Cuadernillo de repaso

MATEMÁTICA
EJE GEOMETRÍA

IVº medio

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

UCE
UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN

Cuadernillo de repaso contenidos Matemática 2020

Material adaptado por la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación en base a Cid Figueroa, Eduardo. (2019). *21 temas para aprender y practicar matemática.* Editorial Cid.

Puedes encontrar los Cuadernillos de repaso de Matemática ingresando a www.curriculumnacional.cl o escaneando el siguiente código QR:

Prohibida su reproducción total o parcial.

INTRODUCCIÓN

En el contexto actual, el Ministerio de Educación ha asumido desde su inicio como tarea primordial el apoyar a todos los estudiantes, docentes, equipos directivos, sostenedores y apoderados del país de modo que puedan, durante la suspensión de clases y en el retorno a clases, apoyar el desarrollo de los aprendizajes esenciales que nos permitan reducir las brechas educacionales provocadas por la pandemia.

El aprendizaje y el desarrollo del pensamiento matemático es de vital importancia para los estudios de nuestros estudiantes, pues ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas necesarias para desenvolverse en la vida cotidiana. Esta se trabaja sistemáticamente enseñando habilidades y contenidos desde los primeros niveles de educación hasta afianzarse en los niveles superiores.

Dada su relevancia, la Unidad de Currículum y Evaluación pone a disposición para los estudiantes de 4° año de Enseñanza Media cuatro cuadernillos, uno por cada eje de las Bases Curriculares de Matemática, que les permitirán repasar y ejercitar de manera autónoma las habilidades y conocimientos adquiridos en Matemática desde séptimo a tercero medio fundamentalmente. En este cuadernillo de repaso encontraras los contenidos del Eje Geometría.

En la primera parte del cuadernillo se presenta el repaso de la parte teórica, luego modelos de ejercicios resueltos con sus soluciones, algunos ejercicios para practicar y un miniensayo.

¿Cómo usar este Manual?

1. Lee la parte teórica y los ejercicios resueltos, no resuelvas las guías de ejercicios, sin antes haber hecho esto.

2. Resuelve la guía de ejercicios del capítulo, aquellos ejercicios que no puedas resolver, déjalos para un segundo intento, no consultes a tu compañero(a) o profesor(a) inmediatamente, o invalidarás algo muy importante en tu proceso de aprendizaje. El esfuerzo que realizas para poder resolver un ejercicio permite que los contenidos, teoremas, propiedades etc., que pasan por tu mente queden más «frescos» y fortalecidos en ella.
   La gran mayoría de los ejercicios que no resuelven los estudiantes no es debido a que no sepan los contenidos o cómo resolver los problemas, sino a que no los recuerdan, por lo tanto, un buen método de preparación es el anterior para ir recordando lo olvidado.

3. Si al resolver un ejercicio notas que te equivocaste, detente a revisar paso a paso donde está tu error, este proceso es muy importante ya que te permite detectar posibles errores de concepto que debes corregir al momento.

4. No es conveniente que resuelvas los miniensayos sino hasta haber completado cada capítulo, no sacarás mucho provecho si no tienes todavía en tu mente una buena provisión de contenidos.

5. En general se ha procurado que los ejercicios estén «graduados», por lo tanto, no deberías tener problemas en los primeros ejercicios de cada guía. Si los tuvieras solicita apoyo de tu profesor ya que requerirás más ayuda que la que te pueda brindar este texto.

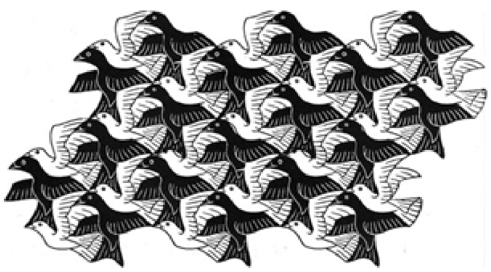
ÍNDICE

EJE

GEOMETRÍA

Capítulo 1

TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS



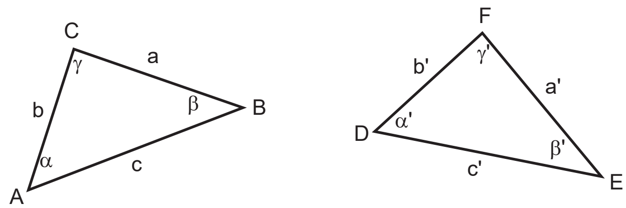
M. C. Escher (1898 - 1972) fue un destacado artista, en muchas de sus afamadas obras se destaca el uso de las transformaciones isométricas como la traslación, la reflexión y una rotación, las que serán materia de estudio del presente capítulo.

CONCEPTOS CLAVES

- Criterios de congruencia de triángulos
- Traslación
- Reflexión en torno a una recta
- Reflexión en torno a un punto
- Rotación en torno a un punto

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son congruentes cuando sus ángulos y sus lados homólogos tienen igual medida.

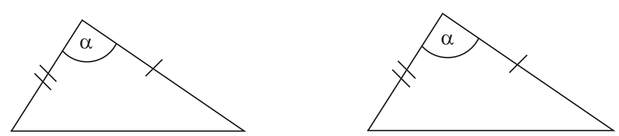


$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \alpha = \alpha' & a = a' \\ \beta = \beta' & b = b' \\ \gamma = \gamma' & c = c' \end{array} \right.$$

Los siguientes criterios, permiten establecer la congruencia entre dos triángulos con la mínima información posible.

- Criterio L – L – L
  Dos triángulos son congruentes cuando sus lados homólogos son congruentes.

- Criterio L – A – L
  Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados homólogos congruentes y el ángulo comprendido entre ellos.



- Criterio A – L – A
  Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos homólogos congruentes y el lado común entre ellos.

- Criterio L – L – A>
  Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados homólogos congruentes y el ángulo opuesto al mayor de estos lados.

(a > b)

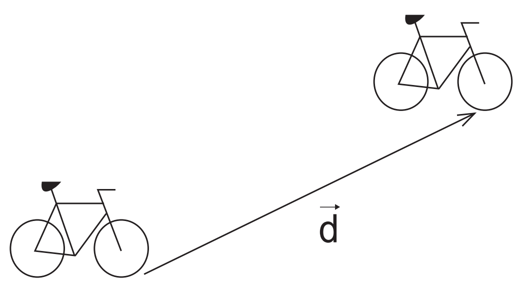
TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

Las transformaciones isométricas en el plano son cuatro:

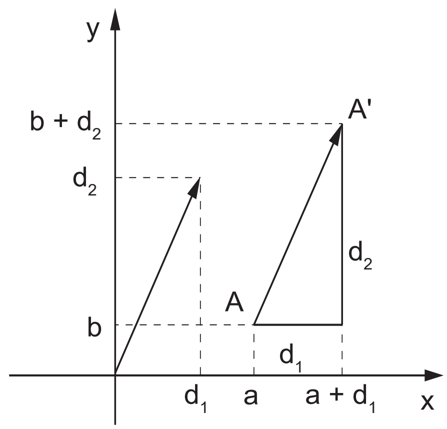
1. Traslación
2. Reflexión con respecto a una recta o simetría axial.
3. Reflexión con respecto a un punto o simetría puntual.
4. Giro o rotación.

Las isometrías o transformaciones isométricas convierten a una figura en otra que resulta ser congruente con la original.

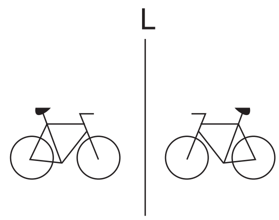
- **Traslación**
  Cuando efectuamos una traslación, todos los puntos de la figura se mueven según una cierta dirección, la cual queda determinada por el vector dirección:



En un sistema cartesiano, la dirección queda determinada por un vector dado como par ordenado.
Si al punto (a, b) lo trasladamos en la dirección (d_1, d_2), entonces queda en el punto $(a + d_1, a + d_2)$.



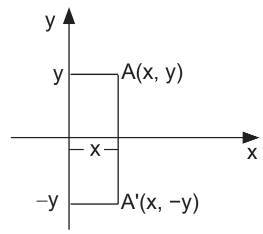
- **Reflexión con respecto a una recta (Simetría Axial)**
  En este caso la transformación produce el “efecto espejo”:



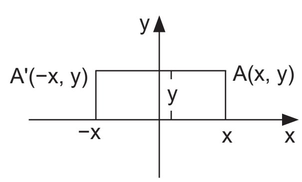
  La figura de la izquierda se ha reflejado con respecto a la recta L, o se le ha aplicado una simetría o bien una simetría axial, quedando convertida en la figura de la derecha.

En un sistema cartesiano, es útil saber las siguientes simetrías axiales:

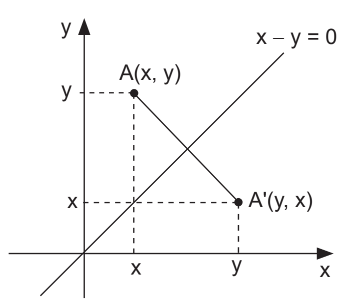
A) Simetría con respecto al eje x
En este caso el punto (x, y) queda en el punto (x, –y):



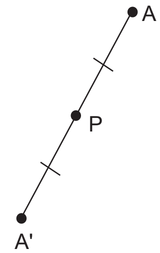
B) Simetría con respecto al eje y
El punto (x, y) queda en el punto (–x, y):



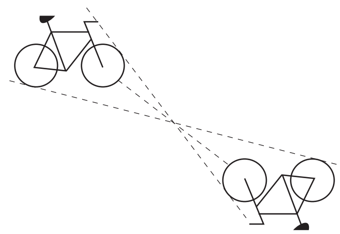
C) Simetría con respecto a la recta de ecuación x – y = 0
En este caso el punto (x, y) queda en el punto (y, x):



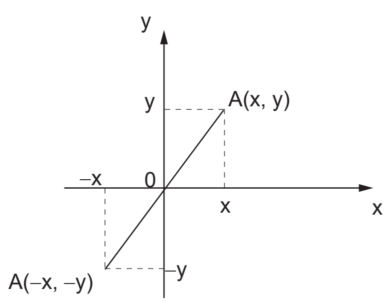
- **Reflexión con respecto a un punto (Simetría puntual)**
  Si a un punto A le aplicamos una simetría con respecto a P, entonces su imagen quedará en la recta $\overleftrightarrow{AP}$, de modo que P es el punto medio entre A y su imagen.



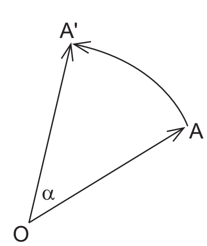
  Si a una figura le aplicamos una reflexión con respecto a un punto, entonces la figura quedará girada en 180° con respecto a este punto.

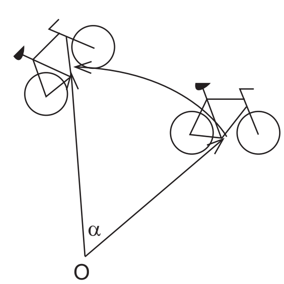


  En un sistema cartesiano, cuando a un punto (x, y) se le aplica una reflexión con respecto al origen, queda en el punto (–x, –y):



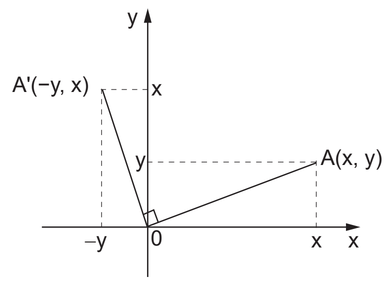
- **Rotación o giro con respecto a un punto**
  Si el punto A se gira en $\alpha°$ con respecto al punto O de la figura, entonces queda en un punto A' de modo que OA = OA' y $\sphericalangle AOA' = \alpha$.
  Se entenderá, a no ser que se indique lo contrario, que el sentido del giro es contrario al sentido del movimiento de las manecillas del reloj (sentido antihorario).



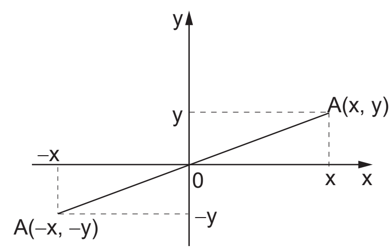


A continuación se muestran las rotaciones en sentido antihorario con respecto al origen para ángulos de 90°, 180° y 270°.

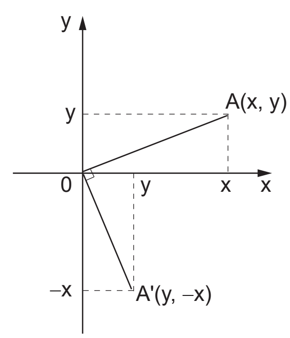
A) Rotación en 90°
El punto (x, y) queda en el (–y, x):



B) Rotación en 180°
El punto (x, y) queda en el (–x–y):



C) Rotación en 270°
El punto (x, y) queda en el (y, –x):



EJERCICIOS RESUELTOS

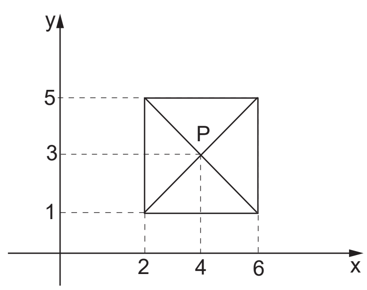
1. A un punto se le efectúa una traslación en la dirección (–2,3) , luego se le aplica una rotación en 90° en sentido antihorario con respecto al origen, quedando en el punto (2,5), ¿cuál era el punto inicial?

Solución:
Supongamos que el punto inicial era (a,b), al aplicarle una traslación en la dirección (–2,3) queda en el punto (a – 2, b + 3).
Por otro lado, al aplicarle un giro en 90° en sentido antihorario con respecto al origen, el punto (x, y) queda en el punto (–y, x), en este caso, el punto (a – 2, b + 3) quedará en el punto (–(b + 3), a – 2), si igualamos este punto al (2,5), obtenemos que –(b + 3) = 2 y a – 2 = 5.
Resolviendo estas ecuaciones, se concluye que a = 7 y b = –5, por lo tanto el punto inicial era el (7,–5).
Otra forma de resolver este ejercicio, es aplicando las transformaciones inversas desde el punto final hasta llegar el punto inicial; es decir al (2, 5) le aplicamos primero un giro en sentido horario con respecto al origen, luego al punto obtenido le aplicamos una traslación según la dirección (2, –3), obteniéndose de esta forma el punto inicial.

2. ¿Cuál(es) de las siguientes transformaciones permite(n) que el punto (6,5) quede en el punto (2,1)?

I) Una traslación según la dirección (–4,–4).
II) Una reflexión con respecto al punto (4,3).
III) Una rotación en 90° en sentido antihorario con respecto al punto (6,1).

Solución:
En I, podemos obtener la dirección de traslación restando el punto final (2,1) con el punto inicial: $\vec{d}$ = (2, 1) – (6, 5) = (–4, –4), por lo tanto I es correcta.
Para ver si las afirmaciones II y III son verdaderas, nos ayudaremos con una figura, aunque se pueden utilizar otros métodos que no la requieren.
Observa que el punto (4, 3) es el punto medio entre el (6, 5) y el (2, 1), por lo tanto el (2, 1) se puede obtener a partir del (6, 5) través de una reflexión con respecto al (4, 3), por lo tanto II es verdadera.



Para III, podemos utilizar que la figura que se forma es un cuadrado, por lo tanto si giramos el punto (6, 5) en 90° sentido **antihorario** con respecto al punto (6, 1) obtenemos el (2, 1), luego III es verdadera.
En conclusión, todas son verdaderas.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. Si el punto (–3,5) se refleja en torno al eje y, queda en el punto:

A) (3, –5)
B) (5, –3)
C) (–5, –3)
D) (3, 5)
E) (5, 3)

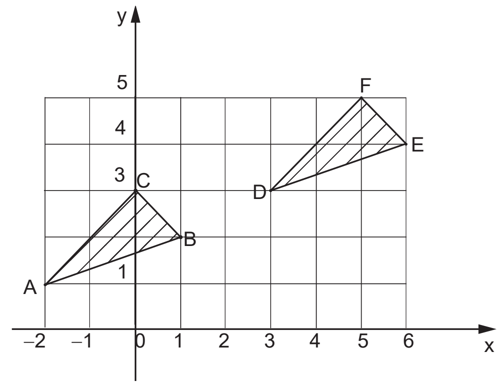
2. Si el punto (3,2) se gira en 90° en sentido antihorario en torno al origen, queda en el punto:

A) (2, –3)
B) (3, –2)
C) (–2, –3)
D) (2, 3)
E) (–2, 3)

3. El punto (2, 5) se traslada quedando en el punto (−3, 2), ¿cuál es la dirección de la traslación?

A) (–3, –5)
B) (3, 5)
C) (–5, –3)
D) (–1, 7)
E) (7, –1)

4. ¿En qué dirección se debe trasladar el $\triangle ABC$ para que se transforme en el $\triangle DEF$?



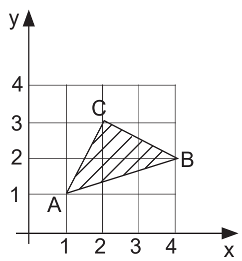
A) (5, 1)
B) (5, 2)
C) (2, 5)
D) (–5, 2)
E) (–5, –2)

5. ¿Cuál(es) de las siguientes transformaciones permite(n) que el punto (2, 2) quede en el punto (–2, 2)?

I) Reflexión en torno al eje x, seguida de una simetría puntual con respecto al origen.
II) Una traslación en la dirección (–4, 0).
III) Una traslación en la dirección (–4, –4), seguida de una reflexión con respecto al eje y.

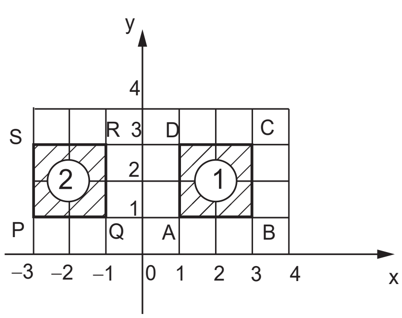
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

6. Si al ΔABC de la figura, se le aplica una traslación vertical de modo que el vértice C queda en el eje x, ¿cuáles serían las nuevas coordenadas de B?



A) (1, –2)
B) (4, –2)
C) (3, –1)
D) (3, –2)
E) (4, –1)

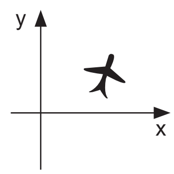
7. ¿Qué transformaciones isométricas se podrían haber aplicado al cuadrado 2 para que se transforme en el cuadrado 1?



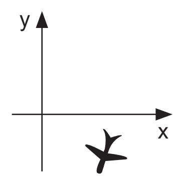
I) Una traslación en la dirección (2, 0).
II) Un giro en sentido horario en 90º en torno al origen.
III) Una reflexión en torno al eje de las abscisas.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

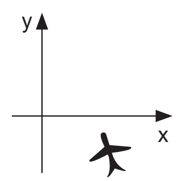
8. A la figura que está en el primer cuadrante se le aplica una reflexión con respecto al origen y después una reflexión con respecto al eje y.
¿Cuál(es) de las siguientes alternativas ilustra la posición donde queda finalmente?



