídeo es un "espacio normado". Y es bien claro que en un espacio normado la introducción de una métrica es inmediata (Art. 2.32).

2.12 <u>Ejemplos</u>

1) Desde luego, un primer modelo ya conocido de espacio vectorial euclídeo (bidimensional) es $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar definido en Art. 1.11 .

Efectivamente, se ha probado que se cumple allí el Ax. S_1 (Art. 1.21), el Ax.S_2 (Art. 1.22), el Ax. S_3 (Art. 1.23). En cuanto al importante Ax.S_4, su cumplimiento en $\mathbb{R}^2$ es inmediato, pues

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 \geqslant 0 \ , \qquad y \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \ , \qquad (\text{Art. } 1.33).$$

2) El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, ["G.V.A. : 3.22] , resulta euclídeo al definir el producto escalar así:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \ .$$

2.13 <u>Escolio del posfactor ponderado</u>

<u>Teor.</u> $\quad q \in \mathbb{R}; \ \vec{a}, \vec{b} \in E$:

$$\vec{a} \cdot (q \vec{b}) = q (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Prueba

$$\vec{a} \cdot (q \vec{b}) \underset{(\text{Ax.}S_1)}{=} (q \vec{b}) \cdot \vec{a} \underset{(\text{Ax. }S_2)}{=} q (\vec{b} \cdot \vec{a}) \underset{(\text{Ax. }S_1)}{=} q (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

(q.e.d.)

2.14 Escolio del prefactor suma

Teor. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in E$:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Prueba

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

(Ax.S_1) (Ax. S_3) (Ax.S_1)

(q.e.d.)

2.15 Factor diferencia

Teor. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in E$:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$$

(Generalizando el Teor. 1.25)

Prueba

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) + \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot [(\vec{b} - \vec{c}) + \vec{c}] = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

(Ax.S_3) $\Downarrow$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$$

(q.e.d.)

2.16 Factor cero.

Teor. $\vec{a} \in E$:

$$\vec{a} \cdot \vec{0} = 0$$

(Generalizando el Teor. 1.24)

Prueba

Dado $\vec{b} \in E$:

$$\vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

(Art. 2.15) (q.e.d.)

Evidentemente no hay teorema recíproco. Tal como ocurría en $\mathbb{R}^2$, (Ej. 1.12-4), un producto escalar en E puede ser nulo sin que ninguno de los factores sea el vector cero.

2.2 CUADRADO Y NORMA EN E

Aquí generalizaremos en abstracto las situaciones concretas vistas en el párrafo 1.3 para el modelo preparatorio $\mathbb{R}^2$.

2.21 Cuadrado de un vector

Def.

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall a \in E : \\ \qquad \vec{a}^2 = \vec{a} . \vec{a} \end{array}}$$

(Generalizando la Def. 1.31)

Del Ax.S_4 desprendemos que

$$\vec{a}^2 \geq 0 \qquad (\forall \vec{a} \in E)$$

y además :

$$\vec{a}^2 = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0} .$$

2.22 Cuadrado de un binomio vectorial

Teor.

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a}, \vec{b} \in E : \\ \qquad (\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2 \vec{a} . \vec{b} + \vec{b}^2 \end{array}}$$

(Generalización del Teor. 1.34)

Prueba

$$(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = (\vec{a} \pm \vec{b}) . (\vec{a} \pm \vec{b}) = (\vec{a} \pm \vec{b}) . \vec{a} \pm (\vec{a} \pm \vec{b}) . \vec{b} , \quad (\text{Ax.}S_3)$$

$$= \vec{a}.\vec{a} \pm \vec{b}.\vec{a} \pm \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{b} , \quad (\text{Art. } 2.14)$$

$$= \vec{a}^2 \pm 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2 , \quad (\text{Ax. } S_1)$$

(q.e.d.)

2.23 Norma de un vector

Tenemos que: $\forall \vec{a} \in E : \ \vec{a}^2 \geq 0 \ \therefore$ Existe $\sqrt{\vec{a}^2}$ en $\mathbb{R}_0^+$.

Por tanto cobra sentido la siguiente

Def.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{NORMA de un vector } \vec{a} \in E : \\ \qquad \| \vec{a} \| = \sqrt{\vec{a}^2} \end{array}}$$

(Generalizando la Def.1.35)

2.24 Desigualdad de Schwarz

(También llamada de Cauchy-Schwarz)

$$\boxed{\begin{array}{c}\vec{a}\,,\ \vec{b} \in E : \\ |\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|\end{array}}$$

(Generalización del Lema de Art.1.36)

Prueba

$$\left(\vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\ \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right)^2 \geqslant 0 \quad , \quad \text{(Art. 2.21)}$$

$$\Downarrow$$

(Se supuso $\vec{b} \neq \vec{0}$, pues para $\vec{b} = \vec{o}$ el teorema es obvio)

$$\vec{a}^2 - \frac{2}{\|\vec{b}\|^2}(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{\|\vec{b}\|^2} \geqslant 0, \qquad \text{(Art.2.22)}$$

$$\Downarrow$$

puesto que $\dfrac{\vec{b}^2}{\|\vec{b}\|^2} = 1$

$$\vec{a}^2 \geqslant \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|\vec{a}\| \geqslant \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{b}\|}$$

$$\Downarrow$$

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leqslant \|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|$$

(q.e.d.)

Una elegante demostración de un escolio sumamente útil.

2.25 Propiedades de la norma

Teor. 1

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall v \in E : \\ \|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}\end{array}}$$

(Generalización del Teor. 1.36-1)

Prueba

$$\|\vec{v}\| = 0 \iff \sqrt{\vec{v}^2} = 0 \iff \vec{v}^2 = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}\ , \qquad \text{(Art. 2.21)}$$

(q.e.d.)

Teor. 2

$$\boxed{\begin{array}{l} p \in \mathbb{R}\,, \quad \vec{v} \in E : \\ \|p\,\vec{v}\| = |p|\,\|\vec{v}\| \end{array}}$$

(Generalización del Teor. 1.36-2)

Prueba

Prueba

$$\|p\,\vec{v}\| = \sqrt{(p\,\vec{v})^2} = \sqrt{p^2}\ \sqrt{\vec{v}^2} = |p|\,\|\vec{v}\| \quad \text{(q.e.d.)}$$

Teor. 3

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a},\vec{b} \in E : \\ \|\vec{a}+\vec{b}\| \leqslant \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \end{array}}$$

(Generalización de T.1.36-3)

Prueba

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 \qquad \text{(Art. 2.22)}$$

$$\leqslant \vec{a}^2 + 2\,|\vec{a}\cdot\vec{b}| + \vec{b}^2 \qquad \text{/"ALG.I MEDIO" : 5.63/}$$

$$\leqslant \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 \qquad \text{(Art.2.23 y 2.24)}$$

$$\therefore\ (\vec{a}+\vec{b})^2 \leqslant (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2} \leqslant \sqrt{(\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| \leqslant \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \qquad \text{(q.e.d.)}$$

<u>Nota</u> | Estas tres propiedades se utilizan como axiomas al definir un espacio vectorial <u>normado</u> ; vale decir, con normas pero no necesariamente con producto escalar.

2.26 Vectores unitarios

Def. | Se dice que un vector en E es <u>UNITARIO</u> toda vez que su norma vale 1.

(Generalizando la Def. 1.37)

(Basta decir que el cuadrado de un vector unitario debe valer 1)

Algunos autores distinguen los vectores unitarios <u>reemplazando la flechita por un circunflejo</u>.

Por ejemplo, para $\vec{a} \neq \vec{0}$:

$$\frac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|} = \hat{v} \ .$$

En efecto,

$$\hat{v}^{\,2} = \frac{\overrightarrow{a}^2}{\|\overrightarrow{a}\|^2} = 1 \ , \qquad \text{(Art. 2.23) .}$$

En el modelo $\mathbb{R}^2$, teníamos los típicos vectores unitarios de la base canónica :

$$\hat{i} = (1 , 0) \qquad , \quad \hat{j} = (0 , 1) \qquad (\text{Art. } 1.37);$$

en este modelo son unitarios todos los vectores $\hat{u} = (a,b)$ tales que $a^2 + b^2 = 1$.

2.3 METRICA EN E

Adelantaremos aquí una noción de teoría de conjuntos que profundizaremos algo más en IV Medio en la Introducción al Análisis, donde también daremos una motivación de la axiomática respectiva.

2.31 Axiomas de la métrica.

Def. Se dice que un conjunto M es un ESPACIO METRICO

si se ha definido una función distancia

$$M \times M \xrightarrow{d} \mathbb{R}$$

tal que se cumplen :

Ax.1/ $d(x,y) \geqslant 0$, $(\forall x,y \in M)$;
con $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

Ax.2/ $d(x,y) = d (y,x)$.

Ax.3/ $d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z)$.

2.32 Métrica del espacio vectorial euclídeo

Teor. EL ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO E (y cualquier espacio vectorial normado) ES UN ESPACIO METRICO, CON LA FUNCION DISTANCIA.

$$d (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \| \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} \|$$

Prueba

i) $d(\vec{a},\vec{b}) = \|\vec{b} - \vec{a}\| \geqslant 0$, (Art. 2.23) ;

y $d(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Longleftrightarrow \|\vec{b} - \vec{a}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{b} - \vec{a} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{b}$.

(T.2.25-1)

Se cumple pues el Ax. 1 de la métrica.

ii) $d(\vec{a},\vec{b}) = \|\vec{b} - \vec{a}\| = \|-(\vec{a} - \vec{b})\| = \|(-1)(\vec{a} - \vec{b})\|$

$= |-1| \, \|\vec{a} - \vec{b}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\| = d(\vec{b},\vec{a})$.

(T.2.25-2)

Se cumple pues el Ax. 2 de la métrica.

iii) $d(\vec{a},\vec{b}) + d(\vec{b},\vec{c}) = \|\vec{b} - \vec{a}\| + \|\vec{c} - \vec{b}\|$

$\geqslant \|(\vec{b} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{b})\| = \|\vec{c} - \vec{a}\| = d(\vec{a},\vec{c})$.

(T.2.25-3)

Se cumple pues el Ax. 3 de la métrica.

(q.e.d.).

2.33 El modelo $\mathbb{R}^2$. El modelo $\mathbb{R}^n$

1) Así, en el caso particular del modelo aritmético $\mathbb{R}^2$ de espacio vectorial euclídeo bidimensional, tenemos un espacio métrico. Para la distancia entre dos puntos $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$ tendremos :

$$d(\vec{a},\vec{b}) = \|\vec{b} - \vec{a}\| = \|(b_1 - a_1 , b_2 - a_2)\| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$$

(Art. 1.35)

Utilizaremos esta métrica bidimensional en Geometría vectorial para metrizar el plano euclidiano.

2) En el caso del espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$, la distancia entre dos puntos $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots , a_n)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots b_n)$ está dada por

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + \dots + (b_n-a_n)^2} \text{ , (Art.2.12)}$$

2.4 SEGUNDA SERIE DE EJERCICIOS OPERATORIOS.

1) Siendo $\vec{a} = (a_1,a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ vectores arbitrarios en $\mathbb{R}^2$, determinar cuáles de las alternativas siguientes definen un producto escalar legítimo :

i) a_1b_1 ii) $2(a_1b_1 + a_2b_2)$

iii) $-2(a_1b_1 + a_2b_2)$ iv) $(a_1b_1)^2 + (a_2b_2)^2$

v) $a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+2a_2b_2$ vi) $a_1b_2 + a_2b_1$.

2) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Poniendo por definición

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad , \quad (\forall \vec{a}, \vec{b} \in V) ,$$

¿resulta ser así V un espacio vectorial euclídeo ?

3) Sea (E, .) un espacio vectorial euclídeo . Definiendo

$$\vec{x} \circ \vec{y} = p (\vec{x} \cdot \vec{y}) , \quad (p \text{ constante}) ,$$

determinar para qué valores de p es (E, o) también un espacio vectorial euclídeo.

4) Hallar las normas de los siguientes vectores en $\mathbb{R}^4$:

i) $(3, 4, -3, 1)$, ii) $\left(\frac{2}{3} , \frac{1}{2} , -\frac{2}{3} , -\frac{1}{2} \right)$.

5) Hallar las distancias entre los siguientes elementos de $\mathbb{R}^3$:

$\vec{a} = (-2, 7, 4)$, $\vec{b} = (1, 0, -3)$, $\vec{c} = (5, -1, 0)$;
comprobando que se cumple el Ax. 3 de la métrica.

6) En un espacio vectorial normado N (Ver Nota en Art.2.25), probar que:

i) $d(p\vec{a} , p\vec{b}) = |p| \, d (\vec{a}, \vec{b})$

ii) $d (\vec{a}+\vec{c} , \vec{b}+\vec{c}) = d (\vec{a},\vec{b})$

(La métrica en N se define como en Art. 2.32)

7) En E, probar que la Desigualdad de Schwarz es una igualdad si y sólo si los vectores son linealmente dependientes.

8) Siendo $a_1, a_2, \ldots , a_n \in \mathbb{R}^+$, probar que

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right) \geqslant n^2 .$$

(<u>Sugerencia</u>: Usar Desigualdad de Schwarz en $\mathbb{R}^n$) .

3. E L   P L A N O   M E T R I C O E_2

El plano vectorial euclídeo: sus puntos son vectores en E_2. Sus rectas tal como en el plano afín, pero esta vez con vectores en E_2. Longitud de un trazo, distancia entre dos puntos. Rectas perpendiculares, como pares de rectas cuyos vectores de dirección tiene producto escalar nulo; trazos perpendiculares. El triángulo rectángulo; teorema de Pitágoras, teoremas de Euclídes.

Comenzamos ahora la Geometría vectorial plana métrica (Geometría en E_2).

3.1 EL PLANO VECTORIAL EUCLIDEO

3.11 Universo

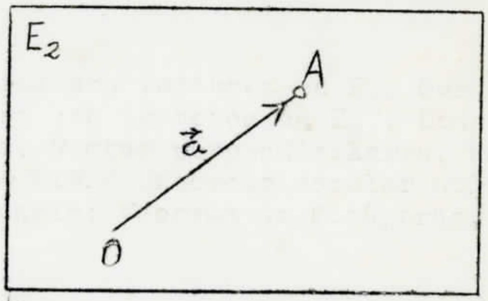
En todo este Cap. 3 estaremos <u>en un espacio vectorial euclídeo BIDIMENSIONAL cualquiera</u>.

$$E_2 \quad .$$

3.12 Puntos en E_2

Tal como en el plano vectorial afín ["G.V.A." : 4.22] , en esta Geometría vectorial plana métrica.

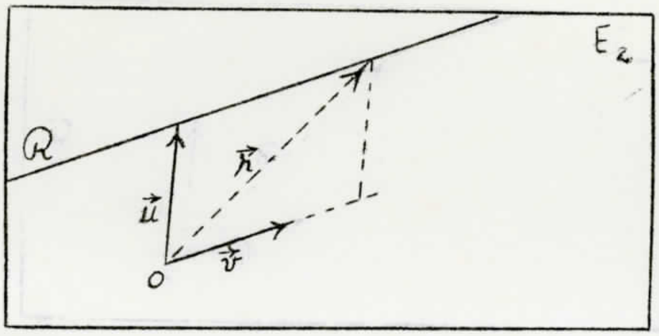
PUNTO ES TODO VECTOR $\vec{a} \in E_2$



3.13 Rectas en E_2

Tal como en el plano vectorial afín ["G.V.A." : 4.23] , en esta Geometría vectorial plana métrica.

RECTA ES TODO CONJUNTO DE PUNTOS (VECTORES) DEL TIPO $\mathcal{R} = \{ \vec{r} \in E_2 \mid \vec{r} = \vec{u} + t\,\vec{v} \ , \ (\forall\, t \in \mathbb{R}) \}$, DONDE $\vec{u}, \vec{v}$ SON VECTORES DADOS EN E_2, CON $\vec{v} \neq \vec{0}$.



3.14 Incorporación de las propiedades del plano vectorial afín.

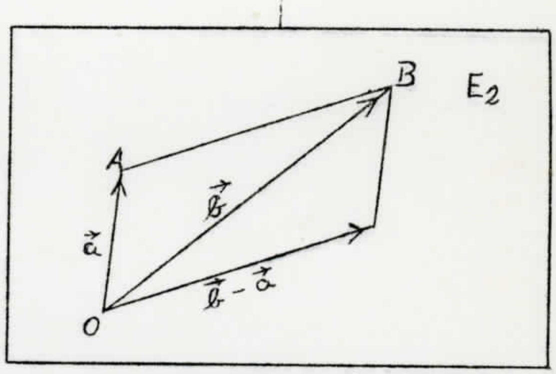
Son entonces automáticamente válidas en E_2 todas las propiedades del plano vectorial afín que hemos estudiado en II Medio. Las incorporamos pues al patrimonio del plano vectorial euclídeo, y pasamos a estudiar entonces las demás propiedades que le son características y que no procedían en el plano afín.

3.2 LONGITUD DE UN TRAZO.

3.21 Definición

Sea (A, B) un trazo dirigido en E_2. Sabemos ["G.V.A.": 4.53] que para $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, al trazo dirigido le está asociado al vector

$$\overrightarrow{A,B} = \vec{b} - \vec{a} \quad .$$



Entonces viene al caso la siguiente

Def. **LONGITUD** de (A , B) :
$$|A\,B| = \|\overrightarrow{A,B}\| = \|\vec{b} - \vec{a}\|$$

Comparando con Art. 2.32, vemos que la "longitud" $|AB|$ puede considerarse - con pleno sentido métrico- como la DISTANCIA entre el punto $A(\vec{a})$ y el punto $B(\vec{b})$.

‖ Queda pues automáticamente introducida una métrica en el plano vectorial euclídeo E_2, cosa que no tuvimos en el plano afín.

3.22 Longitud en conexión con razón de trazos dirigidos.

Esta "distancia" de punto a punto puede ponerse en conexión con la "razón" entre trazos dirigidos, que vimos en el plano afín ["G.V.A.": 4.72].

En efecto, allí nos referíamos exclusivamente a un par de trazos dirigidos (A, B) y (C,D) que fueran comparables ("afines" dijimos) entre sí; ello exigía rectas portadoras paralelas o coincidentes .

Teníamos $\overleftrightarrow{AB} \mathrel{\underset{=}{\parallel}} \overleftrightarrow{CD}$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{A,B} = k\,\overrightarrow{C,D} \qquad (1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{AB}{CD} = k\,.$$

Pero ahora, en Geometría métrica, de (1) obtenemos

$$\vec{b} - \vec{a} = k\,(\vec{d} - \vec{c}\,)$$

$$\Downarrow$$

$$\|\vec{b} - \vec{a}\| = |k|\,\|\vec{d} - \vec{c}\| \qquad (T.2.25\text{-}2)$$

$$\Updownarrow$$

$$|AB| = |k|\;|CD|$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{|AB|}{|CD|} = |k|}$$

Nótese que ahora el número positivo $|k|$ APARECE EFECTIVAMENTE COMO UN CUOCIENTE (entre dos longitudes) y no sólo como una "razón" simbólica como fue en Geometría afín.

Además, AHORA PODEMOS LEVANTAR LA RESTRICCION DE TOMAR EXCLUSIVAMENTE TRAZOS PARALELOS O COLINEALES. Nada nos impide, en Geometría métrica, formar cuocientes entre longitudes no nulas cualesquiera, no importando ya que los trazos considerados sean afines entre sí o que no lo sean.

3.23 Vector unitario colineal acorde con el vector asociado a un trazo dirigido.

Problema En el plano vectorial euclídeo E_2 , dado un trazo dirigido (A, B), hallar el vector unitario $\hat{u}$ colineal acorde (del mismo sentido) con el vector $\overrightarrow{A,B}$.

Sol. Que $\hat{u}$ sea colineal acorde con $\overrightarrow{A,B}$ significa que están en razón de homotecia positiva:

$$\overrightarrow{A,B} = k\,\hat{u} \quad , \quad (k > 0)$$

$$\Downarrow$$

$$\|\overrightarrow{A,B}\| = |k|\,\|\hat{u}\| = k \text{ , puesto que } \|\hat{u}\| = 1 \text{ (Art. 2.26)}$$

$$\Downarrow$$

$$\overrightarrow{A,B} = \|\overrightarrow{A,B}\|\;\hat{u}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{u} = \|\overrightarrow{A,B}\|^{-1}\;\overrightarrow{A,B} \Longrightarrow \boxed{\hat{u} = \frac{\overrightarrow{A,B}}{|AB|}}$$

La resolución de este problema se dice NORMALIZACION del vector dado $\overrightarrow{A,B}$.

En términos de vectores puntuales se tendrá:

$$\hat{u} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{\|\vec{b} - \vec{a}\|}.$$

3.3 PERPENDICULARIDAD EN E_2

Una noción muy elemental pero característica de la geometría métrica es la de perpendicularidad. Por ello, en un planteamiento de Geometría vectorial métrica en base a la introducción del producto escalar de dos vectores, la perpendicularidad de rectas en el plano euclídeo E_2 deberá definirse en directa conexión con dicho producto escalar.

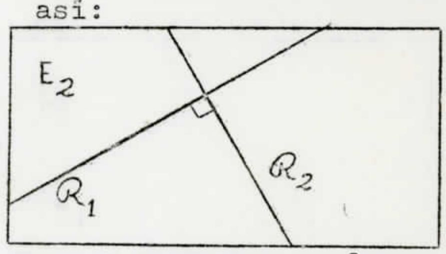
3.31 Rectas perpendiculares

Def.

$$\mathcal{R}_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1), \quad \mathcal{R}_2(\vec{u}_2, \vec{v}_2) \subset E_2$$

$$\mathcal{R}_1 \perp \mathcal{R}_2 \iff \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

Gráficamente "visualizamos la perpendicularidad así:



....y pensamos en la escuadra.

DOS RECTAS EN E_2 SE DICEN.
PERPENDICULARES

TODA VEZ QUE SEA NULO EL PRODUCTO ESCALAR DE SUS VECTORES DE DIRECCION.

Ejemplo

En el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ (con ejes ortogonales) probar que las rectas $\mathcal{R}_1 : 2x - 3y + 5 = 0$, $\mathcal{R}_2 : 3x + 2y - 1 = 0$ son perpendiculares.

En primer lugar, tenemos que poner las rectas dadas en lenguaje vectorial (Art.3.13)/ .

Parametrizando la primera :

$$\mathcal{R}_1 : \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = \frac{2}{3} t + \frac{5}{3} \end{array}\right\} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{r} = (0, \tfrac{5}{3}) + (1, \tfrac{2}{3})\, t, \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \Longrightarrow \vec{v}_1 = (1, \tfrac{2}{3}).$$

Parametrizando la segunda:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{R}_2:\ x = t \\ \qquad y = -\frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{r} = (0, \tfrac{1}{2}) + (1, -\tfrac{3}{2})\,t, \ (\forall t \in \mathbb{R}) \Longrightarrow \vec{v_2} = (1, -\tfrac{3}{2})$$

Ahora formemos el producto escalar de sus vectores de dirección:

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = (1, \tfrac{2}{3}) \cdot (1, -\tfrac{3}{2}) = 1 \cdot 1 + \tfrac{2}{3} \cdot (-\tfrac{3}{2}) = 0$$

(Art. 1.11) $\Downarrow$

$$\mathcal{R}_1 \perp \mathcal{R}_2$$

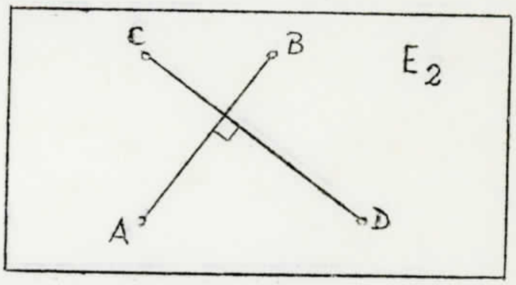
(q.e.d.)

3.32 Trazos perpendiculares.

Para dos trazos en E_2, se dirán "perpendiculares" entre sí toda vez que sus rectas portadoras lo sean; vale decir, toda vez que sea nulo el producto escalar de los vectores asociados a dichos trazos dirigidos ["G.V.A." : 4.27] . Tenemos así la siguientes

Def.

$$\boxed{\begin{array}{c} (A,B) \perp (C,D) \\ \Updownarrow \\ \overrightarrow{A,B} \cdot \overrightarrow{C,D} = 0 \end{array}}$$



(Ver ejercicio 3.5-13)

Ejemplo En $\mathbb{R}^2$, dados los puntos (referencial cartesiano ortogonal)

$$A\,(\tfrac{9}{2}, 0)\ ,\ B\,(-\tfrac{9}{2}, -3)\ ,\ C\,(\tfrac{3}{2}, 9)\ .$$

probar que el triángulo es rectángulo en A.

Tenemos:

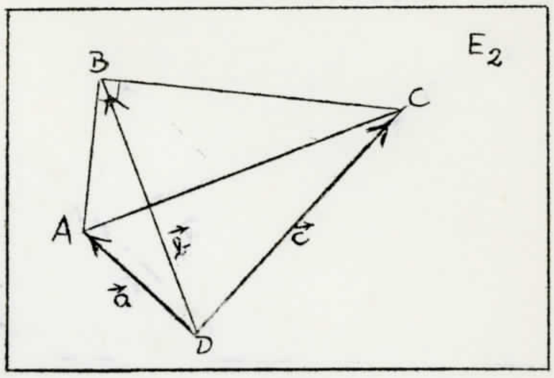
$$\overrightarrow{A,B} \cdot \overrightarrow{A,C} = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = (-9, -3) \cdot (-3, 9)$$

$$= (-9).(-3) + (-3).\,9 = 0 \Longrightarrow (A,B) \perp (A,C).$$

Que los alumnos terminen de cerciorarse de ello construyendo el respectivo gráfico en coordenadas ortogonales.

NOTA.- La necesidad de interpretar hechos métricos en un plano cartesiano con referencial ortogonal quedará explicada más adelante (Art. 4.11).

3.4 EL TRIANGULO RECTANGULO



3.41 Teorema de Pitágoras

Sea ABC un triángulo en E_2, tal que
$(A,B) \perp (B,C)$.

Tenemos entonces el siguiente principio fundamental de la Geometría Métrica [H. Cortés, "MAT.8º AÑO": 7.8 y 8.4.6].

Teor. $\boxed{|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2}$ (Eucl. I 47)

(PITAGORAS)

Prueba $\overrightarrow{A,B} + \overrightarrow{B,C} = \overrightarrow{A,C}$, ["G.V.A.": 4.55]

$$(\overrightarrow{A,B} + \overrightarrow{B,C})^2 = \overrightarrow{A,C}^2$$

$$\overrightarrow{A,B}^2 + 2\,\overrightarrow{A,B}\cdot\overrightarrow{B,C} + \overrightarrow{B,C}^2 = \overrightarrow{A,C}^2 , \quad \text{(Art.2.22)}$$

Por otra parte

$$(A,B) \perp (B,C) \Longleftrightarrow \overrightarrow{A,B}\cdot\overrightarrow{B,C} = 0 , \quad \text{(Art.3.32).}$$

Luego

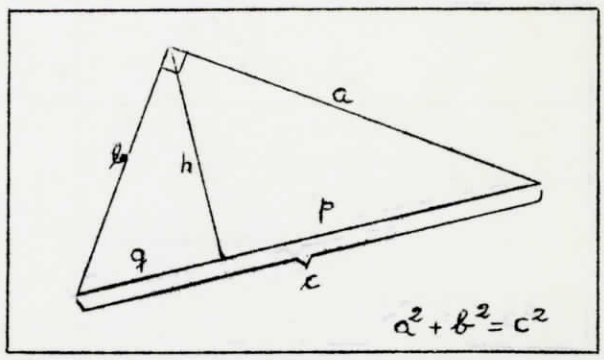
$$\overrightarrow{A,B}^2 + \overrightarrow{B,C}^2 = \overrightarrow{A,C}^2$$

$$\|\overrightarrow{A,B}\|^2 + \|\overrightarrow{B,C}\|^2 = \|\overrightarrow{A,C}\|^2 , \quad \text{(Art.2.23)}$$

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 , \quad \text{(Art.3.21)}$$

(q.e.d.)

3.42 Primer Teorema de Euclides.



$$q = c - p$$
$$q^2 = c^2 - 2cp + p^2$$
$$h^2 = b^2 - q^2 = b^2 - c^2 + 2cp - p^2$$
$$h^2 + p^2 = 2cp - a^2$$
$$a^2 = 2cp - a^2$$
$$2a^2 = 2cp \Longrightarrow \boxed{a^2 = c\,p}$$

El cuadrado de un cateto es igual al producto de la longitud de la hipotenusa por la longitud de la proyección de ese cateto sobre ella.