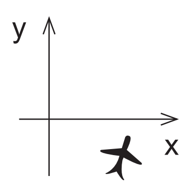
A)



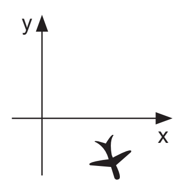
B)



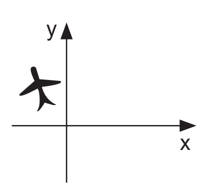
C)



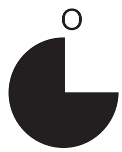
D)



E)

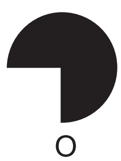


9. Al aplicar una rotación de centro en O en 180° a la figura, se obtiene:

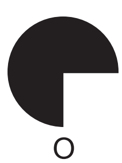


A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

10. Los puntos (a, b) y (x, y) son simétricos respecto al eje y, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $a = x$
II) $y = b$
III) $b = x$

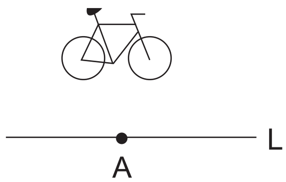
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) Solo I y III

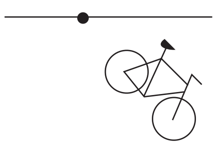
11. Se puede determinar las coordenadas del punto (a,b) si se sabe que:

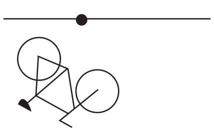
(1) Es simétrico del punto (–2,3) con respecto al eje y.
(2) Es simétrico del punto (–2,–3) con respecto al origen.

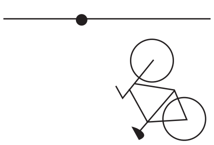
A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

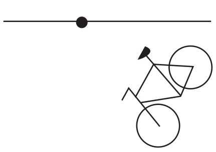
12. A la bicicleta de la figura se le ha aplicado primero un giro en sentido horario con centro en A y un ángulo de 30º y después una reflexión en torno a la recta L.
¿Cuál de las siguientes alternativas representa mejor a la posición dónde queda?

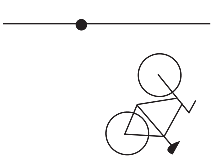


A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

13. El punto (–2, 3) se refleja en torno al origen quedando en el punto (a, b), entonces a – b =

A) –5
B) –1
C) 1
D) 2
E) 5

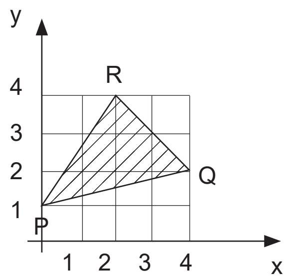
14. ¿Cuál de las siguientes transformaciones permite que el punto (–a, b) quede en el punto (b, a)?

A) Reflexión en torno al eje x.
B) Reflexión en torno al eje y.
C) Reflexión en torno al origen.
D) giro en 90° en sentido horario con respecto al origen.
E) giro en 90° en sentido antihorario con respecto al origen.

15. ¿En qué dirección se debe trasladar el punto (a , b) para que quede en el punto (b, a)?

A) (–a, –b)
B) (b, a)
C) (–b , –a)
D) (a – b, b – a)
E) (b – a, a – b)

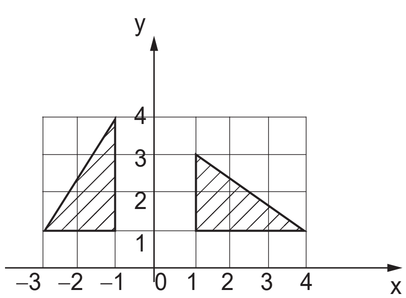
16. El ΔPQR se ha trasladado dos unidades hacia la derecha y una unidad hacia abajo, ¿cuál(es) de los siguientes puntos corresponde a uno de sus nuevos vértices?



I) (0, 2)
II) (6, −1)
III) (4, 3)

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

17. Con respecto a los triángulos rectángulos de la figura, se afirma que:



I) Son congruentes.
II) Uno de ellos se obtiene a partir del otro girándolo en 90° en torno al origen.
III) Son simétricos respectos del eje y.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

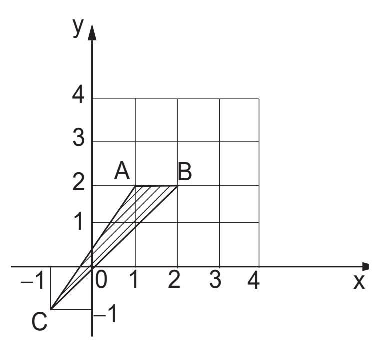
18. Si se rota el punto (4, 3) en 90° en sentido horario y luego se refleja respecto al eje y, sería equivalente a:

A) hacer sólo una simetría en torno al origen.
B) hacer una traslación con dirección (–4, –3).
C) hacer un giro en 270° en torno al origen en sentido antihorario.
D) hacer una rotación en 90° en torno al origen en sentido antihorario.
E) hacer una reflexión en torno a la recta $x + y = 0$.

19. Al aplicar al punto (8, 5) una simetría central con centro en (–2, 4) se obtiene:

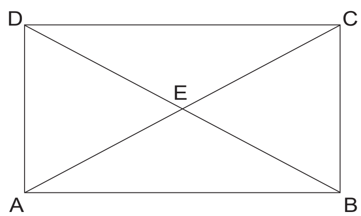
A) (–8, –5)
B) (–6, 1)
C) (4, 3)
D) (–5, 8)
E) (–12,3)

20. Si al triángulo ABC de la figura se le aplica una reflexión en torno al eje x, resulta un triángulo cuyos vértices son:



A) (1,–2) ; (2,–2) ; (–1,1)
B) (–1,2) ; (–2,2) ; (1,1)
C) (2,1) ; (2,2) ; (1,1)
D) (2,–1) ; (2,–2) ; (–1,1)
E) (–1,–2) ; (–2,–2) ; (1,1)

21. ABCD es un rectángulo y E es el punto de intersección de las diagonales.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) Si a $\overleftrightarrow{AD}$ se le aplica una simetría puntal respecto a E se transforma en $\overleftrightarrow{BC}$.

II) Si el ΔABC se refleja en torno al punto E se transforma en el ΔCDA.

III) Si el ΔBCD se refleja en torno a $\overleftrightarrow{BD}$ se transforma en el ΔBAD.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

22. ¿Cuál de las siguientes transformaciones permite que el punto (x,y) quede en el punto (y,x)?

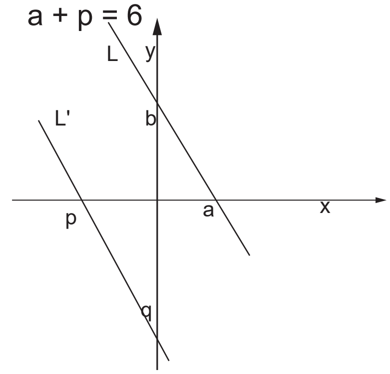
A) Reflexión en torno a la recta $x - y = 0$.
B) Rotación con centro en el origen en 270° y después una reflexión en torno al eje x.
C) Rotación con centro en el origen en 90° y después una reflexión en torno al eje y.
D) Reflexión con respecto al punto $\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$.
E) Con cualesquiera de las anteriores.

23. ¿Cuál de las siguientes transformaciones **no** permite que el punto A(–a , a) quede en el punto A'(–a,–a)?

A) Reflexión en torno al eje x.
B) Traslación en la dirección (0, –2a).
C) Rotación en 90° en sentido antihorario. con respecto al origen.
D) Rotación en 90° en sentido horario con respecto al punto (–2a,0).
E) Rotación en 45° en sentido antihorario con respecto al punto (a, a).

24. Las rectas L y L' de la figura son paralelas, en ella se muestran las intersecciones de las respectivas rectas con los ejes coordenados. Se puede determinar una posible dirección para que la recta L se transforme en la recta L', sabiendo que:

(1) $q - b = -8$
(2) $a + p = 6$

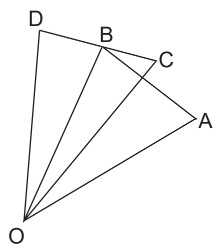


A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

25. ¿Cuál de las siguientes informaciones es suficiente para establecer que dos triángulos sean congruentes?

A) Sus ángulos respectivos son congruentes.
B) Sus perímetros son iguales.
C) Sus áreas son iguales.
D) Sus lados respectivos son congruentes.
E) Cada una de las anteriores.

26. Se puede determinar que $\overline{CD}$ se ha obtenido de girar $\overline{AB}$ en torno a O si:

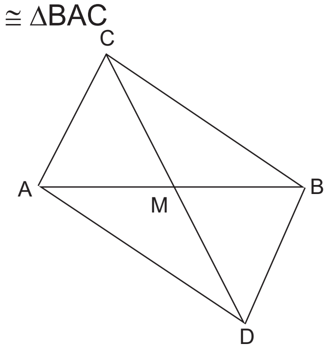


(1) OA = OC ; OB = OD
(2) ∢COA ≅ ∢DOB

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

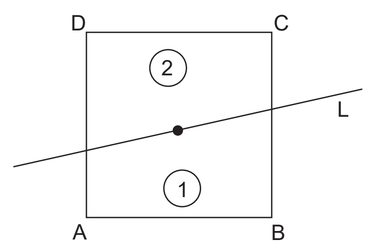
27. En la figura, M es el punto medio del lado $\overline{AB}$ del triángulo ABC. Si a C se le aplica una simetría puntual con respecto a M quedando en el punto D, ¿cuál(es) de las siguientes congruencias es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) $\Delta CAM \cong \Delta DAM$
II) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$
III) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$



A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

28. ABCD es un cuadrado y por el punto "O" donde se intersectan sus diagonales, se traza una recta L que no pasa por los vértices del cuadrado, tal como se muestra en la figura.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

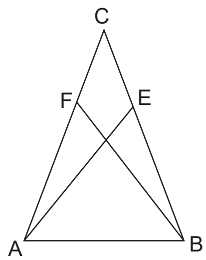


I) Los vértices opuestos del cuadrado están a la misma distancia de la recta L.
II) Los trapecios 1 y 2 son simétricos con respecto a la recta L.
III) Los trapecios 1 y 2 son simétricos con respecto al punto "O".

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

29. En la figura, el triángulo ABC es isósceles de base $\overline{AB}$, E y F son puntos sobre sus lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Se puede determinar que $\overline{FB} \cong \overline{AE}$, sabiendo que:

(1) $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$
(2) $\measuredangle CFB \cong \measuredangle CEA$

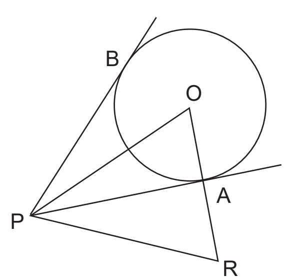


A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

30. En la figura, se han trazado desde el punto P las tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ a la circunferencia de centro O, donde A y B son respectivamente los puntos de tangencia.
Si A es el punto medio de $\overline{OR}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si el ΔPAR se refleja con respecto a $\overline{PA}$ se obtiene el ΔPAO.
II) El ΔPAR se puede obtener a partir del ΔPOB después de dos reflexiones axiales
III) El ΔBPA se puede obtener mediante una rotación del ΔRPO en torno al punto P.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III



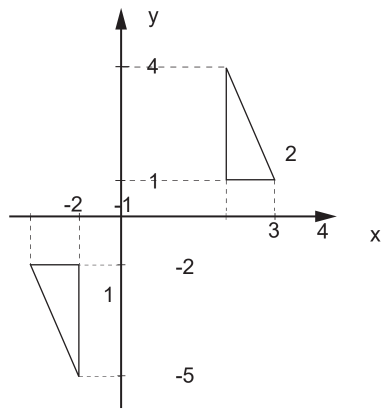
31. si x ≠ y, ¿cuál de las siguientes opciones **no** permite que el punto (x, y) se transforme en el (x, –y),?

A) Una reflexión con respecto al origen y después una reflexión en torno al eje y.
B) Una traslación en la dirección (0, –2y).
C) Un giro en 180° con respecto al origen y después una traslación en la dirección (2x, 0)
D) Un giro en 90° en sentido horario.
E) Una reflexión en torno a la recta de ecuación x – y = 0 y después un giro en 90° con respecto al origen en sentido horario.

32. Un punto se traslada en la dirección (2, 2) y después se gira en 90° en sentido antihorario con respecto al origen quedando en el punto (–a, a + 2), entonces el punto original era el:

A) (a, a + 2)
B) (a, a – 2)
C) (a – 2, a)
D) (–a, a – 2)
E) (a – 2, –a)

33. Con respecto a la información dada en la figura, ¿cuál de las siguientes transformaciones **no** permite que la fig. 1 se obtenga a partir de la fig. 2?



A) Con una simetría con respecto a un punto que no es el origen.

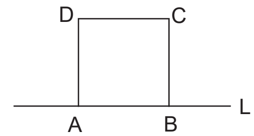
B) Con dos simetrías.

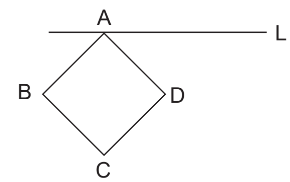
C) Con una traslación y con un giro en 180°.

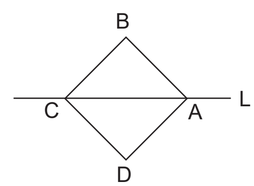
D) Con una simetría respecto del eje x y luego una simetría con respecto a una recta vertical.

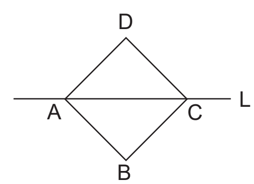
E) Con una simetría respecto al origen y luego una traslación.

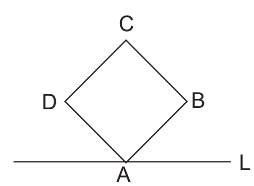
34. El cuadrado ABCD de la figura, tiene su lado $\overline{AB}$ sobre la recta horizontal L.
Si el cuadrado si gira en 30°, con respecto al punto A, en sentido antihorario y después se gira en 75° en sentido horario con respecto al mismo punto, ¿cuál de las siguientes figuras indica mejor la posición donde queda el cuadrado después de aplicar estas dos rotaciones?

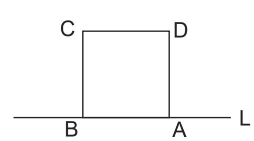


A) 

B) 

C) 

D) 

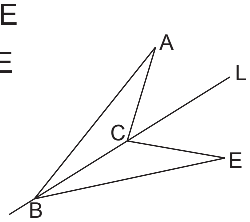
E) 

35. Al punto A(−3,2) se le aplica una traslación de modo que su imagen queda en el eje y a la misma distancia del origen que se encuentra A. ¿cuál es una posible dirección para esta traslación?

A) $(-3, 2 - \sqrt{13})$
B) $(3, \sqrt{13} - 2)$
C) $(3, 3)$
D) $(-3, -3)$
E) $(3, \sqrt{5} - 2)$

36. Se puede determinar que el ΔBCA es simétrico del ΔBCE con respecto a L si:

(1) AC = CE
(2) BA = BE



A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

37. Sea el triángulo equilátero ABC, al vértice A se le aplica una reflexión en torno al lado $\overline{BC}$ obteniéndose el punto A', al vértice B se le aplica una reflexión en torno al lado $\overline{AC}$ obteniéndose el punto B' y al vértice C se le aplica una reflexión en torno al lado $\overline{AB}$ obteniéndose el punto C', ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones con respecto al triángulo A'B'C' es (son) verdadera(s)?

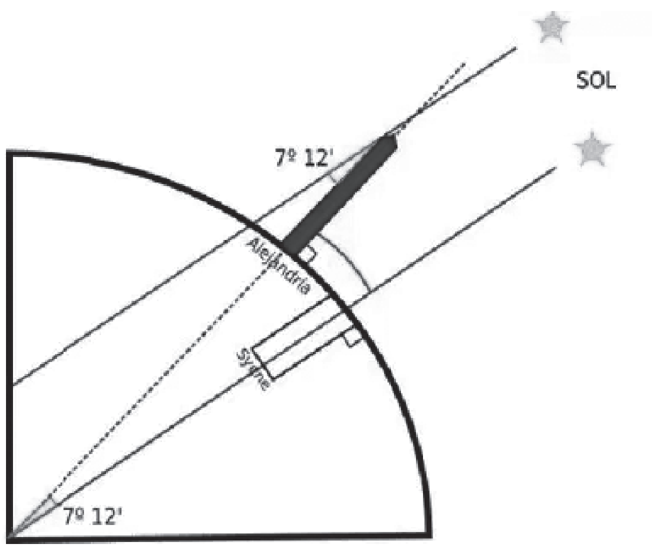
I) Es equilátero.
II) Tiene el doble del perímetro que el ΔABC.
III) Tiene el doble del área que el ΔABC.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

RESPUESTAS CAPÍTULO 10									
1. D	**2.** E	**3.** C	**4.** B	**5.** C	**6.** E	**7.** B	**8.** D	**9.** C	**10.** B
11. D	**12.** E	**13.** E	**14.** D	**15.** E	**16.** B	**17.** C	**18.** E	**19.** E	**20.** A
21. C	**22.** E	**23.** E	**24.** A	**25.** D	**26. C**	**27.** D	**28.** D	**29.** D	**30.** C
31. D	**32.** B	**33.** D	**34.** C	**35.** B	**36. C**	**37.** C			

Capítulo
2

GEOMETRÍA DE PROPORCIÓN



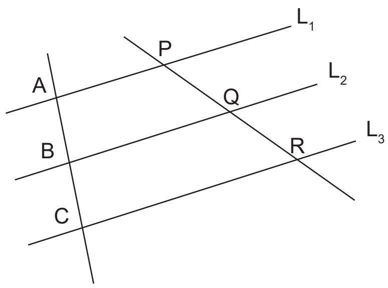
Eratóstenes, sabio griego (276 a.C- 294 a. C) utilizando geometría elemental y una simple proporción, pudo concluir que el radio de la Tierra es de 6366 km, muy cercano al valor real que es aproximadamente 6371 km.

CONCEPTOS CLAVES

- Teorema de Thales
- Razón de Semejanza
- Homotecia
- Semejanza de triángulos
- Razón de Homotecia

TEOREMA DE THALES

Si tenemos un conjunto de rectas paralelas y estas son cortadas por dos rectas, entonces los segmentos que se determinan sobre una de las rectas secantes son proporcionales a los segmentos que se determinan sobre la otra recta secante.

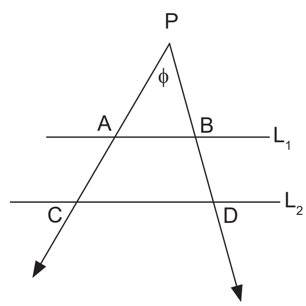


Si $L_1 // L_2 // L_3$, entonces:

$$\boxed{\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}}$$

Teorema particular de Thales

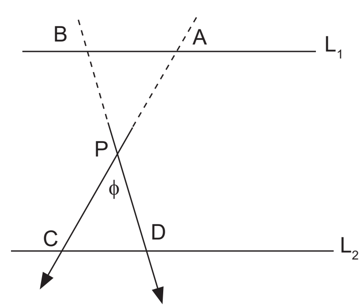
Si los lados de un ángulo se cortan por dos o más paralelas entre sí, los segmentos que se determinan sobre una de las transversales son proporcionales a los segmentos que se determinan sobre la otra transversal.



$$\boxed{\frac{PA}{AC} = \frac{PB}{BD}}$$

$(L_1 // L_2)$

Lo anterior, también es válido si las rectas cortan a las prolongaciones de los lados del ángulo:

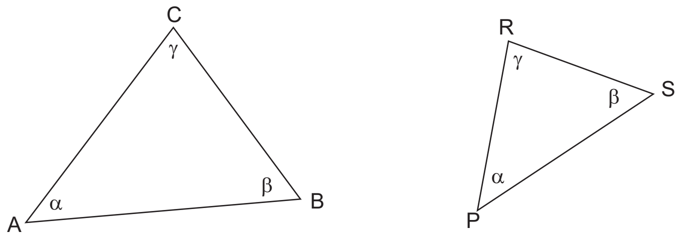


$$\boxed{\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD}}$$

$(L_1 // L_2)$

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes, si se puede establecer una correspondencia entre los vértices de modo que sus ángulos homólogos son congruentes y los lados homólogos son proporcionales:

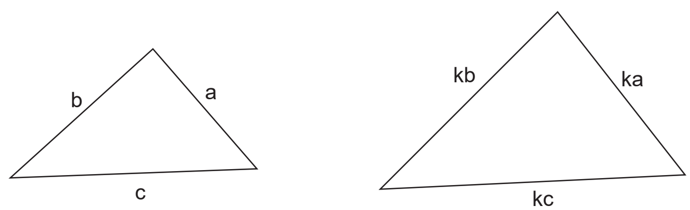


$\Delta ABC \sim \Delta PSR$

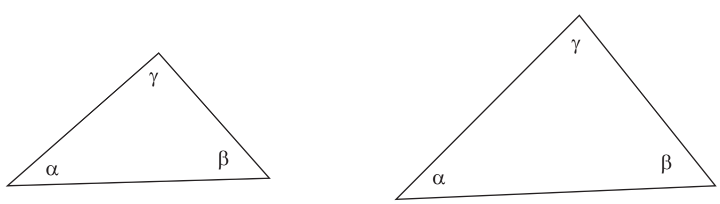
Tenemos que $\frac{AB}{PS} = \frac{BC}{SR} = \frac{AC}{PR} = k$, donde “k” es un número real positivo llamado “razón de semejanza”.