(Ver Ejerc. 3.5-12)

3.43 Segundo Teorema de Euclides.

$$p + q = c$$
$$(p + q)^2 = c^2$$
$$p^2 + q^2 + 2pq = c^2$$
$$a^2 - h^2 + b^2 - h^2 + 2\,pq = a^2 + b^2$$
$$2\,pq = 2\,h^2 \Longrightarrow \boxed{h^2 = p\,q}$$

El cuadrado de la altura es igual al producto de las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

(Ver Ejerc. 3.5-12)

3.5 TERCERA SERIE DE EJERCICIOS OPERATORIOS

(Los problemas siguientes deberán resolverse por métodos vectoriales)

1) En el plano E_2, probar que si en un triángulo se cumple la propiedad pitagórica (suma de los cuadrados de dos lados igual al cuadrado del tercero), entonces es un triángulo rectángulo .

2) En E_2 , probar que todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

3) En E_2 , probar que las diagonales de todo rombo son perpendiculares.

4) En $\mathbb{R}^2$, hallar la recta que pasa por el punto (2,0) y es perpendicular a la recta $\vec{r} = (1,1) + (2,-3)\,t \quad , \quad (\forall\, t \in \mathbb{R})$.

5) En E_2, probar que el conjunto $\mathcal{L}$ de los puntos equidistantes de dos puntos dados A y B es la recta perpendicular al trazo (A,B) que pasa por su punto medio M.

(Sugerencia: Basta probar que $\forall\, P \in \mathcal{L} : \overrightarrow{A,B} \cdot \overrightarrow{M,P} = 0$).

6) En $\mathbb{R}^2$, con coordenadas ortogonales, se dan los puntos

$$A\,(0,2) \quad , \quad B\,(5,1) \quad , \quad C\,\left(\frac{10}{3} \, , \, \frac{4}{3} \right) .$$

Hallar la razón $\dfrac{|AB|}{|AC|}$.

7) En E_2, en un triángulo ABC rectángulo en A, se conoce $|BC| = 25(\sqrt{5}-1)$ y la altura $|AH| = \dfrac{48}{\sqrt{5}+1}$. Calcular las longitudes $|AB|$ y $|AC|$.

8) Se da un triángulo ABC rectángulo en A. Se proyecta ortogonalmente un punto M de la hipotenusa en P sobre $\overline{AB}$ y en Q sobre $\overline{AC}$. Probar que la suma

$$\frac{|AP|}{|AB|} + \frac{|AQ|}{|AC|}$$

es constante, cualquiera que sea $M \in \overline{BC}$.

(Sugerencia: Aplicar el teorema de Thales de la G. afín).

9) En E_2, nos damos una recta $\mathcal{R}$ que pasa por A y está orientada (eje) por un vector de dirección unitario $\hat{b}$. Probar que, para todo punto Q del plano, la proyección ortogonal del trazo dirigido (A,Q) sobre el eje $\mathcal{R}$ tiene la medida algebraica.

$$p = \overrightarrow{A,Q} \cdot \hat{b}$$

10) Aprovechando el Ejercicio 9), probar que la distancia de un punto dado $\vec{q}$ a una recta dada $\mathcal{R}(\vec{a}, \hat{b})$ viene dada por

$$d = \sqrt{[(\vec{q} - \vec{a}) - (\vec{q} - \vec{a}) \cdot \hat{b}\,\hat{b}] \cdot (\vec{q} - \vec{a})} .$$

11) Aplicar la fórmula del Ejercicio 10) en el plano $\mathbb{R}^2$, en coordenadas ortogonales, al cálculo de la distancia del punto $(-3, 2)$ a la recta $4x - 3y + 8 = 0$. <u>Resp</u>. 2.

(<u>Sugerencias</u>:
- Parametrizar y vectorializar la recta, como en el Ejemplo de Art. 3.31 .
- Normalizar su vector de dirección, como en Art. 3.23 .)

12) Demostrar vectorialmente los dos Teoremas de Euclides (Art.3.42 y 3.43).

13) Demostrar que la perpendicularidad de dos trazos dirigidos es independiente de la elección del origen O.

4. EL PLANO METRICO CARTESIANO.

Caso del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. Referencial cartesiano ortogonal, coordenadas ortogonales de un punto. Fórmula para la distancia entre dos puntos Ecuación de la Circunferencia. Ecuación de la Recta; condición de perpendicularidad.

Regresamos al espacio vectorial métrico bidimensional

$$\mathbb{R}^2$$

de nuestro primer capítulo, pero ahora para hacer allí geometría plana métrica.

4.1 REFERENCIAL CARTESIANO ORTOGONAL .

4.11 Ejes ortogonales en el plano $\mathbb{R}^2$

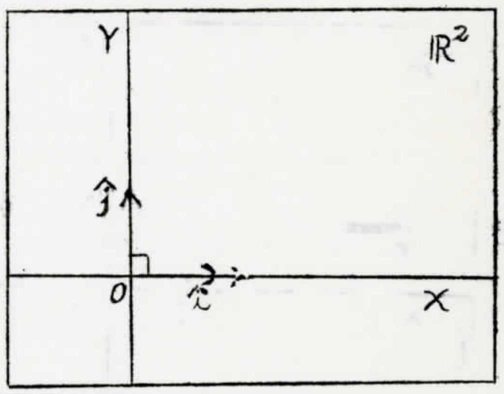
En el plano vectorial euclídeo ($\mathbb{R}^2$, .) nos damos la base canónica.

$$\{\hat{i}, \hat{j}\}$$

con $\hat{i} = (1,0)$, $\hat{j} = (0, 1)$, que son como sabemos vectores unitarios.

En seguida, los ejes cartesianos ["G.V.A." : 6.11] :

$$\begin{cases} X : \vec{r} = t\,\hat{i} , \ (\forall t \in \mathbb{R}) \\ Y : \vec{r} = u\,\hat{j} , \ (\forall u \in \mathbb{R}) \end{cases}$$



Pero

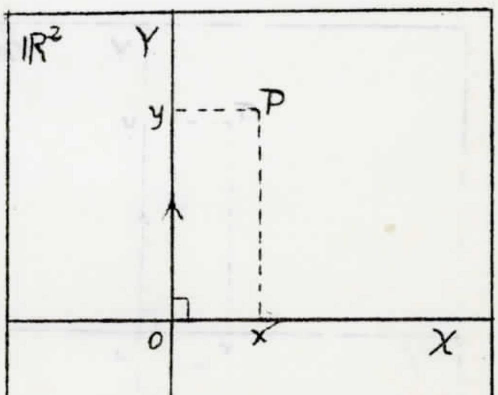
$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 1.0 + 0.1 = 0$$

$$\Downarrow \quad \text{(Art. 3.31)}$$

$$\underline{\underline{X \perp Y}}$$

Por tanto :

> El referencial cartesiano canónico en el plano euclídeo ($\mathbb{R}^2$, .) está constituido por dos ejes necesariamente perpendiculares entre sí (ejes cartesianos "ortogonales ").



(En los diagramas, deben tomarse los trazos unitarios [0,1] de ambos ejes congruentes entre sí)

4.12 Coordenadas cartesianas ortogonales de un punto

Para cada punto $P(\vec{r})$ se tendrán entonces dos coordenadas cartesianas ortogonales (x,y), tales que

$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$, /"G.V.A.": 6.13 /

En papeles cuadriculados, los alumnos dibujarán el punto dadas sus coordenadas ortogonales (x,y) y vice versa.

4.2 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

4.21 Fórmula para la distancia

En el plano métrico cartesiano $\mathbb{R}^2$, nos damos dos puntos

$P_1\,(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$.

Su distancia es (Art. 3.21):

$$d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |P_1P_2| = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$$

$$\Downarrow$$

$$d = \|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\|$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \qquad \text{(Art. 1.35)}$$

4.22 Ejemplos

1) Probar que los puntos en $(\mathbb{R}^2, \cdot)$:
$A(1,8)$, $B(3,2)$, $C(9,4)$
determinan un triángulo rectángulo isósceles .

Sol.

$$|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$
$$|AC| = \sqrt{(9-1)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$
$$|BC| = \sqrt{(9-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$\therefore\ |AB| = |BC|$, (triángulo isósceles)

Además:

$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ (triáng. ~~rectángulo~~ rectángulo Ej. 3.5 - 1).

2) Aplicando la fórmula para distancias en $(\mathbb{R}^2, \cdot)$, probar que los siguientes tres puntos son colineales :
$A(1, -2)$, $B(4, 2)$, $C(10, 10)$.

Sol.

$$|AB| = \sqrt{(4-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 .$$
$$|BC| = \sqrt{(10-4)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 .$$
$$|AC| = \sqrt{(10-1)^2 + (10+2)^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15.$$

$$|AB| + |BC| = |AC|$$
$$\Downarrow$$
$$\|\overrightarrow{A,B}\| + \|\overrightarrow{B,C}\| = \|\overrightarrow{A,C}\| = \|\overrightarrow{A,B} + \overrightarrow{B,C}\|$$
$$\Downarrow$$
$$\exists\, p \in \mathbb{R}:\ \overrightarrow{A,B} = p\,\overrightarrow{B,C} \quad \text{, (Ej. 2.4-6: iii)}$$
$$\Downarrow$$

A, B, C colineales

4.3 LA RECTA

4.31 Ecuación de una Recta en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$

En el plano cartesiano métrico ($\mathbb{R}^2$, .) reproduzcamos el raciocinio que para este mismo tópico hicimos en geometría afín ["G.V.A.": 6.31]

Sea la recta $\mathcal{R}$: $\vec{r} = \vec{a} + t\,\vec{b}$, $(\forall\, t \in \mathbb{R})$,

con $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$.

Poniendo para los diversos puntos de $\mathcal{R}$: $\vec{r} = (x,y)$, tendremos

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x = a_1 + t\,b_1 \\ y = a_2 + t\,b_2 \end{cases} \quad (\forall\, t \in \mathbb{R})$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y - a_2}{x - a_1} = \frac{b_2}{b_1} = m \quad \text{(coeficiente de dirección de } \mathcal{R}\text{)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y = m\,x + n}$$

Revísense todas las demás consideraciones que hicimos al respecto en aquella oportunidad ["G.V.A.":6.31 al 6,33] . También la ecuación cartesiana de la recta que pasa por dos puntos dados ["G.V.A." : 6.34] , y el problema de la intersección de dos rectas en $\mathbb{R}^2$, ["G.V.A." : 6.35] .

4.32 Condición de perpendicularidad de rectas .

Sean $\mathcal{R}(\vec{a},\vec{b})$, $\mathcal{R}'(\vec{a}'$, $\vec{b}')$ rectas en el plano métrico ($\mathbb{R}^2$, .).
Sabemos que:

$$\mathcal{R} \perp \mathcal{R}' \iff \vec{b} \cdot \vec{b}' = 0 \quad , \quad \text{(Art. 3.31)}$$

$$\Updownarrow$$

$$b_1 b_1' + b_2 b_2' = 0 \quad , \quad \text{(Art.1.11)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{b_2}{b_1}\,\frac{b_2'}{b_1'} = -1 \quad \text{(suponiendo } b_1 \neq 0 \neq b_1' \text{ , vale decir rectas no paralelas al eje Y)}$$

$$\boxed{m\,m' = -1} \quad \text{(Art.4.31}$$

Tal es la condición para que dos rectas en $\mathbb{R}^2$ (no paralelas al eje Y) sean perpendiculares entre sí.

4.33 Ejemplos

1) Recordando una propiedad de geometría elemental, establecida vectorialmente para el plano métrico general E_2, (Ej. 3.5-5), probar que la simetral $\mathcal{L}$ de un trazo dado, digamos

$$A(-2, 5) \quad , \quad B(8, -1),$$

es la recta perpendicular a este segmento que pasa por su punto medio M.

Sol. Sea $\mathcal{L} = \{P(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |AP| = |BP|\}$

$$\therefore \quad \underline{\forall P \in \mathcal{L}:}$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (y+1)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$4x - 10y + 29 = -16x + 2y + 65$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{5x - 3y - 9 = 0}$$

Esto prueba desde ya que $\mathcal{L}$ es una recta.

Por otra parte, M(3,2) es el punto medio de (A,B), y tenemos $5.3-3.2 - 9 = 0 \Longrightarrow M \in \mathcal{L}$; la simetral $\mathcal{L}$ pasa por el punto medio del trazo dado.

Por último, el coeficiente de dirección de la recta $\mathcal{L}$ es $\underline{m = \frac{5}{3}}$
En tanto que el coeficiente de dirección de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es

$$m' = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-5}{8+2} = -\frac{3}{5} \quad .$$

["G.V.A." : 6.34]

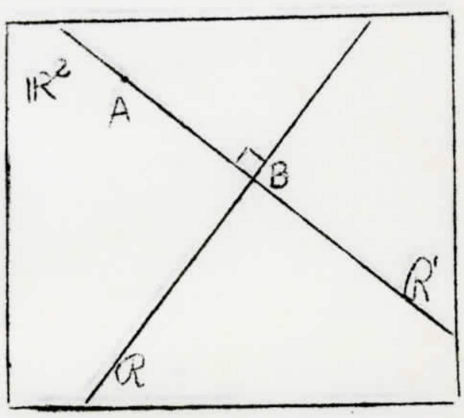
Y tenemos: $m\,m' = \frac{5}{3} \cdot \frac{-3}{5} = -1 \Longrightarrow \underline{\mathcal{L} \perp \overleftrightarrow{AB}}$.

Ello prueba que la simetral es perpendicular al trazo dado (A,B).

2) La recta que pasa por el punto A(5,-3) y es perpendicular a una recta $\mathcal{R}$ corta a ésta en el punto B(-3,2). Hallar $\mathcal{R}$.

Sol. Para $\mathcal{R}' = \overleftrightarrow{AB}$:

$$m' = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2+3}{-3-5} = -\frac{5}{8}$$



Sea m el coeficiente de dirección de $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} \perp \mathcal{R}' \Longrightarrow m\,m' = -1 \Longrightarrow m \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) = -1$$

$$\Downarrow$$

$$m = \frac{8}{5} \quad .$$

Luego $\mathcal{R} : \quad y = -\frac{8}{5}\,x + n \;;$ pero $B \in \mathcal{R} \Longrightarrow 2 = \frac{8}{5} \cdot (-3) + n$

$$\Downarrow$$

$$n = \frac{34}{5}$$

$$\therefore \quad \mathcal{R} : \quad y = \frac{8}{5}x + \frac{34}{5}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{R} : \quad \underline{8x - 5y + 34 = 0 \qquad \text{Resp.}}$$

3) En el plano métrico $\mathbb{R}^2$ nos damos el triángulo de vértices $A(4,3)$, $B(-2, 1)$, $C(-5, -5)$.

Hallar las ecuaciones cartesianas de sus tres alturas (transversales ortogonales) y encontrar su punto de concurrencia (ortocentro).