Los criterios de semejanza, corresponden a la información mínima necesaria para establecer que dos triángulos son semejantes.

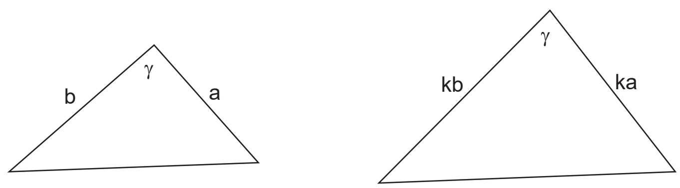
- Criterio L − L − L
  Dos triángulos son semejantes si sus lados homólogos son proporcionales.



- Criterio A − A − A
  Dos triángulos son semejantes si sus ángulos homólogos son congruentes.

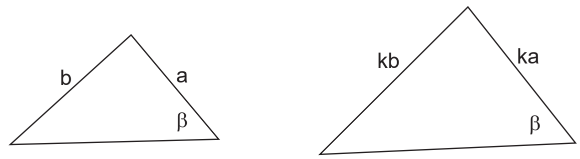


- Criterio L − A − L
  Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados homólogos proporcionales y los ángulos que forman estos lados, respectivamente congruentes.



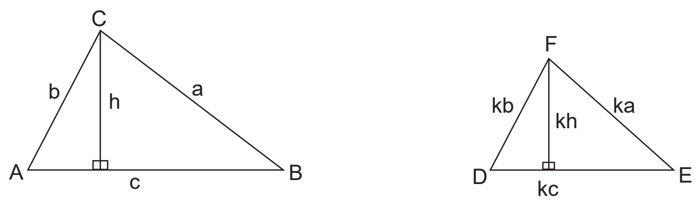
- Criterio L − L − A

  Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados homólogos proporcionales y los ángulos opuestos a los mayores de estos lados, respectivamente congruentes.



Teorema de la semejanza

Si dos triángulos son semejantes, con razón de semejanza “k”, entonces sus perímetros también están en la razón k y sus áreas están en la razón k^2.



(b > a)

Observa en la figura que la razón entre los perímetros es efectivamente k:

$$\frac{\text{Perímetro } \Delta DEF}{\text{Perímetro } \Delta ABC} = \frac{ka + kb + kc}{a + b + c} = k$$

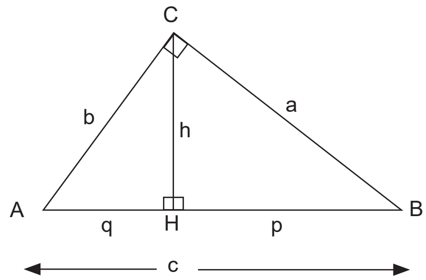
Y la razón entre sus áreas es k^2:

$$\frac{\text{Área } \Delta DEF}{\text{Área } \Delta ABC} = \frac{\frac{kh \cdot kc}{2}}{\frac{hc}{2}} = k^2$$

Observación: este teorema nos permite encontrar la razón entre los perímetros o las áreas de dos figuras semejantes si conocemos la razón entre dos elementos homólogos.

APLICACIÓN DE SEMEJANZA: TEOREMA DE EUCLIDES

El triángulo ABC de la figura es un triángulo rectángulo en C y p y q son las proyecciones de a y b sobre la hipotenusa c.
Entonces se cumplen las siguientes propiedades:



- **Teorema de Euclides referente a la altura**
  El cuadrado de la altura equivale al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa:

$$\boxed{h^2 = pq}$$

- **Teorema de Euclides referente al cateto**
  El cuadrado de un cateto equivale al producto entre la hipotenusa y la proyección de este cateto sobre ella:

$$\boxed{a^2 = pc \;\; ; \;\; b^2 = qc}$$

- **Cálculo de altura**
  La altura correspondiente a la hipotenusa equivale al producto de las longitudes de los catetos dividido por la longitud de la hipotenusa:

$$\boxed{h = \frac{ab}{c}}$$

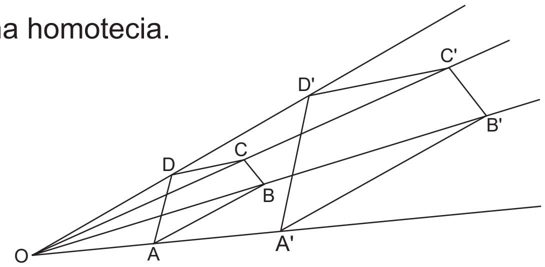
HOMOTECIA

Si se tienen dos figuras semejantes y son tales que:

1. Sus lados homólogos son paralelos.

2. Al unir sus vértices correspondientes por líneas, todas ellas concurren a un mismo punto (llamado centro o foco de homotecia).

Entonces se trata de una homotecia.



En esta figura, al cuadrilátero ABCD se le ha aplicado una homotecia con centro en O y razón λ, obteniéndose el cuadrilátero homotético A'B'C'D'.

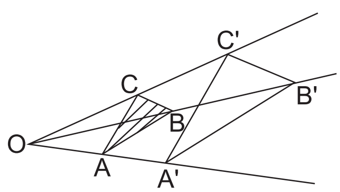
La razón de homotecia en términos absolutos, se puede calcular mediante la razón entre una longitud en la figura imagen con el homólogo en la figura original, por ejemplo:

$|\lambda| = \dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB}$ ... O bien $|\lambda| = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC}$ ...

Además, por el teorema de la semejanza, tenemos que: $\dfrac{\text{perímetro } A'B'C'D'}{\text{perímetro } ABCD} = k$ y $\dfrac{\text{Área } A'B'C'D'}{\text{Área } ABCD} = k^2$

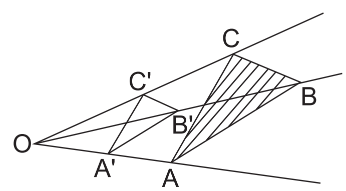
En el caso en que el punto original y la imagen queden a distinto lado con respecto al centro de la homotecia, la razón será negativa.

A continuación, la interpretación geométrica de acuerdo a las magnitudes que tome la razón de homotecia:



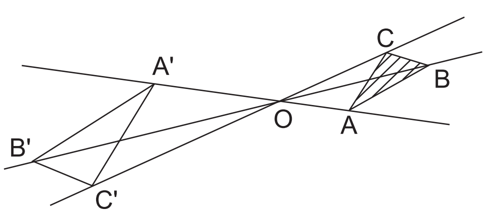
$\lambda > 1$

la figura resultante es mayor que la original



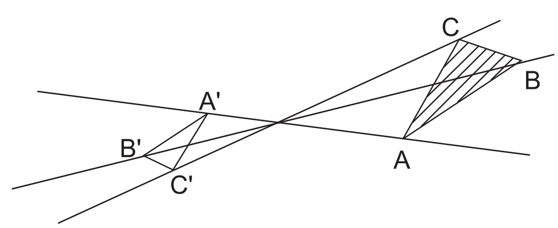
$0 < \lambda < 1$

la figura resultante es menor que la original



$\lambda < -1$

la figura resultante es mayor que la original y el centro queda entre cada punto y su imagen.

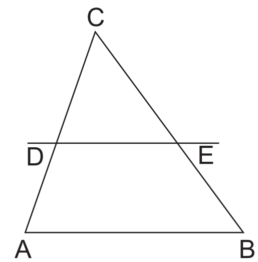


$-1 < \lambda < 0$

la figura resultante es menor que la original y el centro queda entre cada punto y su imagen.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En la figura, las rectas AD y BE se intersectan en C y $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$.
Si CE = 10 cm, BE = 5 cm y área ΔDEC = 60 cm^2, ¿cuál es el área del trapecio ABED?



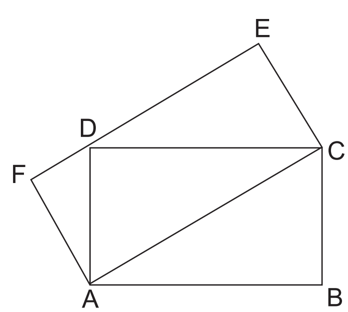
Solución:

Tenemos que los triángulos ABC y DEC son semejantes (A, A, A), además como CE : EB = 2 : 1, entonces CE : CB = 2 : 3, por lo tanto la razón de semejanza entre estos triángulos es 2 : 3 y por el teorema de la semejanza la razón entre sus áreas será 4 : 9. Como el área del DEC es 60 cm^2, planteamos una proporción:

$$\frac{\text{área } \Delta DEC}{\text{área } \Delta ABC} = \frac{4}{9} \rightarrow \frac{60}{\text{área } \Delta ABC} = \frac{4}{9} \rightarrow \text{área } \Delta ABC = = \frac{9 \cdot 60}{4} = 135 \text{ cm}^2$$

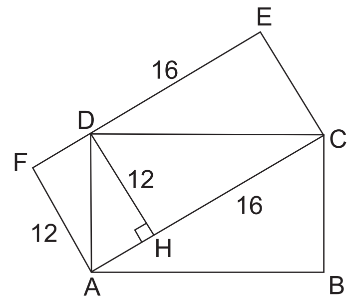
Como área ΔABC = 135 cm^2 y área ΔDEC = 60 cm^2 $\rightarrow$ área ABED = 135 − 60 = 75 cm^2.

2. Sobre la diagonal $\overline{AC}$ del rectángulo ABCD se ha construido el rectángulo ACEF, de modo que D pertenece al lado $\overline{EF}$.
Si AF = 12 cm y DE = 16 cm, ¿cuál es el perímetro de ABCD?



Solución:

Un método para calcular los lados del triángulo ADF es ocupar la semejanza entre ΔADF y ΔDCE, otro método equivalente es ocupar el teorema de Euclides en el ΔADC; para ello tracemos una recta DH perpendicular a $\overline{AC}$, entonces DH = AF = 12 cm, HC = DE = 16 cm:

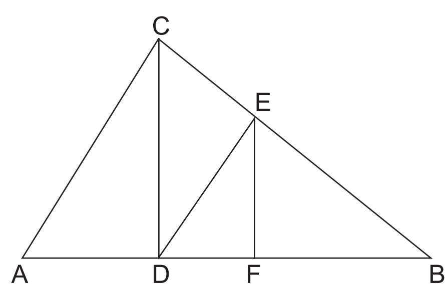


Por teorema de Euclides, $12^2 = AH \cdot HC \rightarrow AH = 9$ cm.

Usando teorema de Pitágoras en ΔAHD : $9^2 + 12^2 = AD^2 \rightarrow AD = 15$ cm

Idem en ΔDHC: $12^2 + 16^2 = DC^2 \rightarrow DC = 20$ cm, luego AD = 15 cm y DC = 20 cm, por lo tanto el perímetro de ABCD es 70 cm.

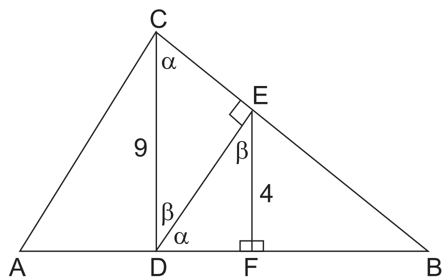
3. El ABC de la figura es rectángulo en C, los puntos D y F están en $\overline{AB}$ y E en $\overline{BC}$, de modo que $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ y $\overline{EF} \perp \overline{AB}$. Si CD = 9 cm y EF = 4 cm, entonces ¿cuánto mide $\overline{DE}$?



Solución:

Tal como se muestra en la siguiente figura, los triángulos CED y DFE son semejantes por tener sus ángulos homólogos congruentes.

Si $\sphericalangle DCE = \alpha$ y $\sphericalangle CDE = \beta$, entonces $\sphericalangle EDF = \alpha$ y $\sphericalangle DEF = \beta$:



Por la semejanza de triángulos, tenemos que:

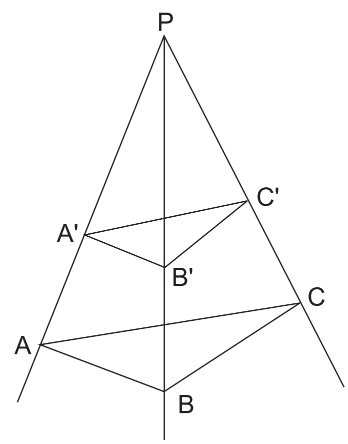
$\frac{CD}{DE} = \frac{ED}{FE} \rightarrow \frac{9}{DE} = \frac{ED}{4}$, multiplicando cruzado, tenemos que $DE^2 = 36 \rightarrow DE = 6$ cm.

4. En la figura, al ΔABC se le ha aplicado una homotecia con centro en P, siendo A'B'C' su homotético. Si AA' : A'P = 2 : 3, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La razón de homotecia es 0,6.

II) $\frac{\text{perímetro } \Delta A'B'C'}{\text{perímetro } \Delta ABC} = \frac{3}{5}$

III) Área A'B'C' es un 36% del área del ABC.



Solución:

Como AA' : A'P = 2 : 3 $\rightarrow$ PA' : PA = 3 : 5; como la razón de homotecia (k) en términos absolutos es la razón entre la distancias del centro al punto imagen y del centro al original, entonces:

$k = \frac{PA'}{PA} = \frac{3}{5}$, pero $\frac{3}{5} = 0{,}6$, luego I es correcta.

Para II, por ser $\overline{AB} \,//\, \overline{A'B'}$, tenemos que $\Delta ABP \sim \Delta A'B'P$, entonces $\frac{A'B'}{AB} = \frac{PA'}{PA} = \frac{3}{5}$.

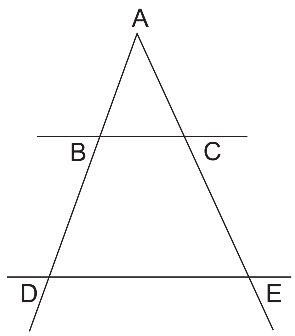
Por otro lado, $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ y la razón entre los lados homólogos es $\frac{3}{5}$, entonces la razón entre sus perímetros es la misma, luego II es verdadera.

Para III, como la razón de semejanza entre los triángulos ABC y A'B'C' es $\frac{3}{5}$, tenemos que las razón entre las áreas de estos triángulos es el cuadrado de la razón de semejanza, esto es $\frac{9}{25}$, lo que equivale a $\frac{36}{100}$, por lo tanto III es también verdadera.

Respuesta, I, II y III son verdaderas.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. En la figura, las rectas DB y CE se intersectan en A y $\overline{BC}$ // $\overline{DE}$. Si BC = 2 cm, DE = 5 cm y BD mide un cm más que AB, entonces AB mide:



A) 1 cm

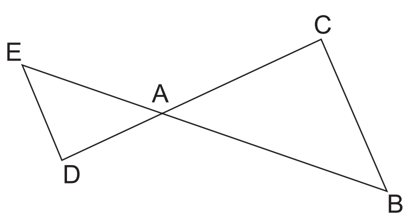
B) $\frac{2}{3}$ cm

C) $\frac{3}{2}$ cm

D) 2 cm

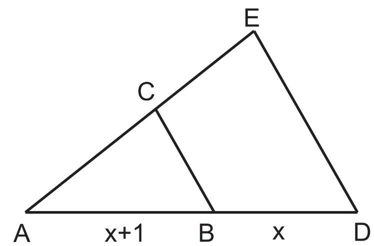
E) 3 cm

2. En la figura, los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{BE}$ se intersectan en el punto A. Si $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$, DA = 4 cm, DC = 12 cm y BC = 6 cm, entonces DE mide:



A) 1,5 cm
B) 2 cm
C) 3 cm
D) 4 cm
E) 4,5 cm

3. En la figura, $\overline{BC}$ // $\overline{DE}$ y C y B pertenecen respectivamente a $\overline{AE}$ y $\overline{AD}$. Si AC = 8 cm y CE = 6 cm, entonces x =



A) 2 cm

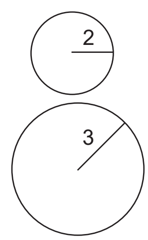
B) 3 cm

C) 4 cm

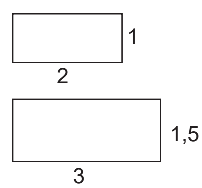
D) 5 cm

E) $\frac{2}{3}$ cm

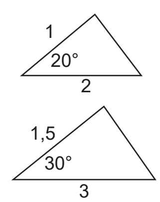
4. ¿En cuál(es) de las siguientes situaciones existe una semejanza entre las figuras?

I) 

Las figuras son circunferencas

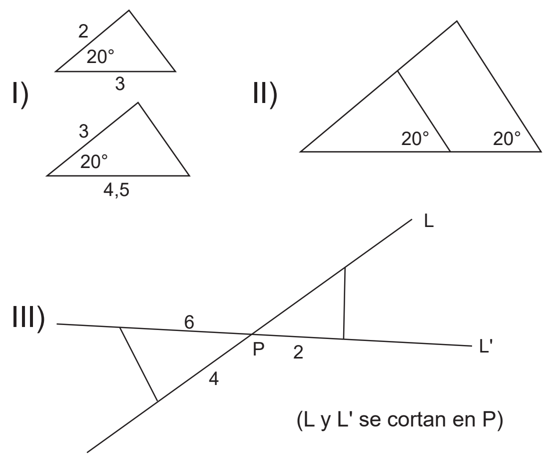
II) 

Las figuras son rectángulos

III) 

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

5. ¿En cuál(es) de las siguientes situaciones hay dos triángulos semejantes?

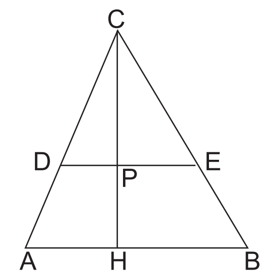


A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

6. Un poste vertical de 2,7 metros de alto, proyecta una sombra en el suelo de 1,8 metros y en ese mismo instante un niño cercano a él, parado verticalmente al suelo, proyecta una sombra de 80 cm, ¿cuál es la estatura del niño?