<u>Sol.</u> - Coeficiente de dirección de $\overleftrightarrow{AB}$:

$$m_c = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 3}{-2 -4} = \frac{1}{3} \;.$$

-Coeficiente de dirección de $\overleftrightarrow{BC}$:

$$m_a = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-5-1}{-5+2} = 2.$$

- Coeficiente de dirección de $\overleftrightarrow{CA}$:

$$m_b = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{3 + 5}{4 + 5} = \frac{8}{9} \;.$$

- Transversal ortogonal (altura) <u>por A</u> :

$$\mathcal{R}_1 \quad y - y_A = -\frac{1}{m_a} \quad (x - x_A)$$

$$\Downarrow$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2} \quad (x - 4) \Longrightarrow \underline{x + 2y - 10 = 0} \qquad \underline{\text{Resp.}}$$

- Transversal ortogonal (altura) <u>por B</u> :

$$\mathcal{R}_2 \quad y - y_B = -\frac{1}{m_b} \quad (x - x_B)$$

$$\Downarrow$$

$$y - 1 = -\frac{9}{8} \quad (x + 2) \Longrightarrow \underline{9x + 8y + 10 = 0} \qquad \underline{\text{Resp.}}$$

- Transversal ortogonal (altura) por C :

$$y - y_C = \frac{1}{m_c} (x - x_C)$$

$$\Downarrow$$

$$y + 5 = -3(x + 5) \Longrightarrow \underline{3x + y + 20 = 0} \text{ . Resp.}$$

- Veamos la existencia de un punto de concurrencia H para las tres alturas.

$$\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \begin{cases} x + 2y - 10 = 0 \\ 9x + 8y + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = 10 . \end{cases}$$ Tomando pues H (-10 , 10)

podemos ver que estas coordenadas también satisfacen la ecuación de $\mathcal{R}_3$.

Con ello $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 = \{H\}$.

Así las tres alturas concurren al punto (ortocentro) H (-10, 10)

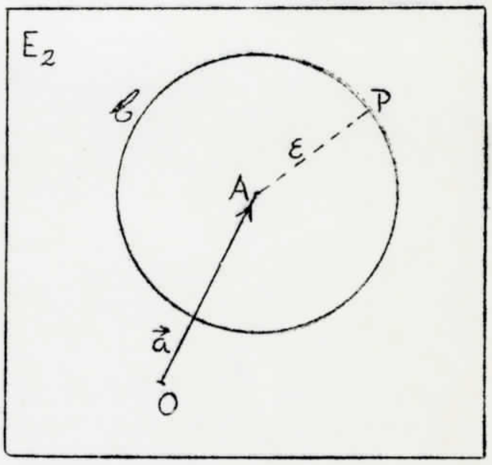
Resp.

4.4 LA CIRCUNFERENCIA

4.41 Definición métrica de la Circunferencia en E_2

Def. En el plano euclídeo E_2 se define la C I R C U N F E R E N C I A de centro $A(\vec{a})$ y radio $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, como el conjunto de puntos

$$\mathcal{C} = \odot(A, \varepsilon) = \{ P \in E_2 \mid |AP| = \varepsilon \}$$



4.42 Ecuación cartesiana de la circunferencia en $\mathbb{R}^2$.

Volviendo al plano euclídeo $\mathbb{R}^2$:

$$\forall P(x,y) \in \mathcal{C} : \quad |AP| = \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\|\vec{r} - \vec{a}\| = \varepsilon \Longrightarrow \|\vec{r} - \vec{a}\|^2 = \varepsilon^2$$

$$\Downarrow$$

$$(\vec{r} - \vec{a})^2 = \varepsilon^2 .$$

Sea $\vec{a} = (a_1, a_2)$; entonces

$$\mathcal{C} : \boxed{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = \varepsilon^2} \qquad (1)$$

o sea :

$$x^2 + y^2 - 2a_1 x - 2a_2 y + (a_1^2 + a_2^2 - \varepsilon^2) = 0 \qquad (2)$$

Se trata de una ecuación cuadrática en x,y ; ello no implica, sin embargo, que toda ecuación cartesiana cuadrática represente una circunferencia. La forma general de la ecuación de una circunferencia en $\mathbb{R}^2$ (ejes ortogonales) es

$$\boxed{x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0} \qquad (3)$$

Pero todavía hay que condicionar el tercer coeficiente, si se quiere tener una circunferencia real. Pues, comparando las ecuaciones (2) y (3) resulta :

Para el <u>centro</u> (a_1, a_2) :

$$a_1 = -\frac{a}{2} \quad , \quad a_2 = -\frac{b}{2} \qquad (4)$$

Para el <u>radio</u> ε ;

$$a_1^2 + a_2^2 - \varepsilon^2 = c$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - c}$$

$$\Downarrow$$

$$(5) \qquad \varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4} - c}$$

Ello exige que en la ecuación (3) se tenga:

$$c < \frac{a^2 + b^2}{4}$$

Si fuese $c = \frac{a^2 + b^2}{4}$, sería $\varepsilon = 0$ y la ecuación (1) nos muestra que en tal caso la circunferencia degenera en un mero punto: su centro .

Por cierto que si $c > \frac{a^2 + b^2}{4}$, sería ε imaginario y la ecuación ya no representaría una circunferencia real.

4.43 <u>Ejemplos</u>

1) Hallar la ecuación de la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ que tiene centro en (-5, 3) y radio $\sqrt{7}$.

Sol. Con $a_1 = -5$, $a_2 = 3$, $\varepsilon = \sqrt{7}$, la ecuación (1) (Art. 4.42) es aquí:

$$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 7 .$$

O sea $\underline{x^2 + y^2 + 10x - 6y + 27 = 0}$ Resp.

2) | En el plano $\mathbb{R}^2$ (papel cuadriculado), dibujar la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$.

Sol . Para usar el compás, necesitamos determinar el centro y el radio.

Centro (fórmula (4) , Art. 4.42) :

$$a_1 = -\frac{-2}{2} = 1 \quad , \quad a_2 = -\frac{6}{2} = -3 .$$

$\therefore$ Centro : (1,-3). Resp.

Radio (fórmula (5), Art. 4.42):

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{(-2)^2 + 6^2}{4} - 6} = 2 \quad \therefore \quad \text{Radio : 2 . Resp.}$$

3) | Hallar la circunferencia que pasa por los puntos:
A (1, 1) , B (-1, -1) , C (1, - 1).

Sol. Debemos hallar el centro Q (p,q) de la circunferencia, punto que debe ser equidistante de los tres puntos dados:

$$|AQ| = |BQ| = |CQ|$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{(x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2} = \sqrt{(x_Q - x_B)^2 + (y_Q - y_B)^2} = \sqrt{(x_Q - x_C)^2 + (y_Q - y_C)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$(p-1)^2 + (q-1)^2 = (p+1)^2 + (q+1)^2 = (p-1)^2 + (q+1)^2$$

$$\Downarrow$$

$$-2p - 2q + 2 = 2p + 2q + 2 = -2p + 2q + 2$$

$$\Downarrow$$

$$-p - q = p + q = -p + q$$

$$\Downarrow$$

$$p = 0 \ , \ q = 0 \ , \quad \therefore \ \underline{Q(0,0) \text{ es el centro,}}$$

Calculemos el radio (distancia de Q al cualquiera de los puntos dados):

$$\varepsilon = |QA| = \sqrt{(x_A - x_Q)^2 + (y_A - y_Q)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

$\therefore$ $\underline{\sqrt{2} \text{ es el radio}}$.

La circunferencia pedida es entonces :

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{2})^2 \quad ; \text{ o sea}$$

$$\underline{x^2 + y^2 = 2} \;. \qquad \underline{\text{Resp.}}$$

4) Hallar la intersección de la recta $\mathcal{R} : x - y + 4 = 0$ con la circunferencia $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 32 = 0$

Sol.

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{C} \begin{cases} x - y + 4 = 0 \implies y = x + 4 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 32 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + (x + 4)^2 + 2x - 2(x + 4) - 32 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -6 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

Entonces

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{C} = \{A, B\} \;, \text{ con } \underline{A(2,6)\;, \quad B(-6,-2)} \;. \; \underline{\text{Resp.}}$$

<u>Discusión:</u> El problema de la intersección de una recta y una circunferencia queda pues dependiendo de una ecuación de segundo grado con una incógnita . Por ello habrá <u>dos, o uno</u>, o <u>ningún</u> punto de intersección, lo que corresponde a recta <u>secante</u> o <u>tangente</u> o <u>separada</u> de la circunferencia.

5) Hallar la intersección de las circunferencias

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

$$\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 10x - 12y + 40 = 0 \;.$$

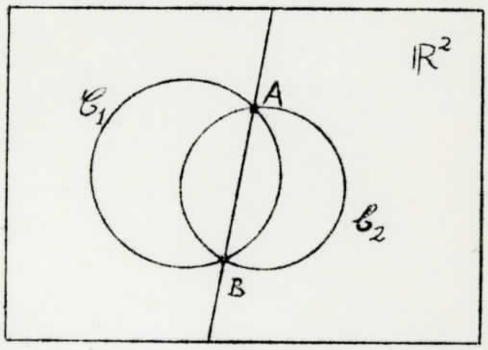
Sol.

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 12y + 40 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

(Restando las ecuaciones y conservando la primera)

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \begin{cases} 2x + 2y - 11 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \end{cases}$$



Observación. La intersección de dos circunferencias queda así reducida a la intersección de una recta con cualquiera de esas circunferencias; esa recta $\mathcal{R}$ se denomina EJE RADICAL de ambas circunferencias.

Discusión. Habiendo quedado el problema reducido al anterior, la intersección de dos circunferencias consta entonces de dos, o uno, o ningún punto, lo que corresponde a circunferencias secantes o tangentes o disjuntas.

Los alumnos encontrarán que el ejercicio propuesto aquí es un ejemplo del primer caso, con los puntos de intersección:

$$A\left(\frac{9+\sqrt{47}}{4}\ ,\ \frac{13-\sqrt{47}}{4}\right)\ ,\qquad B\left(\frac{9-\sqrt{47}}{4}\ ,\ \frac{13+\sqrt{47}}{4}\right)$$ .Resp.

4.5 CUARTA SERIE DE EJERCICIOS OPERATORIOS.

(Todos estos problemas están referidos al plano cartesiano métrico con coordenadas ortogonales)

1) Probar que el cuadrilátero con vértices (-8,6), (-4,3), (-1,7), (-5,10) es un cuadrado.

2) En el triángulo rectángulo con vértices (-7,4), (-2,-1), (6,7), probar que el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices.

3) Hallar el conjunto $\mathcal{L}$ de todos los puntos del plano cuya distancia al punto (5,3) es el doble de su distancia al punto (2,1) . Constatar que $\mathcal{L}$ es una circunferencia .

4) Determinar el centro y el radio de la circunferencia
$$4x^2 + 4y^2 - 8x + 4y - 11 = 0$$

5) Calcular la longitud de la circunferencia
$$2x^2 + 2y^2 + 12x - 8y + 25 = 0\ .$$

6) Discriminar si el punto (6, -2) está en el interior o en la periferia o en el exterior del círculo de contorno
$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0\ .$$

7) Probar que las circunferencias
$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 23$, $x^2 + y^2 + 12x - 18y + 101 = 0$
son tangentes.

8) Probar que las circunferencias
$x^2 + y^2 + 10x - 4y - 35 = 0$, $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 34 = 0$
son disjuntas.

9) Hallar la circunferencia de centro $(-4, 2)$ que es tangente al eje Y.

10) Probar que la ecuación "tipo circunferencia"

$$2x^2 + 2y^2 + 6x - 2y + 5 = 0$$

representa sólo un punto.

11) Probar que la ecuación "tipo circunferencia"

$$4x^2 + 4y^2 + 2x + 4y + 3 = 0$$

no representa lugar geométrico real alguno.

12) Probar que las rectas $2x - 3y + 5 = 0$, $x + \frac{2}{5}y - 1 = 0$ son perpendiculares.

13) Hallar la recta que pasa por $(-3,2)$ y es perpendicular a la recta

$$3x - 4y + \frac{25}{2} = 0 .$$

14) Un triángulo tiene sus lados en las rectas

$4x - 3y = 0$, $2x + y = 0$, $2x - 14y + 75 = 0$.

Hallar las ecuaciones de las alturas (transversales ortogonales) y probar su concurrencia.

15) En el triángulo de vértices $A(-5, 2)$, $B(7, 1)$, $C(4, -3)$, hallar las ecuaciones de las simetrales de los lados y probar su concurrencia.

16) Hallar el conjunto intersección de la segunda recta del Ej. 12) con la circunferencia del Ej. 5).

17) Hallar el conjunto intersección de las circunferencias de los Ej. 4) y 6) .

18) Hallar la circunferencia circunscrita al triángulo del Ej. 15).

5. G O N I O M E T R I A

Goniometría en E_2; definición del coseno de un ángulo (intervalo de 0^o a 180^o) como el producto escalar de los vectores unitarios según sus lados; el seno de un ángulo definido en función de su coseno. Tablas goniométricas. El coseno y el seno como componentes de un vector unitario en $\mathbb{R}^2$ en un referencial cartesiano ortogonal. Interpretación gráfica del producto escalar de vectores.

La Goniometría (de γωνία , ángulo) se ocupa de la medida de los ángulos. Es por tanto un tópico de geometría métrica; y nos corresponde entonces tratarlo aquí, desde el punto de vista vectorial (Cap.5).

La Goniometría trabaja en base a las clásicas seis funciones (nosotros nos ocuparemos sólo de las cuatro primeras) :

SEÑO, COSENO, TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE, COSECANTE.

Su utilización para ahondar en los aspectos métricos del triángulo constituye propiamente la Trigonometría (Cap. 6).

La trigonometría (de τρίγωνον ,triángulo) tuvo su origen en los primeros astrónomos de la Antigüedad. Ya PTOLOMEO DE ALEJANDRIA, en el siglo II D.C. había resumido y mejorado los trabajos anteriores de HIPARCO y MENELAO, indicando además los procedimientos para el "cálculo de cuerdas" presagio de la trigonometría.

Con los hindúes y árabes, especialmente con estos últimos, la trigonometría alcanzó tal grado de desarrollo que fue independizándose de la astronomía, llegando a ocupar destacado lugar entre las disciplinas matemáticas básicas.

Así, en el siglo VI, ARYABHATTA introdujo las semicuerdas ("sinus") en lugar de las cuerdas, proporcionando una tabla de estas funciones para ángulos en intervalos de $3^o \frac{3}{4}$, intervalo angular que corresponde al polígono regular de 96 lados ya medido por Arquímedes. (La voz "coseno" es posterior y proviene de "complementi sinus", que quiere decir "el seno del complemento").

Entre los árabes destacó ALBATEGNIO (Mohammed ber Geber Al-Battani, 877-929). Independientemente de Aryabhatta, consideró el seno de un arco en lugar de la cuerda del arco doble que usaban los antiguos. Descubrió también el teorema fundamental de la trigonometría esférica.