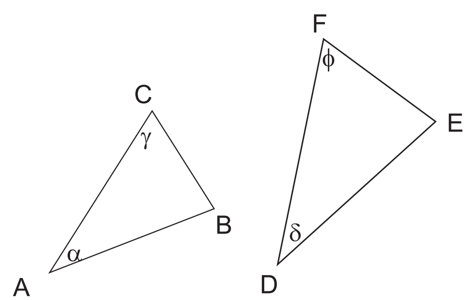
A) 90 cm
B) 100 cm
C) 120 cm
D) 150 cm
E) 160 cm

7. En la figura, $\overline{CH}$ es la altura del triángulo ABC y los puntos D y E están en los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de este triángulo, de modo que $\overline{DE}$ // $\overline{AB}$. Si las rectas CH y DE se intersectan en P, DE = 16 cm, CP : PH = 2 : 1, entonces AB mide:



A) 18 cm
B) 24 cm
C) 28 cm
D) 30 cm
E) 32 cm

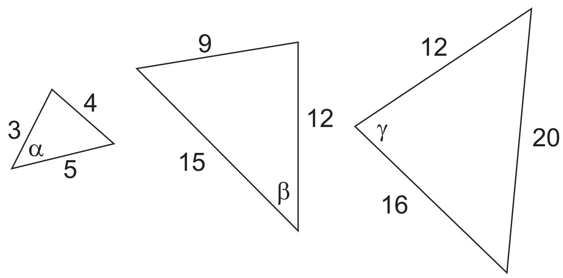
8. Se puede determinar que los triángulos ABC y DEF son semejantes, sabiendo que:



(1) DE=1,2AB y FE=1,2BC
(2) $\alpha+\gamma=\delta+\phi$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

9. Según los datos dados en la figura, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) $\alpha + \beta = \gamma$

II) $\alpha = \beta$

III) $\alpha > \beta$

A) Solo I

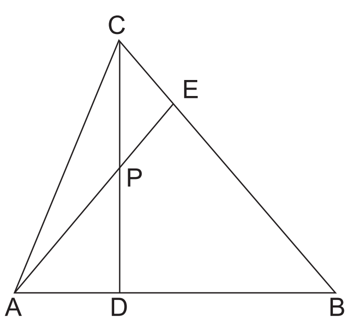
B) Solo III

C) Solo I y II

D) Solo I y III

E) Ninguna de ellas.

10. En la figura, $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ son alturas del ΔABC, si AD=3 cm, PD=4 cm y CE = 2 cm, entonces ¿cuánto mide $\overline{PC}$?



A) 1,2 cm

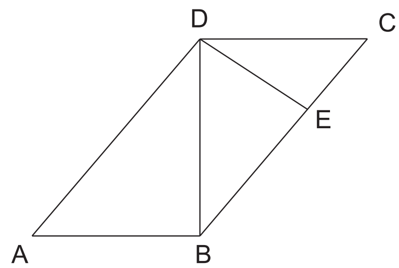
B) 2,5 cm

C) $2,\overline{6}$ cm

D) $3,\overline{3}$ cm

E) No se puede determinar.

11. En la figura, ABCD es un paralelogramo, E pertenece al lado $\overline{BC}$ y los ángulos ABD y DEC son rectos. Si AB = 6 cm, BD = 8 cm, entonces $\overline{DE}$ mide:



A) 4,2 cm

B) 4,8 cm

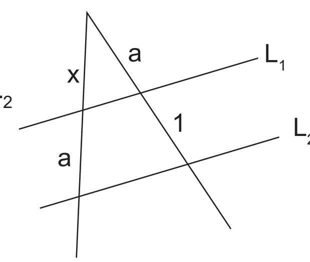
C) 4,0 cm

D) 6,0 cm

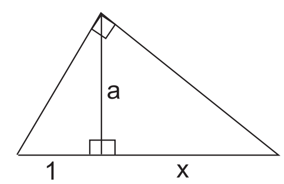
E) 6,2 cm

12. ¿En cuál de las siguientes situaciones se cumple que $a^2=x$?

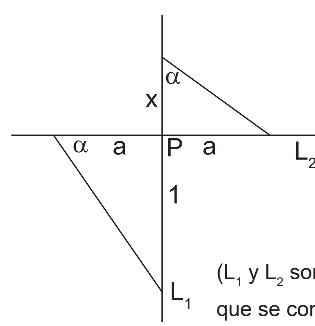
I) $L_1 // L_2$



II)



III)



(L_1 y L_2 son rectas que se cortan en P)

A) Solo I

B) Solo II

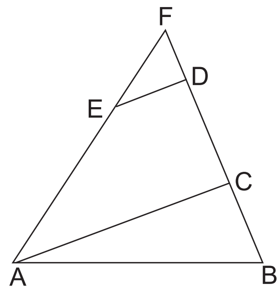
C) Solo I y II

D) Solo I y III

E) I, II y III

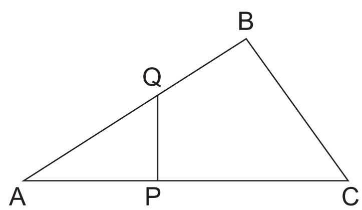
13. En la figura, C y D pertenecen a $\overline{BF}$, $\overline{ED}$ // $\overline{AC}$ y $\overline{AC} \perp \overline{BF}$. Si ED = 4 cm, DC = 6 cm, AB = 13 cm y BC = 5 cm, entonces EF =

A) 5 cm
B) 6 cm
C) $2\sqrt{13}$ cm
D) $2\sqrt{5}$ cm
E) 9,6 cm



14. En la figura, los ángulos APQ y ABC son rectos y los puntos P y Q pertenecen a $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Si BQ = 1 cm y AQ = BC = 3 cm entonces $\overline{AP}$ mide:

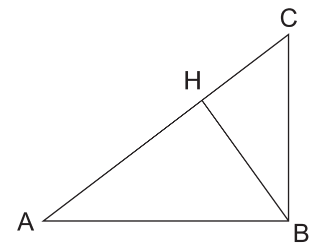
A) 1,6 cm
B) 1,8 cm
C) 2 cm
D) 2,4 cm
E) 3,2 cm



15. Si $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, donde $\overline{AB}$ es el homólogo del lado $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ es el homólogo de $\overline{EF}$, AB = a cm y DE = 1,5 a cm.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

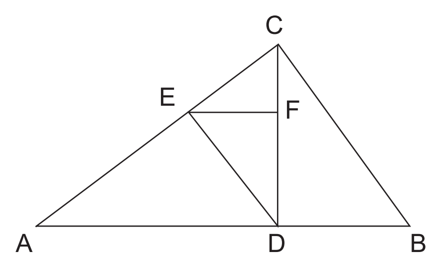
A) Si el perímetro del triángulo ABC es 18 cm, entonces el perímetro del triángulo DEF es 27 cm.
B) Si el ∢ACB es recto, entonces el ∢DFE también.
C) Si el área del triángulo DEF es 54 cm^2, entonces el área del triángulo ABC es 24 cm^2.
D) Si $\overline{AB}$ // $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$ // $\overline{EF}$, entonces $\overline{AC}$ // $\overline{DF}$.
E) Todas las anteriores son verdaderas.

16. En la figura, el triángulo ABC es rectángulo en B y $\overline{BH}$ es una de sus alturas. Si AH : HC = 2 : 1 y AB = 4 cm, entonces $\overline{BC}$ mide:



A) 2 cm
B) $\sqrt{2}$ cm
C) $\sqrt{6}$ cm
D) $2\sqrt{6}$ cm
E) $2\sqrt{2}$ cm

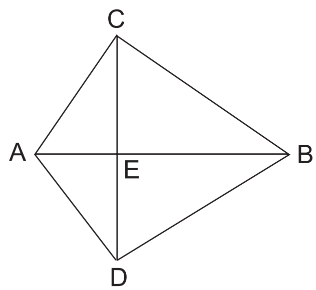
17. El ΔABC de la figura es rectángulo en C, los puntos D, E y F están respectivamente sobre los segmentos AB, AC y CD, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ // $\overline{AB}$. Si DF = 3 cm y DF = 3CF, entonces la longitud de $\overline{BC}$ es:



A) 8 cm
B) $6\sqrt{3}$ cm
C) $8\sqrt{3}$ cm
D) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm
E) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ cm

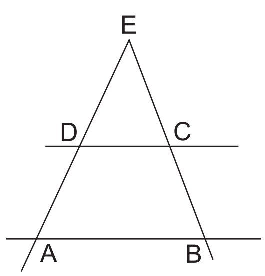
18. El ΔABC es rectángulo en C, E es la intersección de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y CE = ED.
Si $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, ¿cuál(es) de las siguientes semejanzas es (son) verdadera(s)?

I) $\Delta CEB \sim \Delta DEB$
II) $\Delta AEC \sim \Delta DEB$
III) $\Delta AED \sim \Delta CEB$



A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

19. En la figura, las rectas AB y CD son paralelas y AD y BC se intersectan en el punto E. Si AB = 9 cm, DC = 6 cm, CE = 4 cm y AE = 7,5 cm, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) El perímetro del trapecio ABCD es 19,5 cm.
II) El perímetro del triángulo DCE es 15 cm.
III) La razón entre las áreas de los triángulos DCE y ABE es 2 : 3.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

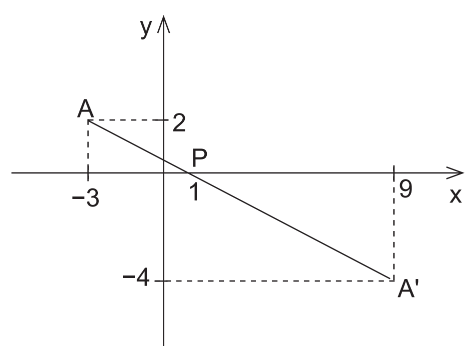
20. Un sitio rectangular está representado en un mapa por un rectángulo de lados 10 y 30 cm. Si la escala del mapa es 1:100, entonces el área del sitio en m^2 es:

A) 30 m^2
B) 300 m^2
C) 3000 m^2
D) 30000 m^2
E) 300000 m^2

21. Un fundo tiene un terreno de 16 hectáreas (1 hectárea = 10.000 m^2) y está representado en un mapa por una figura de área 100 cm^2, ¿cuál es la escala del mapa?

A) 1 : 400
B) 1 : 4000
C) 1 : 20
D) 1 : 160000
E) 1 : 16000000

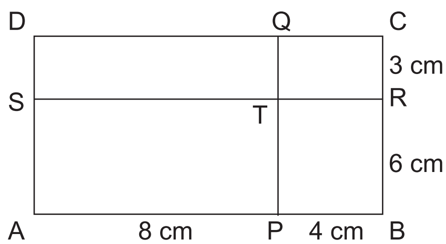
22. En la figura, al punto A(−3,2) se le ha aplicado una homotecia con centro en P(1,0) quedando en el punto (9,−4). Si al punto (0,4) se le aplica la misma homotecia, quedará en el punto:



A) (2,−8)
B) (3,−8)
C) (6,−8)
D) (3,−4)
E) (2,−6)

23. En la figura, P,Q, R y S son puntos de los lados del rectángulo ABCD. Las rectas SR y PQ son paralelas a los lados del rectángulo, intersectándose en el punto T.

Según las medidas dadas, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) QTRC se obtiene de PTSA al aplicar una homotecia con centro en T y razón −0,5.

II) ABCD se obtiene de APTS al aplicar una homotecia con centro en A y razón 4 : 3.

III) TQDS se obtiene de TPBR al aplicar una homotecia con centro en T y razón −2.

A) Solo I

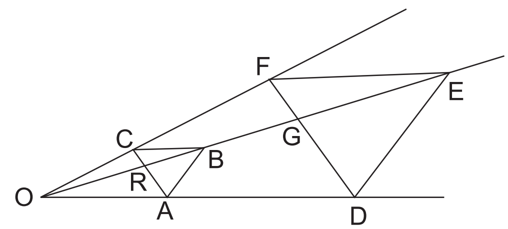
B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y III

24. Al triángulo ABC de la figura, se le aplicó una homotecia con centro en O y razón $\lambda = \frac{5}{2}$, transformándose en el triángulo DEF. Si OR=2 cm y RB=1 cm, entonces BG=



A) 4,5 cm

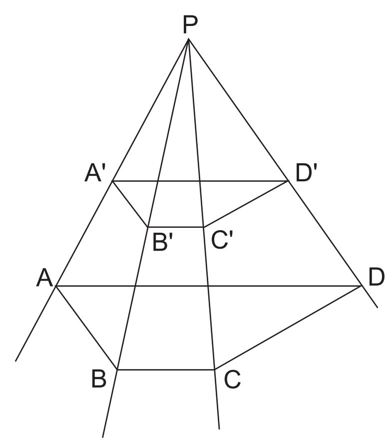
B) 3,5 cm

C) 3 cm

D) 2 cm

E) 2,5 cm

25. Al cuadrilátero ABCD de la figura se le ha aplicado una homotecia con centro en P transformándose en el cuadrilátero A'B'C'D'. Si PB : BB' = 5 : 2 y área del cuadrilátero ABCD es A cm^2, entonces el área del cuadrilátero homotético es:



A) $\frac{2}{5}$ A cm^2

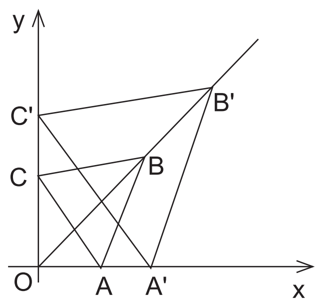
B) $\frac{3}{5}$ A cm^2

C) $\frac{4}{25}$ A cm^2

D) $\frac{9}{25}$ A cm^2

E) $\frac{4}{9}$ A cm^2

26. En la figura, al ΔABC se le ha aplicado una homotecia con centro en el origen cuya imagen es el $\Delta A'B'C'$.
Si el punto B(3,6) se transforma en el punto B'(5,10), ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdaderas?



I) Si OC = 6 cm, entonces CC' = 4cm.

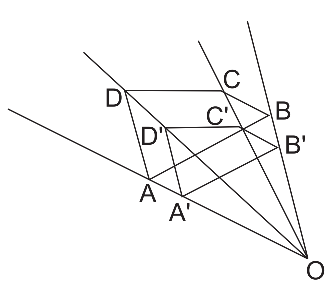
II) Si área ΔABC = 12 cm^2, entonces área $\Delta A'B'C'$ = 20 cm^2.

III) Si BB' = 8 cm, entonces OB' = 20 cm.

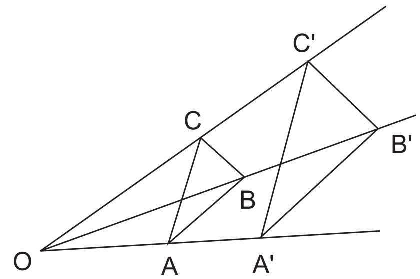
A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

27. Al cuadrilátero ABCD se le ha aplicado una homotecia con centro en O, transformándose en el cuadrilátero A'B'C'D' cuya área es un 64% del cuadrilátero original.
Si el perímetro de A'B'C'D' es 20 cm, ¿cuál es el perímetro de ABCD?

A) 16 cm
B) 25 cm
C) 31,25 cm
D) 32,8 cm
E) 56 cm



28. Al ΔABC de la figura, se le ha aplicado una homotecia con centro en O, transformándose en el triángulo A'B'C'. Se puede determinar la razón de homotecia, sabiendo que:

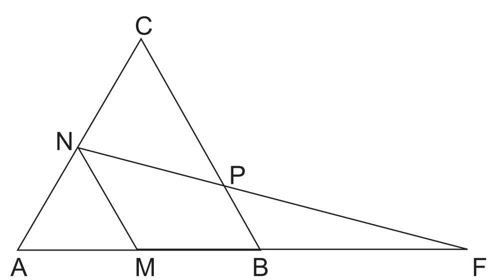


(1) $\dfrac{\text{perímetro } \Delta OA'B'}{\text{perímetro } \Delta OAB} = \dfrac{5}{2}$

(2) El área de OABC es un 16% del área de OA'B'C'.

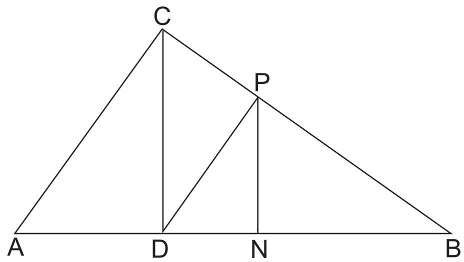
A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

29. En la figura, el triángulo ABC es equilátero cuyo lado mide 12 cm, M y N son puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si F es punto de la recta AB, NF y BC son rectas que se interceptan en P y CP es a PB como 2 es a 1, entonces $\overline{BF}$ mide :



A) 3 cm
B) 4 cm
C) 8 cm
D) 12 cm
E) 18 cm

30. En la figura, el triángulo ABC es rectángulo en C, D y N pertenecen al lado $\overline{AB}$ y P pertenece al lado $\overline{BC}$, de modo que $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $\overline{DP} \perp \overline{BC}$ y $\overline{DB} \perp \overline{NP}$. Si PB = 2 cm y NB = 1 cm, entonces $\overline{AC}$ mide:



A) 8 cm

B) $2\sqrt{3}$ cm

C) $4\sqrt{3}$ cm

D) $8\sqrt{3}$ cm

E) $2\sqrt{15}$ cm

31. ABCD es un cuadrilátero, con ángulos interiores rectos en B y D. Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, son perpendiculares y se intersectan en F, de modo que F es el punto medio de $\overline{BD}$. Si E es el punto medio de $\overline{AC}$, DE = 5 cm y FE = 3 cm, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El perímetro del ΔBED es 18 cm.

II) El área del cuadrilátero ABCD es 40 cm^2.

III) El perímetro del cuadrilátero ABCD es $12\sqrt{5}$ cm.

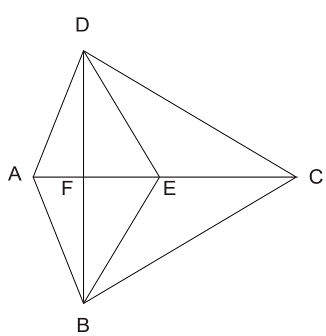
A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y III



32. En la figura, $\sphericalangle CDE \cong \sphericalangle CAB$ y CD : DB = 3 : 1, entonces AE =

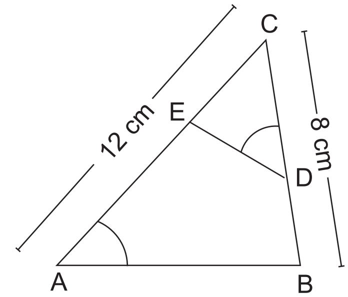
A) 4 cm

B) 6 cm

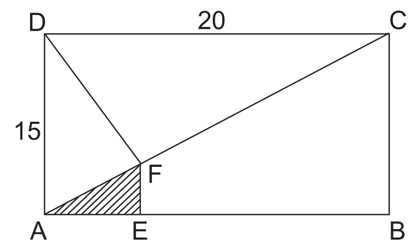
C) 8 cm

D) 9 cm

E) 11 cm



33. ABCD es un rectángulo, $\overline{DF} \perp \overline{AC}$, $\overline{FE} \perp \overline{AB}$ y los puntos F y E están en AC y AB respectivamente. Si AD = 15 cm y DC = 20 cm, entonces AE =



A) 7,2 cm

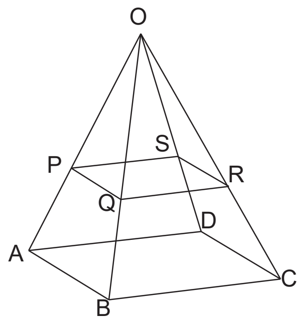
B) 6,8 cm

C) 6,5 cm

D) 6,2 cm

E) 6,0 cm

34. En la figura, se tiene una pirámide de base rectangular, que se ha cortado por un plano paralelo a la base, determinándose el cuadrilátero PQRS:



¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\dfrac{\text{Perímetro PQRS}}{\text{Perímetro ABCD}} = \dfrac{OP}{OA}$

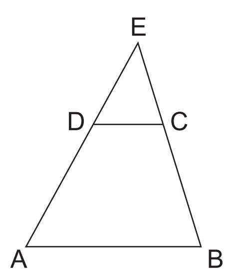
II) $\dfrac{\text{Área PQRS}}{\text{Área ABCD}} = \dfrac{PR}{DB} \cdot \dfrac{PQ}{AB}$

III) $\dfrac{\text{Perímetro OPR}}{\text{Perímetro OAC}} = \dfrac{\text{Perímetro PQRS}}{\text{Perímetro ABCD}}$

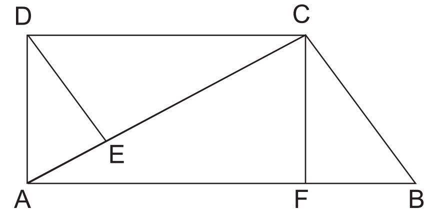
A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

35. En la figura, $\overline{CD}$ es paralelo a $\overline{AB}$, con D y E puntos de $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$ respectivamente.
Si DC : AB = 2 : 3 y el área del ΔDCE es 40 cm^2, ¿cuál es el área del trapecio ABCD?

A) 10 cm^2
B) 20 cm^2
C) 50 cm^2
D) 60 cm^2
E) 90 cm^2



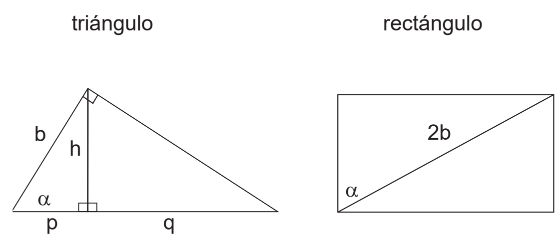
36. En la figura, AFCD es un rectángulo, F pertenece a $\overline{AB}$ y $\sphericalangle$DEC y $\sphericalangle$ACB son rectos. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) AE · AC = AD · CF
II) AE · BC = AD · BF
III) AE · FA = CF · AD

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

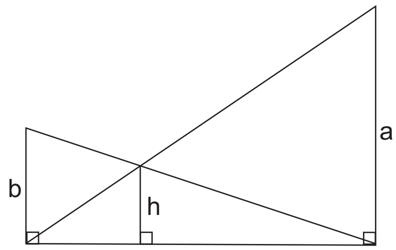
37. En la figura adjunta, se muestra un triángulo y un rectángulo:



¿Cuál es el área del rectángulo?

A) $4p^2q$
B) $p\sqrt{pq}$
C) $2p\sqrt{pq}$
D) $4p\sqrt{pq}$
E) $p\sqrt{p(p+q)}$

38. Según la información dada en la figura h =



A) $\dfrac{a + b}{b}$

B) $\dfrac{ab}{a + b}$

C) $\dfrac{a + b}{a}$

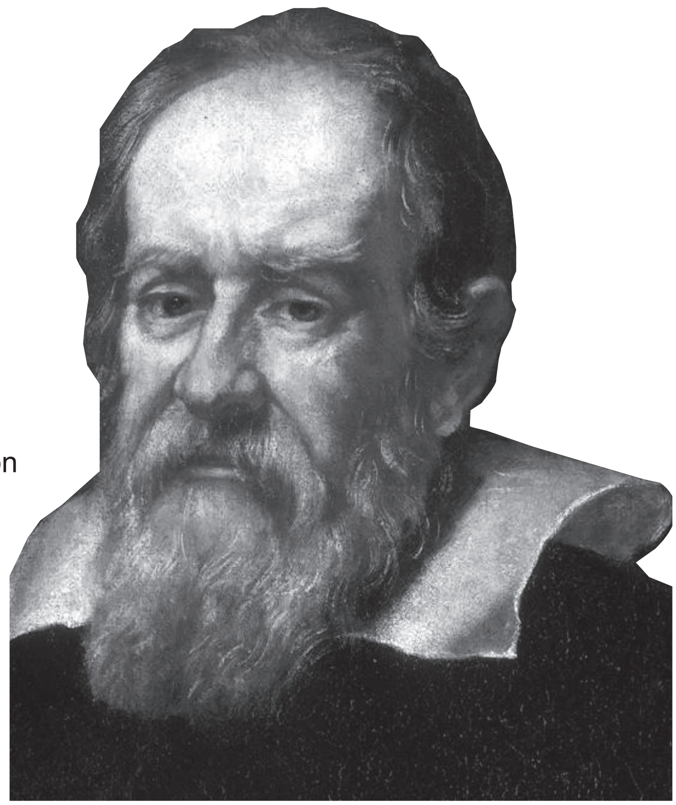
D) $\dfrac{2ab}{a + b}$

E) $\dfrac{a + b}{2ab}$

RESPUESTAS CAPÍTULO 11									
1. D	**2.** C	**3.** B	**4.** C	**5.** E	**6.** C	**7.** B	**8.** C	**9.** D	**10.** D
11. B	**12.** E	**13.** A	**14.** D	**15.** E	**16.** E	**17.** E	**18.** E	**19.** C	**20.** B
21. B	**22.** B	**23.** A	**24.** D	**25.** D	**26. C**	**27.** B	**28.** D	**29. D**	**30.** D
31. E	**32.** C	**33.** A	**34.** E	**35.** C	**36. C**	**37.** D	**38. B**		

Capítulo
3

VECTORES



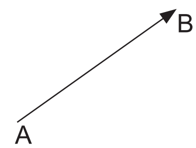
En la descripción del movimiento parabólico, Galileo se dio cuenta que se componía de un movimiento vertical y uno horizontal, para combinar estos dos movimientos se tenía que crear un nuevo campo teórico; esto abrió las puertas a nuevos entes llamados vectores, los cuales son fundamentales en la modelación de fenómenos físicos.

CONCEPTOS CLAVES

- Vector de posición
- Ponderación de un vector
- Igualdad entre vectores
- Operatoria con vectores

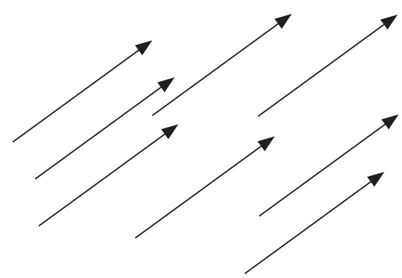
ELEMENTOS BÁSICOS

- **Vector geométrico**
  Un vector geométrico se distingue por tener un punto inicial (u origen), un punto final, una dirección, un sentido y una magnitud.

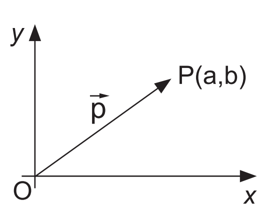


La magnitud o "largo" del vector también se denomina longitud o norma.

- **Vectores equipolentes**
  Son aquellos que tienen igual dirección, sentido y magnitud.

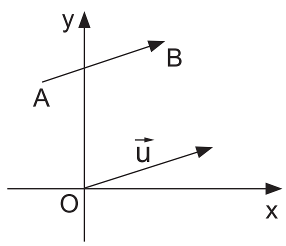


- **Vector de posición**
  Supongamos que tenemos un punto P en el plano cartesiano bidimensional, el vector cuyo punto inicial es el origen del sistema cartesiano y el punto final es el punto P, se llama vector de posición del punto P y generalmente se designa utilizando la letra minúscula que designa al punto:



Como hay una correspondencia biunívoca entre los puntos y los vectores de posición, cuando hablemos de vectores en un sistema cartesiano, podemos referirnos ya sea a la flecha que va desde al origen al punto o bien a las coordenadas del punto al cual estamos haciendo referencia.
En la figura, cuando hablamos del vector $\vec{p}$, podemos referirnos a $\overrightarrow{OP}$ en el sentido geométrico o a las coordenadas del punto P, es decir $\vec{p}$ = (a,b).

- **Vector libre**
Un vector libre es aquél cuyo punto inicial no coincide con el origen del sistema cartesiano. Como veremos más adelante, todo vector se puede asociar a un vector equipolente con él, cuyo punto inicial sea el origen del sistema cartesiano.



El vector libre $\overrightarrow{AB}$ es equipolente al vector $\vec{u}$

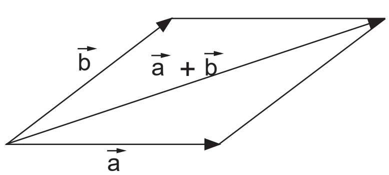
IGUALDAD Y OPERATORIA ENTRE VECTORES

- **Igualdad de vectores**
Dos vectores son iguales cuando sus respectivas coordenadas son iguales:

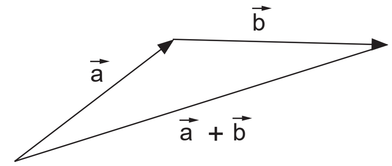
En $\mathbb{R}^2$: (a,b) = (c,d) $\leftrightarrow$ a = c y b = d

- **Adición de vectores**
Para sumar dos vectores se aplica la ley del triángulo o la ley del paralelogramo, de acuerdo a la posición en que se encuentran los vectores.

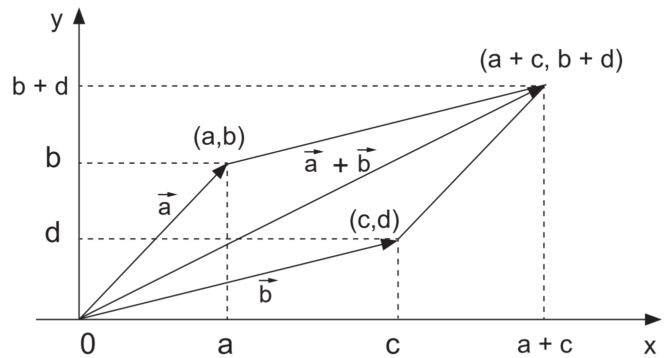
Si los vectores tienen el punto de partida en común, ocupamos la ley del paralelogramo:



Si el punto de llegada de uno de los vectores coincide con el punto de inicio del otro, ocupamos la ley del triángulo:



Si se trata de sumar vectores dados en coordenadas, la suma se obtiene sumando las coordenadas respectivas:



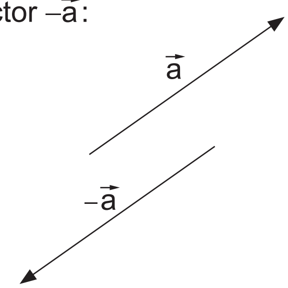
En $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{(a,b) + (c,d) = (a + c\ ,\ b + d)}$$

- **Sustracción de vectores**

  El inverso aditivo u opuesto de un vector es aquél que tiene misma dirección, misma longitud, pero distinto sentido.

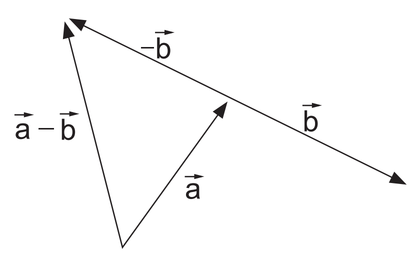
  El opuesto de $\vec{a}$ es el vector $-\vec{a}$:



Ahora, para restar dos vectores, al primero se le suma el opuesto del segundo

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = a + (-\vec{b})}$$

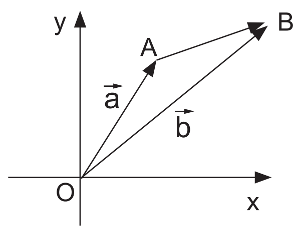
Geométricamente, la resta de vectores se visualiza de la siguiente forma:



Cuando los vectores están dados por sus coordenadas, la resta se obtiene restando las coordenadas respectivas:

En $\mathbb{R}^2$: $(a,b) - (c,d) = (a - c\,,\, b - d)$

Es importante considerar que si tenemos dos puntos en $\mathbb{R}^2$, podemos determinar un vector libre $\overrightarrow{AB}$, restando el vector de posición de B con el vector de posición de A (punto final menos el punto inicial):



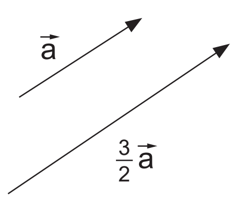
Observa en la figura que

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

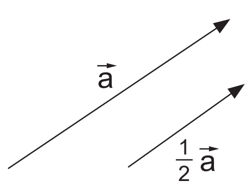
En $\mathbb{R}^2$: Si $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ $\leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

- **Ponderación de un vector**
  La ponderación es una operación entre un escalar (lo que asumiremos en este caso que es un número real) y un vector.
  Si tenemos un vector $\vec{a}$ y lo ponderamos por el escalar λ, obtenemos el vector $\lambda\vec{a}$, el cual tiene la misma dirección que $\vec{a}$, pero su sentido y el módulo pueden variar dependiendo de la magnitud y signo del escalar (siempre que $\lambda \neq 0$)
  Geométricamente, tenemos las siguientes situaciones:

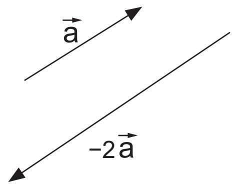
SI $\lambda > 1$, el vector conserva el sentido y aumenta su módulo:



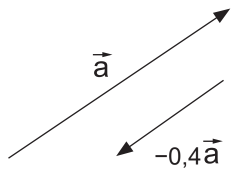
SI $0 < \lambda < 1$, el vector conserva el sentido y disminuye su módulo:



SI $\lambda < -1$, el vector, cambia el sentido y aumenta su módulo:



SI $-1 < \lambda < 0$, el vector conserva la dirección, cambia el sentido y disminuye su módulo:



En el caso que los vectores estén dados por sus coordenadas, entonces multiplicamos el ponderador, con cada una de sus coordenadas:

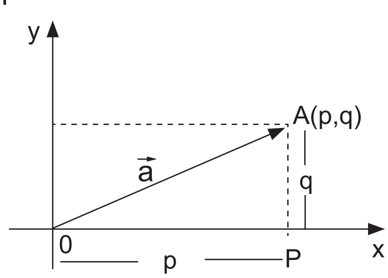
$$\boxed{\text{En } \mathbb{R}^2\text{: } \lambda\,(a,b) = (\lambda a\ ,\ \lambda b)}$$

LONGITUD O NORMA DE UN VECTOR

La longitud o norma de un vector es la distancia que hay entre el punto de partida y el punto de llegada y se designa con el símbolo $||\vec{a}||$ o bien $|\vec{a}|$.
Si los vectores están dados en términos de sus coordenadas, tenemos que

$$\boxed{\text{En } \mathbb{R}^2\text{: Si } \vec{a} = (p,q) \ \leftrightarrow\ ||\vec{a}|| = \sqrt{p^2 + q^2}}$$

Se puede comprobar si utilizamos el teorema de Pitágoras.
En $\mathbb{R}^2$, en el ΔOPA, utilizando el teorema de Pitágoras, tenemos que $OA^2 = OP^2 + PA^2$, entonces $OA = \sqrt{p^2 + q^2}$.



$$\boxed{|OA| = ||\vec{a}|| = \sqrt{p^2 + q^2}}$$

El módulo tiene las siguientes propiedades:

1. $||\vec{a}|| \in \mathbb{R}$ y $||\vec{a}|| \geq 0$
2. $||\vec{a} + \vec{b}|| \leq ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$ (desigualdad triangular)
3. $||\lambda\vec{a}|| = |\lambda|\ ||\vec{a}||$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

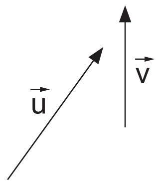
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Para calcular la distancia entre dos puntos, tenemos la siguiente expresión:

En $\mathbb{R}^2$, Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura, ¿cuál de las alternativas representa mejor a su suma?



A) 

B) 

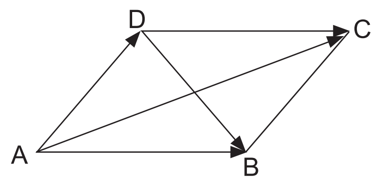
C) 

D) 

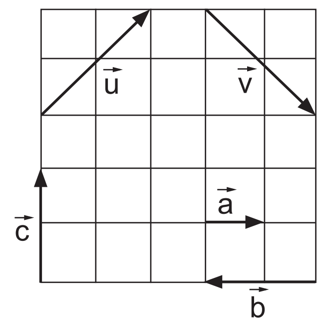
E) 

2. En la figura, ABCD es un paralelogramo, entonces $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} =$

A) $\overrightarrow{AD}$
B) $2\overrightarrow{AD}$
C) $\overrightarrow{AB}$
D) $2\overrightarrow{AB}$
E) $\vec{0}$



3. En la figura, si todos los cuadrados son congruentes, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) $\vec{u} + \vec{v} = -2\vec{b}$
II) $\vec{c} + 2\vec{a} = \vec{u}$
III) $\vec{v} - \vec{u} = 2\vec{c}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

4. ¿Cuál de los siguientes vectores tiene una longitud distinta a los demás?

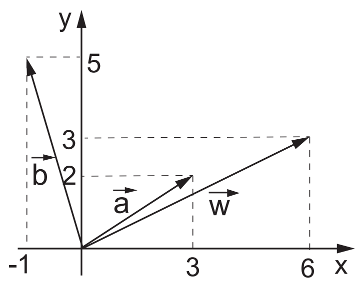
A) $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$
B) $(1, -\sqrt{5})$
C) $(-2, \sqrt{2})$
D) $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$
E) $(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$

5. Sea el vector $\vec{v} = (u + 1, u + 4)$, se puede determinar este vector, sabiendo que:

(1) Su longitud es 15 unidades.
(2) $(u+1)(u+4)>0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

6. Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{w}$, ¿qué vector hay que sumarle a $\vec{a} - \vec{b}$ para que resulte el vector w?



A) (1,5)
B) (2,5)
C) (1,6)
D) (2,6)
E) (4,−4)

7. Sean los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$, tales que $\vec{p} + \vec{q} = (2, -5)$ y $\vec{p} - 2\vec{q} = (-4, 1)$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $\vec{p} - \vec{q} = (-2, -1)$
B) $\vec{p} + 2\vec{q} = (4, -7)$
C) $2\vec{p} - \vec{q} = (-2, -4)$
D) $\vec{p} - 3\vec{q} = (6, -5)$
E) $3\vec{p} - 4\vec{q} = (-8, -1)$

8. Si $\vec{u} = (6,-3)$ y $\vec{u} - \vec{v}$ está en el tercer cuadrante, ¿cuál de los siguientes vectores podría corresponder a $\vec{v}$?

A) (2,5)
B) (–2,–4)
C) (7,2)
D) (10,–7)
E) (12,–4)

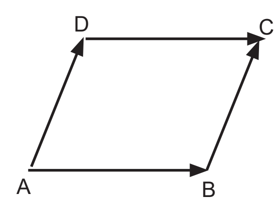
9. Sean los vectores $\vec{u} = (3,-1)$, $\vec{v} = (2,1)$ y $\vec{w} = (-1,2)$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\vec{u} - \vec{v} = -\vec{w}$
II) $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{v} - \vec{w}$
III) $|\vec{u} + 2\vec{w}| = |\vec{v} - \vec{w}|$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

10. Se puede determinar que ABCD es un paralelogramo, sabiendo que:

(1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$
(2) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$



A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

11. Sea el vector $\vec{a} = (p - 1, p)$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Existen exactamente dos valores de p para los cuales la longitud de $\vec{a}$ es 5 unidades.

II) Si $0 < p < 1$, entonces $\vec{a}$ está en el segundo cuadrante.