El otro avance significativo, la introducción de las "tangentes" y secantes", debióse a ABOUL-WEFA (940-988), quién llamó a la primera "sombra prima" y a la otra "diámetro de la sombra". Por último, al astrônomo persa NASIR-EDDIN (1201-1274) se debe el primer texto árabe de trigonometría como disciplina independiente.

REGIOMONTANO (Johannes Müller, 1436-1476), en su obra "De Triangulis omnimodis libri V", 1464, comenzó a dar forma definitiva a esta disciplina. Descubrió la resolución del triángulo en que se dan los tres lados; dió tablas de senos de ángulos de minuto en minuto, destacando también la tabla de tangentes (a la que llamó "tabla fecunda") .

Finalmente, FRANCOIS VIETE (1540-1603) en su "Ad angulares sectiones theoremata", obtuvo los desarrollos de las cuerdas de múltiplos de un arco dado, en función de la cuerda de este arco. Estas fórmulas son por cierto más complicadas que las actuales en que las cuerdas se reemplazan por los senos.

Resumiendo , las tres etapas en el desarrollo histórico de la Trigonometría quedan de manifiesto en las tres siguientes definiciones de su objeto.

i) La Trigonometría enseña a resolver triángulos planos o esféricos (etapa antigua o "astronómica").

ii) La Trigonometría enseña a relacionar magnitudes longitudinales con magnitudes angulares (etapa intermedia o "geométrica")

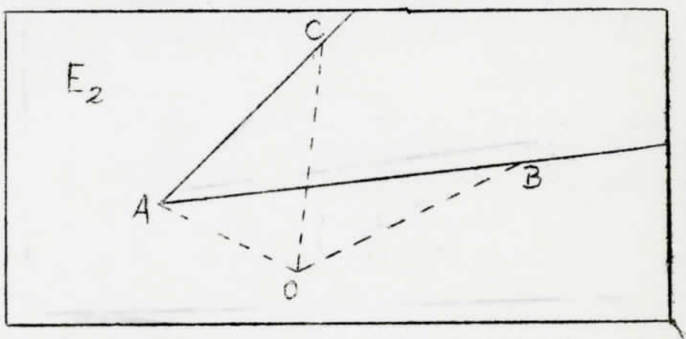
iii) La Trigonometría es la teoría de seis funciones, comúnmente llamadas FUNCIONES CIRCULARES (etapa moderna o "analítica").

5.1 ANGULOS EN E_2

Universo : El plano vectorial métrico E_2 .

5.11 Concepto de ángulo plano

En el plano vectorial E_2, consideremos un 'ángulo' de vértice.



A ($\vec{a}$)

y lados $\overrightarrow{AB}$ (rayo) y $\overrightarrow{AC}$ (rayo):

$\sphericalangle B A C = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$, [“7° AÑO”, Art. 6.1] .

(Se consideran sólo ángulos desde 0° hasta 180°).

Sus lados están orientados por los trazos dirigidos (A,B) y (A,C), a los que están asociados los vectores (no confundirlos con los rayos)

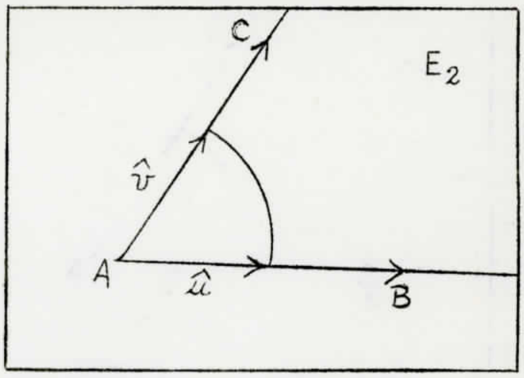
$\overrightarrow{A,B} = \vec{b} - \vec{a}$ y $\overrightarrow{A,C} = \vec{c} - \vec{a}$,

respectivamente .

Por tanto, [“G.V.A.” : Ej.4.24-4]:

$$\sphericalangle BAC = \{\vec{r} \in E_2 \mid \vec{r} = \vec{a} + p(\vec{b} - \vec{a}), \quad (\forall p \in \mathbb{R}_o^+)\}$$
$$\cup \; \{\vec{r} \in E_2 \mid \vec{r} = \vec{a} + q(\vec{c} - \vec{a}), \quad (\forall q \in \mathbb{R}_o^+)\}$$

5.12 Coseno de un ángulo en E_2



Normalicemos los vectores que orientan los lados del $\sphericalangle BAC$, hallando los respectivos vectores unitarios (Art.3.23) :

$$\hat{u} = \frac{\overrightarrow{A,B}}{|AB|} \qquad , \qquad \hat{v} = \frac{\overrightarrow{A,C}}{|AC|}$$

Formemos su producto escalar:

$$\hat{u} \cdot \hat{v} = \frac{1}{|AB|} \; \frac{1}{|AC|} \; \overrightarrow{A,B} \cdot \overrightarrow{A,C} = \frac{\overrightarrow{A,B}}{|AB|} \cdot \frac{\overrightarrow{A,C}}{|AC|}$$

Entonces viene la siguiente

Def.1

> El COSENO del $\sphericalangle BAC \subset E_2$ es el producto escalar de los vectores unitarios según sus lados :
>
> $$\cos \sphericalangle BAC = \frac{\overrightarrow{A,B}}{|AB|} \cdot \frac{\overrightarrow{A,C}}{|AC|}$$

Escolio

> Un ángulo es recto (lados perpendiculares) si y sólo si su coseno vale cero .

[3.32]

A través del coseno de cada ángulo (desde 0° hasta 180°) podemos definir una relación binaria para ángulos que llamaremos "congruencia" :

Def. 2

> Dos ángulos en E_2 se dicen CONGRUENTES ($\cong$) entre sí toda vez que tengan el mismo coseno.
>
> $$\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C' \iff \cos \sphericalangle BAC = \cos \sphericalangle B'A'C'$$

Por cierto que $\cong$ es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los ángulos del plano euclídeo.

Intuitivamente: Angulos congruentes al superponerlos coinciden, por tener la misma medida o abertura.

["7° AÑO" . Art. 22.2]

5.13 <u>Tabla goniométrica de cosenos</u>

Con todas las clases de equivalencia de ángulos congruentes entre sí, formemos la colección (conjunto de conjuntos).

$$\mathcal{A}$$

Entonces, como a cada clase de ángulos congruentes entre sí le corresponde un número real bien determinado como coseno común a todos los ángulos de la clase, tenemos una función

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\ \cos\ } \mathbb{R}$$

ESTA FUNCION PUEDE CONSIDERARSE COMO UNA LEGITIMA "MEDICION" DE ANGULOS (Objeto de la Goniometría).

Examinemos su recorrido en $\mathbb{R}$; tenemos

$$\forall \measuredangle BAC \subset E_2 : \qquad \cos \measuredangle BAC = \frac{\overrightarrow{A,B} \cdot \overrightarrow{A,C}}{\|\overrightarrow{A,B}\| \ \|\overrightarrow{A,C}\|} , \quad \text{(Art. 5.12 y 3.21)}$$

Por otra parte $\quad |\overrightarrow{A,B} \cdot \overrightarrow{A,C}| \leqslant \|\overrightarrow{A,B}\| \ \|\overrightarrow{A,C}\|$, (Art. 2.24) ;

luego $\quad \underline{|\cos \measuredangle BAC| \leqslant 1}$

$$\Downarrow$$

$$-1 \leqslant \cos \measuredangle BAC \leqslant +1 .$$

Así el recorrido de la función coseno es

$$\underline{\underline{C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}}}$$

Ahora bien, en la geometría clásica se enseña a medir los ángulos en "unidades sexagesimales" con el transportador ["7º AÑO", Art.20.7]. Sea T el intervalo del transportador (desde 0º hasta 180º). Entonces ese proceso de medición define una función biunívoca.

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\ \text{sex}\ } T$$

A cada clase de ángulos congruentes entre sí le queda asociado un número α en T , y vice versa.

Componiendo pues ésta con la función "coseno", tenemos el diagrama funcional

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{A} & \\ \swarrow\!\!\nearrow & & \searrow \\ T & & C. \end{array}$$

Resulta así una función

$$T \longrightarrow C ;$$

es decir, a cada medida sexagesimal α le está asociado unívocamente un número coseno, en el intervalo cerrado $[-1, +1]$.

La llamaremos <u>TABLA GONIOMETRICA DE COSENOS</u>

α	$\cos\alpha$
0°	1
...	...
90°	0
...	...
180°	-1

La imagen de cada $\alpha \in T$ la anotaremos

$$\cos\alpha .$$

Por ejemplo:

$$\cos 0^\circ = 1 , \qquad \cos 90^\circ = 0 , \quad \cos 180^\circ = -1$$

Los alumnos constatarán estos primeros resultados aplicando fielmente en cada caso la definición general de Art. 5.12 .

De hecho se trata de una función biyectiva .

5.14 Seno de un ángulo en E_2

Sea un ángulo dado $\sphericalangle BAC \subset E_2$. Tenemos (Art. 5.13):

$$\left|\cos \sphericalangle BAC\right| \leqslant 1$$
$$\Downarrow$$
$$\cos^2 \sphericalangle BAC \leqslant 1$$
$$\Downarrow$$
$$1 - \cos^2 \sphericalangle BAC \geqslant 0. \quad \text{O sea} \quad \underline{1 - \cos^2 \sphericalangle BAC \in \mathbb{R}_0^+}$$

[Programa Oficial de II Medio; ítem 2.3]

Entonces es lícita la siguiente

<u>Def.</u>

> Se llama <u>S E N O</u> (del latín "sinus") de un ángulo a la raíz cuadrada aritmética de la diferencia entre la unidad y el cuadrado de su coseno
>
> $$\operatorname{sen} \sphericalangle BAC = \sqrt{1 - \cos^2 \sphericalangle BAC}$$

5.15 <u>Tabla goniométrica de senos</u>

Queda así definida una función

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\ \operatorname{sen}\ } \mathbb{R}$$

Su recorrido es

$$\underline{\underline{S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}}}$$

Componiendo con la función medición sexagesimal

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr] & \\ T & & S \end{tikzcd}$$

resulta una función

$$T \longrightarrow S$$

que llamaremos TABLA GONIOMETRICA DE SENOS.

α	sen α
0°	0
...	...
90°	1
...	...
180°	0

La imagen de cada $\alpha \in T$ la anotaremos

sen α .

Por ejemplo

$$\text{sen } 0^\circ = 0 \ , \ \text{sen } 90^\circ = 1 \ , \ \text{sen } 180^\circ = 0.$$

Se observará que esta función NO es inyectiva, por lo que tampoco es biyectiva. Es su desventaja frente a la función coseno.

5.16 Relación entre el coseno y el seno

Escolio fundamental

$$\boxed{\forall \alpha \in T: \quad \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1}$$

Es una inmediata consecuencia de la definición del seno (Art.5.14).

5.17 Interpretación geométrica del producto escalar

Hemos definido el coseno del ángulo de medida α determinado por dos trazos dirigidos con el mismo punto inicial, como el producto escalar de estos vectores previamente normalizados

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{A,B} \cdot \overrightarrow{A,C}}{\|\overrightarrow{A,B}\| \, \|\overrightarrow{A,C}\|}$$

luego

$$\boxed{\overrightarrow{A,B} \cdot \overrightarrow{A,C} = \|\overrightarrow{A,B}\| \|\overrightarrow{A,C}\| \cos\alpha}$$

Entonces: EL PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES, ASOCIADOS A SENDOS TRAZOS DIRIGIDOS CON UN MISMO PUNTO INICIAL, ES IGUAL AL PRODUCTO ARITMETICO DE LAS NORMAS DE ESOS VECTORES (O LONGITUDES DE ESOS TRAZOS) POR EL COSENO DEL ANGULO QUE FORMAN .

Ahora es muy fácil ver que:

-En valor absoluto, el producto escalar de dos vectores es menor o igual que el producto de sus normas, pues $|\cos\alpha| \leqslant 1$

(Desigualdad de Schwarz , Art. 2.24).

-El producto escalar se iguala en valor absoluto al producto de las normas si y sólo si los vectores son uno ponderado del otro, pues

$$|\cos\alpha| = 1 \Longleftrightarrow \alpha = 0^\circ \vee \alpha = 180^\circ.$$

(Ej. 2.4-7)

5.18 La noción de Trabajo Mecánico

En Mecánica se define el Trabajo de una fuerza constante $\vec{F}$, cuyo punto de aplicación experimenta un desplazamiento $\vec{s}$, como el número real:

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F\, s\, \cos \varphi}$$

donde $F = \|\vec{F}\|$ es la magnitud de la fuerza ; $s = \|\vec{s}\|$ es la extensión del desplazamiento y φ la medida del ángulo que forman estos vectores físicos.

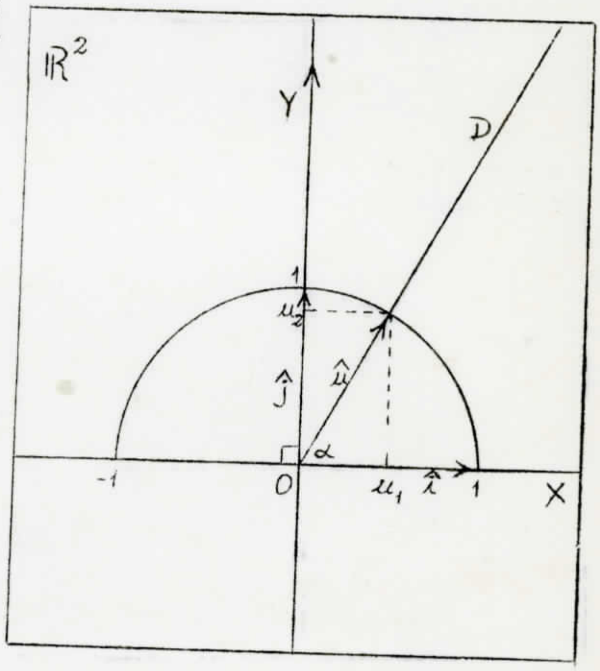
Por tanto, si el desplazamiento es de dirección perpendicular a la de la fuerza, el trabajo es nulo.

Si $\varphi < 90^\circ$, el trabajo es positivo; si $\varphi > 90^\circ$, el trabajo es negativo.

5.2 ANGULOS EN $\mathbb{R}^2$

Procede ahora llevar las consideraciones goniométricas anteriores al modelo cartesiano $\mathbb{R}^2$ del plano métrico.

5.21 Coseno y seno de un ángulo en $\mathbb{R}^2$



En $\mathbb{R}^2$, sea

$$\sphericalangle\, X O D$$

un ángulo dado de medida α ; sea $\hat{u}$ el vector unitario según el rayo $\overrightarrow{OD}$.

Entonces, por definición (Art. 5.12):

$$\cos\alpha = \hat{\imath} \cdot \hat{u} = (1,0) \cdot (u_1, u_2) = u_1$$

(Art. 1.11)

Y también por definición (Art. 5.14)

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-u_1^2} = u_2,$$

puesto que $u_2 \geqslant 0 \Longrightarrow \sqrt{u_2^2} = |u_2| = u_2$.

Por tanto $\boxed{\hat{u} = (\cos\alpha\ ,\ \operatorname{sen}\alpha\ )}$

$$\|\hat{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$$

5.22 Valores para 0°, 90° y 180°

Ahora es muy fácil confirmar que

$\cos 0^\circ = 1$	$\cos 90^\circ = 0$	$\cos 180^\circ = -1$
$\operatorname{sen} 0^\circ = 0$	$\operatorname{sen} 90^\circ = 1$	$\operatorname{sen} 180^\circ = 0$

5.23 Signos del coseno y del seno

También que

$0 < \alpha < 90^\circ \Longrightarrow \cos\alpha > 0, \quad \operatorname{sen}\alpha > 0$
(primer cuadrante)

$90^\circ < \alpha < 180^\circ \Longrightarrow \cos\alpha < 0, \quad \operatorname{sen}\alpha > 0$
(segundo cuadrante)

6. T R I G O N O M E T R I A

Expresiones de las funciones goniométricas para ángulos en el triángulo rectángulo; sus valores para ángulos notables. Fórmulas del argumento suma. Tangente y cotangente. Identidades y ecuaciones trigonométricas sencillas. Tablas trigonométricas simplificadas, aplicaciones a problemas prácticos . Teoremas del Seno y Teorema del Coseno en un triángulo cualquiera. Teoremas de congruencia.

6,1 CALCULO DEL TRIANGULO RECTANGULO

Ahora ponemos en conexión nuestra goniometría de base vectorial con la trigonometría clásica ordinaria. Claro está que de ella sólo damos en este curso una versión introductoria, ya que una mayor profundización en la operatoria trigonométrica es asunto más bien de la universidad y de las escuelas técnicas.

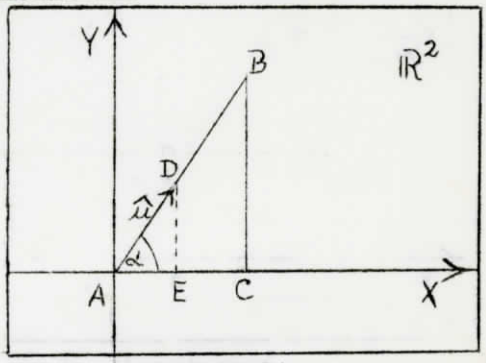
6.11 Razones goniométricas en el triángulo rectángulo

En $\mathbb{R}^2$, sea ABC triángulo rectángulo en C. Para $0^o < \alpha < 90^o$:

$\cos\alpha = |AE|$, $\operatorname{sen}\alpha = |ED|$
(Art. 5.21)

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AB|} \quad \text{(Art. 3.22 y "G.V.A.":5.31)}$$

$$\therefore \quad \frac{\cos\alpha}{|AC|} = \frac{1}{|AB|} \Longrightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|}}$$



EL COSENO DEL ANGULO ES LA RAZON ENTRE LAS LONGITUDES DEL CATETO ADYACENTE Y DE LA HIPOTENUSA.

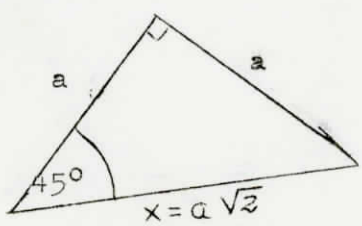
Por otra parte:

$$\frac{|ED|}{|CB|} = \frac{|AD|}{|AB|}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{|CB|} = \frac{1}{|AB|} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{|CB|}{|AB|}}$$

EL SENO DEL ANGULO ES LA RAZON ENTRE LAS LONGITUDES DEL CATETO OPUESTO Y DE LA HIPOTENUSA.

6.12 Coseno y seno de ángulos notables

Para 45°	Triángulo rectángulo isósceles.



$$x^2 = a^2 + a^2$$
$$\Downarrow$$
$$x = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos 45^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\[2ex] \operatorname{sen} 45^\circ = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Luego :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\[1ex] \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}}$$

$\boxed{\text{Para } 30^\circ \text{ y } 60^\circ}$ Triángulo equilátero, trazando una altura.

$$\begin{cases} \cos 30^\circ = \dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \\[2ex] \operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} \cos 60^\circ = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \\[2ex] \operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{cases}$$

Luego

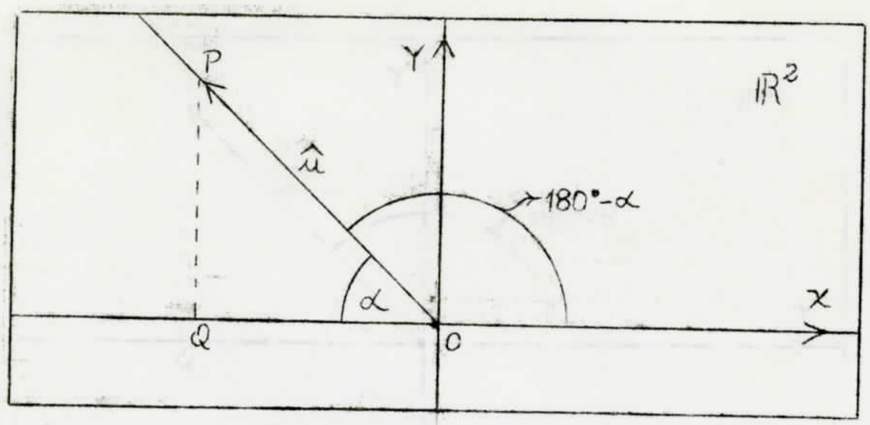
$$\boxed{\begin{array}{l} \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \operatorname{sen} 60^\circ \\[1ex] \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \operatorname{sen} 30^\circ \end{array}}$$

Tabla resumen de los valores obtenidos hasta aquí para ángulos del primer cuadrante (con el sistema de cuádruple entrada de las tablas tradicionales.)

↙	SEN	
0°	0	90°
30°	$\frac{1}{2}$	60°
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	45°
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	30°
90°	1	0°
	COS	↗

6.13 Reducciones al primer cuadrante

Aquí reduciremos las funciones goniométricas de ángulos obtusos a funciones goniométricas de ángulos agudos.



$$\begin{cases} \cos(180^\circ - \alpha) = -|QO| = -\dfrac{|QO|}{1} = -\dfrac{|QO|}{|OP|} = -\cos\alpha \\ \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = +|QP| = \dfrac{|QP|}{1} = \dfrac{|QP|}{|OP|} = \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

Entonces codificamos las importantes fórmulas:

$\forall \alpha < 90^\circ$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \\ \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \end{array}}$$

Análogamente, los alumnos probarán como ejercicio que:

$\forall \alpha < 90^\circ$:

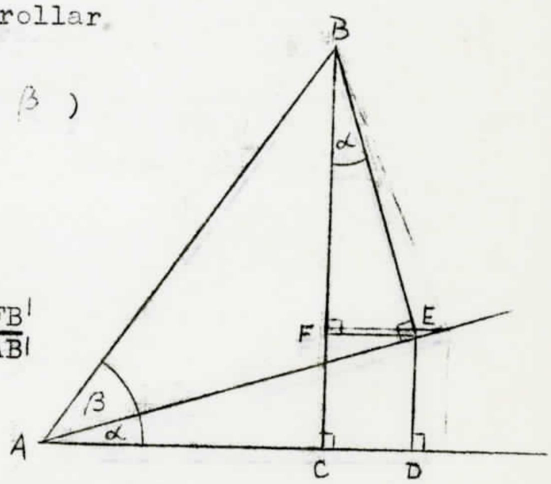
$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha \end{array}}$$

6.14 Seno y coseno de una suma

Para $\alpha, \beta < 90^\circ$, se trata de desarrollar

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \quad \text{y} \quad \cos(\alpha + \beta)$$

en términos de seno y coseno de α y β



Primer caso/ $\alpha + \beta < 90^\circ$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{|CB|}{|AB|} = \frac{|CF| + |FB|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|AB|} + \frac{|FB|}{|AB|}$$

$$= \frac{|DE|}{|AE|}\,\frac{|AE|}{|AB|} + \frac{|FB|}{|BE|}\,\frac{|BE|}{|AB|}$$

$$= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AD| - CD}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AB|} - \frac{|FE|}{|AB|}$$

$$= \frac{|AD|}{|AE|}\ \frac{|AE|}{|AB|} - \frac{|FE|}{|BE|}\ \frac{|BE|}{|AB|}$$

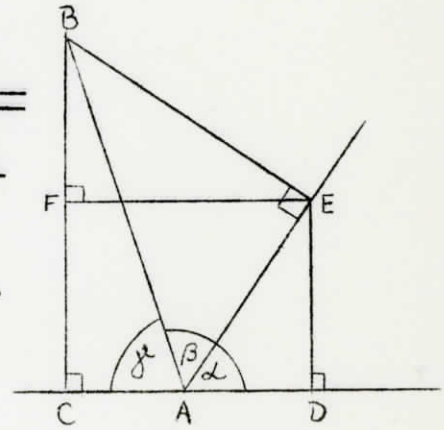
$$= \underline{\underline{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta}}\ .$$

Segundo caso/ $\underline{\underline{\alpha+\beta > 90^\circ}}$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\gamma = \frac{|CB|}{|AB|} = \text{.... como arriba ...}$$

(Art.6.13)

$$= \underline{\underline{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta}}$$



$$\cos(\alpha+\beta) = -\cos\gamma = -\frac{|AC|}{|AB|} = -\frac{|CD| - |AD|}{|AB|}$$

(Art. 6.13)

$$= \frac{|AD|}{|AB|} - \frac{|FE|}{|AB|} = \text{... como arriba ...}$$

$$= \underline{\underline{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta}}\ .$$

En resumen/

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta \end{aligned}}$$

6.15 Tangente y Cotangente

Definición general

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}} \qquad (1)$$

Ello implica que, en el triángulo rectángulo, se tiene para $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{|BC|}{|AB|}}{\frac{|AC|}{|AB|}} = \frac{|BC|}{|AC|}\ ; \qquad \cot\alpha = \frac{\frac{|AC|}{|AB|}}{\frac{|BC|}{|AB|}} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

Entonces $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{|BC|}{|AC|} \quad , \quad \cot\alpha = \dfrac{|AC|}{|BC|}}$ (2) $\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cot\alpha = 1}$ (3)

- LA "TANGENTE" DEL ANGULO ES LA RAZON ENTRE LAS LONGITUDES DEL CATETO OPUESTO Y DEL CATETO ADYACENTE
- LA "COTANGENTE" DEL ANGULO ES LA RAZON ENTRE LAS LONGITUDES DEL CATETO ADYACENTE Y DEL CATETO OPUESTO.

Calculemos tangentes y cotangentes de ángulos notables

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{\cos 60^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{\cos 45^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$$

Para 0° y 90° (sin el triángulo, pero directamente con (1)) ;

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{\operatorname{sen} 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 0^\circ = \frac{\cos 0^\circ}{\operatorname{sen} 0^\circ} = \frac{1}{0} \quad \text{(No existe)}$$

$$tg\ 90^\circ = \frac{sen\ 90^\circ}{cos\ 90^\circ} = \frac{1}{0} \quad \text{(No existe)}$$

$$cot\ 90^\circ = \frac{cos\ 90^\circ}{sen\ 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0 .$$

Tabla resumen :

↙	TG	
0°	0	90°
30°	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	60°
45°	1	45°
60°	$\sqrt{3}$	30°
90°	no existe	0°
	COT	↗

6.16 Identidades y ecuaciones sencillas

Ejercicios típicos para esta parte de la materia consisten en:

a) Probar la validez de ciertas identidades de segunda importancia.

b) Resolver ciertas ecuaciones sencillas con funciones trigonométricas, atendiéndose sólo a ángulos del primer y/o segundo cuadrante.

Ejemplos del tipo (a)

TECNICA : ¡Por ningún motivo usar la igualdad que se pide probar ! Se deberá operar en cada miembro por separado hasta llegar en ambos a la misma expresión .

1) Probar la identidad:

$$cos^2 \phi - sen^2 \phi = 2\ cos^2 \phi - 1$$

Sol. Primer miembro :

$$cos^2 \phi - sen^2 \phi = cos^2 \phi - (1 - cos^2 \phi\ ) , \qquad \text{(Art.5.16)}$$
$$= cos^2 \phi - 1 + cos^2 \phi$$
$$= 2\ cos^2 \phi - 1 .$$

2) Probar la identidad :

$$\frac{1 - tg^2 \phi}{tg\ \phi} = cot\ \phi - tg\ \phi$$

Sol. Primer miembro:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \phi}{\operatorname{tg} \phi} = \frac{1}{\operatorname{tg} \phi} - \frac{\operatorname{tg}^2 \phi}{\operatorname{tg} \phi} = \cot \phi - \operatorname{tg} \phi \quad , \; (6.15\text{-}3).$$

3) Probar la identidad:

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}{1 + \cot^2 \phi} = \frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{\cos^2 \phi}$$

Sol. Primer miembro :

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}{1 + \cot^2 \phi} = \frac{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{\cos^2 \phi}}{1 + \frac{\cos^2 \phi}{\operatorname{sen}^2 \phi}} = \frac{\frac{\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi}{\cos^2 \phi}}{\frac{\operatorname{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi}{\operatorname{sen}^2 \phi}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \phi}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \phi}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{\cos^2 \phi} \quad .$$

4) Probar la identidad :

$$\operatorname{sen} 2 \phi = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi$$

Sol. $\operatorname{sen} 2 \phi = \operatorname{sen} (\phi + \phi) = \operatorname{sen} \phi \cos \phi + \cos \phi \operatorname{sen} \phi$, (6.14)

$= 2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi$.

5) Probar la identidad :

$$\cos 2\phi = \cos^2 \phi - \operatorname{sen}^2 \phi$$

Sol. Primer miembro :

$\cos 2\phi = \cos (\phi + \phi) = \cos \phi \cos \phi - \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \phi$ (6.14)

$= \cos^2 \phi - \operatorname{sen}^2 \phi$.