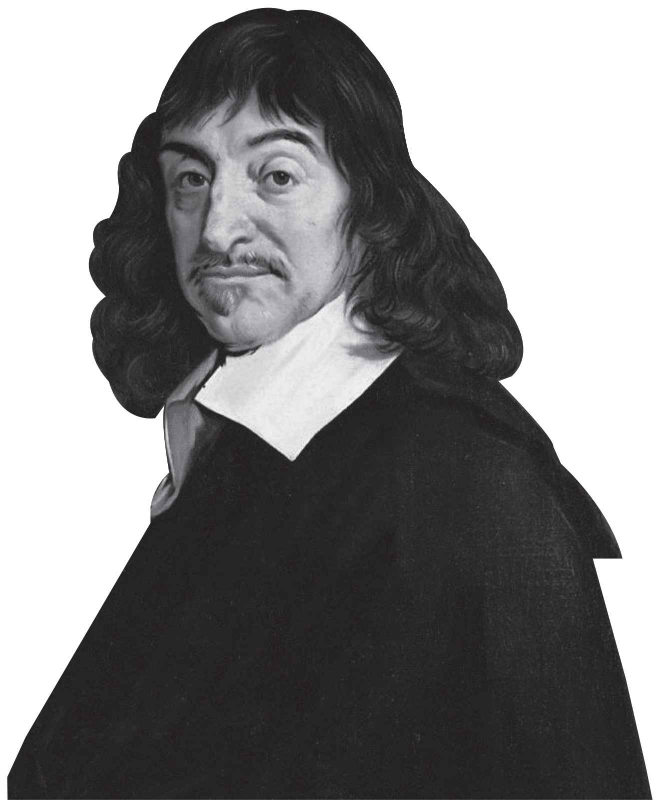
III) Si $\vec{a}$ está en uno de los ejes coordenados su longitud es una unidad.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

RESPUESTAS CAPÍTULO 12									
1. B	**2.** D	**3.** C	**4.** E	**5.** E	**6.** D	**7.** D	**8.** C	**9.** E	**10.** B
11. E									

Capítulo
4

GEOMETRÍA ANALÍTICA



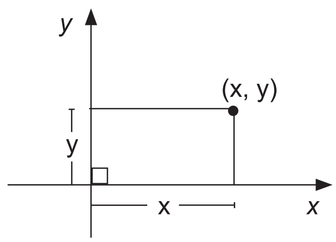
Los orígenes de la Geometría Analítica se atribuyen a René Descartes (1596-1650) lo que se puede hallar en el apéndice La Géométrie de su obra "Discurso del Método", aunque se sabe que el matemático Pierre de Fermat utilizaba este método antes que esta publicación.

CONCEPTOS CLAVES

- Distancia entre dos puntos
- Ecuación general de recta
- Sistema de ecuaciones
- Ecuación principal de recta
- Pendiente

ELEMENTOS BÁSICOS

- **Sistema cartesiano**
  Todo punto en un sistema cartesiano queda determinado por un par ordenado, donde la primera coordenada se llama abscisa y la segunda se llama ordenada:

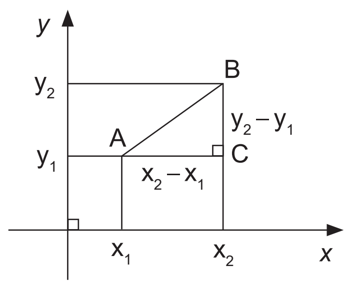


«x»: abscisa
«y»: ordenada

- **Distancia entre dos puntos**
  La distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ está dada por la fórmula:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta fórmula se puede demostrar si se utiliza el teorema de Pitágoras en el triángulo ACB, rectángulo en C.

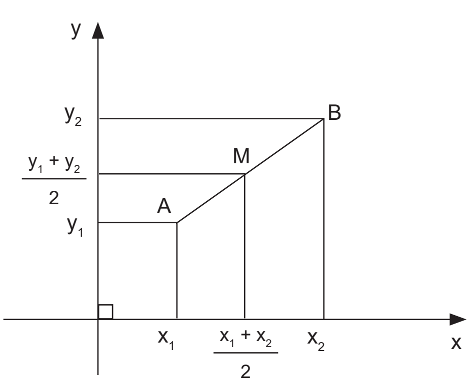


En $\triangle ABC$: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, por lo tanto:

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

- **Punto medio de un segmento**
  Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces el punto medio M del segmento AB tiene como coordenadas $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$



$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

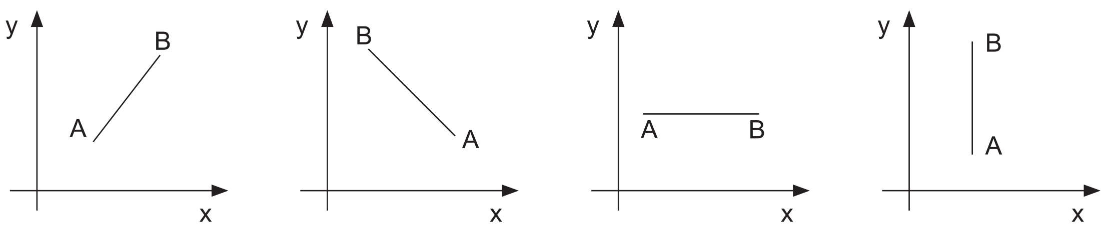
- **Pendiente de una recta**

  Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces la pendiente **m** del segmento AB se define como $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, con $x_1 \neq x_2$

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

La pendiente es un indicador de cuánto varía la variable "y" al variar "x".
Tenemos las siguientes situaciones:
Si la pendiente es positiva, el segmento forma un ángulo agudo con el eje «x».
Si la pendiente es negativa, el segmento forma un ángulo obtuso con el eje «x».
Si la pendiente es cero, el segmento es paralelo al eje «x».
Si la pendiente no existe, el segmento es paralelo al eje «y».

Las situaciones anteriores se ilustran en los siguientes gráficos:



$m > 0$ $\quad$ $m < 0$ $\quad$ $m = 0$ $\quad$ $\nexists\, m$

Ejemplo:
Supongamos que tenemos los puntos A(3,1) , B(4,3) y C(-2,-9) y queremos determinar si los tres puntos están sobre una misma recta (es decir son colineales).
Solución:
Un método es calcular las pendientes de dos trazos, por ejemplo $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, si estas resultan ser iguales entonces los puntos son colineales.
Pendiente de $\overline{AB}$:$\dfrac{3-1}{4-3} = 2$, pendiente de $\overline{BC}$:$\dfrac{-9-3}{-2-4} = \dfrac{-12}{-6} = 2$, luego como las pendientes son iguales se deduce que los puntos son colineales.
Segundo método, calcularemos las distancias, AB, BC y AC, si resulta que la suma de las dos menores nos da la mayor, entonces los puntos son colineales.
$AB=\sqrt{(4-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$, $BC=\sqrt{(-2-4)^2 + (-9-3)^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ y
$AC=\sqrt{(-2-3)^2 + (-9-1)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ y como podemos comprobar fácilmente que, AB+AC = BC, entonces los tres puntos son colineales.

ECUACIÓN DE RECTA

Todos los puntos (x, y) que satisfacen una ecuación de tipo $ax + by + c = 0$, con a, b y c números reales, se encuentran sobre una recta.
Para determinar una ecuación de recta se necesitan dos puntos, o un punto y su pendiente.

- **Ecuación por dos puntos**
  La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ se puede determinar a través de la fórmula:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \quad (\text{con } x_1 \neq x_2)$$

- **Ecuación punto pendiente**
  Supongamos que tenemos el punto (x_1, y_1) y queremos determinar la ecuación de la recta que pasa por este punto y tiene pendiente "m", para ello ocupamos la ecuación:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

  Esta ecuación se denomina ecuación punto − pendiente.

- **Ecuación general de la recta**
  Es una ecuación en dos variables x e y, donde uno de sus miembros es igual a cero:

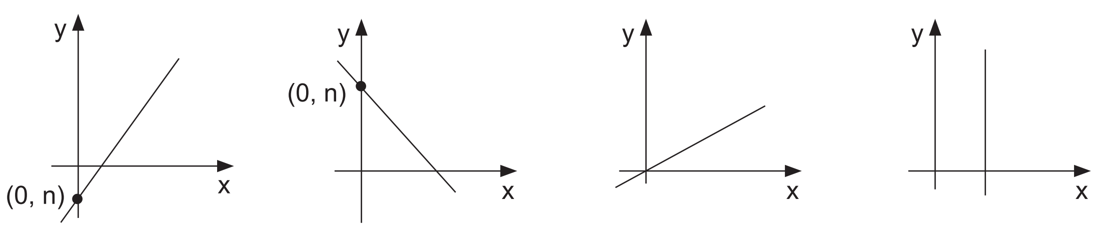
$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

- **Ecuación principal de la recta**
  Si en la ecuación general despejamos la variable "y", obtenemos una ecuación del tipo:

$$\boxed{y = mx + n}$$

  Esta ecuación se llama ecuación principal de la recta, donde "m" corresponde a la pendiente de la recta o coeficiente de dirección y "n" es el coeficiente de posición e indica donde la recta intersecta el eje "y".

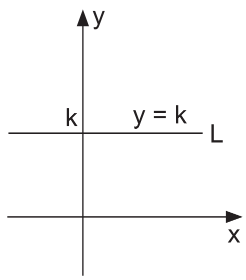
  Por ejemplo, podemos tener las siguientes situaciones:



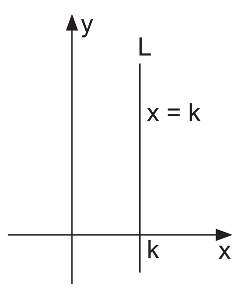
$m > 0$	$m < 0$	$m > 0$	$\nexists$ m
$n < 0$	$n > 0$	$n = 0$	$\nexists$ n

- **Rectas paralelas a los ejes**

  Una recta paralela al eje x es de la forma y = k, donde k es una constante:

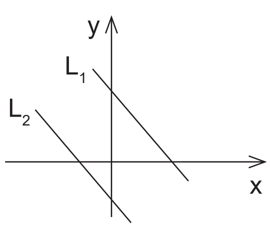


  Una recta paralela al eje y es de la forma x = k, donde k es una constante:



RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

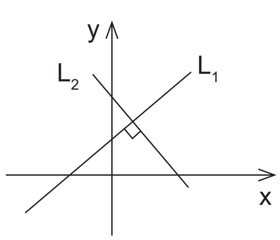
- **Rectas paralelas**
  Dos rectas son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente:



Sean las rectas: L_1: $y = m_1x + n_1$ y L_2: $y = m_2x + n_2$:

$$\boxed{L_1 \,//\, L_2 \quad \text{si y solo sí } m_1 = m_2}$$

- **Rectas perpendiculares**
  Dos rectas son perpendiculares si y solo sí el producto de las pendientes es –1:



Sean las rectas: L_1: $y = m_1x + n_1$ y L_2: $y = m_2x + n_2$

$$\boxed{L_1 \perp L_2 \quad \text{si y solo sí } m_1 \cdot m_2 = -1}$$

Observación: los teoremas mencionados, tanto como el de las rectas paralelas como el de las rectas perpendiculares, son válidos cuando ambas pendientes están definidas.
Por ejemplo si una recta es paralela al eje "x" y otra es paralela al eje "y", resultan ser pendiculares pero el producto de sus pendientes **no** es -1, ya que la horizontal tiene pendiente cero y la vertical tiene una pendiente no definida en los reales.

Ejemplo: determina una recta que pasa por el punto $(-4, 5)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $2x - 3y + 4 = 0$

Solución:

Sabemos que la recta de ecuación $ax + by + c = 0$ tiene como pendiente $m = -\frac{a}{b}$, en este caso la recta de ecuación $2x - 3y + 4 = 0$, tendría pendiente $m = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$, como las rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes es -1,

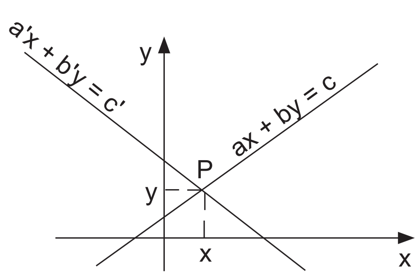
entonces $\frac{2}{3} \cdot m_2 = -1 \rightarrow m_2 = -\frac{3}{2}$. Luego, de la recta que buscamos sabemos que pasa por el punto $(-4, 5)$ y tiene pendiente $-\frac{3}{2}$, ocupando la ecuación punto pendiente, obtenemos la recta de ecuación $y - 5 = -\frac{3}{2}(x + 4)$, si la desarrollamos obtenemos la ecuación general $3x + 2y + 2 = 0$.

SISTEMA DE ECUACIONES

Este tema ya lo vimos en el cap 4, pero lo volveremos a estudiar para conectarlo con la ecuación de la recta.
Cuando resolvemos un sistema de ecuaciones de dos ecuaciones lineal en dos incógnitas, como el siguiente:

$$\begin{array}{|l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}$$

Lo que estamos haciendo es encontrar el punto P donde se intersectan las rectas:



Habíamos visto que al resolver un sistema de la forma $\begin{array}{|l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}$, tenemos tres situaciones:

- **Sistema compatible determinado**

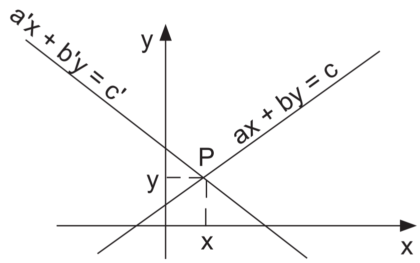
Esto ocurre cuando las pendientes de las rectas son distintas, por lo tanto se intersectan en un solo punto, luego la solución del sistema es un solo valor tanto para “x” como para “y”.

En la ecuación ax+by=c, tenemos que su pendiente $m_1 = -\frac{a}{b}$, mientras que en la recta

a’x+b’y=c’, su pendiente es $m_2 = -\frac{a'}{b'}$, como las pendientes son distintas, tenemos que

$-\frac{a}{b} \neq -\frac{a'}{b'}$, o equivalentemente $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$.

De lo anterior deducimos que si $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, entonces las rectas son secantes y el sistema tendría una única solución.



Si $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, entonces las rectas son secantes y la solución del sistema es única.

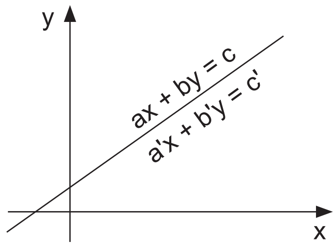
- **Sistema compatible indeterminado**

Esto ocurre cuando las rectas tienen igual pendiente e igual coeficiente de posición, en este caso hay infinitas soluciones tanto para “x” como para “y”.

Esto ocurre cuando todos los coeficientes son proporcionales $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ y las rectas son paralelas concidentes.

Tenemos que en la recta de ecuación ax+by=c, su pendiente es $m_1 = -\frac{a}{b}$ y su coeficiente de posición es $n_1 = \frac{c}{b}$, mientras que en la recta de ecuación a’x+b’y=c’, su pendiente es $m_2 = -\frac{a'}{b'}$ y $n_2 = \frac{c}{b}$, si ambas ecuaciones corresponden a una misma recta, entonces $m_1 = m_2 \leftrightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$ o bien $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ y $n_1 = n_2 \leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$ o bien $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

De lo anterior se deduce que si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, las rectas son paralelas coincidentes y el sistema tendría infinitas soluciones.

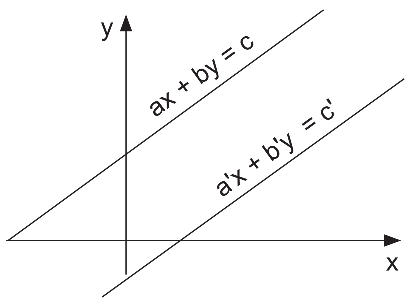


Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, entonces las rectas son coincidentes, y el sistema tendría infinitas soluciones.

- **Sistema incompatible**
  En este caso las rectas tienen igual pendiente y distinto coeficiente de posición, las rectas no se intersectan, luego el sistema no tiene soluciones.

  Según lo visto, que tuviesen igual pendiente, era equivalente a $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ y si tenían distinto coeficiente de posición, era equivalente a $\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, entonces si se cumple que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, las rectas serían paralelas no coincidentes.

  Gráficamente la situación es la siguiente:



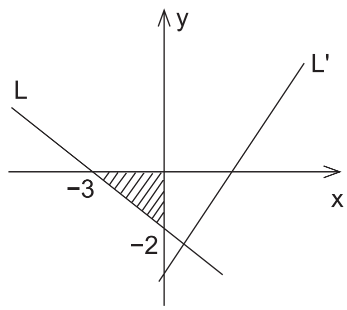
Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, entonces las rectas son paralelas no coincidentes, entonces el sistema no tiene solución.

Ejemplo:
Dado el sistema de ecuaciones $\left. \begin{array}{l} 3x - ky = 2 \\ 2x + 3y = 4 \end{array} \right|$, determina el valor de **k** para que el sistema no tenga soluciones.

Solución:
Si el sistema no tiene soluciones debe ocurrir que $\frac{3}{2} = -\frac{k}{3} \neq \frac{2}{4}$, tenemos que efectivamente $\frac{3}{2} \neq \frac{2}{4}$, por lo tanto trabajamos solo con la primera proporción: $\frac{3}{2} = -\frac{k}{3}$, multiplicando cruzado y despejando, obtenemos que $k = -\frac{9}{2}$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En la figura las rectas L y L' son perpendiculares.
Si L' pasa por el punto (3, 1), ¿cuál es la intersección de esta recta con el eje y?



Solución:

Utilizando el triángulo sombreado de la figura, podemos deducir que la pendiente de L es $-\frac{2}{3}$, también se puede obtener el mismo resultado si ocupamos la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Como las rectas son perpendiculares, el producto de las pendientes es −1, entonces $-\frac{2}{3} \cdot m \rightarrow m = \frac{3}{2}$, luego L' pasa por el punto (3, 1) y tiene pendiente $\frac{3}{2}$, para poder obtener su ecuación puedes ocupar la ecuación punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$, o bien podemos utilizar lo siguiente:

Supongamos que la ecuación principal de L' es $y = mx + n$, pero $m = \frac{3}{2}$, luego la ecuación es de la forma $y = \frac{3}{2}x + n$, pero la recta pasa por el punto (3, 1), luego $x = 3$, $y = 1$, es una solución de esta ecuación, reemplazando obtenemos $1 = \frac{3}{2} \cdot 3 + n \rightarrow n = -\frac{7}{2}$, luego la recta L' intersecta al eje y en el punto $\left(0, -\frac{7}{2}\right)$.

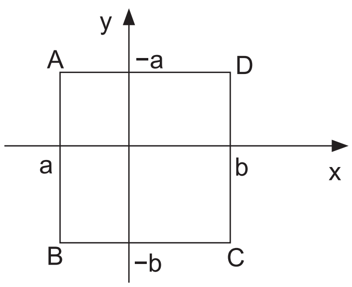
2. Sea ABCD un cuadrilátero cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados.
Si las coordenadas de tres de sus vértices son A(a, −a), B(a, −b), C(b, −b), con $ab < 0$ y $a < b$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones con respecto a este cuadrilátero es (son) verdadera(s)?

I) Es un cuadrado.

II) Su área es $(a + b)^2$ unidades cuadradas.

III) Su centro es el punto $\left(\frac{a + b}{2}, \frac{-a - b}{2}\right)$

Solución:
Como $ab < 0$ y $a < b$, se deduce que $a < 0$ y $b > 0$, luego $-a > 0$ y $-b < 0$, por lo tanto los vértices se ubican tal como se ilustra en la siguiente figura:



Observa que los lados del cuadrilátero miden $b - a$, lo cual se puede visualizar por simple inspección o bien por la fórmula de distancia entre dos puntos.
Como todos los lados son congruentes y los ángulos interiores son rectos (por ser los lados paralelos a los ejes), se tiene que el cuadrilátero es un cuadrado, por lo tanto I es correcta.
Como cada lado mide $b - a$ unidades, el área del cuadrado es $(b - a)^2$, luego II es falsa.
Ahora, por ser un cuadrado, el centro de la figura se ubica en el punto medio de una diagonal, entonces si ocupamos la fórmula del punto medio para el trazo A(a, – a) y C(b, – b), obtenemos $\left(\frac{a + b}{2}, \frac{-a - b}{2}\right)$, luego III es verdadera. Conclusión, solo I y III son verdaderas.

3. Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} px - 3y = 6 \\ x + 2y = -5 \end{array}\right|$, ¿para qué valor de **p** el sistema no tiene soluciones?

Solución:
Recordemos que para que un sistema del tipo $\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right|$ no tenga soluciones, debe ocurrir que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, en este caso, entonces debe ocurrir que $\frac{p}{1} = \frac{-3}{2} \neq \frac{6}{-5}$, observa que $\frac{-3}{2} \neq \frac{6}{-5}$, por lo tanto solo trabajamos con la proporción $\frac{p}{1} = \frac{-3}{2}$, de donde se obtiene que $p = -\frac{3}{2}$.

4. Sea la recta L de ecuación $mx + ny = 0$. Si $mn \neq 0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

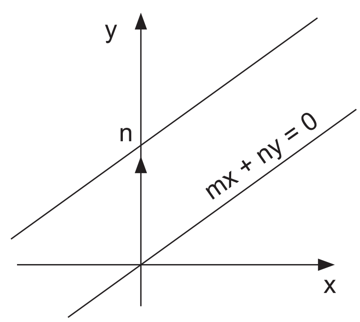
I) La recta $mx + ny + p = 0$, se puede obtener a partir de L por medio de una traslación.
II) Si L se traslada en la dirección (0, n), se obtiene la recta de ecuación $mx + ny - n = 0$.
III) Si L se rota en torno al origen en 90° se obtiene la recta $nx - my = 0$.

Solución:

En I, al trasladar una recta se obtiene una recta paralela a ella, por lo tanto basta con comprobar que las rectas son paralelas.

Recordemos que la pendiente m de la recta $ax + by + c = 0$ es $m = -\frac{a}{b}$, entonces en el caso de la recta de ecuación $mx + ny = 0$, la pendiente es $-\frac{m}{n}$ y en la recta de ecuación $mx + ny + p = 0$, obtenemos la misma pendiente; como las pendientes son iguales, entonces las rectas son paralelas, luego I es verdadera.

Para II, la recta dada tiene como ecuación $mx + ny = 0$, esta es una recta que pasa por el origen, si se traslada en la dirección (0,n) se obtiene una recta paralela a ella y con coeficiente de posición "n":



La pendiente de $mx + ny = 0$, sabemos que es $-\frac{m}{n}$ y su coeficiente de posición es "n", utilizando la ecuación principal de la recta $y = mx + n$, obtenemos que la ecuación de recta es $y = -\frac{m}{n}x + n$. Desarrollándola, obtenemos $mx + ny - n^2 = 0$, luego II es falsa.

Para III, como L es una recta que pasa por el origen, al girarla en 90° con respecto al origen se obtiene una recta que también pasa por el origen y es perpendicular a la primera.

Como $nx - my = 0$ es una recta que pasa por el origen, basta con comprobar que es perpendicular con L.

Por otro lado, la pendiente de $mx + ny = 0$ es $-\frac{m}{n}$ y la pendiente de $nx - my = 0$ es $\frac{n}{m}$,

como $-\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = -1$, entonces las rectas son perpendiculares, luego III es verdadera.

Respuesta, solo I y III son verdaderas.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. Sean los puntos: A(–3, 2) y B(1, 4), ¿cuál es la pendiente de la recta que pasa por estos puntos?

A) $\frac{1}{2}$

B) 2

C) –2

D) $-\frac{1}{2}$

E) 0

2. ¿Cuál es la pendiente de la recta de ecuación $2x - 3y - 5 = 0$?

A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{3}{2}$

C) $-\frac{3}{2}$

D) $\frac{2}{5}$

E) 2

3. ¿Cuál(es) de los siguientes puntos pertenece(n) a la recta de ecuación $3x - y - 4 = 0$?

I) (−1, −7)

II) (2, 2)

III) (4, 8)

A) Solo I

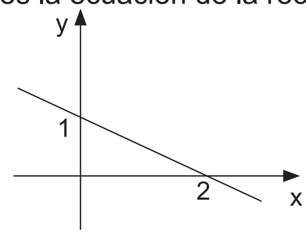
B) Solo I y II

C) Solo II y III

D) Solo I y III

E) I, II y III

4. ¿Cuál es la ecuación de la recta de la figura?



A) $x - 2y + 1 = 0$

B) $x + 2y - 1 = 0$

C) $x - 2y + 2 = 0$

D) $2x + y - 2 = 0$

E) $x + 2y - 2 = 0$

5. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a una ecuación de una recta paralela a la recta de ecuación $3x - 2y - 1 = 0$?

A) $6x + 4y - 1 = 0$

B) $2x - 3y - 2 = 0$

C) $2x + 3y - 1 = 0$

D) $6x - 4y - 5 = 0$

E) $x - 2y - 3 = 0$

6. Si el punto $(k + 1, k - 3)$ pertenece a la recta de ecuación $3x - 2y + 4 = 0$, entonces k =

A) –13

B) –1

C) 1

D) 3

E) 7

7. La intersección de las rectas de ecuaciones $y = 3x - 2$; $4x - y = 4$ es el punto:

A) (4, 2)
B) (2, 4)
C) (1, 1)
D) (0, –2)
E) (–1, –5)

8. Con respecto a la recta de ecuación:
$3x - 2y - 6 = 0$, se afirma que:

I) Corta al eje x en (0, 2).

II) Corta al eje y en (–3, 0).

III) Su pendiente es $\frac{3}{2}$.

¿Cuál(es) de las afirmaciones anteriores es (son) verdadera(s)?

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) Ninguna de ellas.

9. El punto medio del segmento AB, con A(–1, 5) y B(3, 7) pertenece a la recta de ecuación:

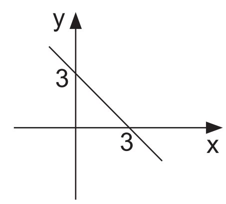
A) $2x + y = 0$
B) $2x - y = 0$
C) $x - 2y = 0$
D) $6x + y = 0$
E) $3x - y + 3 = 0$

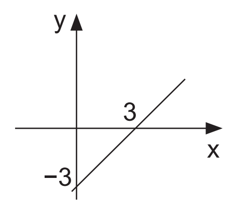
10. Se puede determinar el valor de "k" sabiendo que:

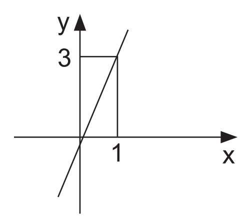
(1) La distancia entre los puntos (k+1,k) y (–1,5) es 5 unidades.
(2) El punto (k+1,k) está en la recta de ecuación $5x - 3y - 9 = 0$.

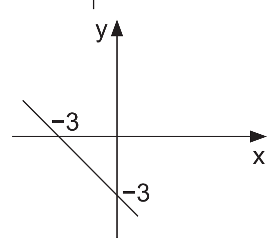
A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

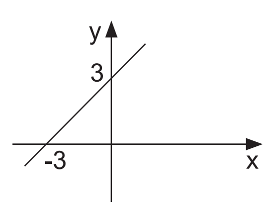
11. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor al de la recta de ecuación $x - y - 3 = 0$?

A)


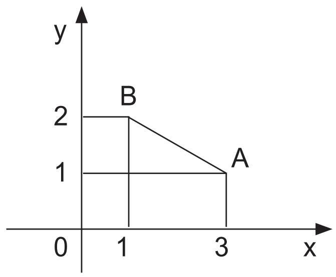
B)


C)


D)


E)


12. ¿En qué punto la recta AB de la figura intercepta al eje y?



A) $(0,5)$

B) $\left(0, \frac{5}{2}\right)$

C) $(0,3)$

D) $(3,0)$

E) $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

13. ¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene pendiente -2 y pasa por el punto $(2, 1)$?

A) $2x + y + 5 = 0$
B) $2x + y - 5 = 0$
C) $2x + y + 4 = 0$
D) $2x + y - 4 = 0$
E) $2x + y + 3 = 0$

14. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, 2)$ y es paralela a la recta de ecuación: $3x - y + 1 = 0$?

A) $3x - y + 8 = 0$
B) $3x - y - 8 = 0$
C) $x + 3y - 4 = 0$
D) $x + 3y + 4 = 0$
E) $3x + y + 4 = 0$

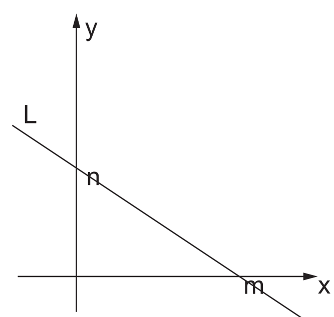
15. El área del triángulo delimitado por la recta de ecuación $x - 3y - 6 = 0$ y los ejes coordenados medida en unidades cuadradas es:

A) 6
B) 12
C) 18
D) 20
E) 30

16. ¿Cuánto debe valer "t" para que los puntos $P(2, 1)$; $Q(-2, 1)$ y $R(0, t)$ sean los vértices de un triángulo isósceles de base $\overline{PQ}$?

A) 2
B) 4
C) -3
D) Para cualquier valor real.
E) Para cualquier valor real distinto de 1.

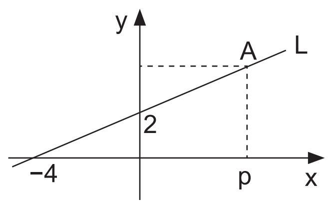
17. Se puede determinar la pendiente de la recta L de la figura, sabiendo que:



(1) $n = 1{,}5\ m$
(2) La recta L es perpendicular a la recta de ecuación $2x-3y+12=0$.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

18. El punto A de la figura, pertenece a la recta L. Si la abscisa de A es p, ¿cuál es su ordenada?



A) p

B) $\frac{p}{2}$

C) $\frac{p}{4}$

D) $\frac{p}{2} + 2$

E) $\frac{p}{2} + 4$

19. Si las rectas de ecuaciones $y = 5x - 1$; $2x + ky - 3 = 0$ son perpendiculares, entonces k =

A) $-\frac{2}{5}$

B) -10

C) $\frac{1}{10}$

D) $\frac{2}{5}$

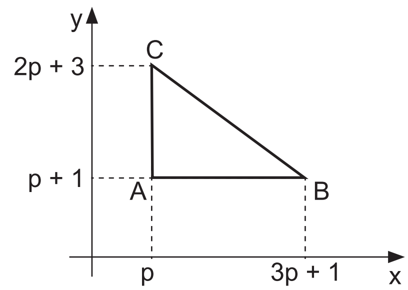
E) 10

20. Los puntos A(2, 1) y B(2, 4) son los vértices consecutivos de un cuadrado, ¿cuál(es) de los siguientes puntos podría(n) corresponder a alguno de los otros vértices?

I) (–2, 4)
II) (–1, 1)
III) (5, 1)

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) Solo II y III

21. Los lados del ΔABC de la figura son paralelos a los ejes coordenados.
Si el lado $\overline{BC}$ es paralelo a la recta de ecuación $2x + 3y = 5$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **NO** es verdadera con respecto a este triángulo?



A) Su área es 27 unidades cuadradas.
B) Uno de sus vértices es el (13,5).
C) Uno de sus lados mide $\sqrt{117}$ unidades.
D) Uno de sus catetos mide $\frac{2}{3}$ de lo que mide el otro cateto.
E) La altura desde A tiene pendiente $\frac{2}{3}$.

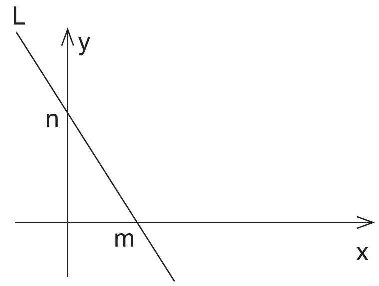
22. Con respecto a la recta de ecuación $2x - y - 3 = 0$, se afirma que:

I) Pasa por el punto (4,5).
II) Intercepta a uno de los ejes en (−3,0).
III) Es perpendicular a la recta de ecuación $x + 2y - 6 = 0$.

¿Cuál(es) de las afirmaciones anteriores es (son) verdadera(s)?

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

23. Una posible ecuación para la recta que pasa por el origen del sistema cartesiano y es paralela a L es:



A) $mx + ny = 0$

B) $mx - ny = 0$

C) $nx - my = 0$

D) $nx + my = 0$

E) $nx + my - mn = 0$

24. ¿Cuál es la ordenada de un punto de abscisa 2 que pertenece a la recta de la figura?

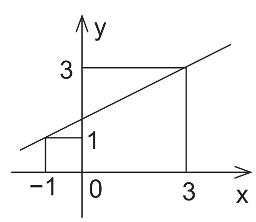
A) -1

B) 1

C) $1,2$

D) $2,5$

E) $2,\overline{6}$



25. Dos rectas son perpendiculares y se interceptan en el punto $(-2, 3)$.
Si una de las rectas tiene como ecuación $y = -x + 1$, ¿cuál es la ecuación de la otra recta?

A) $y = x + 1$

B) $y = -x + 1$

C) $y = -x + 3$

D) $y = x + 5$

E) $y = x + 3$

26. Si la distancia entre los puntos $(2,3)$ y $(5, n - 3)$ es 5, ¿cuál(es) de los siguientes valores puede tomar **n**?

I) 2
II) 1
III) 10

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y III

D) Solo II y III

E) I, II y III

27. Dos vértices consecutivos de un cuadrado son los puntos: $(-1,3)$ y $(2,5)$, ¿cuál es el área de este cuadrado, en unidades cuadradas?

A) 3

B) 5

C) 13

D) 65

E) 73

28. Sea ABC un triángulo cuyos vértices son $A(2, 3)$, $B(5, 3)$ y $C(0, m)$.
Si el área de ABC es 6 unidades cuadradas, ¿cuál de los siguientes valores podría corresponder a m?

I) 4
II) -1
III) 7

A) Solo I

B) Solo III

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y III

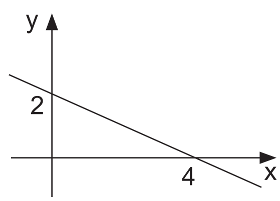
29. Sean los puntos A(3,1), B(5,7) y C(x,y), se puede determinar que A, B y C están sobre una misma línea recta, sabiendo que:

(1) La pendiente de $\overline{BC}$ es 3.
(2) AB + BC = AC

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

30. En la figura se muestra la gráfica de la recta de ecuación px + qy = 2, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

A) p = 2q
B) q = 2p
C) q + 2p = 0
D) p + q = 3
E) q – p = 2



31. Sea L la recta que pasa por los puntos A(p,q) y B(q,p), con p ≠ q ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La recta L tiene pendiente −1.
II) Una posible ecuación para L es x + y = p + q.
III) L forma con los ejes coordenados un triángulo isósceles.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas.

32. Sea el cuadrilátero ABCD cuyos vértices son A(a,0), B(0,b), C(−b,0) y D(0,−a) con a y b reales positivos.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

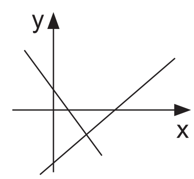
I) Si a ≠ b, entonces el cuadrilátero es un trapecio isósceles.
II) Si a = b, entonces el cuadrilátero es un cuadrado.
III) El doble del área del cuadrilátero es $(a + b)^2$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

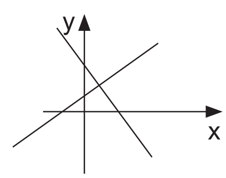
33. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor al sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{array}\right| ?$$

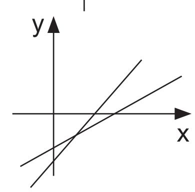
A)



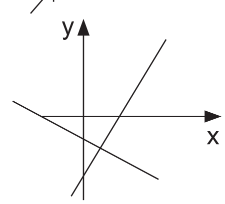
B)



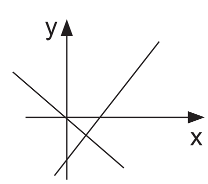
C)



D)



E)



34. Los puntos (−4,0); (2,0) y (0,3) son los vértices de un paralelogramo.
¿Cuál(es) de los siguientes puntos puede ser el cuarto vértice?

I) (6,3)
II) (0,−3)
III) (−2,−3)

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) Solo II y III

35. Se sabe que la recta L_1 intersecta al eje x en el punto (a,0) y la recta L_2 intersecta al eje y en el punto (0,b). Se puede determinar que L_1 y L_2 se intersectan en el primer cuadrante, sabiendo que:

(1) $ab > 0$
(2) Las pendientes de L_1 y L_2 son positivas.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

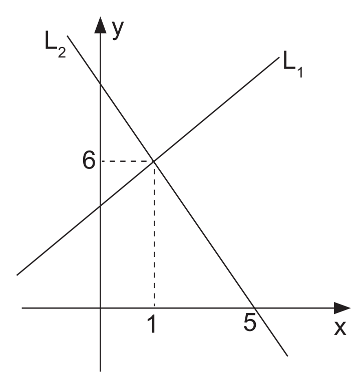
36. Los puntos A(-4,6) y B(4,12) son los extremos de un diámetro de una circunferencia.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El centro de la circunferencia está en el eje de las ordenadas.
II) El radio de la circunferencia mide 5 unidades.
III) El punto (−7,2) está en la circunferencia.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

37. En la figura, las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares.
¿En qué punto la recta L_1 intersecta al eje y?

A) (0,7)
B) $(0, \frac{16}{3})$
C) (0,9)
D) (0,12)
E) $(0, \frac{15}{2})$



38. Sean las rectas de ecuaciones $3x + 2y = 12$; $x = p$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

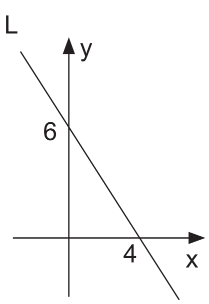
I) Si $p > 4$, las rectas se intersectan en el cuarto cuadrante.

II) Si $0 < p < 4$, las rectas se cortan en el primer cuadrante.

III) Si $p < 0$, las rectas se cortan en el segundo cuadrante.

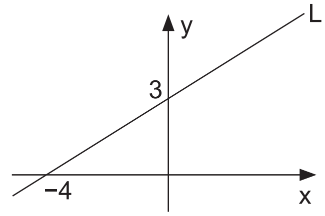
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

39. La recta L de la figura, se gira en 90° en sentido antihorario con respecto al punto (0, 6), entonces una ecuación posible de la recta resultante es:



A) $2x + 3y + 18 = 0$
B) $2x - 3y + 12 = 0$
C) $2x - 3y + 18 = 0$
D) $3x + 2y - 18 = 0$
E) $3x - 2y + 18 = 0$

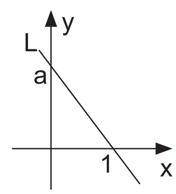
40. La recta L de la figura, se gira en 180° en sentido antihorario, con respecto al origen del sistema cartesiano, entonces una ecuación posible de la recta resultante es:



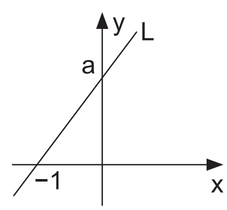
A) $3x - 4y + 12 = 0$
B) $-3x + 4y + 12 = 0$
C) $-4x + 3y + 12 = 0$
D) $4x + 3y + 12 = 0$
E) $3x + 4y + 12 = 0$

41. ¿Cuál de los siguientes gráficos podría representar a la recta de ecuación $y = -ax + a$?