6) Probar la identidad :

$$1 - \cot^4 \phi = \frac{2}{\operatorname{sen}^2 \phi} - \frac{1}{\operatorname{sen}^4 \phi}$$

Sol. Primer miembro:

$$1 - \cot^4 \phi = 1 - \frac{\cos^4 \phi}{\operatorname{sen}^4 \phi} = \frac{\operatorname{sen}^4 \phi - \cos^4 \phi}{\operatorname{sen}^4 \phi}$$

$$= \frac{(\operatorname{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi)(\operatorname{sen}^2 \phi - \cos^2 \phi)}{\operatorname{sen}^4 \phi} = \frac{\operatorname{sen}^2 \phi - \cos^2 \phi}{\operatorname{sen}^4 \phi}$$

Segundo miembro:

$$\frac{2}{\operatorname{sen}^2 \phi} - \frac{1}{\operatorname{sen}^4 \phi} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \phi - 1}{\operatorname{sen}^4 \phi} = \frac{2\operatorname{sen}^2 \phi - (\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi)}{\operatorname{sen}^4 \phi}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 \phi - \cos^2 \phi}{\operatorname{sen}^4 \phi}$$

Ejemplos del tipo (b)

7) Resolver la ecuación:

$$\cos x - \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 1$$

Sol. Expresando todo en términos de cos x :

$$\cos x - \sqrt{3} \sqrt{1 - \cos^2 x} = 1$$

Aislando el término con radicales y cuadrando ambos miembros:

$$3(1 - \cos^2 x) = (1 - \cos x)^2$$

$$0 = 4 \cos^2 x - 2 \cos x - 2$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} \qquad \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$\therefore \quad \cos x_1 = 1 \qquad , \cos x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x_1 = 0^\circ \qquad\qquad x_2 = 120^\circ$$

Se ve que x_1 es efectivamente solución de la ecuación propuesta. Examinemos la validez de la presunta solución x_2 :

$$\cos x_2 - \sqrt{3}\ \text{sen}\ x_2 = \cos 120^\circ - \sqrt{3}\ \text{sen}\ 120^\circ$$
$$= \cos (180^\circ - 60^\circ) - \sqrt{3}\ \text{sen}\ (180^\circ - 60^\circ)$$
$$= - \cos 60^\circ - \sqrt{3}\ \text{sen}\ 60^\circ \quad , \quad (6.13)$$
$$= -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\ .\ \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$
$$= -2$$, Y NO 1 COMO SE REQUIERE.

Resp. 0°

8) Resolver la ecuación :

$$\cos x - \text{sen}\ x = \cos 2x$$

Sol. Reduciendo el segundo miembro al argumento simple x :

$$\cos x - \text{sen}\ x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \qquad \text{(Ej. 5)}$$

$$\cos x - \text{sen}\ x = (\cos x + \text{sen}\ x)(\cos x - \text{sen}\ x)$$

Nos ~~proponemos~~ dividir en seguida ambos miembros por

$$\cos x - \text{sen}\ x .$$

Pero ello supone que este binomio es distinto de cero (si no, no podemos dividir). Será pues conveniente averiguar primero qué pasa si este binomio es nulo.

$$\cos x - \text{sen}\ x = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\text{sen}\ x = \cos x$$

$x = 45^\circ$. Visiblemente este ángulo satisface la ecuación propuesta. Es pues una solución del problema.

Ahora viene el caso en que $\cos x - \text{sen}\ x \neq 0$, y podemos dividir como decíamos:

$$1 = \cos x + \text{sen}\ x .$$

Expresando todo en cos x :

$$1 = \cos x + \sqrt{1 - \cos^2 x}$$
$$(1 - \cos x)^2 = 1 - \cos^2 x$$
$$\cos^2 x = \cos x .$$

Nos disponemos aquí a dividir por cos x ; pero, con la experiencia anterior, nos ponemos primero en el caso de ser factor nulo:

$$\cos x = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x = 90^\circ.$$

Se puede ver que este ángulo también satisface la ecuación propuesta.

Ahora suponemos $\cos x \neq 0$ y dividamos la ecuación final; nos quedan

$$\cos x = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\underline{x = 0^\circ}$$

, que también satisface la ecuación propuesta.

Resp. 0° , 45° , 90° .

9) Resolver la ecuación:

$$\underline{1 + \sqrt{3} \; \text{tg}^2 x = (1 + \sqrt{3}) \; \text{tg}\, x}$$

Resp. 30° , 45° .

10) Resolver la ecuación:

$$\underline{\text{tg}\,(45^\circ + x) = 1 + \text{sen}\, 2x}$$

Resp. 0° .

ETC . ETC.

6.17 Uso de tablas trigonométricas simplificadas.

Los propios alumnos se pueden confeccionar sus tablas trigonométricas "caseras" (simplificadas) .

Bastará pedirles que tracen un triángulo rectángulo de gran tamaño y que midan, lo mejor posible, sus tres lados con una regla milimetrada. Calcularán los cuocientes sen α , cos α y tg α para ángulos α agudos de grado en grado (repartiendo convenientemente el trabajo en todo el curso), CON DOS CIFRAS DECIMALES CORRECTAMENTE APROXIMADAS.

↙	sen	tg	cot	cos	
1°	0,02	0,02	57,29	1,00	89°
2°	0,04	0,04	28,64	1,00	88°
3°	0,05	0,05	19,08	1,00	87°
4°	0,07	0,07	14,30	1,00	86°
5°	0,09	0,09	11,43	1,00	85°
6°	0,11	0,11	9,51	1,00	84°
7°	0,12	0,12	8,14	0,99	83°
8°	0,14	0,14	7,12	0,99	82°
9°	0,16	0,16	6,31	0,99	81°
10°	0,17	0,18	5,67	0,99	80°
11°	0,19	0,19	5,15	0,98	79°
12°	0,21	0,21	4,71	0,98	78°
13°	0,23	0,23	4,33	0,97	77°
14°	0,24	0,25	4,01	0,97	76°
15°	0,26	0,27	3,73	0,97	75°
16°	0,28	0,29	3,49	0,96	74°
17°	0,29	0,31	3,27	0,96	73°
18°	0,31	0,33	3,08	0,95	72°
19°	0,33	0,34	2,90	0,95	71°
20°	0,34	0,36	2,75	0,94	70°
21°	0,36	0,38	2,61	0,93	69°
22°	0,38	0,40	2,48	0,93	68°
23°	0,39	0,42	2,36	0,92	67°
24°	0,41	0,45	2,25	0,91	66°
25°	0,42	0,47	2,15	0,91	65°
26°	0,44	0,49	2,05	0,90	64°
27°	0,45	0,51	1,96	0,89	63°
28°	0,47	0,53	1,88	0,88	62°
29°	0,49	0,55	1,80	0,88	61°
30°	0,50	0,58	1,73	0,87	60°
31°	0,52	0,60	1,66	0,86	59°
32°	0,53	0,63	1,60	0,85	58°
33°	0,55	0,65	1,54	0,84	57°
34°	0,56	0,68	1,48	0,83	56°
35°	0,57	0,70	1,43	0,82	55°
36°	0,59	0,73	1,38	0,81	54°
37°	0,60	0,75	1,33	0,80	53°
38°	0,62	0,78	1,28	0,79	52°
39°	0,63	0,81	1,24	0,78	51°
40°	0,64	0,84	1,19	0,77	50°
41°	0,66	0,87	1,15	0,76	49°
42°	0,67	0,90	1,11	0,74	48°
43°	0,68	0,93	1,07	0,73	47°
44°	0,70	0,97	1,04	0,72	46°
45°	0,71	1,00	1,00	0,71	45°
	cos	cot	tg	sen	↗

CIFRAS DECIMALES CORRECTAMENTE APROXIMADAS.

He aquí algunos ejemplos tomados del libro de Smail .

Ejemplo 1) En un triángulo rectángulo, un ángulo mide 31° y la hipotenusa 40 cm. Calcular los catetos.

Sol. Datos : $\alpha = 31^\circ$, $c = 40$.

Tenemos $\frac{a}{c} = \operatorname{sen}\alpha \Longrightarrow a = c \operatorname{sen}\alpha$

$\therefore a = 40 \,.\, 0.52 = 20{,}8$ cm . Resp.

$\frac{b}{c} = \cos\alpha \Longrightarrow b = c\cos\alpha$

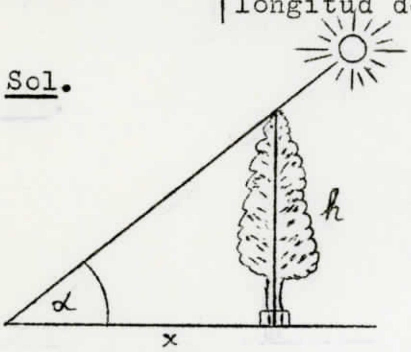
$\therefore b = 40 .\, 0{,}86 = 34{,}4$ cm. Resp.

Ejemplo 2) Calcular la longitud de la cuerda subtendida por un ángulo del centro de 76° en un círculo de radio 15 cm .

Sol. $c = 2\, r \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = 2 \,.\, 15 \operatorname{sen} 38^\circ = 30 \,.\, 0{,}62 = 18{,}6$ cm Resp.

Ejemplo 3) El sol se encuentra a 40° por sobre el horizonte. Calcular la longitud de la sombra que proyecta un árbol de 36 m.

Sol.



$\frac{x}{h} = \cot\alpha$

$\Downarrow$

$x = h\cot\alpha = 36 \cot 40^\circ = 36 \,.\, 1{,}19 = 42{,}84$ m

Resp.

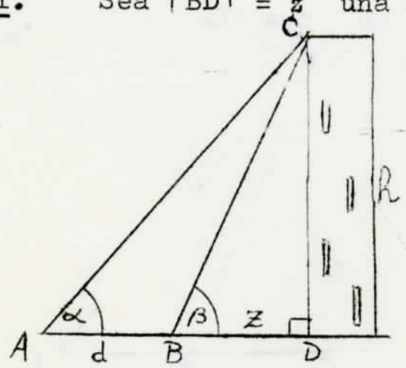
Ejemplo 4) Un árbol de 26m de alto proyecta una sombra de 40 m de largo Calcular el ángulo de elevación del sol sobre el horizonte.

Sol. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{26}{40} = 0{,}65 \quad \therefore \quad \alpha \approx 33^\circ$. Resp.

Agregaremos dos más de tipo práctico.

Ejemplo 5) Calcular la altura h de un edificio inaccesible, sabiendo que desde un punto A del piso se ve bajo un ángulo vertical $\alpha = 43^\circ$ y, avanzando directamente hacia él una distancia $d = 10$ m, bajo otro ángulo mayor $\beta = 56^\circ$.

Sol. Sea $|BD| = z$ una incógnita auxiliar .



En el triángulo rectángulo ADC:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|DC|}{|AD|} = \frac{h}{d+z} \quad \therefore \quad h = (d+z)\operatorname{tg}\alpha \quad (1)$

En el triángulo rectángulo BDC :

$\cot\beta = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{z}{h} \quad \therefore \quad z = h\cot\beta \quad (2)$

Sustituyendo (2) en (1):

$$h = (d + h \cot\beta) \operatorname{tg}\alpha$$

$$\therefore \quad h = \frac{d \operatorname{tg}\alpha}{1 - \cot\beta \operatorname{tg}\alpha} = \frac{10 \cdot 0{,}93}{1 - 0{,}68 \cdot 0{,}93} = 25{,}3 \text{ m.} \quad \underline{\text{Resp.}}$$

Ejemplo 6) Una escala de peso $W = 15$ kg está apoyada contra un muro y un piso suaves, con una inclinación $\alpha = 68^\circ$. Una persona de peso $P = 74$ kg está en el centro de gravedad de la escala. Calcular la fuerza horizontal, hacia el muro, que es preciso aplicar al pie de la escala para producir el equilibrio.

<u>Sol.</u> Las condiciones de equilibrio dan:

$$F = \frac{Q}{2} \cot\alpha = \frac{89}{2} \cdot 0{,}4 = 17{,}8 \text{ kg.} \quad \underline{\text{Resp.}}$$

6.2 QUINTA SERIE DE EJERCICIOS OPERATORIOS

1) Un poste de 13,7 m de alto situado en la orilla de un río subtiende un ángulo vertical de 11° en el punto más próximo en la orilla opuesta, Calcular el ancho del río.

<u>Resp.</u> 70,6 m .

2) Un barco navega una distancia de 31,2 millas con rumbo de 37° hacia el E respecto de la dirección N. ¿Cuánto se ha distanciado hacia el E del punto de partida ?

<u>Resp.</u> 18,7 millas

3) Desde lo alto de una torre de 50 m se ven las dos orillas de un río según ángulos de 60° y 20° bajo la horizontal. Calcular el ancho del río .

<u>Resp.</u> 108,5 m .

4) Probar la identidad

$$\operatorname{sen}^3 p + \cos^3 p = (\operatorname{sen} p + \cos p)\,(1 - \operatorname{sen} p \cos p).$$

5) Probar la identidad

$$\frac{\operatorname{sen} q \cos q}{\cos^2 q - \operatorname{sen}^2 q} = \frac{\operatorname{tg} q}{1 - \operatorname{tg}^2 q}.$$

6) Probar la identidad

$$\frac{\cos r}{1 - \operatorname{tg} r} + \frac{\operatorname{sen} r}{1 - \cot r} = \operatorname{sen} r + \cos r.$$

7) Probar la identidad con dos variables

$$\frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\operatorname{sen}(p-q)} = \frac{\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q}{\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q}$$

[SUGERENCIA: Probar primero que $\operatorname{sen}(p-q) = \operatorname{sen} p \cos q - \cos p \operatorname{sen} q$].

8) Resolver la ecuación

$$6 \cos x + 5 \cot x = 11 .$$

9) Resolver la ecuación

$$\operatorname{tg}(45^\circ + x) = 1 + \operatorname{sen} 2x .$$

10) En un círculo de radio 3,5 cm calcular el perímetro del pentágono regular inscrito.

Resp. 20, 65 cm.

6.3 CALCULO DE TRIANGULOS CUALESQUIERA.

6.31 Teorema del Seno

Teor. En todo triángulo del plano, las longitudes de los lados son directamente proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}}$$

Prueba

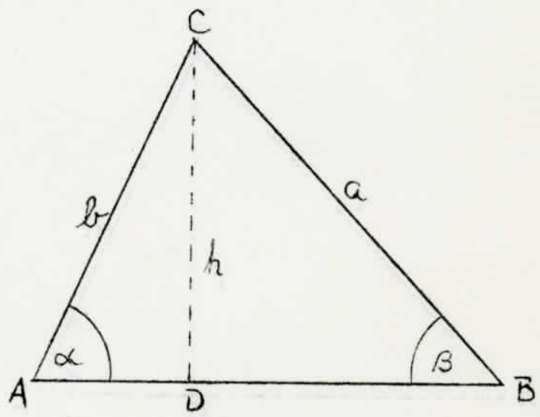
i) Triángulo acutángulo .

En $\triangle$ ADC :

$$\frac{h}{b} = \operatorname{sen}\alpha \;\Downarrow\; h = b \operatorname{sen}\alpha$$

En $\triangle$ BDC :

$$\frac{h}{a} = \operatorname{sen}\beta \;\Downarrow\; h = a \operatorname{sen}\beta$$



$$\therefore \quad b \operatorname{sen}\alpha = a \operatorname{sen}\beta$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$$

(q.e.d.)

La entrada en la igualdad de la tercera razón $\frac{c}{\text{sen }\gamma}$ resulta al razonar del mismo modo con otra de las alturas.

ii) Triángulo obtusángulo.

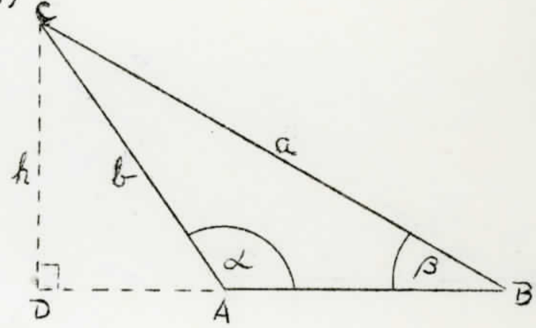
En $\triangle$ BDC :

$$\frac{h}{a} = \text{sen}\beta$$
$$\Downarrow$$
$$h = a \text{ sen}\beta$$

En $\triangle$ ADC:

$$\frac{h}{b} = \text{sen } (180^\circ - \alpha) = \text{sen}\alpha$$
(Art.6.13)
$$\Downarrow$$
$$h = b \text{ sen}\alpha$$

$$\therefore \quad a \text{ sen}\beta = b \text{ sen}\alpha$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen }\beta}$$



(q.e.d.)

6.32 Ejemplos

1) Dados dos ángulos y un lado :
$\alpha = 58^\circ$, $\beta = 36^\circ$, $a = 63,1$,
calcular los otros dos lados del triángulo.

Sol. Cálculo de b :

$$\frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{a}{\text{sen }\alpha} \qquad \text{(Art. 6.31)}$$

$$\therefore \quad b = \frac{a \text{ sen}\beta}{\text{sen }\alpha} = \frac{63,1 \text{ sen } 36^\circ}{\text{sen } 58^\circ} = \frac{63,1 \cdot 0,59}{0,85}$$

$b = 43,8$ Resp.

Cálculo de c : $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 94^\circ = 86^\circ$.

$$\frac{c}{\text{sen}\gamma} = \frac{a}{\text{sen }\alpha}$$

$$\therefore \quad c = \frac{53,1 \text{ sen } 86^\circ}{\text{sen } 58^\circ} = \frac{63,1 \cdot 1}{0,85}$$

$c = 74,2$ Resp.

2) Dados dos lados y un ángulo que nó es el comprendido por ellos: $a = 126{,}3$, $b = 78{,}9$, $\alpha = 29^\circ$, calcular los otros tres elementos del triángulo .

Sol. Cálculo de β :

$$\frac{\text{sen}\,\beta}{b} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{a}$$

$$\therefore \ \text{sen}\,\beta = \frac{b\ \text{sen}\,\alpha}{a}$$

Para que exista el triángulo (debiendo ser sen $\beta < 1$), los datos deben satisfacer la condición

$$\boxed{a > b\ \text{sen}\,\alpha}$$

En tal caso

$$\text{sen}\,\beta = \frac{78{,}9\ \text{sen}\ 29^\circ}{126{,}3} = \frac{78{,}9 \cdot 0{,}49}{126{,}3} = 0{,}31$$

$$\therefore \ \beta = 18^\circ \qquad \underline{\text{Resp.}}$$

Cálculo de γ :

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 47^\circ \qquad \therefore \ \gamma = 133^\circ \qquad \underline{\text{Resp.}}$$

Cálculo de c :

$$\frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{a}{\text{sen}\,\alpha}$$

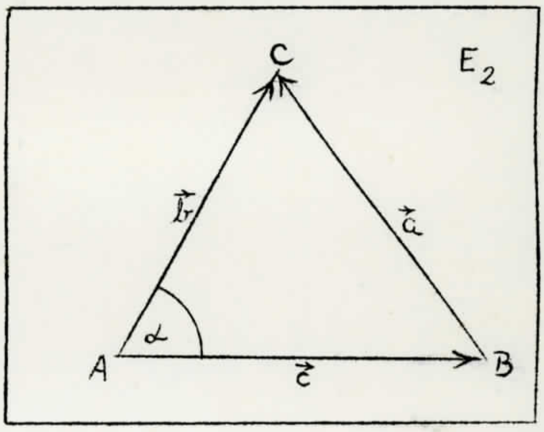
$$\therefore \ c = \frac{126{,}3\ \text{sen}\ 47^\circ}{\text{sen}\ 29^\circ} = \frac{126{,}3 \cdot 0{,}73}{0{,}49}$$

$$\therefore \ c = 188{,}2 \ \underline{\text{Resp.}}$$

6.33 Teorema del Coseno

Teor. En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo que forman .

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,c\,a\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma$$



Prueba

Utilicemos los vectores en E_2:

$\vec{a} = \overrightarrow{B,C}$; $\vec{b} = \overrightarrow{A,C}$; $\vec{c} = \overrightarrow{A,B}$,

de normas a, b, c, respectivamente.

Entonces:

$$\overrightarrow{B,C} = \overrightarrow{A,C} - \overrightarrow{A,B}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a}^2 = (\vec{b} - \vec{c})^2 = \vec{b}^2 - 2\,\vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}^2 \quad \text{(Art. 2.22)}$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} \quad \text{(Art.2.23)}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha} \quad \text{(Art. 5.17)}$$

(q.e.d.)

6.34 Ejemplos

1) Dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos :

$$a = 345{,}2 \;;\; b = 208{,}9 \;;\; \gamma = 21^\circ ,$$

calcular los otros tres elementos del triángulo .

Sol.

Cálculo de c: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$$= 345{,}2^2 + 208{,}9^2 - 2 \cdot 345{,}2 \cdot 208{,}9 \cdot 0{,}93 = 28.673{,}41$$

$\therefore c = 169{,}4$ Resp.

Calculo de α :

Se calcula con c, a, γ , aplicando el Teor. del Seno.

Resulta $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}73$

Puede ser $\alpha = 47^\circ$, o bien $\alpha = 133^\circ$.

Para dilucidarlo pasemos al

Cálculo de β :

Se calcula con b, c, γ, aplicando el Teor. del Seno .

Resulta $\operatorname{sen}\beta = 0{,}44$.

Puede ser $\beta = 26^\circ$, o bien $\beta = 154^\circ$.

Desde luego, el triángulo no puede ser acutángulo, pues los tres ángulos agudos sólo sumaría 94º . Debiendo tratarse de un triángulo obtusángulo, el ángulo obtuso debe ser el opuesto al mayor de los lados, que es a.

Entonces $\alpha = 133^\circ$, $\beta = 26^\circ$ Resp.

2) Dados los tres lados:

$a = 283$, $b = 317$, $c = 428$,

calcular los tres ángulos del triángulo .

Sol.

Cálculo de α :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$$
$$\Downarrow$$
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = \frac{317^2 + 428^2 - 283^2}{2 \cdot 317 \cdot 428} = 0{,}75$$

$$\therefore \quad \alpha = 41^\circ \qquad \text{Resp.}$$

Los demás ángulos se pueden ya calcular con el Teor. del Seno .

$$\beta = 48^\circ \, , \quad \gamma = 91^\circ \qquad \text{Resp.}$$

6.35 Teoremas de Congruencia

Def. En el plano euclídeo E_2 decimos que dos triángulos son CONGRUENTES ($\cong$) entre sí toda vez que sus lados homólogos tengan igual longitud y sus ángulos homólogos igual medida.

["7º AÑO" , Art. 22.3]

Es decir

$$\boxed{\begin{array}{c} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \\ \Downarrow \\ a = a' \, , \; b = b' \, , \; c = c' \, , \\ \alpha = \alpha' \, , \; \beta = \beta' \, , \; \gamma = \gamma' \end{array}}$$

Entonces cada una de estas seis igualdades es una condición necesaria para la congruencia de los triángulos.

¿Cuántas y cuáles de ellas constituyen conjuntos de condiciones suficientes?

Este es el tema fundamental a que se refieren los clásicos cuatro "Teoremas de Congruencia " de la geometría elemental estudiados en 8° Año

Teor. 1

Caso A L A

(EUCL. I 26)

Dos triángulos son congruentes si tienen un lado y los ángulos adyacentes respectivamente de igual medida

$$\left.\begin{array}{l} c = c' \\ \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

["8° AÑO" ,Art. 7.41]

Prueba

Desde luego $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$

$$\Downarrow$$

$$180° - (\alpha + \beta) = 180° - (\alpha' + \beta') \Longrightarrow \underline{\gamma = \gamma'}$$

Por otra parte $a = \frac{c \text{ sen } \alpha}{\text{sen } \gamma} = \frac{c' \text{ sen } \alpha'}{\text{sen } \gamma'} \Longrightarrow \underline{a = a'}$

(Art.6.31) (Hip.) (Art. 6.31)

$$b = \frac{c \text{ sen } \beta}{\text{sen } \gamma} = \frac{c' \text{ sen } \beta'}{\text{sen } \gamma'} \Longrightarrow \underline{b = b'}$$

(Art.6.31) (hip.) (Art.6.31)

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

(q.e.d.)

Teor. 2

Caso L A L

(EUCL. I 4)

Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente de igual medida.

$$\left.\begin{array}{l} b = b' \\ c = c' \\ \alpha = \alpha' \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

["8° AÑO", Art.7.42]

Prueba

Tenemos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ (Art. 6.33)

$= b'^2 + c'^2 - 2b'c' \cos \alpha'$ (hip.)

$= a'^2$ (Art. 6.33) . $\therefore$ $\underline{a = a'}$

Por otra parte:

$$\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2\ c\ a} = \frac{c'^2 + a'^2 - b'^2}{2\ c'\ a'} = \cos\beta'$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\beta = \beta'}.$$

Por último $\quad \alpha + \beta = \alpha' + \beta'$

$$\Downarrow$$

$$180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (\alpha' + \beta') \Longrightarrow \underline{\gamma = \gamma'}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

(q.e.d.)

Teor. 3

Caso L L A

Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos respectivamente de igual medida.

$$\left.\begin{array}{l} a = a' \\ b = b' \\ a > b \\ \alpha = \alpha' \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

["8°AÑO" , Art. 7.71]

Prueba

$$\frac{\text{sen}\,\beta}{b} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\alpha'}{a'} = \frac{\text{sen}\,\beta'}{b'} = \frac{\text{sen}\,\beta'}{b}$$

(Art.6.31) (hip.) (Art.6.31) (Hip.)

$$\Downarrow$$

$$\text{sen}\,\beta = \text{sen}\,\beta'$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\beta = \beta' \quad \text{o bien} \quad \beta = 180^\circ - \beta'}.$$

Supongamos

$$\underline{\beta = 180^\circ - \beta'} \Rightarrow \beta' = 180^\circ - \beta \qquad (1)$$

Pero a $>$ b (hip.) $\Longrightarrow$ $a' > b'$ (hip.)

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\alpha > \beta \quad (2) \qquad\qquad \alpha' > \beta'$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$\alpha > 180° - \beta' > 180° - \alpha' = 180° - \alpha$ (hip.)

$$\Downarrow$$

$$2\alpha > 180°$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha > 90° \Longrightarrow \alpha' > 90° \\ \Downarrow \\ \beta < 90° \Longrightarrow \beta' > 90° \end{array}\right\}$$ Absurdo !

Según (1)

Luego $\underline{\beta = \beta'}$

y ahora por Teor. 1: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

(q.e.d.)

Teor. 4

Caso L L L

(EUCL. I 8)

Dos triángulos son congruentes si tienen los tres lados respectivamente de igual medida

$$\left.\begin{array}{l} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{array}\right\} \Longrightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

["8° AÑO" . Art. 7.72]

Prueba

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2\,b'\,c'} = \cos \alpha'$$

(Art. 6.33) (hip.) (Art.6.33)

$$\Downarrow$$

$$\underline{\alpha = \alpha'}$$

Y ahora por Teor. 2 : $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

(q.e.d.)

6.4 <u>SEXTA SERIE DE EJERCICIOS OPERATORIOS</u>

1) Calcular un triángulo dados: c = 4,72 , a = 3,5 , $\beta = 34°$.

<u>Resp.</u> b = 2,66, $\alpha = 48°$, $\gamma = 98°$

2) En el triángulo de lados: $a = 4{,}725$, $b = 5{,}613$, $c = 4{,}382$, calcular β .

Resp. 76° .

3) Calcular el área del triángulo del Ejerc. 1).

Resp. 4.6 .

4) Probar que el área de un triángulo cualquiera es

$$\frac{a^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} (\beta + \gamma)}$$

5) Calcular la magnitud de la resultante de dos fuerzas de 3,8 kg y 4,2 kg aplicadas a un mismo punto de un sólido con un ángulo de 32°.

Resp. 7,7

6) Una lámpara de peso $W = 18$ kg esta colgada a una viga horizontal mediante dos cables que forman con la viga ángulos de 32° y 42° . Calcular las tensiones T_1 y T_2 de los cables .

Resp. $T_1 = \dfrac{W \cdot \cos 42^{\circ}}{\operatorname{sen} 74^{\circ}}$, $T_2 = \dfrac{W \cdot \cos 32^{\circ}}{\operatorname{sen} 74^{\circ}}$

7) Un observador, desde cierta distancia, registra en 37° el ángulo de elevación de un globo ascendente (vertical y uniformemente) en el instante en que su altura es de 1 500 m . Media hora más tarde el ángulo de elevación fue de 54° . ¿Con qué rapidez está subiendo el globo ?

Resp. $41{,}4 \ \dfrac{m}{min}$.

F I N

ooooo

I N D I C E

G E N E R A L

ooo 0 0 0 0 ooo

Trabajo de Dactilografía :

Patricia Cártes Núñez.

Trabajo de Impresión :

Miguel Monserrat V. y Equipo .

Lo Barnechea, 1976. 76 p.

-GEOMETRIA (GUIA DIDACTICA) 3M

-Suarez E. Octavio, coaut

22060

24-6-87			

Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas. Departamento de Matemática.

Geometría vectorial en LR2. Texto guía para el profesor, 3º año enseñamza media, por Octavio Suarez R. y Sylvia Navarro A.

//.