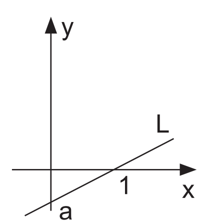
I)



II)

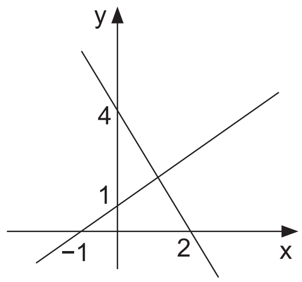


III)



A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

42. Con respecto a las rectas cuyo gráfico en el sistema cartesiano se muestra a continuación, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) Una de las rectas tiene pendiente −2.

II) Las rectas son perpendiculares.

III) Se intersectan en el punto (1,2).

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

43. Con respecto a la recta de ecuación $(a + 1)x + (a - 1)y - (a^2 - 1) = 0$, con $a^2 \neq 1$ se afirma que:

I) Intersecta al eje x en el punto $(a - 1,0)$.

II) Intersecta al eje y en el punto $(0,a + 1)$.

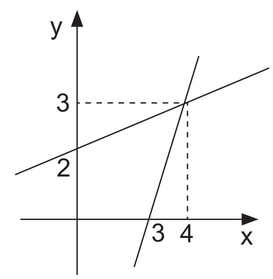
III) Si $a \in]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$ la pendiente es positiva.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

44. Sean las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones L_1: $px - 3y = 6$; L_2: $2x + 5y = r$
Los valores respectivos de p y r para que las rectas se corten en el punto $(1, -1)$ son:

A) 1 y –1
B) –1 y 1
C) 3 y –3
D) –3 y –3
E) 3 y 1

45. ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones, está representado por la gráfica que se muestra a continuación?



A) $3x - y = 9$; $4x - y = 2$
B) $3x - y = -9$; $4x - y = -2$
C) $3x - y = 9$; $x - 4y = -8$
D) $3x + y = 9$; $4x - y = 8$
E) $4x - y = 13$; $4x - y = -2$

46. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{l} px + 4y = 12 \\ 3x + 8y = q \end{array}\right|$, los valores respectivos que deben tomar p y q para que el sistema tenga infinitas soluciones son respectivamente:

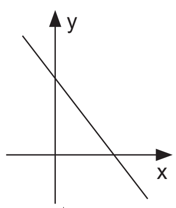
A) $\frac{1}{2}$ y 12
B) $\frac{1}{3}$ y 24
C) $\frac{3}{2}$ y 24
D) $\frac{2}{3}$ y 18
E) $\frac{1}{2}$ y 18

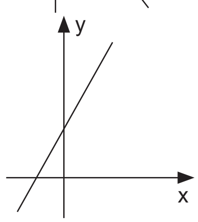
47. Sea el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x + ay = 1 \\ ax + y = b \end{array}\right|$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

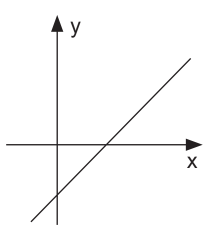
I) Si a = 0, el sistema tiene una única solución.
II) Si a = b = –1, el sistema tiene infinitas soluciones.
III) Si $a^2 \neq 1$, el sistema tiene una única solución.

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

48. ¿Cuál(es) de los siguientes gráficos podría(n) corresponder al de la recta de ecuación ax + y = c, si ac > 0?

I)


II)


III)


A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) Solo II y III

49. Sean las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones, L_1: ax + y = 2a ; L_2: x – y = 1 – a, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si a ≠ –1, las rectas se intersectan en el punto (1,a).
II) Si a = 1, las rectas son perpendiculares.
III) Si a = –1, las rectas son paralelas no coincidentes.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

50. Sean los puntos A(p,q) y B(s,t) dos puntos en el plano cartesiano y m es la pendiente de la recta que pasa por ambos. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si p ≠ s y q = t, entonces m = 0.
II) Si p > s y q < t, entonces m < 0.
III) Si (t − q)(s − p) > 0, entonces m > 0.

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

RESPUESTAS CAPÍTULO 13									
1. A	**2.** A	**3.** E	**4.** E	**5.** D	**6.** A	**7.** B	**8.** C	**9.** E	**10.** B
11. B	**12.** B	**13.** B	**14.** A	**15.** A	**16.** E	**17.** D	**18.** D	**19.** E	**20.** E
21. E	**22.** C	**23.** D	**24.** D	**25.** D	**26.** C	**27.** C	**28.** D	**29.** D	**30.** B
31. D	**32.** E	**33.** D	**34.** D	**35.** E	**36.** C	**37.** B	**38.** E	**39.** C	**40.** B
41. D	**42.** D	**43.** C	**44.** C	**45.** C	**46.** C	**47.** E	**48.** D	**49.** C	**50.** E

MINIENSAYO

EJE GEOMETRÍA

Tiempo: 45 minutos

1. Si el punto (2,4) se traslada en la dirección (a,b) queda en el punto (3,3), entonces $a + b =$

A) -3
B) -2
C) 0
D) 2
E) 3

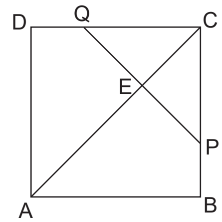
2. El punto $(-b,a)$ se traslada en la dirección (a, b) quedando en el punto (3,5), entonces el punto inicial es el:

A) (4,1)
B) (1,4)
C) $(-1,4)$
D) $(-1,-4)$
E) Falta información para determinarlo.

3. Al punto (a,b) se le aplicó una traslación paralela al eje x en dos unidades a la izquierda y después se reflejó en torno al eje y quedando en el punto $(5,-7)$, ¿cuál era el punto inicial?

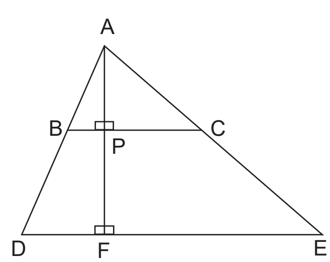
A) $(-5,-5)$
B) (7,7)
C) $(-7,-7)$
D) (3,7)
E) $(-3,-7)$

4. ABCD es un cuadrado, P y Q son puntos sobre los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, tales que PB = QD. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones **NO** es siempre verdadera?



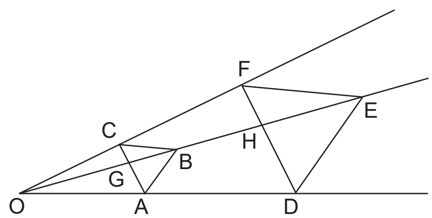
A) AQ = AP
B) QP = 2EC
C) DP = BQ
D) $\measuredangle PQD \cong \measuredangle QPB$
E) AQ = AE

5. En la figura, B y C pertenecen respectivamente a los lados $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$ del triángulo ABC. Si $\frac{AB}{BD} = \frac{2}{3}$, ¿cuál es la razón entre las áreas de los triángulos ABC y ADE?



A) 2 : 3
B) 2 : 5
C) 4 : 5
D) 4 : 9
E) 4 : 25

6. En la figura, al triángulo ABC se le ha aplicado una homotecia con centro en O, obteniéndose el triángulo DEF. Si las intersecciones de las rectas AC y DF con OE son los puntos G y H respectivamente y OA : AD = 2 : 3, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) OG : OH = 2 : 5

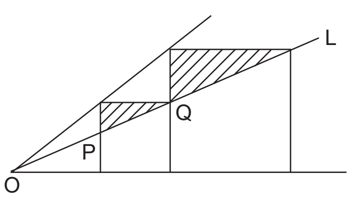
B) La razón de homotecia es 2,5.

C) Si AB = 4 cm, entonces DE = 10.

D) El área del $\triangle$ABC es un 16% del área del $\triangle$DEF.

E) Si $\sphericalangle$CAB = 20°, entonces $\sphericalangle$FDE = 50°.

7. En la figura, se tienen dos cuadrados homotéticos, con centro de la homotecia "O". L es una recta que pasa por O y por el vértice Q de uno de los cuadrados e intercepta a uno de los lados del mismo cuadrado en P. Se puede determinar la razón (en cualquier orden) entre las áreas de los triángulos sombreados, sabiendo:



(1) La razón en que P divide al trazo OQ.

(2) La razón entre los perímetros de los cuadrados.

A) (1) por sí sola

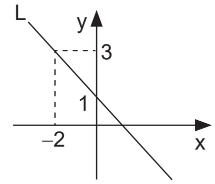
B) (2) por sí sola

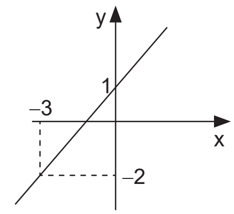
C) Ambas juntas, (1) y (2)

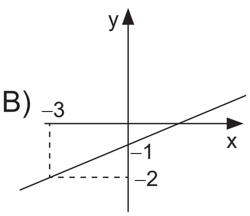
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

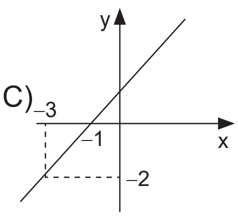
E) Se requiere información adicional

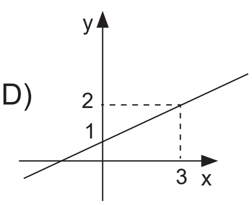
8. La recta L de la figura, se gira en 90° en torno al origen, ¿cuál es gráfico de la línea resultante?

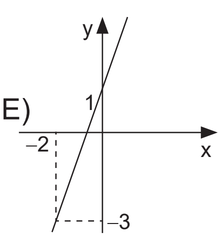


A)


B)


C)


D)


E)


9. ¿Cuánto debe valer k para que las rectas de ecuaciones $(k-1)x-2y=3$; $kx+3y=-1$ sean perpendiculares?

A) 2

B) 5

C) $\frac{3}{5}$

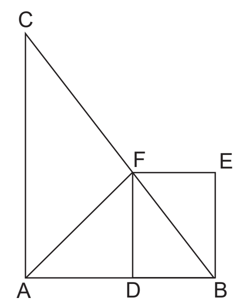
D) $\frac{5}{3}$

E) -2 o 3

10. La recta L de ecuación $(k+1)x+(k-1)y+12=0$ pasa por el punto (5,–7), ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La pendiente de L es negativa.
B) k es un número entero positivo.
C) La recta L intercepta al eje y en el semieje negativo.
D) La recta L pasa por el punto (16,–20).
E) La recta L pasa por el primer cuadrante.

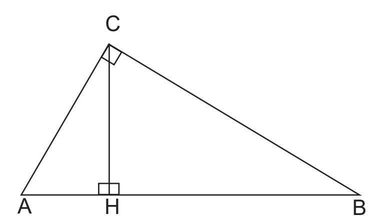
11. En la figura el triángulo CAB es rectángulo en A, $\overline{AF}$ es una altura de este triángulo y FDBE es un cuadrilátero de ángulos rectos. Si F y D pertenecen a $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, se puede determinar que este cuadrilátero es un cuadrado, sabiendo que:



(1) CF = FB
(2) AC = 2EB

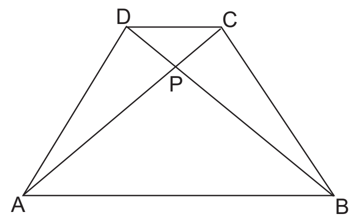
A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

12. En la figura, H divide interiormente a $\overline{AB}$ en la razón 4 : 5 y $\overline{AC}$ mide 12 cm, ¿cuál es el área del ABC?



A) $18\sqrt{5}$ cm^2
B) $36\sqrt{5}$ cm^2
C) $54\sqrt{5}$ cm^2
D) $72\sqrt{5}$ cm^2
E) $144\sqrt{5}$ cm^2

13. ABCD es un trapecio cuyas diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son perpendiculares y se intersectan en el punto P. Si AB = 15 cm, CD = 5 cm, PC = 3 cm, entonces PB mide:



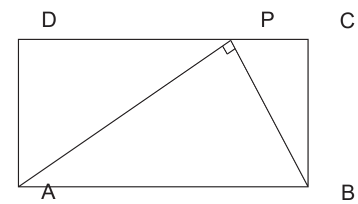
A) 9 cm
B) 12 cm
C) 16 cm
D) 17 cm
E) $3\sqrt{21}$ cm

14. Los vértices del triángulo ABC tienen coordenadas A(–3,–1), B(–1,–1) y C(–1,4), si a este triángulo se le aplica una homotecia con centro en (2,1) y razón de homotecia –2, ¿cuál(es) de los siguientes puntos corresponde(n) a los vértices del triángulo homotético?

I) (12,5)
II) (8,5)
III) (8,–5)

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

15. En la figura, ABCD es un rectángulo y P es un punto del lado $\overline{CD}$, de modo que P divide interiormente a $\overline{DC}$ en la razón 4 : 1. Si $\overline{BC}$ mide 12 cm, entonces el perímetro del rectángulo es:



A) 42 cm
B) 84 cm
C) 54 cm
D) $24 + 10\sqrt{3}$ cm
E) $30 + 18\sqrt{5}$ cm

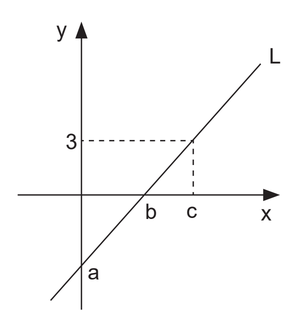
16. Sea el punto P(p+1, p–3), si este punto pertenece a una circunferencia de centro O(–8,–9) y radio 15, entonces el o los posibles valores de p es (son):

I) –18
II) 3
III) 9

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) Ninguno de ellos.

17. La ecuación de la recta L de la figura es $3x - 2y - 6 = 0$, entonces $a + b - c =$

A) –5
B) –3
C) –1
D) 1
E) 2



18. Sean las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones, L_1: $ax + y = 2a$; L_2: $x - y = 1 - a$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si $a \neq -1$, las rectas se intersectan en el punto (1,a).
II) Si $a = 1$, las rectas son perpendiculares.
III) Si $a = -1$, las rectas son paralelas no coincidentes.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

19. Sea el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}(a+1)x + 2ay = 16 \\ (3a+1)x + 3(2a-1)y = 40\end{array}\right|$$

, ¿para qué valor de "a" este sistema tiene infinitas soluciones?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 5
E) No existe tal valor.

20. ABCD es un cuadrado, donde las coordenadas de los vértices consecutivos A y B son respectivamente A(p,–p) y B(4p,–p), con $p > 0$. Se puede determinar los demás vértices, en función de **p**, sabiendo que:

(1) Están en el primer cuadrante.
(2) Una de las diagonales del cuadrado tiene pendiente 1.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

21. Sean los vectores $\vec{a} = (p,q)$ y $\vec{b} = (-2p,-2q)$ con $pq \neq 0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

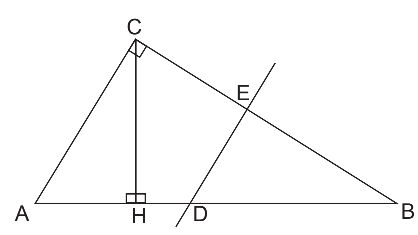
I) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen la misma dirección.
II) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}|$
III) $\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{b} - 3\vec{a}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

22. Sean los vectores: $\vec{a} = (4,-1)$, $\vec{b} = (2,5)$ y $\vec{c} = (-1,3)$, ¿cuánto debe ser el ponderador λ para que se cumpla que $\vec{b} + \lambda\vec{c} = \lambda\vec{b} - \vec{a}$?

A) –2
B) –1
C) 2
D) 4
E) No existe tal valor.

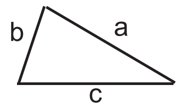
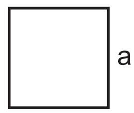
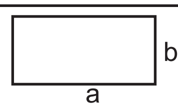
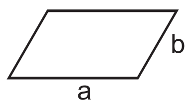
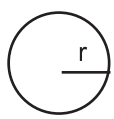
23. En la figura, E y D son puntos de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Si $\overleftrightarrow{ED}$ es la simetral de $\overline{BC}$, AC = 60 cm y BC = 80 cm, ¿cuál es el perímetro del cuadrilátero CHDE?



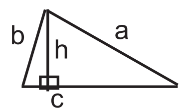
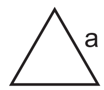
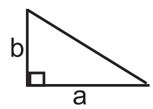
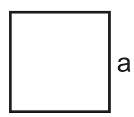
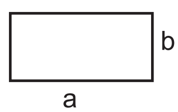
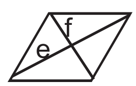
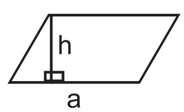
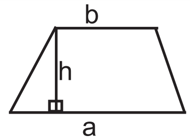
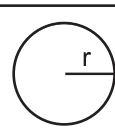
A) 120 cm
B) 132 cm
C) 142 cm
D) 152 cm
E) 936 cm

ANEXOS

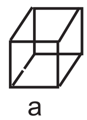
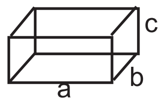
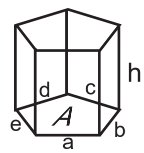
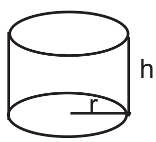
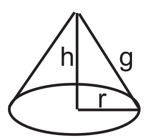
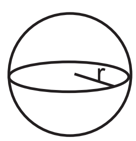
Anexo 1: Perímetro de figuras planas

NOMBRE	FIGURA	PERÍMETRO
TRIÁNGULO CUALQUIERA		$a + b + c$
CUADRADO		$4a$
RECTÁNGULO		$2(a + b)$
ROMBOIDE		$2(a + b)$
CIRCUNFERENCIA		$2 \pi r$

Anexo 2: Área de figuras planas

NOMBRE	FIGURA	ÁREA
TRIÁNGULO CUALQUIERA		$\frac{ch}{2}$
TRIÁNGULO EQUILÁTERO		$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
TRIÁNGULO RECTÁNGULO		$\frac{ab}{2}$
CUADRADO		a^2
RECTÁNGULO		ab
ROMBO		$\frac{ef}{2}$
ROMBOIDE		ah
TRAPECIO		$\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot h$
CÍRCULO		πr^2

Anexo 3: Área y volumen de cuerpos geométricos

NOMBRE	CUERPO	ÁREA	VOLUMEN
CUBO (hexaedro regular)		$6a^2$	a^3
ORTOEDRO (paralelepípedo recto rectangular)		2ab+2bc+2ac	abc
PRISMA RECTO (en la fig. un caso especial: prisma de base pentagonal)		ah+bh+ch+dh+eh + 2A = Ph+2A (P= perímetro del polígono basal)	A h (A = área del polígono basal)
CILINDRO		$2\pi rh+2\pi r^2$	$\pi r^2 h$
CONO		$\pi rg+\pi r^2$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
ESFERA		$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

RESPUESTAS MINIENSAYO

RESPUESTAS MINIENSAYO									
1. C	**2.** C	**3.** E	**4.** E	**5.** E	**6.** E	**7.** D	**8.** C	**9.** E	**10.** E
11. D	**12.** B	**13.** B	**14.** E	**15.** B	**16.** C	**17.** A	**18.** C	**19.** C	**20.** A
21. E	**22.** C	**23.** B							

CLASES CON CONTENIDOS Y EJEMPLOS

Si quieres aprender más, asiste a una clase virtual con el contenido de cada capítulo siguiendo los links o leyendo con tu celular los códigos QR que aquí te presentamos.

Estos códigos corresponden al texto original (Cid, 2019) por lo que los números de las páginas no coinciden con los presentados en este documento.

EJE GEOMETRÍA	
TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS	GEOMETRÍA DE PROPORCIÓN
https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-11/	https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-13/
VECTORES	GEOMETRÍA ANALÍTICA
https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-15/	https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-14/

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

UCE

UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN

Repaso contenidos

MATEMÁTICA
EJE GEOMETRÍA

IVº medio